J.E.N. 335
Sp ISSN 0081-3397

Ecuaciones integrales del transporte de neutrones. Ecuaciones adjuntas e importancia neutrónica.

por
G. Velarde

JUNTA DE ENERGIA NUCLEAR

MADRID, 1976

Toda correspondencia en relación con este trabajo debe dirigirse al Servicio de Documentación Biblioteca y Publicaciones, Junta de Energía Nuclear, Ciudad Universitaria, Madrid-3, ESPAÑA.

Las solicitudes de ejemplares deben dirigirse a este mismo Servicio.

Los descriptores se han seleccionado del Thesauro del INIS para describir las materias que contiene este informe con vistas a su recuperación. Para más detalles consultese el informe IAEA-INIS-12 (INIS: Manual de Indización) y IAEA-INIS-13 (INIS: Thesauro) publicado por el Organismo Internacional de Energía Atómica.

Se autoriza la reproducción de los resúmenes analíticos que aparecen en esta publicación.

Este trabajo se ha recibido para su impresión en Febrero de 1.976.

Depósito legal nº M-14593-1976 I.S.B.N. 84-500-7554-8

JEN 335

ECUACIONES INTEGRODIFERENCIALES E INTEGRALES NORMALES Y ADJUNTAS DEL TRANSPORTE DE NEUTRONES

PARTE II

Guillermo Velarde

INDICE

IV.- ECUACION INTEGRAL DEL TRANSPORTE DE NEUTRONES.

1.- METODOS DE OBTENCION.

En el cap. III, partiendo de las hipótesis simplificativas del §3.1, se obtuvieron en forma desarrollada, las ecuaciones integrodiferenciales de Boltzmann, y formalmente en forma operacional, las ecuaciones integrales de valores propios k y λ(94,III y 110,III). Partiendo de las mismas hipótesis, o mejor aún, partiendo de las ecuaciones integrodiferenciales anteriores, pueden obtenerse las ecuaciones integrales correspondientes, y en particular, los operadores integrales K y $-(L+R_t)^{-1}$.

Es conveniente poner las ecuaciones (26,III y 27,III) o las (37,III y 38, III) en una forma más apropiada para la obtención de la ecuación integral

$$\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\phi = -\vec{\Omega}\cdot\nabla\phi - \sum_t \phi + Q_e = (L+R_t)\,\phi + Q_e \qquad (1)$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}P_d = -\frac{1}{4\pi}\lambda_d P_d + Q_d \qquad (2)$$

siendo Q_x la densidad de fuente neutrónica debida al proceso x de emisión de neutrones secundarios, x = s, p, d, f, sin subíndice para la fuente independiente, y con los subíndices e y q para los casos indicados a continuación,

$$Q_e = Q_s + Q_q,\quad Q_q = Q_p + \frac{1}{4\pi}\sum_d \lambda_d P_d + Q,\quad Q_f = Q_p + \sum_d Q_d,\quad Q_t = Q_s + Q_f + Q \quad (3)$$

$$Q_s(\vec{r},v\vec{\Omega},t) = \int \sum_s(\vec{r},v'\vec{\Omega}' \to v\vec{\Omega},t)\;\phi(\vec{r},v'\vec{\Omega}',t)\;dv'd\Omega' = S\,\phi \qquad (4)$$

$$Q_p(\vec{r},v\vec{\Omega},t) = \frac{1}{4\pi}\,Q_p(\vec{r},v,t) = \frac{1}{4\pi}\,\chi_p(v)\;(1-\beta)\int \nu(v')\;\sum_f(\vec{r},v',t)\;\phi(\vec{r},v'\vec{\Omega}',t)\;\cdot$$

$$\cdot\; dv'\;d\Omega' = F_p\,\phi \qquad (5)$$

$$Q_d(\vec{r},v\vec{\Omega},t) = \frac{1}{4\pi}\,Q_d(\vec{r},v,t) = \frac{1}{4\pi}\,\chi_d(v)\;\beta_d\int \nu(v')\;\sum_f(\vec{r},v',t)\;\phi(\vec{r},v'\vec{\Omega}',t)\;\cdot$$

$$\cdot\; dv'\;d\Omega' = F_d\,\phi \qquad (6)$$

Prescindiendo de que Q_e sea funcional de ϕ, P_d, la (1) es una ecuación en derivadas parciales de primer orden en $\vec{r}$, t, cuya solución, al depender de Q_e, permitirá obtener ϕ en forma de una ecuación integral dependiente de P_d. Por otro lado, como Q_d es una funcional de ϕ, la (2) es una ecuación en derivadas parciales de primer orden en t, cuya solución dará P_d como funcional de ϕ.

2.- METODO DE LAS CARACTERISTICAS.

Como la ecuación (1) es formalmente una ecuación en derivadas parciales de primer orden con cuatro variables independientes $\vec{r}, t$, puede resolverse empleando el método de las curvas características[1].

Tomando la distancia R en la dirección $-\vec{\Omega}$, fig. 1, resulta

$$\frac{d\phi}{dR} = \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{dt}{dR} + (\nabla\phi) \cdot \frac{d\vec{r}}{dR} \qquad (7)$$

Pasando el primer miembro de (1) al segundo miembro, y comparando los dos términos en derivadas parciales con (7), se obtienen las cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\frac{dt}{dR} = -\frac{1}{v} \Longrightarrow t = t' - \frac{R}{v} \qquad (8)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dR} = -\vec{\Omega} \Longrightarrow \vec{r} = \vec{r}\,' - R\,\vec{\Omega} \qquad (9)$$

cuyas soluciones dan lugar a la familia de curvas características anterior, dependiente de cuatro parámetros $1/v$, $\vec{\Omega}$, y siendo $\vec{r}\,'$, t' las cuatro constantes de integración.

Para cada conjunto de valores de $v\vec{\Omega}$, hay una curva característica que pasa por el punto $\vec{r}\,', t'$, y el lugar geométrico de las curvas características es la superficie integral, solución de (1).

Sustituyendo (7 a 9) en (1), y suprimiendo las primas, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{d}{dR}\,\phi(\vec{r} - R\vec{\Omega},\ v\vec{\Omega},\ t - \frac{R}{v}) - \Sigma_t(\vec{r} - R\vec{\Omega},\ v,\ t - \frac{R}{v})\phi(\vec{r} - R\vec{\Omega},\ v\vec{\Omega},\ t - \frac{R}{v}) +$$

$$+ Q_e\,(\vec{r} - R\vec{\Omega},\ v\vec{\Omega},\ t - \frac{R}{v}) = 0 \qquad (10)$$

2.1.- ECUACION INTEGRAL DEL TRANSPORTE DE NEUTRONES, PARA LA DENSIDAD DE FLUJO NEUTRONICO.

Empleando el factor integrante e^{-s}, con

$$s(\vec{r} - R\vec{\Omega} \rightarrow \vec{r}, v,\ t - \frac{R}{v} \rightarrow t) = \int_0^R \Sigma_t(\vec{r} - R'\vec{\Omega},\ v,\ t - \frac{R'}{v})\,dR' \qquad (11)$$

---

(1) Courant, R. y Hilbert, D. - Methods of Mathematical Physics, vols. I y II - Interscience (1953 y 1962).

llamado espesor óptico entre $\vec{r}-R\vec{\Omega}$ en $t-\frac{R}{v}$ y $\vec{r}$ en t, cuyo significado físico se dará en el §6, resulta

$$\exp\left[-s(\vec{r}-R\vec{\Omega}\rightarrow\vec{r},v,t-\frac{R}{v}\rightarrow t)\right]\ \phi(\vec{r}-R\vec{\Omega},v\vec{\Omega},t-\frac{R}{v})-C+\int_0^R \exp\left[-s(\vec{r}-R'\vec{\Omega}\rightarrow\vec{r},v,t-\frac{R'}{v}\rightarrow t)\right]\ Q_e(\vec{r}-R'\vec{\Omega},v\vec{\Omega},t-\frac{R'}{v})\ dR' = 0 \qquad (12)$$

siendo C la constante de integración, la cual se obtiene haciendo R= 0, con lo cual $C=\phi(\vec{r},v\vec{\Omega},t)$. Tomando R sobre la superficie libre $R=R_s(\vec{r},\vec{\Omega})$, y despejando $\phi(\vec{r},v\vec{\Omega},t)$, se obtiene la integral general de (10)

$$\phi(\vec{r},v\vec{\Omega},t)=\exp\left[-s(\vec{r}-R_s\vec{\Omega}\rightarrow\vec{r},v,t-\frac{R_s}{v}\rightarrow t)\right]\ \phi(\vec{r}-R_s\vec{\Omega},v\vec{\Omega},t-\frac{R_s}{v})+\int_0^{R_s}\exp\left[-s(\vec{r}-R\vec{\Omega}\rightarrow\vec{r},v,t-\frac{R}{v}\rightarrow t\right]\ Q_e(\vec{r}-R\vec{\Omega},v\vec{\Omega},t-\frac{R}{v})\ dR \qquad (13)$$

con $0\leq R\leq R_s(\vec{r},\vec{\Omega})$.

Teniendo en cuenta la analogia entre las ecuaciones (2) y (10), resulta

$$P_d(\vec{r},v,t)=P_d(\vec{r},v,0)\ e^{-\lambda_d t}+\int_0^t e^{-\lambda_d(t-t')}\ Q_d(\vec{r},v,t')\ dt' \qquad (14)$$

Sustituyendo P_d en Q_e, y el resultado en (13), se obtiene una ecuación integral en ϕ, llamada del transporte de neutrones para la densidad del flujo neutrónico.

La ecuación (13) puede interpretarse de la siguiente manera. El flujo de neutrones de velocidad $v\vec{\Omega}$, que en el instante t hay en $\vec{r}$, es debido a dos contribuciones:

i) Los neutrones de velocidad $v\vec{\Omega}$ que en el instante $t-\frac{R_s}{v}$ estaban en el punto $\vec{r}-R_s\vec{\Omega}$ sobre la superficie libre, y que llegan en el instante t a $\vec{r}$ sin sufrir colisión.

ii) Los neutrones emitidos con velocidad $v\vec{\Omega}$ en el instante $t-\frac{R}{v}$ por las fuentes de dispersión, fisión, e independiente, situadas en $\vec{r}-R\vec{\Omega}$, siendo R un punto del segmento $0\leq R\leq R_s(\vec{r},\vec{\Omega})$, los cuales llegan en el instante t a $\vec{r}$ sin sufrir colisión.

2.2.- ECUACION INTEGRAL DEL TRANSPORTE DE NEUTRONES, PARA LA DENSIDAD DE FUENTE NEUTRONICA.

Se obtiene sustituyendo el flujo dado en (13) y P_d dado en (14), en la ecuación (3) de Q_e. Como la expresión obtenida es de notación laboriosa, solo se desarrollará para los casos de no considerar los neutrones retardados y de reactores críticos.

3.- METODO DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

Cuando:

i) La configuración del reactor es independiente del tiempo.

ii) Las densidades nucleares son independientes del tiempo, o sea
$N^i(\vec{r},t) = N^i(\vec{r}) \Longrightarrow \sum_x^i(\vec{r},v,t) = \sum_x^i(\vec{r},v)$.

al efectuar la transformada de Laplace de (1), análogamente a (98,III), resulta

$$-\vec{\Omega}\cdot\nabla\, \phi_\alpha - (\textstyle\sum_t + \frac{\alpha}{v})\, \phi_\alpha + \left[Q_{e\alpha} + \frac{1}{v}\, \phi(\vec{r},v\vec{\Omega},0)\right] = 0 \qquad (15)$$

Particularizando esta ecuación en el punto $\vec{r}-R\vec{\Omega}$, con $-\vec{\Omega}\cdot\nabla = \frac{d}{dR}$, se obtiene

$$\frac{d}{dR}\, \phi_\alpha(\vec{r} - R\vec{\Omega},v\vec{\Omega},\alpha) - \left[\textstyle\sum_t(\vec{r} - R\vec{\Omega},v) + \frac{\alpha}{v}\right] \phi_\alpha(\vec{r} - R\vec{\Omega},v\vec{\Omega},\alpha) + \left[Q_e\, (\vec{r} - R\vec{\Omega},v\vec{\Omega},\alpha) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{v}\, \phi(\vec{r} - R\vec{\Omega},v\vec{\Omega},0)\right] = 0 \qquad (16)$$

3.1.- ECUACION INTEGRAL DEL TRANSPORTE DE NEUTRONES, PARA LA DENSIDAD DEL FLUJO NEUTRONICO.

Al ser la ecuación anterior de igual forma que la (10), resulta

$$\phi_\alpha(\vec{r},v\vec{\Omega},\alpha) = \exp\left[-s(\vec{r} - R_s\vec{\Omega}\to\vec{r},v) - \int_0^{R_s} \frac{\alpha}{v}\, dR\right] \phi_\alpha(\vec{r} - R_s\vec{\Omega},v\vec{\Omega},\alpha) + \int_0^{R_s} \exp\left[(-s(\vec{r} - \right.$$
$$\left. - R\vec{\Omega}\to\vec{r},v) - \int_0^{R} \frac{\alpha}{v}\, dR'\right] \left[Q_{e\alpha}(\vec{r} - R\vec{\Omega},v\vec{\Omega},\alpha) + \frac{1}{v}\, \phi(\vec{r} - R\vec{\Omega},v\vec{\Omega},0)\right] dR \qquad (17)$$

cuya transformada inversa de Laplace, será

$$\phi(\vec{r},v\vec{\Omega},t) = \exp\left[-s(\vec{r} - R_s\vec{\Omega}\to\vec{r},v)\right] \int_0^{t} \phi(\vec{r} - R_s\vec{\Omega},v\vec{\Omega},t-t')\ \delta(t' - \frac{R_s}{v})\, dt' +$$
$$+ \int_0^{R_s} \left\{\exp\left[-s(\vec{r} - R\vec{\Omega}\to\vec{r},v)\right] \int_0^{t} \left[Q_e(\vec{r} - R\vec{\Omega},v\vec{\Omega},t-t') + \frac{1}{v}\, \phi(\vec{r} - R\vec{\Omega},v\vec{\Omega},0)\ \delta(t-t')\right]\cdot \right.$$
$$\left. \cdot\ \delta(t' - \frac{R}{v})\, dt' \right\} dR \qquad (18)$$

y evaluando las integrales temporales, resulta

$$\phi(\vec{r},v\vec{\Omega},t) = \exp\left[-s(\vec{r} - R_s\vec{\Omega}\to\vec{r},v)\right]\ \phi(\vec{r} - R_s\vec{\Omega},v\vec{\Omega},t - \frac{R_s}{v}) + \exp\left[-s(\vec{r} - vt\vec{\Omega}\to\vec{r},v)\right]\cdot$$

$$\cdot\ \phi(\vec{r}-vt\vec{\Omega},v\vec{\Omega},0) + \int_0^{\min(vt,R_s)} \exp\left[-s(\vec{r}-R\vec{\Omega}\rightarrow\vec{r},v)\right] Q_e(\vec{r}-R\vec{\Omega},v\vec{\Omega},t-\frac{R}{v})\, dR \qquad (19)$$

con $0 \leq R \leq \min(vt,R_s)$, y P_d obtenido en (14).

Sustituyendo P_d dado en (14) en Q_e, y el resultado en (19), se obtiene la ecuación integral del transporte de neutrones, para la densidad de flujo angular.

La ecuación (19) es análoga a la (13), salvo el segundo término que representa los neutrones de velocidad $v\vec{\Omega}$ que en el instante 0 estaban en el punto $\vec{r}-vt\vec{\Omega}$, los cuales llegan en el instante t a $\vec{r}$ sin sufrir colisión.

3.2.- ECUACION INTEGRAL DEL TRANSPORTE DE NEUTRONES, PARA LA DENSIDAD DE FUENTE NEUTRONICA.

Se obtiene sustituyendo el flujo dado en (19) y P_d dado en (14), en la ecuación (3) de Q_t. Este resultado solo se dará para los casos de no considerar los neutrones retardados, y de reactores críticos.

4.- APLICACION DE LOS METODOS ANTERIORES.

Existen diversos casos particulares de gran interés en la teoría de las colisiones múltiples y de las probabilidades de colisión, en los cuales la expresión de la densidad de fuente es más sencilla que la dada en (3 a 5).

4.1.-APLICACION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO.

Cuando el reactor es finito en la dirección considerada, empleando la condición de contorno (14,III) en la superficie libre

$$\phi(\vec{r}-R_s\vec{\Omega},v\vec{\Omega},t-\frac{R}{v}) = 0, \qquad R_s \epsilon\ S \qquad (20)$$

el primer término de (13 y 19) se anula.

Cuando el reactor se extiende al infinito en la dirección considerada, $R_s = \infty$, aplicando la condición del §3.2.2,III, el espesor óptico correspondiente será nulo, por lo que el primer término de (13 y 19) también se anula.

En ambos casos, se obtiene para la ecuación (13)

$$\phi(\vec{r},v\vec{\Omega},t) = \int_0^{R_s} \exp\left[-s(\vec{r}-R\vec{\Omega}\rightarrow\vec{r},v,t-\frac{R}{v}\rightarrow t)\right] Q_e(\vec{r}-R\vec{\Omega},v\vec{\Omega},t-\frac{R}{v})dR \qquad (21)$$

y para la (19)

$$\phi(\vec{r},v\vec{\Omega},t) = \exp\left[-s(\vec{r}-vt\vec{\Omega}\rightarrow\vec{r},v)\right] \phi(\vec{r}-vt\vec{\Omega},v\vec{\Omega},0) + \int_0^{\min(vt,R_s)} \exp\left[-s(\vec{r}-\right.$$

$$- R\vec{\Omega} \rightarrow \vec{r}, v) \Big] \; Q_e(\vec{r} - R\vec{\Omega}, v\vec{\Omega}, t - \frac{R}{v}) \; dR, \qquad (22)$$

4.2.- APLICACION DE LA DELTA DE DIRAC ANGULAR.

Haciendo $\vec{r}\,' = \vec{r} - R\vec{\Omega}$, y teniendo en cuenta que solamente los neutrones que salen de r' en la dirección $\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ pueden llegar al punto $\vec{r}$ sin sufrir colisión, la ecuación (21) puede transformarse con la $\delta(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \vec{\Omega})$definida en el espacio Ω, según

$$\phi(\vec{r}, v\vec{\Omega}, t) = \iint_0^{R_s} \exp\left[-s(\vec{r}\,' \rightarrow \vec{r}, v, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v} \rightarrow t)\right] Q_e(\vec{r}\,', v \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v}) \cdot$$

$$\cdot \delta(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \vec{\Omega}) \; d \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \; d(|\vec{r}-\vec{r}\,'|) \qquad (23)$$

Como $d\vec{r}\,' = |\vec{r}-\vec{r}\,'|^2 d(|\vec{r}-\vec{r}\,'|) \; d \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$, la ecuación (23) se transforma en una integral volumétrica,

$$\phi(\vec{r}, v\vec{\Omega}, t) = \int T(\vec{r}\,' \rightarrow \vec{r}, v, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v} \rightarrow t) \; Q_e(\vec{r}\,', v \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \; t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v}) \cdot$$

$$\cdot \; \delta(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \vec{\Omega}) \; d\vec{r}\,' \qquad (24)$$

en la cual

$$T(\vec{r}\,' \rightarrow \vec{r}, v, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v} \rightarrow t) \; \delta(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \vec{\Omega}) = \frac{\exp\left[-s(\vec{r}\,' \rightarrow \vec{r}, v, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v} \rightarrow t)\right]}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} \cdot$$

$$\cdot \; \delta(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \vec{\Omega}) \qquad (25)$$

cuyo significado físico se dará en el §6.

4.3.- APLICACION AL CASO DE DISPERSION ELASTICA Y FUENTES INDEPENDIENTES ISOTROPAS EN L.

En este caso, se tiene para las densidades de fuente

$$Q_s(\vec{r}, v\vec{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} Q_s(\vec{r}, v, t) = \frac{1}{4\pi} \int \Sigma_s(\vec{r}, v' \rightarrow v, t) \; \phi(\vec{r}, v', t) \; dv' =$$

$$= (S \; \phi) \; (\vec{r}, v, t) \qquad (26)$$

$$Q(\vec{r}, v\vec{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} Q(\vec{r}, v, t) \qquad (27)$$

luego

$$Q_e(\vec{r},v\vec{\Omega},t) = \frac{1}{4\pi} Q_e(\vec{r},v,t) \tag{28}$$

Sustituyendo (28) en (24) e integrando para todo $\vec{\Omega} \in \Omega$, resulta

$$\phi(\vec{r},v,t) = \int \frac{1}{4\pi} T(\vec{r}\,'\to\vec{r},v,t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|}{v} \to t)\; Q_e(\vec{r}\,',v,t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v})\; d\vec{r}\,' \tag{29}$$

4.4.- APLICACION AL CASO DE NO CONSIDERAR LOS NEUTRONES RETARDADOS.

La ecuación integrodiferencial de Boltzmann, para el caso de no considerar los neutrones retardados, es la dada en (79,III), o bien la (1) con

$$Q_e = Q_t = Q_s + Q_q, \quad Q_q = Q_f + Q \tag{30}$$

4.4.1.- ECUACION INTEGRAL DEL TRANSPORTE DE NEUTRONES PARA LA DENSIDAD DE FLUJO NEUTRONICO.

Sustituyendo (30) en (24), resulta

$$\phi(\vec{r},v\vec{\Omega},t) = \int T(\vec{r}\,'\to\vec{r},v,t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v} \to t)\Bigg\{ \iint\Bigg[\sum\nolimits_s(\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}\,' \to v\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v}) +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\,\chi_f(v)\;\nu(v')\;\sum\nolimits_f(\vec{r}\,',v',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v})\Bigg]\;\phi(\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}\,',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v})\;dv'd\Omega' +$$
$$+ Q(\vec{r}\,',\; v\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|},\; t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v})\Bigg\}\delta(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\vec{r}-\vec{r}\,'} - \vec{\Omega})\;d\vec{r}\,' \tag{31}$$

4.4.1.1.- Para el caso de dispersión elástica y fuente exterior isótropas en L, la ecuación anterior se simplifica en

$$\phi(\vec{r},v,t) = \int\frac{1}{4\pi}\,T(\vec{r}\,'-\vec{r},v,t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v} \to t)\Bigg\{\iint\Bigg[\sum\nolimits_s(\vec{r}\,',v'\to v,t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v}) + \chi_f(v)\;\cdot$$
$$\cdot\;\nu(v')\;\sum\nolimits_f(\vec{r}\,',v',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v})\Bigg]\;\phi(\vec{r}\,',v',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v})\;dv' + Q(\vec{r}\,',v,t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v})\Bigg\}\;d\vec{r}\,' \tag{32}$$

4.4.2.- ECUACION INTEGRAL DEL TRANSPORTE DE NEUTRONES PARA LA DENSIDAD DE FUENTE NEUTRONICA.

Sustituyendo ϕ dado en (24), en Q_t dado en (30), resulta

$$Q_t(\vec{r},v\vec{\Omega},t) = \int \Bigg[\sum\nolimits_s(\vec{r},v'\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \to v\vec{\Omega},t) + \frac{1}{4\pi}\,\chi_f(v)\;\nu(v')\;\sum\nolimits_f(\vec{r},v',t)\Bigg]\;\cdot$$
$$\cdot\;T(\vec{r}\,'\to\vec{r},v',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v} \to t)\;Q_t(\vec{r}\,',v'\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|},\; t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{v})\,dv'd\vec{r}\,' + Q(\vec{r},v\vec{\Omega},t) \tag{33}$$

4.4.2.1.- Cuando se considera que la dispersión elástica y la fuente exterior son isótropas en L, (33) se reduce a

$$Q_t(\vec{r},v,t) = \int \left[\sum_s(\vec{r},v'\to v,t) + \chi_f(v)\ \nu(v')\ \sum_f(\vec{r},v',t)\right] \frac{1}{4\pi}\ T(\vec{r}'\to\vec{r},v',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v} \to t)\ Q_t(\vec{r}',v',t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}) dv'd\vec{r}' + Q(\vec{r},v,t) \qquad (34)$$

4.5.- APLICACION AL CASO DE UN REACTOR CRITICO CON FUENTE INDEPENDIENTE DE NEUTRONES.

La ecuación integrodiferencial de Boltzmann, para un reactor crítico es la dada en (88,III y 89,III)

$$- \vec{\Omega}\cdot\nabla\ \phi - \sum_t \phi + Q_t = (L+R_t)\ \phi + Q_t = 0, \qquad \phi \in F \qquad (35)$$

con

$$Q_t = Q_e \doteq Q_s + Q_q, \qquad Q_q = Q_f + Q \qquad (36)$$

Las ecuaciones integrales del transporte de neutrones para las densidades de flujo y de fuente neutrónica, se obtienen de (31 a 34) suprimiendo la variable temporal, o sea

$$\phi(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \int T(\vec{r}'\to\vec{r},v)\left\{\int\left[\sum_s(\vec{r}',v'\vec{\Omega}'\to v\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}) + \frac{1}{4\pi}\chi_f(v)\ \nu(v')\ \sum_f(\vec{r}',v')\right]\cdot \phi(\vec{r}',v'\vec{\Omega}')\ dv'd\Omega' + Q(\vec{r}',v\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|})\right\}\delta(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \vec{\Omega})\ d\vec{r}' \qquad (37)$$

$$\phi(\vec{r},v) = \int\frac{1}{4\pi}\ T(\vec{r}'\to\vec{r},v)\left\{\int\left[\sum_s(\vec{r}',v'\to v) + \chi_f(v)\ \nu(v')\ \sum_f(\vec{r},v')\right]\ \phi(\vec{r},v')\ dv' + Q(\vec{r}',v)\right\} d\vec{r}' \qquad (38)$$

$$Q_t(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \int \left[\sum_s(\vec{r},v'\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \to v\vec{\Omega}) + \frac{1}{4\pi}\chi_f(v)\ \nu(v')\ \sum_f(\vec{r},v')\right]\cdot T(\vec{r}'\to\vec{r},v')\ Q_t(\vec{r}',\ v'\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|})\ dv'd\vec{r}' + Q(\vec{r},v\vec{\Omega}) \qquad (39)$$

$$Q_t(\vec{r},v) = \int \left[\sum_s(\vec{r},v'\to v) + \chi_f(v)\ \nu(v')\ \sum_f(\vec{r},v')\right]\frac{1}{4\pi}\ T(\vec{r}'\to\vec{r},v')\cdot Q_t(\vec{r}',v')\,dv'd\vec{r}' + Q(\vec{r},v) \qquad (40)$$

en donde las ecuaciones (38 y 40) corresponden a la condición (28) de dispersión elástica y fuente independiente isótropas en L.

4.6.-APLICACION AL CASO DE UN REACTOR VIRTUALMENTE CRITICO CON K.

La ecuación integrodiferencial de Boltzmann viene dada en (91,III), obteniéndose la ecuación integral correspondiente, haciendo en el integrando de (24)

$$Q = 0, \quad Q_e = Q_t = Q_s + Q_q, \quad Q_q = Q_f \longrightarrow \frac{1}{k} Q_{kf} \tag{41}$$

con lo que las ecuaciones integrales (24 y 29) toman la forma

$$\phi_k(\vec{r}, v\vec{\Omega}) = \int T(\vec{r}'\to\vec{r}, v) \left\{ \int \left[\Sigma_s(\vec{r}', v'\vec{\Omega}' \to v \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}) + \frac{1}{k}\frac{1}{4\pi} \chi_f(v)\, \nu(v')\, \Sigma_f(\vec{r}', v') \right] \cdot \right.$$
$$\left. \cdot\, \phi_k(\vec{r}', v'\vec{\Omega}')\, dv' d\Omega' \right\} \delta\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \Omega\right) d\vec{r}' \tag{42}$$

$$\phi_k(\vec{r}, v) = \int \frac{1}{4\pi} T(\vec{r}'\to \vec{r}, v) \left\{ \int \left[\Sigma_s(\vec{r}', v' \to v) + \frac{1}{k} \chi_f(v)\, \nu(v')\, \Sigma_f(\vec{r}', v') \right] \cdot \right.$$
$$\left. \cdot\, \phi_k(\vec{r}', v')\, dv' \right\} d\vec{r}' \tag{43}$$

mientras que las ecuaciones integrales en Q_t no pueden construirse a partir de las anteriores, debido a la presencia del factor 1/k en el integrando.

4.7.-APLICACION AL CASO DE UN REACTOR VIRTUALMENTE CRITICO CON α.

La ecuación integrodiferencial de Boltzmann es la dada en (103,III), obteniéndose la ecuación integral al hacer en (24)

$$Q = 0, \quad \Sigma_t \longrightarrow \Sigma_t + \frac{\alpha}{v} \implies T(\vec{r}'\to\vec{r}, v) \to T(\vec{r}'\to\vec{r}, v) \exp\left[\frac{\alpha}{v} |r-r'|\right] \tag{44}$$

o más fácilmente, sustituyendo (44) en las ecuaciones integrales (37 a 40),

$$\phi_\alpha(\vec{r}, v\vec{\Omega}) = \int T(\vec{r}'\to\vec{r}, v) \exp\left[\frac{\alpha}{v} |\vec{r}-\vec{r}'|\right] \left\{ \int \left[\Sigma_s(\vec{r}', v'\vec{\Omega}' \to v \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}) + \frac{1}{4\pi} \chi_f(v)\, \nu(v') \cdot \right. \right.$$
$$\left. \left. \cdot\, \Sigma_f(\vec{r}' v') \right] \phi_\alpha(\vec{r}', v'\vec{\Omega}')\, dv' d\Omega' \right\} \delta\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \vec{\Omega}\right) d\vec{r}' \tag{45}$$

$$\phi_\alpha(\vec{r}, v) = \int \frac{1}{4\pi} T(\vec{r}'\to\vec{r}, v) \exp\left[\frac{\alpha}{v} |r-r'|\right] \int \left[\Sigma_s(\vec{r}', v'\to v) + \chi_f(v)\, \nu(v')\, \Sigma_f(\vec{r}' v') \cdot \right.$$
$$\left. \cdot\, \phi_\alpha(\vec{r}', v')\, dv' \right] d\vec{r}' \tag{46}$$

$$Q_{\alpha t}(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \int \left[\sum_s(\vec{r},v'\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \rightarrow v\vec{\Omega}) + \frac{1}{4\pi}\chi_f(v)\ \nu(v')\ \sum_f(\vec{r}',v')\right] \cdot$$

$$\cdot\ T(\vec{r}'\rightarrow\vec{r},v)\ \exp\left[\frac{\alpha}{v'}\ |\vec{r}-\vec{r}'|\right]\ Q_{\alpha t}(\vec{r}',v'\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|})\ dv'\ d\vec{r}' \qquad (47)$$

$$Q_{\alpha t}(\vec{r},v) = \int \left[\sum_s(\vec{r},v'\rightarrow v) + \chi_f(v)\ \nu(v')\ \sum_f(\vec{r},v')\right]\ T(\vec{r}'\rightarrow\vec{r},v') \cdot$$

$$\cdot\ \exp\left[\frac{\alpha}{v'}\ |\vec{r}-\vec{r}'|\right]\ Q_{\alpha t}(\vec{r}',v')\ dv'\ d\vec{r}' \qquad (48)$$

4.8.-APLICACION AL CASO DE UN REACTOR VIRTUALMENTE CRITICO CON λ.

La ecuación integrodiferencial de Boltzmann es la (111,III), obteniendose la ecuación integral correspondiente haciendo en el integrando de (24 y 29),

$$Q = 0,\quad Q_e = Q_t = Q_s + Q_q,\quad Q_s \rightarrow \frac{1}{\lambda}\ Q_{\lambda s},\quad Q_q = Q_f \rightarrow \frac{1}{\lambda}\ Q_{\lambda f} \qquad (49)$$

con lo que se obtiene

$$\phi_\lambda(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \frac{1}{\lambda}\int T(\vec{r}'\rightarrow\vec{r},v)\left\{\int\left[\sum_s(\vec{r}',v'\vec{\Omega}'\rightarrow v\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}) + \frac{1}{4\pi}\chi_f(v)\ \nu(v')\ \cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\ \sum_f(\vec{r}',v')\right]\ \phi_\lambda(\vec{r}',v'\vec{\Omega}')\ dv'd\Omega'\right\}\ \delta(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\vec{\Omega})\ d\vec{r}' \qquad (50)$$

$$\phi_\lambda(\vec{r},v) = \frac{1}{\lambda}\int\frac{1}{4\pi}\ T(\vec{r}'\rightarrow\vec{r},v)\int\left[\sum_s(\vec{r}'v'\rightarrow v) + \chi_f(v)\ \nu(v')\ \sum_f(\vec{r}',v')\ \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\ \phi_\lambda(\vec{r}',v')\ dv'\right]\ d\vec{r}' \qquad (51)$$

Sustituyendo ϕ dado en (24) en $Q_t = Q_s + Q_f$, se obtiene

$$Q_{\lambda t}(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \frac{1}{\lambda}\int\left[\sum_s(\vec{r},v'\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - v\vec{\Omega}) + \chi_f(v)\ \nu(v')\ \sum_f(\vec{r},v')\right] \cdot$$

$$\cdot\ T(\vec{r}'\rightarrow\vec{r},v')\ Q_{\lambda t}(\vec{r}',v'\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|})\ dv'\ d\vec{r}' \qquad (52)$$

$$Q_{\lambda t}(\vec{r},v) = \frac{1}{\lambda}\int\left[\sum_s(\vec{r},v'\rightarrow v) + \chi_f(v)\ \nu(v')\ \sum_f(\vec{r}',v)\right]\ T(\vec{r}'\rightarrow\vec{r},v') \cdot$$

$$\cdot\ Q_{\lambda t}(\vec{r}',v')\ dv'\ d\vec{r}' \qquad (53)$$

5.- METODO DE LA FUNCION DE GREEN PARA REACTORES CRITICOS O VIRTUALMENTE CRITICOS.

La formulación anterior de las ecuaciones integrales, se simplifica considerablemente empleando los operadores de evolución, sin embargo, su desarrollo es necesario para poder obtener la función de Green del problema de contorno correspondiente.

Partiendo de la ecuación integrodiferencial de Boltzmann (89,III, 91,III, 104,III y 111,III), y teniendo en cuenta que el operador $(L+R_t)$ es no singular, admitirá inverso, con lo que la ecuación integral valdrá

$$\phi = -(L+R_t)^{-1} Q_t = -(L+R_t)^{-1} S\ \phi - (L+R_t)^{-1} Q_q \tag{54}$$

en la cual el operador $-(L+R_t)^{-1}$ se obtendrá a continuación, a partir de la función de Green del problema de contorno (35).

La solución de la ecuación (35) en función de Q_t, es

$$\phi(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \int g(\vec{r},v\vec{\Omega};\ \vec{r}\,',v'\vec{\Omega}') \ Q_t(\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}')\ dv'\ d\Omega'\ d\vec{r}\,' \tag{55}$$

siendo g la función de Green, solución de

$$(L+R_t)\ g(\vec{r},v\vec{\Omega};\ \vec{r}\,',v'\vec{\Omega}') + \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\ \delta(v-v')\ \delta(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}') = 0 \tag{56}$$

Introduciendo el operador de Green G, cuyo núcleo integral es la función de Green

$$G = \int dv'\ d\Omega'\ d\vec{r}\,'\ g(\vec{r},v\vec{\Omega};\ \vec{r}\,',v'\vec{\Omega}')\ \cdot \tag{57}$$

habiendo representado por $\cdot$ la función sobre la que opera, la ecuación (55) puede ponerse en la forma

$$\phi = G\ Q_t = G\ Q_s + G\ Q_q = G\ S\ \phi + G\ Q_q \tag{58}$$

en la que Q_q toma diversos valores según que el reactor sea crítico con fuente independiente, o virtualmente crítico con K, α, λ.

Comparando (58) con (54), resulta

$$G = -(L+R_t)^{-1} \tag{59}$$

y comparando (58) con (24) se obtiene la función de Green

$$g(\vec{r},v\vec{\Omega};\ \vec{r}\,',v'\vec{\Omega}') = T(\vec{r}\,'\to\vec{r},v)\ \delta\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \vec{\Omega}\right)\ \delta(v-v')\ \delta(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}') \tag{60}$$

5.1.-COLISIONES MULTIPLES.

La ecuación integral (58) puede desarrollarse en serie, de modo que cada término represente las aportaciones de los neutrones debidas a las sucesivas dispersiones sufridas por los neutrones de fuente Q_q.

La fórmula resolvente de (58), en función de Q_q, es

$$\phi = (I - G\ S)^{-1}\ G\ Q_q \tag{61}$$

Suponiendo que se cumplen las condiciones para que sea válido el desarrollo de Neumann del operador anterior, se obtiene

$$(I - G\ S)^{-1}\ G = \sum_{n=0}^{\infty} (G\ S)^n\ G \Longrightarrow \phi = \sum_{n=0}^{\infty} (G\ S)^n\ G\ Q_q \tag{62}$$

la cual expresa que el flujo en $\vec{r}, v\vec{\Omega}$ proviene de los neutrones emitidos por la fuente Q_q, bien directamente debido al término $G\,Q_q$, bien después de haber sufrido una dispersión (GS) $G\,Q_q$, bien después de haber sufrido dos dispersiones (G S) (G S) G Q_q,... Por este motivo la (62) se llama ecuación de las colisiones múltiples.

5.2.-REACTOR CRITICO CON FUENTE INDEPENDIENTE.

Teniendo en cuenta (36), la ecuación (58) toma la forma de una ecuación integral en ϕ,

$$\phi = G\left[(S+F)\ \phi + Q\right] \tag{63}$$

equivalente a (37), con

$$G(S+F) = \int dv'\ d\Omega'\ d\vec{r}'\ T(\vec{r}'\rightarrow\vec{r},v)\left[\Sigma_s(\vec{r}',v'\vec{\Omega}'\ v\ \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}) + \frac{1}{4\pi}\ \chi_f(v)\ \nu(v')\ \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\ \Sigma_f(\vec{r}',v')\right]\ \delta(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \vec{\Omega})\ \cdot \tag{64}$$

Por otro lado, la ecuación (63) puede ponerse en la forma de una ecuación integral en Q_t,

$$Q_t = (S+F)\ \phi + Q = (S+F)\ G\ Q_t + Q \tag{65}$$

que comparada con la (39), da

$$(S+F)\ G = \int dv'd\Omega'\ \ d\vec{r}'\ \left[\Sigma_s(\vec{r},v'\Omega' \rightarrow v\vec{\Omega}) + \frac{1}{4\pi}\ \chi_f(v)\ \nu(v')\ \Sigma_f(\vec{r},v')\right]\ \cdot$$

$$\cdot\ T(\vec{r}'\to\vec{r},v')\ \delta\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\vec{\Omega}'\right)\ \cdot \qquad (66)$$

5.3.-REACTOR VIRTUALMENTE CRITICO CON K.

Teniendo en cuenta (41), la ecuación (61) se transforma en una ecuación integral en ϕ,

$$\phi_k = \frac{1}{k}\ (I - G\ S)^{-1}\ G\ F\ \phi_k \qquad (67)$$

análoga a la (94,III) en la que el operador K definido en (95,III), toma las siguientes formas

$$K = -(L+R_t+S)^{-1}\ F = -M^{-1}\ F = (I - G\ S)^{-1}\ G\ F = \sum_{n=0}^{\infty}\ (G\ S)^n\ G\ F \qquad (68)$$

5.4.-REACTOR VIRTUALMENTE CRITICO CON α.

Se obtienen las mismas ecuaciones que las del §5.2, haciendo las sustituciones indicadas en (44).

5.5.-REACTOR VIRTUALMENTE CRITICO CON λ.

Teniendo en cuenta (49), la ecuación (58) se transforma en una ecuación integral en ϕ,

$$\phi_\lambda = \frac{1}{\lambda}\ G\ (S+F)\ \phi_\lambda \qquad (69)$$

análoga a la (112,III), y equivalente a la (50), con el operador G(S+F) dado en (64).

Por otro lado, la ecuación (69) puede ponerse en la forma de una ecuación integral en Q_t,

$$Q_{\lambda t} = (S+F)\ \phi_\lambda = \frac{1}{\lambda}\ (S+F)\ G\ Q_{\lambda t} \qquad (70)$$

equivalente a la (52), en donde el operador (S+F) G viene dado en (66).

6.- SIGNIFICADO FISICO DE e^{-s} y T.

Teniendo en cuenta (13, 19, 21 y 22), la expresión

$$\exp\left[-s(\vec{r}-R\vec{\Omega}\to\vec{r},v,t-\frac{R}{v}\to t)\right] = \exp\left[-\int_0^R \Sigma_t(\vec{r}-R'\vec{\Omega},v,t-\frac{R'}{v})\ dR'\right] \qquad (71)$$

representa la probabilidad de que un neutrón estando en el instante $t-\frac{R}{v}$ dentro de $d\vec{r}'dvd\Omega$ en $\vec{r}',v\vec{\Omega}$, llegue en el instante t a $d\vec{r}dvd\Omega$ en $\vec{r},v\vec{\Omega}$, sin sufrir colisión. De un modo simplificado e impreciso, se dice que (71) representa la probabilidad de ir de $\vec{r}'$ a $\vec{r}$ sin sufrir colisión.

Teniendo en cuenta (24), la expresión

$$T(\vec{r}'\to\vec{r},v,t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\to t)\ \delta(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\vec{\Omega}) = \frac{\exp\left[-s(\vec{r}'\to\vec{r},v,t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}\to t)\right]}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\ \cdot$$

$$\cdot\ \delta(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\vec{\Omega}) \qquad (72)$$

representa la probabilidad de que un neutrón estando en el instante $t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}$ dentro de $d\vec{r}'dvd\Omega$ en $\vec{r}',v\vec{\Omega}$, llegue en el instante t a la unidad de superficie normal a $\vec{r}-\vec{r}'$ en $\vec{r}$, con velocidad dentro de $dvd\Omega$ en $v\vec{\Omega}$, sin sufrir colisión.

7.- OBTENCION DE LAS ECUACIONES INTEGRALES DEL TRANSPORTE DE NEUTRONES PARTIENDO DE LAS HIPOTESIS SIMPLIFICATIVAS.

En el §6, partiendo de las ecuaciones (13 y 24), se obtuvo el significado físico de e^{-s} y T. Recíprocamente partiendo del significado de $\sum_t$ como la probabilidad de colisión por unidad de camino recorrido, se obtiene (71), y teniendo en cuenta que el elemento de superficie normal a $\vec{r}-\vec{r}'$ en $\vec{r}$ vale $|\vec{r}-\vec{r}'|^2\ d\ \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, se obtiene (72).

De este modo, las ecuaciones (13, 19, 21 y 22), y las (24) y siguientes pueden obtenerse directamente.

7.1.-Para obtener la ecuación del flujo, en el caso de un reactor crítico, se procede del siguiente modo.

Sea $\phi(\vec{r}',v'\vec{\Omega}')\ dv'd\Omega'$ el flujo en $\vec{r}'$ de neutrones de velocidad dentro de $dv'd\Omega'$ en $v\vec{\Omega}$, luego el número de neutrones secundarios emitidos en la unidad de tiempo, dentro de $d\vec{r}'dvd\Omega$ en $\vec{r}',v\vec{\Omega}$, debidos a las dispersiones y fisiones producidas dentro de $d\vec{r}'$ en $\vec{r}'$ por neutrones de cualquier velocidad es $dvd\Omega d\vec{r}'\int\left[\sum_s(\vec{r}',v'\vec{\Omega}'\to v\vec{\Omega})+\frac{1}{4\pi}\chi_f(v)\ \nu(v')\ \sum_f(\vec{r}',v')\right]\ \phi(\vec{r}',v'\vec{\Omega}')\ dv'd\Omega'$; y el de neutrones emitidos, en la unidad de tiempo, dentro de $d\vec{r}'dvd\Omega$ en $\vec{r}'$, $v\vec{\Omega}$ debidos a la fuente independiente, es $dvd\Omega dr'\ Q(\vec{r}',v\vec{\Omega})$. Por tanto, el flujo $\phi(\vec{r},v\vec{\Omega})\ dvd\Omega$ será igual al número de neutrones emitidos calculados anteriormente, multiplicados por la probabilidad, dada en (72), $T(\vec{r}'\to\vec{r},v)\ \delta(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\vec{\Omega})$ de que lleguen a la unidad de superficie normal a $\vec{r}-\vec{r}'$ en $\vec{r}$, con velocidad dentro de $dvd\Omega$ en $v\vec{\Omega}$, sin sufrir colisión, integrando el resultado en todo el reactor, $r'\in R$. De este modo se obtiene la ecuación (37).

7.1.1.- En el caso de un reactor virtualmente crítico con k o con λ, el número de neutrones secundarios debidos a las fisiones debe dividirse por k, o bien el debido a las dispersiones y fisiones debe dividirse por λ, obteniéndose así las ecuaciones (42) y (50).

7.2.-Análogamente se obtiene la ecuación de la fuente, en el caso de un reactor crítico.

Sea $Q_t(\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}\,')\,dv'd\Omega'd\vec{r}\,'$ la fuente, es decir, el número de neutrones emitidos, en la unidad de tiempo, dentro de $d\vec{r}\,'dv'd\Omega'$ en $\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}\,'$, luego el flujo en $\vec{r}$ debido a estos neutrones, será igual a la fuente anterior, multiplicada por la probabilidad dada en (72), $T(\vec{r}\,'\to\vec{r},v')\,\delta(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}-\vec{\Omega}\,')$ de que lleguen a la unidad de superficie normal a $\vec{r}-\vec{r}\,'$ en $\vec{r}$, con velocidad dentro de $dv'd\Omega'$ en $v'\vec{\Omega}\,'$, sin sufrir colisión. Por tanto, la fuente $Q_t(\vec{r},v\vec{\Omega})\,dvd\Omega d\vec{r}$ será debida a la fuente independiente $Q(\vec{r},v\vec{\Omega})\,dvd\Omega d\vec{r}$, y a los neutrones secundarios emitidos, en la unidad de tiempo, dentro de $d\vec{r}dvd\Omega$ en $\vec{r},v\vec{\Omega}$, debidos a las dispersiones y fisiones producidas dentro de $d\vec{r}$ en $\vec{r}$, por neutrones de cualquier velocidad correspondientes al flujo anterior, integrando el resultado en todo el reactor, $\vec{r}\,'\in R$. De este modo se obtiene la ecuación (39).

7.2.1.- En el caso de un reactor virtualmente crítico con λ, el número de neutrones secundarios debidos a las dispersiones y fisiones, debe dividirse por λ, obteniéndose de este modo la ecuación (52).

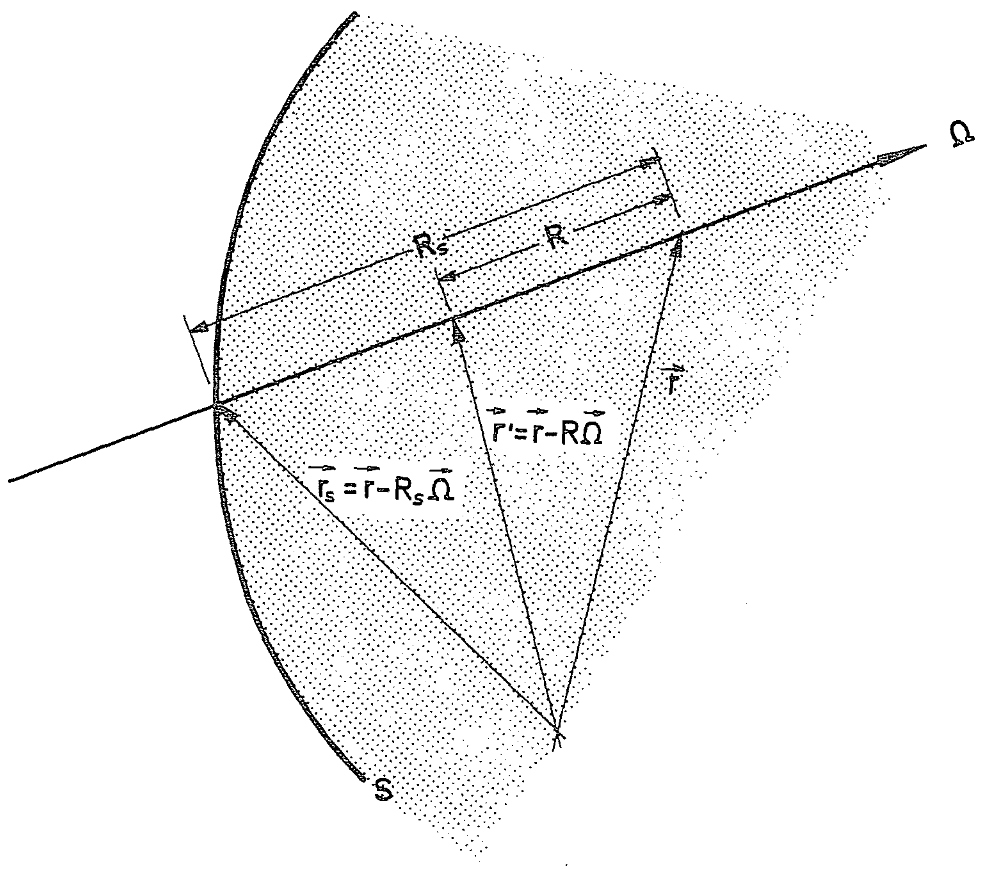

Fig 1, IV

V.- ECUACIONES ADJUNTAS DEL TRANSPORTE DE NEUTRONES.

1.- OPERADORES ADJUNTOS.

Sea O un operador lineal, y f y g dos funciones cualesquiera pertenecientes al espacio donde O está definido. Se llama operador adjunto $O^{\dagger}$ del O, al obtenido por (3, Ap.I),

$$\langle f|O|g\rangle = \langle g|O^{\dagger}|f\rangle^{*} = \langle O^{\dagger}f|g\rangle \qquad (1)$$

habiéndose empleado el formalismo de Dirac para representar el producto escalar, que en el caso de que el espacio considerado sea el fásico, toma la forma

$$\langle f|g\rangle = \int f^{*}(\vec{r},v\vec{\Omega},t)\; g(\vec{r},v\vec{\Omega},t)\; dv\, d\Omega\, d\vec{r} \qquad (2)$$

Cuando O es uno de los operadores de evolución definidos en el Cap.III , como estos operan sobre las funciones $\phi \in F_c$, efectuando el cambio de notación $f = \phi^{\dagger}$, resulta

$$\langle \phi^{\dagger}|O|\phi\rangle = \langle \phi|O^{\dagger}|\phi^{\dagger}\rangle^{*} = \langle O^{\dagger}\phi^{\dagger}|\phi\rangle \qquad (3)$$

Como las funciones ϕ cumplen las condiciones de continuidad y contorno que definen a F_c, según la naturaleza del operador O, se obtendrán determinadas condiciones para $\phi^{\dagger}$, que en general, serán distintas que para las ϕ.

1.1.-OPERADOR ADJUNTO DE UN OPERADOR DIFERENCIAL.

Sea $O \equiv L = -(\vec{\Omega}\cdot\nabla) = -(\nabla\cdot\vec{\Omega})$, teniendo en cuenta que $\vec{\Omega}\cdot\nabla\phi\phi^{\dagger} = \nabla\cdot\vec{\Omega}\phi\phi^{\dagger} = \phi^{\dagger}\vec{\Omega}\cdot\nabla\phi + \phi\vec{\Omega}\cdot\nabla\phi^{\dagger}$, de (3), se obtiene

$$\langle\phi^{\dagger}|-\vec{\Omega}\cdot\nabla|\phi\rangle = -\int \phi^{\dagger *}\, \vec{\Omega}\cdot\nabla\, \phi\; dv\, d\Omega\, d\vec{r} = -\int \nabla\cdot\vec{\Omega}\, \phi\, \phi^{\dagger *}\, dv\, d\Omega\, d\vec{r} + \int \phi\, \vec{\Omega}\cdot\nabla\, \phi^{\dagger *}\, \cdot$$

$$\cdot\; dv\, d\Omega\, d\vec{r} = -\int \vec{\Omega}\, \phi\, \phi^{\dagger *}\, dv\, d\Omega\, d\vec{S} + \int \phi\, \vec{\Omega}\cdot\nabla\, \phi^{\dagger *}\, dv\, d\Omega\, d\vec{r} \qquad (4)$$

Como $\phi \in F_c$, cumple la condición de contorno

$$\phi(\vec{r}_s,v\vec{\Omega},t) = 0, \quad \text{para} \quad \vec{n}_s\cdot\vec{\Omega} < 0 \qquad (5)$$

para que el primer término del último miembro de (4) se anule, las funciones $\phi^{\dagger}$ han de cumplir la condición de contorno, llamada adjunta

$$\phi^{\dagger}(\vec{r}_s,v\vec{\Omega},t) = 0, \quad \text{para} \quad \vec{n}_s\cdot\vec{\Omega} > 0 \qquad (6)$$

Debido a esto, (4) se reduce a

$$<\phi^{\dagger}|-\vec{\Omega}\cdot\nabla|\phi> = <\phi|\vec{\Omega}\cdot\nabla|\phi^{\dagger}>^{*} \tag{7}$$

de donde el operador adjunto del L viene dado por

$$L^{\dagger} = \vec{\Omega}\cdot\nabla \Longrightarrow L + L^{\dagger} = 0 \tag{8}$$

Nótese que en la obtención de (4) se ha empleado la condición de continuidad del §3.1,III para las funciones ϕ y $\phi^{\dagger}$.

1.2.-OPERADOR ADJUNTO DE UN OPERADOR INTEGRAL.

Sea $O \equiv S$, F_x, G. Considerando el primero operador, resulta

$$<\phi^{\dagger}|S|\phi> = \int \phi^{\dagger *}(\vec{r},v\vec{\Omega},t) \left[\iint \Sigma_s(\vec{r},v'\vec{\Omega}' \to v\vec{\Omega},t)\ \phi(\vec{r},v'\vec{\Omega}',t)\ dv'\ d\Omega'\right] dv\ d\Omega\ d\vec{r} =$$

$$= \int \phi(\vec{r},v\vec{\Omega},t) \left[\iint \Sigma_s(\vec{r},v\vec{\Omega} \to v'\vec{\Omega}',t)\ \phi^{\dagger *}(\vec{r},v'\vec{\Omega}',t)\ dv'\ d\Omega'\right] dv\ d\Omega\ d\vec{r} = <\phi|S^{\dagger}|\phi^{\dagger}>^{*} \tag{9}$$

ya que al ser las variables $v\vec{\Omega}$, $v'\vec{\Omega}'$ mudas, se han cambiado unas por otras. De (9) se obtiene que el operador adjunto del S, es

$$S^{\dagger} = \int dv'\ d\Omega'\ \Sigma_s(\vec{r},v\vec{\Omega} \to v'\vec{\Omega}',t)\ \cdot \tag{10}$$

Análogamente para los casos de $O \equiv F_x$, G, se obtiene

$$F_x^{\dagger} = \frac{1}{4\pi}\beta_x\ \nu_x(v)\ \Sigma_f(\vec{r},v,t) \int dv'\ d\Omega'\ \chi_x(v')\ \cdot \tag{11}$$

$$G^{\dagger} = -(L^{\dagger} + R_t^{\dagger})^{-1} = \int dv'\ d\Omega'\ dr'\ g(\vec{r}',v'\vec{\Omega}';\ \vec{r},v\vec{\Omega})\ \cdot \tag{12}$$

con

$$g(\vec{r}',v'\vec{\Omega}';\ \vec{r},v\vec{\Omega}) = T(\vec{r}\to\vec{r}',v')\ \delta\left(\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|} - \vec{\Omega}'\right)\ \delta(v'-v)\ \delta(\vec{\Omega}'-\vec{\Omega}) \tag{13}$$

1.2.1.- Suponiendo que los parámetros nucleares no dependen de la velocidad del neutrón, como según (22,I) la sección eficaz diferencial de dispersión vale $\Sigma_s(\vec{r},\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega},t)$ la cual es invariante al cambiar $\vec{\Omega}$ por $\vec{\Omega}'$, de (10 y 11), resulta

$$S^{\dagger} = S, \quad F_x^{\dagger} = F_x \tag{14}$$

es decir, son autoadjuntos o hermíticos.

1.2.2.- Nótese que en el caso de estos operadores integrales, no se ha impuesto a $\phi^\dagger$ ninguna condición de continuidad ni de contorno.

1.3.-OPERADORES ADJUNTOS DE LOS RESTANTES OPERADORES DE EVOLUCION.

Conocidos los operadores adjuntos de los operadores L, S, F_x, G, se obtiene para los restantes operadores

$$R_x^\dagger = R_x, \quad M^\dagger = L^\dagger + R_t^\dagger + S^\dagger, \quad B^\dagger = M^\dagger + F^\dagger = L^\dagger + R_t^\dagger + S^\dagger + F^\dagger \tag{15}$$

$$K^\dagger = -F^\dagger(M^{-1})^\dagger = -F^\dagger(M^\dagger)^{-1} = -F^\dagger(L^\dagger + R_t^\dagger + S^\dagger)^{-1} = F^\dagger\, G(I^\dagger - S^\dagger\, G^\dagger)^{-1} \tag{16}$$

1.4.-MATRICES ADJUNTAS DE LAS MATRICES DE EVOLUCION.

La matriz adjunta de la cinética C, dada en (41,III), es

$$C^\dagger = \left[\begin{array}{ccc|c} (M^\dagger + F_p^\dagger) & F^\dagger & F_2^\dagger & F_{dm}^\dagger \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ \hline \lambda_{dm} & 0 & 0 & -\lambda_{dm} \end{array}\right] \tag{17}$$

2.- CONDICIONES GENERALES, DE CONTINUIDAD Y DE CONTORNO, DE LA FUNCION ADJUNTA.

Debido a que $\phi \in \mathcal{F}_c$, en la determinación del operador L se obtuvo que $\phi^\dagger$ debe cumplir la misma condición de continuidad que ϕ, pero distinta condición de contorno (6). Por tanto, en las ecuaciones en que intervenga el operador L , $\phi^\dagger$ ha de cumplir estas dos condiciones de continuidad y contorno. Por otro lado, debido al significado físico de $\phi^\dagger$, el cual se dará en el §8, deberá cumplir las mismas condiciones generales que ϕ, de ser real, finita y no negativa. De todo lo anterior se tiene:

i) $\phi^\dagger(\vec{r}, v\vec{\Omega}, t)$ debe ser real, finita y no negativa, para todo $\vec{r}, v\vec{\Omega} \in \mathcal{R} \times \mathcal{V} \times \Omega$, $t < t_0$.

ii) $\phi^\dagger(\vec{r}, v\vec{\Omega}, t)$ debe ser continua en $\vec{r}$ en la dirección $\vec{\Omega}$, para todo $\vec{r}, v\vec{\Omega} \in \mathcal{R} \times \mathcal{V} \times \Omega$, $t < t_0$.

iii) Se debe verificar la condición de contorno adjunta,

$$\phi^\dagger(\vec{r}_s, v\vec{\Omega}, t) = 0, \quad \text{para } \vec{n}_s\cdot\vec{\Omega} > 0, \quad \vec{r}_s \in S \tag{18}$$

En los problemas temporales deben además, especificarse las condiciones iniciales.

2.1.-ESPACIO DE FUNCIONES.

El conjunto de funciones que cumplen las condiciones generales, de continuidad, y de contorno anteriores definen el espacio de funciones $F^\dagger$ conjugado del F. Mientras las que cumplen solamente las condiciones de continuidad y contorno definen el $F_c^\dagger \subset F^\dagger$ conjugado del F_c.

3.- ECUACIONES ADJUNTAS, PARA REACTORES VIRTUALMENTE CRITICOS.

Las ecuaciones de valores propios dadas en el §6,III, y sus correspondientes adjuntas, construídas con los operadores adjuntos obtenidos en el §1, pueden representarse en la forma siguiente, indicando con las flechas horizontales la transformación de una ecuación en su adjunta, y con flecha doble vertical la transformación de los operadores,

$$
\begin{tikzcd}
M\phi_k + \frac{1}{k}F\phi_k = 0 \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "K=M^{-1}F"'] \arrow[dd, Rightarrow, bend right, "B=M+F"'] & M^\dagger\phi_k^\dagger + \frac{1}{k^\dagger}F^\dagger\phi_k^\dagger = 0 \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & -(M^{-1})^\dagger F^\dagger\phi_k^\dagger = k^\dagger\phi_k^\dagger \arrow[r] & -FM^{-1}\,\bar{\phi}_k = \bar{k}\,\bar{\phi}_k \\
K\phi_k = k\phi_k \arrow[r] & K^\dagger\bar{\phi}_k^\dagger = \bar{k}^\dagger\,\bar{\phi}_k^\dagger & \\
B\phi_k = \rho\, F\phi_k \arrow[r] & B^\dagger\phi_k^\dagger = \rho^\dagger F^\dagger\,\phi_k^\dagger &
\end{tikzcd}
$$

(19),(20)

(21),(22)

(23),(24)

(25),(26)

$$
\begin{tikzcd}
C\psi_\alpha = \alpha\, V^{-1}\psi_\alpha \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "\frac{\partial}{\partial t}\ P_d=0"'] & C^\dagger\psi_\alpha^\dagger = \alpha^\dagger V^{-1}\psi_\alpha^\dagger \\
B\phi_\alpha = \alpha\frac{1}{v}\,\phi_\alpha \arrow[r] & B^\dagger\phi_\alpha = \alpha^\dagger\frac{1}{v}\,\phi_\alpha^\dagger
\end{tikzcd}
$$

(27),(28)

(29),(30)

$$(L+R_t)\phi_\lambda + \frac{1}{\lambda}(S+F)\phi_\lambda = 0 \longrightarrow (L^\dagger + R_t^\dagger)\phi_\lambda^\dagger + \frac{1}{\lambda^\dagger}(S^\dagger + F^\dagger)\phi_\lambda^\dagger = 0 \qquad (31),(32)$$

$$\Big\Downarrow{\scriptstyle G=-(L+R_t)^{-1}} \qquad\qquad \Downarrow$$

$$G^\dagger(S^\dagger+F^\dagger)\phi_\lambda^\dagger = \lambda^\dagger \phi_\lambda^\dagger \longrightarrow (S+F)G\,\bar{\phi}_\lambda = \bar{\lambda}\,\bar{\phi}_\lambda \qquad (33),(34)$$

$$G(S+F)\phi_\lambda = \lambda\,\phi_\lambda \longrightarrow (S^\dagger+F^\dagger)G^\dagger\,\bar{\phi}_\lambda^\dagger = \bar{\lambda}^\dagger\,\bar{\phi}_\lambda^\dagger \qquad (35),(36)$$

3.1.-La forma desarrollada de las ecuaciones anteriores, es la siguiente:

i) La ecuación integrodiferencial de valores propios (19) viene desarrollada en (90,III),luego su adjunta (20) tendrá la expresión,

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla\,\phi_k^\dagger(\vec{r},v\vec{\Omega}) - \Sigma_t(\vec{r},v,t_0)\;\phi_k^\dagger(\vec{r},v\vec{\Omega}) + \int \Sigma_s(\vec{r},v\vec{\Omega}\to v'\vec{\Omega}',t_0)\;\phi_k^\dagger(\vec{r},v'\vec{\Omega}')\cdot$$

$$\cdot\,dv'd\Omega' + \frac{1}{k^\dagger}\frac{1}{4\pi}\,\nu(v)\;\Sigma_f(\vec{r},v,t_0)\int \chi_f(v')\;\phi_k^\dagger(\vec{r},v'\vec{\Omega}')\;dv'd\Omega' = 0\;,$$

$$\phi_k^\dagger \in F_c^\dagger \qquad (37)$$

ii) La ecuación integrodiferencial de valores propios (27) viene desarrollada en (102,III), luego su adjunta (28) valdrá

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla\,\phi_\alpha^\dagger(\vec{r},v\vec{\Omega}) - \Sigma_t(\vec{r},v)\;\phi_\alpha^\dagger(\vec{r},v\vec{\Omega}) + \int \Sigma_s(\vec{r},v\vec{\Omega}\to v'\vec{\Omega}')\;\phi_\alpha^\dagger(\vec{r},v'\vec{\Omega}')\;dv'd\Omega' +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\,\nu(v)\;\Sigma_f(\vec{r},v)\int \chi_f(v')\;\phi_\alpha^\dagger(\vec{r},v'\vec{\Omega}')\;dv'd\Omega' = \alpha^\dagger\,\frac{1}{v}\,\phi_\alpha^\dagger(\vec{r},v\vec{\Omega})\;,$$

$$\phi_\alpha^\dagger \in F_c^\dagger \qquad (38)$$

iii) La ecuación integrodiferencial de valores propios (39) viene desarrollada en (108,III), luego su adjunta (32) vendrá dada por

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla\phi_\lambda^\dagger(\vec{r},v\vec{\Omega}) - \Sigma_t(\vec{r},v,t_0)\;\phi_\lambda^\dagger(\vec{r},v\vec{\Omega}) + \frac{1}{\lambda^\dagger}\left[\int \Sigma_s(\vec{r},v\vec{\Omega}\to v'\vec{\Omega}',t_0)\;\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\;\phi_\lambda^\dagger(\vec{r},v'\vec{\Omega}')\;dv'd\Omega' + \frac{1}{4\pi}\,\nu(v)\;\Sigma_f(\vec{r},v,t_0)\int \chi_f(v')\;\phi_\lambda^\dagger(\vec{r},v'\vec{\Omega}')dv'd\Omega'\right] =$$

$$= 0,\quad \phi_\lambda^\dagger \in F_c^\dagger \qquad (39)$$

iv) La ecuación integral de valores propios (34), teniendo en cuenta la expresión del operador (S+F)G dada en (66,IV), se obtiene por

$$\bar{\phi}_\lambda(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \frac{1}{\bar{\lambda}} \int \left[\sum_s(\vec{r},v'\vec{\Omega}'\rightarrow v\vec{\Omega}) + \frac{1}{4\pi}\chi_f(v)\ \nu(v')\ \sum_f(\vec{r},v') \right] \cdot$$

$$\cdot\ T(\vec{r}'\rightarrow\vec{r},v')\ \delta\left(\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|} - \vec{\Omega}'\right)\ \bar{\phi}_\lambda(\vec{r}',v'\vec{\Omega}')\ dv'd\Omega'd\vec{r}' \qquad (40)$$

y su adjunta (33), por

$$\phi^\dagger_\lambda(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \frac{1}{\bar{\lambda}^\dagger} \int \left[\sum_s(\vec{r}',v\vec{\Omega}\rightarrow v'\vec{\Omega}') + \frac{1}{4\pi}\chi_f(v')\ \nu(v)\ \sum_f(r',v) \right] \cdot$$

$$\cdot\ T(\vec{r}\rightarrow\vec{r}',v)\ \delta\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \vec{\Omega}\right)\ \phi^\dagger_\lambda(\vec{r}',v'\vec{\Omega}')\ dv'd\Omega'd\vec{r}' \qquad (41)$$

v) La ecuación integral de valores propios (35), viene desarrollada en (50,IV), pudiendo obtenerse directamente empleando el operador G(S+F) dado en (64,IV), o sea

$$\phi_\lambda(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \frac{1}{\lambda} \int T(\vec{r}'\rightarrow\vec{r},v) \left[\sum_s\left(\vec{r}',v'\vec{\Omega}'\rightarrow v\ \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) + \frac{1}{4\pi}\ \chi_f(v)\ \nu(v') \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\ \sum_f(\vec{r}',v')\right]\ \delta\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \vec{\Omega}\right)\ \phi_\lambda(\vec{r}',v'\vec{\Omega}')\ dv'd\Omega'd\vec{r}' \qquad (42)$$

y su adjunta (36), tendrá la expresión

$$\bar{\phi}^\dagger_\lambda(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \frac{1}{\lambda^\dagger} \int T(\vec{r}\rightarrow\vec{r}',v') \left[\sum_s\left(\vec{r},v\vec{\Omega}\rightarrow v'\ \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) + \frac{1}{4\pi}\chi_f(v')\ \nu(v) \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\ \sum_f(\vec{r},v)\right]\ \delta\left(\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|} - \vec{\Omega}'\right)\ \bar{\phi}^\dagger_\lambda(\vec{r}',v'\vec{\Omega}')\ dv'd\Omega'd\vec{r}' \qquad (43)$$

3.2.-Comparando (24) con (21), o bien (36) con (33), y partiendo de las ecuaciones integrodiferenciales de valores propios generalizadas (19) o (31), se obtiene que la ecuación adjunta de su ecuación integral, no coincide con la ecuación integral de su ecuación adjunta. Sin embargo, en (47 y 51) se obtendrá que los espectros de ambas ecuaciones coinciden, y que sus soluciones están relacionadas entre sí.

3.3.-Las ecuaciones anteriores han de completarse con las condiciones de continuidad y contorno que han de cumplir las funciones propias, ϕ_k, ψ_α, ϕ_α, ϕ_λ, $\bar{\phi}_k$, $\bar{\phi}_\lambda$ $\in F_c$; $\phi^\dagger_k$, $\psi^\dagger_\alpha$, $\phi^\dagger_\alpha$, $\phi^\dagger_\lambda$, $\bar{\phi}^\dagger_k$, $\bar{\phi}^\dagger_\lambda$ $\in F_c$. Estas funciones propias se han representado con una notación análoga a la de los operadores adjuntos, con objeto de indicar que son solución de los problemas de valores propios construídos con estos operadores. Teniendo en cuenta la similitud de la notación, a las funciones con † se las llama impropiamente adjuntas de las correspondientes sin ella, y recíprocamente.

3.4.-Suponiendo que los parámetros nucleares no dependen de la velocidad del neutrón, de (14) se obtiene, que mediante el cambio de variable función $\phi^{\dagger}(\vec{r},\vec{\Omega}) = \phi(\vec{r},-\vec{\Omega})$, las ecuaciones (20,26 y 32) en $\phi^{\dagger}$ son idénticas a las correspondientes (19,25 y 31) en ϕ, es decir, tienen los mismos operadores y las mismas condiciones de contorno, $\vec{n}_s\cdot\vec{\Omega} > 0$ para $\phi^{\dagger}$ y $\vec{n}_s\cdot(-\vec{\Omega}) > 0 \Longrightarrow \vec{n}_s\cdot\vec{\Omega} < 0$ para ϕ, luego

$$\phi(\vec{r},\vec{\Omega}) = \phi^{\dagger}(\vec{r},-\vec{\Omega}), \quad k = k^{\dagger}, \quad \alpha = \alpha^{\dagger}, \quad \lambda = \lambda^{\dagger} \tag{44}$$

4.- ANALISIS DE LAS ECUACIONES DE VALORES PROPIOS.

Los problemas que aparecen en el análisis de las ecuaciones de valores propios adjuntas son análogos a los expuestos en los §6.1.2,III y §6.2.1.1, III y §6.3.1,III.

4.1.-En el caso del problema adjunto correspondiente a reactores virtualmente críticos con k, es necesario introducir la siguiente hipótesis;

Hipótesis XVI.- Existe un valor propio $k_0^{\dagger}$, *positivo y simple tal que* $k_0^{\dagger}>|K_n^{\dagger}|$, $n\neq 0$, *al cual corresponde una función propia* $\phi_{k_0}^{\dagger} \in F^{\dagger}$, *para todo* $\vec{r}, v\vec{\Omega} \in R \times V \times \Omega$. *Además,* $\phi_{k_0}^{\dagger}$ *es la única función propia de signo constante en* $R \times V \times \Omega$.

Por tanto, todas las $\phi_{k_i}^{\dagger} \in F_c^{\dagger}$, y únicamente $\phi_{k_0}^{\dagger} \in F^{\dagger}$.

4.2.-En el caso del problema adjunto correspondiente a reactores virtualmente críticos con α, se tiene

i) Existe un valor propio $\alpha_0^{\dagger}$, real y simple tal que $\alpha_0^{\dagger} > \mathrm{Re}\ \alpha_n^{\dagger}$, $n\neq 0$, al cual corresponde una función propia $\phi_{\alpha_0}^{\dagger} \in F^{\dagger}$, para todo $\vec{r}, v\vec{\Omega} \in R \times V \times \Omega$. Además $\phi_{\alpha_0}^{\dagger}$ es la única función propia de signo constante en $R \times V \times \Omega$. Por tanto, todas las $\phi_{\alpha_i}^{\dagger} \in F_c^{\dagger}$, y únicamente $\phi_{\alpha_0}^{\dagger} \in F^{\dagger}$.

4.3.-En el caso del problema adjunto correspondiente a reactores virtualmente críticos con λ, se obtiene el mismo resultado que el dado para k.

5.- RELACION ENTRE LOS VALORES PROPIOS Y ENTRE LAS FUNCIONES PROPIAS.

Entre los valores propios y las funciones propias del §3 existen determinadas relaciones.

5.1.-La relación entre los valores y funciones propias de los operadores $K = -M^{-1}F$ y $-FM^{-1}$ se obtiene multiplicando la ecuación (23) por F, con lo que resulta $-FM^{-1}(F\phi_k) = k(F\phi_k)$, que comparada con la (22), da

$$\bar{\phi}_k = Q_{kf} = F\phi_k, \; \bar{k} = k \qquad (45)$$

siendo Q_{kf} la fuente de neutrones secundarios de fisión (3,IV),debida a ϕ_k.

Si ϕ_k es una función propia, solución de (23) para el valor propio k, $\bar{\phi}_k = F\phi_k$ será función propia, solución de (22) para el mismo valor propio $\bar{k} = k$.

Recíprocamente, multiplicando (22) por $-M^{-1}$ se obtiene $-M^{-1}\,F(-M^{-1}\bar{\phi}_k) = \bar{k}(-M^{-1}\bar{\phi}_k)$, que comparada con la (23), da

$$\phi_k = -M^{-1}\,\bar{\phi}_k, \quad k = \bar{k} \qquad (46)$$

luego si $\bar{\phi}_k$ es solución de (22) para el valor propio $\bar{k}$, $\phi_k = -M^{-1}\bar{\phi}_k$ será solución de (23) para el mismo valor propio $k = \bar{k}$.

Es decir, el problema de valores propios (23) es equivalente al (22), en el sentido de que los espectros coinciden y las funciones propias están relacionadas por la ecuación (45).

5.2.-La relación entre los valores y funciones propias de los operadores $K^{\dagger} = -F^{\dagger}(M^{-1})^{\dagger}$ y $-(M^{-1})^{\dagger}F^{\dagger}$, se obtiene multiplicando la ecuación (21) por $F^{\dagger}$, de donde se obtiene $-F^{\dagger}(M^{-1})^{\dagger}(F^{\dagger}\phi_k^{\dagger}) = k^{\dagger}(F^{\dagger}\phi_k^{\dagger})$, que comparada con la (24), da

$$\bar{\phi}_k^{\dagger} = Q_{kf}^{\dagger} = F^{\dagger}\,\phi_k^{\dagger}, \quad \bar{k}^{\dagger} = k^{\dagger} \qquad (47)$$

Recíprocamente, multiplicando (24) por $-(M^{-1})^{\dagger}$, resulta $-(M^{-1})^{\dagger}F^{\dagger}(-M^{-1})^{\dagger} \cdot \bar{\phi}_k^{\dagger} = \bar{k}^{\dagger}(-M^{-1})^{\dagger}\bar{\phi}_k^{\dagger}$, que comparada con la (21), se obtiene

$$\phi_k^{\dagger} = -(M^{-1})^{\dagger}\,\bar{\phi}_k^{\dagger}, \quad k^{\dagger} = \bar{k}^{\dagger} \qquad (48)$$

Es decir, los problemas de valores propios (21 y 24) son equivalentes, en el sentido de que los espectros coinciden y las funciones propias están relacionadas por (47).

5.3.- La relación entre los valores y funciones propias de los operadores G(S+F) y (S+F)G, se obtiene análogamente al caso del §5.1, partiendo de las ecuaciones (35 y 34), de donde resulta[1]

$$\bar{\phi}_{\lambda} = Q_{\lambda t} = (S+F)\,\phi_{\lambda}, \quad \bar{\lambda} = \lambda \qquad (49)$$

siendo $Q_{\lambda t}$ la fuente de neutrones secundarios de colisión, osea de disper-

(1) Robkin, M.A. y Clark, M. - Nuc. Sc. Eng. 8, 437 (1960).

sión y de fisión, debida a ϕ_λ. La relación anterior puede también obtenerse comparando (40) con (52,IV).

Recíprocamente

$$\phi_\lambda = G\,\bar{\phi}_\lambda, \quad \lambda = \bar{\lambda} \tag{50}$$

Luego los problemas de valores propios (34 y 35) son equivalentes, en el sentido dado en el §5.1.

5.4.-La relación entre los valores y funciones propias de los operadores $(S^\dagger+F^\dagger)G^\dagger$ y $G^\dagger(S^\dagger+F^\dagger)$, se obtiene partiendo de las ecuaciones (36 y 33), de modo análogo al del §5.2, resultando

$$\bar{\phi}^\dagger_\lambda = Q^\dagger_{\lambda t} = (S^\dagger+F^\dagger)\phi^\dagger_\lambda, \quad \bar{\lambda}^\dagger = \lambda^\dagger \tag{51}$$

y recíprocamente

$$\phi^\dagger_\lambda = G^\dagger\,\bar{\phi}^\dagger_\lambda, \quad \lambda^\dagger = \bar{\lambda}^\dagger \tag{52}$$

Luego los problemas de valores propios (33 y 36) son equivalentes, en el sentido dado en el §5.1.

6.- RELACIONES DE BIORTONORMALIZACION.

Las relaciones de ortonormalización se obtienen multiplicando cada ecuación por la solución de su ecuación adjunta, restando los resultados, y aplicando la ecuación que define el operador adjunto (3). De este modo, resulta

i) Para las ecuaciones (19 y 20)

$$\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^{\dagger *}}\right) \langle\phi^\dagger_k|F|\phi_k\rangle = 0 \tag{53}$$

ii) Para las (21 y 22)

$$(\bar{k} - k^{\dagger *}) \langle\phi^\dagger_k|\bar{\phi}_k\rangle = 0 \tag{54}$$

iii) Para las (23 y 24)

$$(k - \bar{k}^{\dagger *}) \langle\bar{\phi}^\dagger_k|\phi_k\rangle = 0 \tag{55}$$

iv) Para las (25 y 26)

$$(\rho - \rho^{\dagger *}) \langle\phi^\dagger_k|F|\phi_k\rangle = 0 \tag{56}$$

v) Para las (27 y 28)

$$(\alpha - \alpha^{\dagger *}) \langle \psi_\alpha^\dagger | V^{-1} | \psi_\alpha \rangle = 0 \qquad (57)$$

vi) Para las (29 y 30)

$$(\alpha - \alpha^{\dagger *}) \ \langle \phi_\alpha^\dagger | \frac{1}{v} | \phi_\alpha \rangle = 0 \qquad (58)$$

vii) Para las (31 y 32)

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^{\dagger *}}\right) \ \langle \phi_\lambda^\dagger | S+F | \phi_\lambda \rangle = 0 \qquad (59)$$

viii) Para las (33 y 34)

$$(\bar{\lambda} - \lambda^{\dagger *}) \ \langle \phi_\lambda^\dagger | \bar{\phi} \rangle = 0 \qquad (60)$$

ix) Y para las (35 y 36)

$$(\lambda - \bar{\lambda}^{\dagger *}) \ \langle \bar{\phi}_\lambda^\dagger | \phi_\lambda \rangle = 0 \qquad (61)$$

Teniendo en cuenta (45 y 47) y la definición de ρ dada en (92,III), las ecuaciones (54, 55 y 56) son análogas a la (53). Del mismo modo, y según (49 y 51), las ecuaciones (60 y 61) son análogas a la (59). Por otro lado, del §6.2,III, se obtiene que cuando no se consideran los neutrones retardados la ecuación (58) es análoga a la (57).

Nótese que el producto escalar de dos funciones viene dado en (2), mientras que el producto escalar de dos vectores, indicado en (57) viene dado por

$$\langle \psi_{\alpha_i}^\dagger | V^{-1} | \psi_{\alpha_j} \rangle = \int dv d\Omega d\vec{r} \left\{ \left[\phi_{\alpha_i}^{\dagger *}, \frac{1}{4\pi} P_{1\alpha_i}^{\dagger *}, \ \dots \ \frac{1}{4\pi} P_{dm\alpha_i}^{\dagger *} \right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \begin{bmatrix} v^{-1} \phi_{\alpha_j} \\ \frac{1}{4\pi} P_{1\alpha_j} \\ \text{-------} \\ \frac{1}{4\pi} P_{dm\alpha_j} \end{bmatrix} \right\} = \langle \phi_{\alpha_i}^\dagger | \frac{1}{v} | \phi_{\alpha_j} \rangle + \sum_d \langle \frac{1}{4\pi} P_{d\alpha_i}^\dagger | \frac{1}{4\pi} P_{d\alpha_j} \rangle \qquad (62)$$

6.1.-Para soluciones no idénticamente nulas de las ecuaciones del §3, como los valores propios predominantes son reales y simples y las correspondien tes funciones propias ϕ_0, $\phi_0^\dagger$; ψ_0, $\psi_0^\dagger$ son no negativas, se obtiene

$$<\phi^\dagger_{k_0}|F|\phi_k> \neq 0 \qquad k_0 = k_0^\dagger = \bar{k}_0 = \bar{k}_0^\dagger \tag{63}$$

$$<\psi^\dagger_{\alpha_0}|V^{-1}|\psi_{\alpha_0}> \neq 0 \qquad \alpha_0 = \alpha_0^\dagger \tag{64}$$

$$<\phi^\dagger_{\alpha_0}|\frac{1}{v}|\phi_{\alpha_0}> \neq 0 \qquad \alpha_0 = \alpha_0^\dagger \tag{65}$$

$$<\phi^\dagger_{\lambda_0}|S+F|\phi_{\lambda_0}> \neq 0 \qquad \lambda_0 = \lambda_0^\dagger = \bar{\lambda}_0 = \bar{\lambda}_0^\dagger \tag{66}$$

6.2.-Si las ϕ_j, $\phi_i^\dagger$; ψ_j, $\psi_i^\dagger$, forman un conjunto completo, respecto a las funciones pertenecientes a F_c, según el §2.1, Ap. I, resulta

$$k_i = k_i^{\dagger *} = \bar{k}_i = \bar{k}_i^{\dagger *} \tag{67}$$

$$\alpha_i = \alpha_i^{\dagger *}, \tag{68}$$

$$\lambda_i = \lambda_i^{\dagger *} = \bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i^{\dagger *} \tag{69}$$

con lo cual, de (53 a 61) se obtienen las relaciones de biortonormalización

$$<\phi^\dagger_{k_i}|F|\phi_{k_j}> = \delta(i-j), \quad <\phi^\dagger_{\alpha_i}|\frac{1}{v}|\phi_{\alpha_j}> = \delta(i-j), \quad <\psi^\dagger_{\alpha_i}|V^{-1}|\psi_{\alpha_j}> = \delta(i-j),$$

$$<\phi^\dagger_{\lambda_i}|S+F|\phi_{\lambda_j}> = \delta(i-j) \tag{70}$$

en donde $\delta(i-j)$ representa la δ de Krocneker o la de Dirac, según sea el espectro discreto o continuo.

7.- DESARROLLO EN SERIE DE FUNCIONES PROPIAS.

En el caso de que se cumplan las condiciones necesarias y suficientes para que las funciones propias $\phi_k^\dagger$, ϕ_k; ψ_α, $\psi_\alpha^\dagger$; ϕ_α, $\phi_\alpha^\dagger$ formen un conjunto completo en F_c, cualquier función perteneciente a F_c, y en particular el flujo neutrónico, solución de las ecuaciones temporales de Boltzmann, o de las ecuaciones del reactor crítico con fuente independiente, puede desarrollarse en serie de las funciones propias anteriores.

7.1.- CASO DE REACTOR CRITICO CON FUENTE INDEPENDIENTE.

La ecuación integrodiferencial de Boltzmann correspondiente, es la (89,III)

$$B\ \phi + Q = 0 \tag{71}$$

cuya solución puede desarrollarse en serie de funciones propias, solución de (25 y 26) o de (29 y 30).

En el primer caso, se tiene

$$\phi = \underset{j}{S}\ a_{k_j}\ \phi_{k_j} \tag{72}$$

con

$$B\ \phi_{k_j} = \rho_j\ F\ \phi_{k_j},\quad B^{\dagger}\phi^{\dagger}_{k_i} = \rho^{*}_i\ F\ \phi^{\dagger}_{k_i},\quad \langle\phi^{\dagger}_{k_i}|F|\phi_{k_j}\rangle = \delta(i-j) \tag{73}$$

habiéndose representado por ϕ_{k_j} las funciones propias correspondientes a valores propios de cualquier multiplicad. Sustituyendo (72) en (71), y teniendo en cuenta (73), resulta

$$\underset{j}{S}\ a_{k_j}\ B\ \phi_{k_j} + Q = \underset{j}{S}\ a_{k_j}\ \rho_j\ F\ \phi_{k_j} + Q = 0 \tag{74}$$

que multiplicada por $\phi^{\dagger}_{k_i}$, y considerando la condición de biortonormalización (73), se obtiene

$$\underset{j}{S}\ a_{k_j}\ \rho_j\ \langle\phi^{\dagger}_{k_i}|F|\phi_{k_j}\rangle + \langle\phi^{\dagger}_{k_i}|Q\rangle = 0 \Longrightarrow a_{k_i} = \frac{1}{\rho_i}\ \langle\phi^{\dagger}_{k_i}|Q\rangle \tag{75}$$

que llevada a (72) da la solución buscada

$$\phi = \underset{i}{S}\ \frac{1}{\rho_i}\ \langle\phi^{\dagger}_{k_i}|Q\rangle\ \phi_{k_i} \tag{76}$$

En el caso de emplear las funciones propias, solución de (29 y 30), se tiene

$$\phi = \underset{j}{S}\ a_{\alpha_j}\ \phi_{k_j} \tag{77}$$

con

$$B\ \phi_{\alpha_j} = \alpha_j\ \frac{1}{v}\ \phi_{\alpha_j},\quad B^{\dagger}\phi^{\dagger}_{\alpha_i} = \alpha^{*}_i\ \frac{1}{v}\ \phi^{\dagger}_{\alpha_i},\quad \langle\phi^{\dagger}_{\alpha_i}|\frac{1}{v}|\phi_{\alpha_j}\rangle = \delta(i-j) \tag{78}$$

resultando análogamente a lo anterior

$$\phi = \underset{i}{S} \frac{1}{\alpha_i} <\phi^{\dagger}_{\alpha_i}|Q> \phi_{\alpha_i} \tag{79}$$

Si el reactor está próximo a crítico $\rho_0 \sim \alpha_0 \sim 0$, el primer término del desarrollo en serie es predominante, es decir

$$\phi \sim c_k \, \phi_{k_0} \sim c_\alpha \, \phi_{\alpha_0} \tag{80}$$

siendo c_k y c_α dos constantes.

7.2.-CASO DE NO CONSIDERAR LOS NEUTRONES RETARDADOS.

La ecuación correspondiente es la (80,III)

$$v^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \phi = B \phi + Q = 0 \tag{81}$$

Considerando el desarrollo (77) con las ecuaciones (79), en la que los coeficientes del desarrollo son ahora función de t, $a_j(t)$, y procediendo como en el caso anterior, resulta

$$\underset{j}{S} \, v^{-1} \dot{a}_{\alpha_j} \phi_{\alpha_j} = \underset{j}{S} \, a_{\alpha_j} B \phi_{\alpha_j} + Q = \underset{j}{S} \, a_{\alpha_j} \alpha_j \frac{1}{v} \phi_{\alpha_j} + Q \tag{82}$$

luego

$$\dot{a}_{\alpha_i} - \alpha_i a_{\alpha_i} - <\phi^{\dagger}_{\alpha_i}|Q> = 0 \tag{83}$$

cuya solución, teniendo en cuenta que la fuente puede ser función de t, es análogamente a (14,IV)

$$a_{\alpha_i}(t) = a_{\alpha_i}(0)\, e^{\alpha_i t} + \int_0^t e^{\alpha_i(t-t')} <\phi^{\dagger}_{\alpha_i}(\vec{r},v\vec{\Omega})|Q(\vec{r},v\vec{\Omega},t')> dt' \tag{84}$$

El coeficiente $a_{\alpha_i}(0)$ se obtiene a partir de (77) particularizada para $t = 0$, cuyo producto escalar por $\frac{1}{v} \phi^{\dagger}_{\alpha_i}$, da

$$a_{\alpha_i}(0) = <\phi^{\dagger}_{\alpha_i}(\vec{r},v\vec{\Omega})|\frac{1}{v}|\phi(\vec{r},v\vec{\Omega},0)> \tag{85}$$

7.2.1.-Cuando la fuente independiente no depende del tiempo, los coeficientes del desarrollo valen

$$a_{\alpha_i}(t) = a_{\alpha_i}(0)\, e^{\alpha_i t} - \frac{1}{\alpha_i} <\phi^{\dagger}_{\alpha_i}(\vec{r},v\vec{\Omega})|Q(\vec{r},v\vec{\Omega})> (1-e^{\alpha_i t}) \tag{86}$$

7.2.2.-Cuando no existe fuente independiente, la ecuación anterior se reduce a

$$a_{\alpha_i}(t) = a_{\alpha_i}(0)\ e^{\alpha_i t} = \langle\phi^{\dagger}_{\alpha_i}(\vec{r},v\vec{\Omega})|\frac{1}{v}|\phi(\vec{r},v\vec{\Omega},0)\rangle\ e^{\alpha_i t} \tag{87}$$

que sustituída en (77), da

$$\phi(\vec{r},v\vec{\Omega},t) = \underset{i}{S}\ \langle\phi^{\dagger}_{\alpha_i}(\vec{r},v\vec{\Omega})|\frac{1}{v}|\phi(\vec{r},v\vec{\Omega},0)\rangle\ \phi_{\alpha_i}(\vec{r},v\vec{\Omega})\ e^{\alpha_i t} \tag{88}$$

análoga a la ecuación (106,III), obtenida al aplicar la transformación inversa de Laplace a la solución general de (78).

7.3.-CASO DE INCLUIR LOS NEUTRONES RETARDADOS.

La ecuación integrodiferencial de Boltzmann, en forma matrical (43, III), es entonces

$$V^{-1}\ \frac{\partial}{\partial t}\ \psi = C\ \psi + s \tag{89}$$

cuya solución puede desarrollarse en serie de funciones propias, solución de (27 y 28). Es decir,

$$\psi = \underset{j}{S}\ a_{\alpha_j}\ \psi_{\alpha_j} \tag{90}$$

siendo ψ_{α_j} solución de

$$C\ \psi_{\alpha_j} = \alpha_j\ V^{-1}\ \psi_{\alpha_j}\ ,\quad C^{\dagger}\ \psi^{\dagger}_{\alpha_i} = \alpha^{*}_i\ V^{-1}\ \psi^{\dagger}_{\alpha_i},\quad \langle\psi^{\dagger}_{\alpha_i}|V^{-1}|\psi_{\alpha_j}\rangle = \delta(i-j) \tag{91}$$

y procediendo como en el párrafo anterior, se obtiene

$$a_{\alpha_i}(t) = a_{\alpha_i}(0)\ e^{\alpha_i t} + \int_0^t e^{\alpha_i(t-t')}\ \langle\psi^{\dagger}_{\alpha_i}|s_0\rangle\ dt' \tag{92}$$

con

$$a_{\alpha_i}(0) = \langle\psi^{\dagger}_{\alpha_i}|V^{-1}|\psi_0\rangle \tag{93}$$

representando el subíndice o el vector de componentes evaluados en t = 0.

7.3.1.-Cuando no existe fuente independiente, las expresiones anteriores se simplifican en

$$\psi = \underset{i}{S}\ \langle\psi^{\dagger}_{\alpha_i}|V^{-1}|\psi_0\rangle\ \psi_{\alpha_i}\ e^{\alpha_i t} \tag{94}$$

análoga a la (108,III), obtenida al aplicar la transformada inversa de Laplace a la solución general de (91).

8.- IMPORTANCIA NEUTRONICA.

Sea un reactor crítico o virtualmente crítico, sin que existan neutrones, ni por tanto precursores, para $t \leq 0^-$. En el instante $t=0$ se inyectan Q neutrones en el punto fásico $\vec{r},v\vec{\Omega} \in R \times V \times \Omega$. De estos neutrones, parte se fugarán por la superficie libre, mientras que otros producirán colisiones. Entre los que producen colisiones, unos serán capturados, y otros originarán dispersiones y fisiones, dando lugar a los neutrones secundarios de la primera generación. Estos neutrones producirán estadísticamente procesos análogos a los inyectados, es decir, fugas, capturas y neutrones de la segunda generación, y así sucesivamente.

El flujo neutrónico evolucionará con el tiempo según la ecuación de Boltzmann del transporte de neutrones (89), partiendo de las condiciones iniciales

$$\phi(\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}',0) = v'\,Q\,\delta(\vec{r}\,'-\vec{r})\,\delta(v'-v)\,\delta(\vec{\Omega}'-\vec{\Omega}) \tag{95}$$

$$P_d(\vec{r}\,',v',0) = 0$$

referidas a cualquier punto fásico, $\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}' \in R \times V \times \Omega$.

Existen diversas definiciones de la importancia neutrónica, las cuales están relacionadas entre sí, y con las funciones adjuntas.

8.1.-IMPORTANCIA DE LOS NEUTRONES INYECTADOS.

Se define como importancia de los neutrones inyectados en $\vec{r},v\vec{\Omega}$, a la razón entre el número total de neutrones que hay en la distribución asintótica, y el número de neutrones inyectados, es decir

$$I(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \frac{1}{Q}\int n(\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}',\infty)\; dv'd\Omega'd\vec{r}\,' \tag{96}$$

siendo $n(\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}',\infty)$ la densidad neutrónica asintótica que depende paramétricamente del punto fásico de inyección $\vec{r},v\vec{\Omega}$.

8.1.1.- Otras veces se define como importancia de los neutrones inyectados en $\vec{r},v\vec{\Omega}$, a la razón entre el número total de colisiones o de fisiones, producidas en la unidad de tiempo, correspondientes a la distribución asintótica, y el número de neutrones inyectados, o sea

$$I_x(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \frac{1}{Q}\int \Sigma_x(\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}')\;\phi(\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}',\infty)\; dv'd\Omega'd\vec{r}\,', \quad x = t,\ f \tag{97}$$

8.1.2.- También se define como importancia de los neutrones inyectados en $\vec{r},v\vec{\Omega}$, a la razón entre la potencia producida correspondiente a la distribución asintótica, y el número de neutrones inyectados, o sea

$$I_{pot}(\vec{r},v\vec{\Omega}) = f\, I_f(\vec{r},v\vec{\Omega}) \tag{98}$$

siendo $f = 0{,}31 \times 10^{-10}$ w.seg.fisión^{-1}, la energía producida por fisión.

8.2.-IMPORTANCIA DE LOS NEUTRONES EMITIDOS.

En vez de considerar la importancia a los neutrones inyectados en $\vec{r},v\vec{\Omega}$ puede calcularse la importancia asociada a los neutrones secundarios emitidos en la primera generación, debidos a las colisiones o únicamente a las fisiones, producidas por los neutrones inyectados.

8.3.-CONDICIONES GENERALES, DE CONTINUIDAD Y DE CONTORNO DE LA IMPORTANCIA NEUTRONICA.

Debido a la naturaleza física de la importancia neutrónica, expresada en las ecuaciónes (96 a 98), debe cumplir las condiciones generales del §2. Como la densidad neutrónica asintótica varía continuamente cuando los neutrones de velocidad $v\vec{\Omega}$ son inyectados a lo largo de la recta $\vec{r}+R\vec{\Omega}$, se deberá cumplir la condición de continuidad del §2. Por último, como la importancia de un nuetrón inyectado en un punto de la superficie libre con velocidad en la dirección saliente del reactor, tiene importancia nula, también se deberá cumplir la condición de contorno del §2. De lo anterior se obtiene que la importancia neutrónica verifica las mismas condiciones que el flujo adjunto, dadas en el §2, es decir

i) $I(\vec{r},v\vec{\Omega})$ debe ser real, finita y no negativa, para todo $\vec{r},v\vec{\Omega} \in R \times V \times \Omega$.

ii) $I(\vec{r},v\vec{\Omega})$ debe ser función continua de $\vec{r}$ en la dirección $\vec{\Omega}$, para todo $\vec{r},v\vec{\Omega} \in R \times V \times \Omega$.

iii) $I(\vec{r},v\vec{\Omega})$ debe verificar la condición de contorno adjunta

$$I(\vec{r}_s,v\vec{\Omega}) = 0, \quad \text{para} \quad n_s \cdot \vec{\Omega} > 0, \quad \vec{r}_s \in S \tag{99}$$

Por tanto, $I \in F^{\dagger}$.

9.- ECUACIONES DEL BALANCE DE LA IMPORTANCIA NEUTRONICA.

Teniendo en cuenta el significado físico de la importancia neutrónica, se obtiene el principio de conservación de la importancia:

i) La importancia de un neutrón inyectado en un reactor crítico o virtualmente crítico es igual a la suma de las importancias de sus descendientes, en cada una de las generaciones sucesivas.

Basándose en este principio de conservación, se obtienen las ecuaciones del balance de la importancia neutrónica.

9.1.-ECUACIONES INTEGRODIFERENCIALES DE LA IMPORTANCIA.

La importancia de los Q neutrones inyectados en $\vec{r},v\vec{\Omega}$, es igual a la importancia de los neutrones que llegan a $\vec{r}+(dR)\vec{\Omega}$ sin sufrir colisión, más la importancia de los neutrones secundarios emitidos por colisión durante le trayecto de $\vec{r}$ a $\vec{r}+(dR)\vec{\Omega}$.

9.1.1.- En el caso de un reactor crítico, se tiene

i) El número de neutrones que llegan a $\vec{r}+(dR)\vec{\Omega}$ sin sufrir colisión es $Q[1-(dR)\ \Sigma_t(\vec{r},v\vec{\Omega})]$, luego su importancia asociada será:

$$\left[1-(dR)\ \Sigma_t(\vec{r},v\vec{\Omega})\right]\ I(\vec{r}+dR\vec{\Omega},v\vec{\Omega}) = I(\vec{r},v\vec{\Omega}) + (dR)\vec{\Omega}\cdot\nabla\ \ I(\vec{r},v\vec{\Omega}) -$$

$$- (dR)\ \Sigma_t(\vec{r},v\vec{\Omega})\ I(\vec{r},v\vec{\Omega}) + \text{términos en } (dR)^n,\quad n > 2 \qquad (100)$$

ii) El número de neutrones emitidos por captura es nulo, luego su importancia asociada será también nula.

iii) El número de neutrones secundarios emitidos con velocidad dentro de $dv'd\Omega'$ en $v'\vec{\Omega}'$, debidos a las dispersiones producidas durante el trayecto dR, es $Q(dR)\ \Sigma_s(\vec{r},v\vec{\Omega}\to v'\vec{\Omega}')\ dv'd\Omega'$, luego la importancia asociada a todos los neutrones emitidos por dispersión cualesquiera que sea su velocidad, será

$$(dR)\int\Sigma_s(\vec{r},v\vec{\Omega}\to v'\vec{\Omega}')\ I(\vec{r},v'\vec{\Omega}')\ dv'd\Omega' \qquad (101)$$

iv) El número de neutrones secundarios emitidos con velocidad $dv'd\Omega'$ dentro de $v'\vec{\Omega}'$, debidos a las fisiones producidas durante el trayecto dR, es $Q(dR)\ \frac{1}{4\pi}\ \chi_f(v')\ \nu(v)\ \Sigma_f(\vec{r},v)\ dv'd\Omega'$, luego la importancia asociada a todos los neutrones emitidos por fisión cualesquiera que sea su velocidad, será

$$(dR)\ \frac{1}{4\pi}\ \nu(v)\ \Sigma_f(\vec{r},v)\int\chi_f(v')\ I(\vec{r},v'\vec{\Omega}')\ dv'd\Omega' \qquad (102)$$

La suma de todas estas importancias debe ser igual a $I(\vec{r},v\vec{\Omega})$, luego

$$\vec{\Omega}\cdot\nabla\, I(\vec{r},v\vec{\Omega}) - \Sigma_t(\vec{r},v\vec{\Omega})\, I(\vec{r},v\vec{\Omega}) + \int \Sigma_s(\vec{r},v\vec{\Omega}\to v'\vec{\Omega}')\, I(\vec{r},v'\vec{\Omega}')\, dv'd\Omega' +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\,\nu(v)\,\Sigma_f(\vec{r},v) \int \chi_f(v')\, I(\vec{r}\,,v'\vec{\Omega}')\, dv'd\Omega' = 0, \quad I \in F^\dagger \tag{103}$$

9.1.2.- En el caso de un reactor virtualmente crítico con k o con λ, el número de neutrones secundarios debidos a las fisiones está dividido por k_0, o bien el debido a las dispersiones y fisiones está dividido por λ_0, obteniéndose así las ecuaciones en I_k o I_λ.

9.1.3.- Comparando estas ecuaciones integrodiferenciales en unión de sus condiciones generales, de continuidad y de contorno, con las correspondientes para el flujo adjunto, dadas en (37 a 39), se obtiene,

$$\phi^\dagger = c_1\, I, \quad \phi^\dagger_{k_0} = c_2\, I_k, \quad \phi^\dagger_{\lambda_0} = c_3\, I_\lambda \tag{104}$$

siendo c_1, c_2 y c_3 constantes.

Por tanto, las importancias son proporcionales a los flujos adjuntos correspondientes al valor propio dominante.

9.2.-ECUACIONES INTEGRALES DE LA IMPORTANCIA.

Como las importancias son proporcionales a los flujos adjuntos, y ambos pertenecen al espacio $F^\dagger$, satisfarán las mismas ecuaciones integrales.

Empleando un razonamiento análogo al empleado en el §7,IV, pueden obtenerse directamente las ecuaciones integrales de la importancia de los neutrones inyectados I_λ, y la de los emitidos I_{Q_t}, para un reactor virtualmente crítico con λ.

9.2.1.- Sea Q el número de neutrones inyectados en $\vec{r},v\vec{\Omega}$, luego Q $T(\vec{r}\to\vec{r}\,',v)$ será el número de neutrones que llegan a la unidad de superficie normal a $\vec{r}-\vec{r}\,'$ en $\vec{r}\,'$, con velocidad $v\vec{\Omega}$, sin sufrir colisión. Por tanto, el número de neutrones secundarios emitidos dentro de $d\vec{r}\,'dv'd\Omega'$ en $\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}'$, debidos a las colisiones producidas dentro de $d\vec{r}\,'$ en $\vec{r}\,'$, será $Q\,\frac{1}{\lambda_0}\Big[\Sigma_s(\vec{r}\,',v\vec{\Omega}\to v'\vec{\Omega}') + \frac{1}{4\pi}\,\chi_f(v')\,\nu(v)\,\Sigma_f(\vec{r}\,',v)\Big]\, T(\vec{r}\to\vec{r}\,',v)\,\delta\Big(\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \vec{\Omega}\Big)\, dv'd\Omega'd\vec{r}\,'$, luego la importancia de todos estos neutrones emitidos, cualesquiera que sea su velocidad se obtendrá multiplicando la expresión anterior por $I_{\lambda_0}(\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}')$, e integrando para todo $\vec{r}\,',v'\vec{\Omega}' \in R \times V \times \Omega$. Al igualar este resultado a la importancia $I_{\lambda_0}(\vec{r},v\vec{\Omega})$ de los neutrones inyectados se obtiene la ecuación (41), o sea

$$\phi^\dagger_{\lambda_0} = c_3\, I_\lambda \tag{105}$$

dada ya en (104).

9.2.2.- Análogamente, para la importancia de los neutrones emitidos en la primera generación, debidos a las colisiones producidas por los neutrones inyectados, se obtiene la ecuación (43), o sea

$$\bar{\phi}^{\dagger}_{\lambda_0} = Q^{\dagger}_{\lambda_0 t} = (S^{\dagger} + F^{\dagger})\, \phi^{\dagger}_{\lambda_0} = c_4\, I_{Q_t} \qquad (106)$$

siendo c_4 una constante.

9.3.-DESARROLLO EN SERIE DE FUNCIONES PROPIAS ψ_{α_i}.

Sea un reactor crítico, sin que existan neutrones ni precursores para $t \leq 0^-$. En el instante $t = 0$ se inyectan Q neutrones en $\vec{r}, v\vec{\Omega}$, por lo cual el flujo evolucionará con el tiempo según la ecuación (89), con las condiciones iniciales (95).

Sustituyendo (95) en (93), resulta

$$a_{\alpha_i}(0) = Q\, \phi^{\dagger}_{\alpha_i}(\vec{r}, v\vec{\Omega}) \qquad (107)$$

luego (92), da

$$a_{\alpha_i}(t) = Q\, \phi^{\dagger}_{\alpha_i}(\vec{r}, v\vec{\Omega})\; e^{\alpha_i t} \qquad (108)$$

que llevada a (90), se obtiene el desarrollo en serie de ψ

$$\psi = Q \underset{i}{S}\, \phi^{\dagger}_{\alpha_i}(\vec{r}, v\vec{\Omega})\; \psi_{\alpha_i}\; e^{\alpha_i t} \qquad (109)$$

cuya primera fila, es

$$\phi(\vec{r}\,', v'\vec{\Omega}\,', t) = Q \underset{i}{S}\, \phi^{\dagger}_{\alpha_i}(\vec{r}, v\vec{\Omega})\; \phi_{\alpha_i}(\vec{r}\,', v'\vec{\Omega}\,')\; e^{\alpha_i t} \qquad (110)$$

idéntica a la (88) cuando no se consideraban los neutrones retardados.

Al ser $\alpha_0 > \mathrm{Re}\, \alpha_n$, $n \neq 0$, en la distribución asintótica solo prevalecerá el primer término, y como la configuración y composición del medio en las condiciones consideradas corresponde a la de un reactor crítico, $\alpha_0 = 0$, obteniéndose para el flujo asintótico

$$\phi(\vec{r}\,', v'\vec{\Omega}\,', \infty) = Q\, \phi^{\dagger}_{\alpha_0}(\vec{r}, v\vec{\Omega})\; \phi_{\alpha_0}(\vec{r}\,', v'\vec{\Omega}\,') \qquad (111)$$

luego las importancias de los neutrones inyectados, definidas en el §8.1, valdrán

$$I(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \phi^{\dagger}_{\alpha_0}(\vec{r},v\vec{\Omega}) \int \frac{1}{v'} \phi_{\alpha_0}(\vec{r}',v'\vec{\Omega}') \, dv' d\Omega' d\vec{r}' \tag{112}$$

$$I_x(\vec{r},v\vec{\Omega}) = \phi^{\dagger}_{\alpha_0}(\vec{r},v\vec{\Omega}) \int \Sigma_x(\vec{r}',v'\vec{\Omega}') \, \phi_{\alpha_0}(\vec{r}',v'\vec{\Omega}') \, dv' d\Omega' d\vec{r}', \quad x = t,f \tag{113}$$

siendo proporcionales al flujo adjunto $\phi^{\dagger}_{\alpha_0}$ para el valor propio dominante, de acuerdo con los resultados de (104 y 106), ya que como en este caso se ha considerado que el reactor es crítico $\alpha_0 = \rho_0 = 0$, $\lambda_0 = k_0 = 1$, luego $\phi^{\dagger}_{k_0} = \phi^{\dagger}_{\lambda_0} = \phi^{\dagger}_{\alpha_0} = \phi^{\dagger} = c\, I$.

Nótese que en la obtención de (111) se ha empleado la condición de biortonormalización del flujo (91), y que debido a la estructura de las ecuaciones (112 y 113) las constantes de proporcionalidad entre las importancias y los flujos adjuntos son independientes de la condición de biortonormalización del flujo.

10.- RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES ADJUNTAS Y LAS IMPORTANCIAS NEUTRONICAS.

En (104) se obtuvo la relación entre las importancias de los neutrones inyectados y los flujos adjuntos, para el valor propio dominante, en un reactor crítico o virtualmente crítico con k y λ. En (106) se obtuvo la relación entre las importancias de los neutrones emitidos y los flujos adjuntos, para el valor propio dominante, en un reactor virtualmente crítico con λ. Resumiendo estos resultados, y los del §5, se obtiene

$$\phi^{\dagger}_{k_0} = c_2\, I_k \tag{114}$$

$$\bar{\phi}_k = Q_{kf} = F\,\phi_k, \quad \bar{k} = k \tag{115}$$

$$\bar{\phi}^{\dagger}_k = Q^{\dagger}_{kf} = F^{\dagger}\,\phi^{\dagger}_k, \quad \bar{k}^{\dagger} = k^{\dagger} \Longrightarrow \bar{\phi}^{\dagger}_{k_0} = Q^{\dagger}_{k_0 f} = c_2\, F^{\dagger}\, I_k \tag{116}$$

$$\phi^{\dagger}_{\lambda_0} = c_3\, I_\lambda \tag{117}$$

$$\bar{\phi}_\lambda = Q^{\dagger}_{\lambda t} = (S+F)\,\phi_\lambda, \quad \bar{\lambda} = \lambda \tag{118}$$

$$\bar{\phi}^{\dagger}_\lambda = Q^{\dagger}_{\lambda t} = (S^{\dagger} + F^{\dagger})\,\phi^{\dagger}_\lambda, \quad \bar{\lambda}^{\dagger} = \lambda^{\dagger} \Longrightarrow \bar{\phi}^{\dagger}_{\lambda_0} = Q^{\dagger}_{\lambda_0 t} = c_3(S^{\dagger}+F^{\dagger})\, I_\lambda = c_4 I_{Q_t} \tag{119}$$

BIBLIOGRAFIA DE LIBROS CONSULTADOS SOBRE TEORIA Y CALCULO DE REACTORES

1.-Bell, G.I. y Glasstone, S. NUCLEAR REACTOR THEORY Van Nostrand (1970).

2.-Case,K.M. y Zweifel, P.F. LINEAR TRANSPORT THEORY Addison Wesley (1967).

3.Henry, A. NUCLEAR REACTOR ANALYSIS - The MIT Press (1975).

4.-Akcasu Z., Lellouche, G.S. y Shotkin, L.M. MATHEMATICAL METHODS IN NUCLEAR REACTOR DYNAMICS. Academic Press (1971).

5.-Velarde, G. TEORIA DE REACTORES. IEN , JEN (1960).

6.-Greenspan H., Kelber, G.N. y Okrent, D. COMPUTING METHODS IN REACTOR PHYSICS. Gordon and Breach (1968).

7.-Clark, M. y Hansen ,K.F. NUMERICAL METHODS OF REACTOR ANALYSIS. Academic Press (1964).

8.-Davison,B. NEUTRON TRANSPORT THEORY. Oxford (1957).

J.E.N. 335

Junta de Energía Nuclear, División de Tecnología de Reactores, Madrid.

"Ecuaciones integrodiferenciales e integrales normales y adjuntas del transporte de neutrones" (Parte II)

VELARDE, G. (1976) 39 pp. 1 fig. 8 refs.

Basándose en las hipótesis simplificativas o en las ecuaciones integrodiferenciales de Botlzmann del transporte de neutrones, expuestas en el informe JEN 334, se obtienen las diversas ecuaciones integrales, y sus correspondientes adjuntas. Se establecen relaciones entre las diferentes funciones propias y sus adjuntas, y en particular, partiendo de la ecuación integrodiferencial de Boltzmann, se establecen las relaciones entre las soluciones de la ecuación adjunta de su ecuación integral y las soluciones de la ecuación integral de su

J.E.N. 335

Junta de Energía Nuclear, División de Tecnología de Reactores, Madrid.

"Ecuaciones integrodiferenciales e integrales normales y adjuntas del transporte de neutrones" (Parte II)

VELARDE, G. (1976) 39 pp. 1 fig. 8 refs.

Basándose en las hipótesis simplificativas o en las ecuaciones integrodiferenciales de Botlzmann del transporte de neutrones, expuestas en el informe JEN 334, se obtienen las diversas ecuaciones integrales, y sus correspondientes adjuntas. Se establecen relaciones entre las diferentes funciones propias y sus adjuntas, y en particular, partiendo de la ecuación integrodiferencial de Boltzmann, se establecen las relaciones entre las soluciones de la ecuación adjunta de su ecuación integral y las soluciones de la ecuación integral de su

J.E.N. 335

Junta de Energía Nuclear, División de Tecnología de Reactores, Madrid.

"Ecuaciones integrodiferenciales e integrales normales y adjuntas del transporte de neutrones" (Parte II)

VELARDE, G. (1976) 39 pp. 1 fig. 8 refs.

Basándose en las hipótesis simplificativas o en las ecuaciones integrodiferenciales de Botlzmann del transporte de neutrones, expuestas en el informe JEN 334, se obtienen las diversas ecuaciones integrales, y sus correspondientes adjuntas. Se establecen relaciones entre las diferentes funciones propias y sus adjuntas, y en particular, partiendo de la ecuación integrodiferencial de Boltzmann, se establecen las relaciones entre las soluciones de la ecuación adjunta de su ecuación integral y las soluciones de la ecuación integral de su

J.E.N. 335

Junta de Energía Nuclear, División de Tecnología de Reactores, Madrid.

"Ecuaciones integrodiferenciales e integrales normales y adjuntas del transporte de neutrones" (Parte II)

VELARDE, G. (1976) 39 pp. 1 fig. 8 refs.

Basándose en las hipótesis simplificativas o en las ecuaciones integrodiferenciales de Botlzmann del transporte de neutrones, expuestas en el informe JEN 334, se obtienen las diversas ecuaciones integrales, y sus correspondientes adjuntas. Se establecen relaciones entre las diferentes funciones propias y sus adjuntas, y en particular, partiendo de la ecuación integrodiferencial de Boltzmann, se establecen las relaciones entre las soluciones de la ecuación adjunta de su ecuación integral y las soluciones de la ecuación integral de su

ecuación adjunta.

CLASIFICACION INIS Y DESCRIPTORES.- E-21; Neutron Transport Theory; Boltzmann Equation; Integral Equations; Adjoint Difference Method; Eigenfunctions.

ecuación adjunta.

CLASIFICACION INIS Y DESCRIPTORES.- E-21; Neutron Transport Theory; Boltzmann Ecuation; Integral Equations; Adjoint Difference Method; Eigenfunctions.

ecuación adjunta.

CLASIFICACION INIS Y DESCRIPTORES.- E-21; Neutron Transport Theory; Boltzmann Equation; Integral Equations; Adjoint Difference Method; Eigenfunction.

ecuación adjunta.

CLASIFICACION INIS Y DESCRIPTORES.- E-21; Neutron Transport Theory; Boltzmann Equation; Integral Equations; Adjoint Difference Method; Eigenfunction.

J.E.N. 335

Junta de Energía Nuclear, División de Tecnología de Reactores, Madrid.

"Normal and adjoint integral and integrodifferential neutron transport equations". (Part II)

VELARDE, G. (1976) 39 pp. 1 fig. 8 refs.

Using the simplifying hypotheses of the integrodifferential Boltzmann equations of neutron transport, given in JEN 334 report, several integral equations, and theirs adjoint ones, are obtained. Relations between the different normal and adjoint eigenfunctions are established and, in particular, proceeding from the integrodiferential Boltzmann equation it's found out the relation between the solutions of the adjoint equation of its integral one, and the solutions of the integral equation of its adjoint one.

J.E.N. 335

Junta de Energía Nuclear, División de Tecnología de Reactores, Madrid.

"Normal and adjoint integral and integrodifferential neutron transport equations" (Part II)

VELARDE, G. (1976) 39 pp. 1 fig. 8 refs.

Using the simplifying hypotheses of the integrodifferential Boltzmann equations of neutron transport, given in JEN 334 report, several integral equations, and theirs adjoint ones, are obtained. Relations between the different normal and adjoint eigenfunctions are established and, in particular, proceeding from the integrodiferential Boltzmann equation it's found out the relation between the solutions of the adjoint equation of its integral one, and the solutions of the integral equation of its adjoint one.

J.E.N. 335

Junta de Energía Nuclear, División de Tecnología de Reactores, Madrid.

"Normal and adjoint integral and integrodifferential neutron transport equations". (Part II)

VELARDE, G. (1976) 39 pp. 1 fig. 8 refs.

Using the simplifying hypotheses of the integrodifferential Boltzmann equations of neutron transport, given in JEN 334 report, several integral equations, and theirs adjoint ones, are obtained. Relations between the different normal and adjoint eigenfunctions are established and, in particular, proceeding from the integrodiferential Boltzmann equation it's found out the relation between the solution of the adjoint equation of its integral one, and the solutions of the integral equation of its adjoint one.

J.E.N. 335

Junta de Energía Nuclear, División de Tecnología de Reactores, Madrid.

"Normal and adjoint integral and integrodifferential neutron transport equations". (Part II)

VELARDE, G. (1976) 39 pp. 1 fig. 8 refs.

Using the simplifying hypotheses of the integrodifferential Boltzmann equations of neutron transport, given in JEN 334 report, several integral equations, and theirs adjoint ones, are obtained. Relations between the different normal and adjoint eigenfunctions are established and, in particular, proceeding from the integrodiferential Boltzmann equation it's found out the relation between the solution of the adjoint equation of its integral one, and the solutions of the integral equation of its adjoint one.

INIS CLASSIFICATION AND DESCRIPTORS.- E-21; Neutron Transport Theory; Boltzmann Equation; Integral Equations; Adjoint Difference Method; Eigenfunctions.

INIS CLASSIFICATION AND DESCRIPTORS.- E-21; Neutron Transport Theory; Boltzmann Equation; Integral Equations; Adjoint Difference Method; Eigenfunctions.

INIS CLASSIFICATION AND DESCRIPTORS.- E-21; Neutron Transport Theory; Boltzmann Equation; Integral Equations; Adjoint Difference Method; Eigenfunctions.

INIS CLASSIFICATION AND DESCRIPTORS.- E-21; Neutron Transport Theory; Boltzmann Equation; Integral Equations; Adjoint Difference Method; Eigenfunctions.