

BR7801639

1N15-mt--4302

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

FATORES DE FORMA ELÁSTICO E INELÁSTICO DO  $Ne^{2+}$  NA APROXIMAÇÃO  
DE HARTREE-FOCK

SERGIO AUGUSTO CARIAS DE OLIVEIRA

Tese de Mestrado

Apresentada ao

Instituto de Física Teórica

São Paulo - 1977

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

FATORES DE FORMA ELÁSTICO E INELÁSTICO DO  $\text{Ne}^{20}$  NA APROXIMAÇÃO  
DE HARTREE-FOCK

SERGIO AUGUSTO CARIAS DE OLIVEIRA

Tese de Mestrado

Apresentada ao

Instituto de Física Teórica

São Paulo - 1977

FATORES DE FORMA ELÁSTICO E INELÁSTICO DO  $\text{Ne}^{20}$  NA APROXIMAÇÃO  
DE HARTREE-FOCK

Dedico

aos meus pais e filhos

A G R A D E Ç O

- Ao Prof. D. R. de Oliveira pela sugestão e orientação constante no desenvolvimento deste trabalho.
- Ao Prof. P. Leal Ferreira pela acolhida no I.F.T.
- Ao S. S. Mizrahi pelas discussões.
- A todos do I.F.T. pela amizade.
- Ao CNPq pelo apoio financeiro.

## Í N D I C E

Introdução	1.
I. As Equações de Hartree-Fock	5.
II. Determinações de estados com momento angular bem definido	12.
III. A densidade nuclear	16.
IV. Fatores de Forma	21.
V. Correções do centro de massa e tamanho finito do proton	32.
VI. Comentários e Conclusões	36.
Bibliografia	41.

## Introdução

O núcleo do  $\text{Ne}^{20}$  tem sido estudado com a aproximação de Hartree-Fock, sendo possível reproduzir com bastante sucesso seu espectro de energia e probabilidades de transição entre os níveis da banda fundamental.

Diversas simetrias costumam ser admitidas para núcleos com  $N=Z=\text{par}$ , as quais permitem que os cálculos sejam realizados, desde que o número de partículas do núcleo em questão não seja muito grande. O  $\text{Ne}^{20}$  possui estas características, que o tornam um sistema físico propício ao estudo teórico.

Em trabalho anterior <sup>(6)</sup>, foi possível estender a investigação de suas propriedades, nesta mesma linha de modelo de partículas independentes, construindo estados excitados de uma partícula - um buraco, a partir do estado fundamental de Hartree-Fock; esta abordagem constitui a aproximação de Tamm-Dancoff de 1.ª ordem, cujos resultados para o  $\text{Ne}^{20}$ , níveis de energia e transições, não foram satisfatórios.

No presente trabalho decidimos estudar outras propriedades da banda fundamental do  $\text{Ne}^{20}$ , como densidade de partículas e fatores de forma elástico e inelástico.

Na formulação do problema teórico, as expressões das grandezas calculadas dependerão, direta ou indiretamente, da força que mantém os nucleons ligados, no núcleo. Esta força nuclear é, fundamentalmente, de dois corpos, não tendo sido até ago-

ra determinada nos seus mínimos detalhes. Como algumas de suas características gerais são conhecidas, diversas interações de dois corpos têm sido propostas, cujos parâmetros foram ajustados de modo que certas propriedades nucleares fossem reproduzidas.

Sabe-se que a interação entre dois nucleons livres é diferente daquela interação que os mesmos teriam se confinados em um núcleo.

Na literatura se encontra uma série de trabalhos onde se apresentam as mais sofisticadas técnicas, através das quais admitindo conhecida a força entre dois nucleons livres chega-se à chamada interação efetiva, envolvendo nucleons ligados, no núcleo.

Neste trabalho, os elementos de matriz da interação de dois corpos envolvem apenas os estados de partícula independente da camada  $1s-0d$ .

Nesta camada existem 63 elementos de matriz reduzidos independentes, do tipo  $\langle j_1 j_2 | v | j_3 j_4 \rangle_{JT}$ ; diferentes autores determinaram suas interações efetivas a partir de algum potencial de 2 corpos, exprimindo-as na forma desses elementos de matriz reduzidos.

Nós nos valemos desses elementos de matriz em nosso cálculo. Sem entrar em pormenores de como foram obtidos passaremos a uma descrição sucinta dos mesmos: A) Os elementos de matriz (KLS) foram deduzidos por S.Kahana, H.C.Lee e C.K. Scott<sup>(25)</sup> a partir de um potencial realístico não local, separável no es-



paço de momentos (semelhante ao potencial de Tabakin). B) Elementos de matriz de Kuo<sup>(27)</sup> (K) obtidos a partir do potencial de Hamada - Johnston. C) Elementos de matriz de Sussex (S), obtidos diretamente a partir dos deslocamentos de fase do espalhamento nucleon-nucleon por Elliott, Mavromatis e Sanderson<sup>(26)</sup> D) Elementos de matriz deduzidos de um potencial central de Yukawa, com mistura de troca, cujos parâmetros foram ajustados para reproduzirem os níveis de energia do  $F^{18}$  e  $O^{18}$ . E) Elementos de matriz da interação de Skyrme, com os parâmetros ajustados por S.S. Mizrahi<sup>(5)</sup>.

Na seção (I), construímos o determinante de Slater  $|\phi_{HF}\rangle$  que representa o estado fundamental do núcleo. A energia de Hartree-Fock ( $E_{HF}$ ) é obtida usando o formalismo de 2a. quantização; estabelecendo a condição de minimização, obtemos as equações de H.F, cuja solução nos fornece os estados de partícula independente da base de HF.

Na seção (II) leva-se em conta o fato de que a função de onda do estado fundamental  $|\phi_{HF}\rangle$  não é auto estado de  $\hat{J}^2$ , uma vez que não tem momento angular J bem definido. É usado então o método de projeção de Peierls-Yoccoz<sup>(12)</sup> na obtenção de tais estados, os quais nos permitem calcular grandezas físicas observáveis do núcleo.

Conhecida a expressão para a distribuição da densidade nuclear (Seção III), desenvolvemos na seção IV os cálculos para os fatores de forma elástico e inelástico. Entretanto a tais fatores de forma duas correções devem ser aplicadas. Uma delas é a "correção do centro de massa", que evita o aparecimento de estados espúrios. A outra é a "correção devida ao tamanho finito do proton".

O fator de forma inelástico está relacionado com a seção de choque do processo de espalhamento elétron-núcleo em que este sofre uma transição do estado fundamental para um estado excitado. Se o núcleo envolvido for tratado como sendo constituído por nucleons de valência acima de um caroço inerte, surgirá daí a idéia de carga efetiva.

Como um exemplo, o núcleo  $O^{18}$  tem somente neutrons fora do caroço e, no entanto, observam-se transições de multipolo elétrico. Isto indica que o caroço deve participar na transição num processo que pode ser descrito como "polarização do caroço". Uma maneira simples de atacar este problema, sem sair do modelo de camadas, é admitindo que todos os nucleons de valência se comportam como partículas carregadas, com cargas efetivas  $e_p^{eff}$ ,  $e_n^{eff}$  para o proton e neutron, respectivamente, dadas por:

$$e_p^{eff} = (1 + \alpha_p)e$$

$$e_n^{eff} = \alpha_n e$$

onde  $(e)$  é a carga do proton e  $\alpha_p$  e  $\alpha_n$  são comumente aceitas na camada (1s 0d) como  $\alpha_p \approx \alpha_n \approx 0,5$ ,

valores também usados neste trabalho.

Finalmente, na seção VI discutimos os resultados obtidos.

## I. As equações de Hartree-Fock

A aproximação de Hartree-Fock (HF) consiste em um método variacional para obter o estado fundamental do núcleo. Tal estado é representado por um determinante de Slater, que, no formalismo de segunda quantização, tem a seguinte forma:

$$|\Phi_0\rangle = a_{i_1}^+ a_{i_2}^+ \dots a_{i_n}^+ |0\rangle \quad (\text{I.1})$$

onde  $a_{i_n}^+$  representa um operador fermiônico que cria uma partícula na  $n$ -ésima órbita, definida pelo conjunto  $i$  de números quânticos, do estado vácuo  $|0\rangle$ ; juntamente com o operador de aniquilação  $a_{i_n}$ , satisfazem as seguintes regras de anti-comutação:

$$\left\{ a_{\xi}, a_{\xi'}^+ \right\} = \delta_{\xi\xi'} \quad (\text{I.2a})$$

$$\left\{ a_{\xi}, a_{\xi'} \right\} = \left\{ a_{\xi}^+, a_{\xi'}^+ \right\} = 0 \quad (\text{I.2b})$$

O índice  $\xi$  poderá representar estados ocupados, caracterizados pelos índices  $i, j$ , ou estados não ocupados,  $m, n$ .

O estado vácuo  $|0\rangle$  deve satisfazer a propriedade, que o define,

$$a_{\xi} |0\rangle = 0. \quad \xi = i \text{ ou } m \quad (\text{I.3})$$

No formalismo de segunda quantização o Hamiltoniano nuclear é

$$\hat{H} = \sum_{p,q} \langle p|t|q \rangle a_p^\dagger a_q + \frac{1}{4} \sum_{p,q,r,s} \langle p r | v | q s \rangle a_p^\dagger a_r^\dagger a_s a_q \quad (\text{I.4})$$

onde,  $\langle p|t|q \rangle$  é o elemento de matriz do operador energia cinética e  $\langle p r | v | q s \rangle$  é o elemento de matriz antissimetrizado da interação nucleon-nucleon, ambos entre os estados  $p, q, r, s$  de uma base qualquer.

A energia de HF é obtida com a minimização do valor esperado do Hamiltoniano (I.4) em (I.1).

$$E_{\text{HF}} = \langle \Phi_0 | \hat{H} | \Phi_0 \rangle = \sum_{i=1}^A \langle i|t|i \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^A \langle i j | v | i j \rangle. \quad (\text{I.5})$$

Como as órbitas de partícula independente,  $(i, j)$ , que minimizam  $E_{\text{HF}}$ , não são conhecidas, o estado  $|\xi\rangle$  da base de HF é expandido em termos de uma base completa de funções conhecidas, por exemplo, a do oscilador harmônico<sup>(2)</sup>:

$$|\xi\rangle = \sum_p c_p^\xi |p\rangle \quad (\text{I.6})$$

onde  $|p\rangle = |n l j m \tau\rangle \quad (\text{I.7})$

e os coeficientes  $c_p^\xi$  serão parâmetros variacionais.

As condições de normalização serão

$$\sum_p c_p^* c_p = \delta_{\xi\xi'} \quad (\text{I.8a})$$

e

$$\sum_{\xi} c_p^* c_{p'} = \delta_{pp'} \quad (\text{I.8b})$$

Substitui-se (I.6) em (I.5) e a condição de mínimo é estabelecida com a equação:

$$\frac{\partial}{\partial c_p^{i*}} \left\{ E_{HF} - e_i \left[ \sum_p c_p^{i*} c_p^i - 1 \right] \right\} = 0 \quad (\text{I.9})$$

onde  $e_i$  é o multiplicador de Lagrange, introduzido ao se levar em conta (I.8a).

Obtêm-se a equação de auto-valores

$$\sum_q \langle p|h|q \rangle c_q^i = e_i c_p^i \quad (\text{I.10})$$

ou

$$h|i\rangle = e_i |i\rangle \quad (\text{I.11})$$

onde  $h$  é o Hamiltoniano de HF, definido pelos elementos de matriz

$$\langle p|h|q \rangle = \langle p|t|q \rangle + \sum_{r,s} \langle p|r|v|q \rangle \rho_{s,r} \quad (\text{I.12})$$

sendo a matriz densidade de HF dada pelos elementos

$$\rho_{s,r} = \sum_{j=1}^A c_r^{j*} c_s^j \quad (\text{I.13})$$

As equações (I.10) e (I.13) são resolvidas num processo iterativo:

1) Constroeu-se a primeira matriz  $\rho$  com funções  $c_r^i$  conhecidas.

2) A matriz  $h$  pode agora ser diagonalizada, obtendo-se novas auto-funções  $c_r^i$ , convencionando-se que os estados ocupados correspondam aos auto-valores mais baixos. Retorna-se a (1) repetindo o processo até que duas matrizes densidades consecutivas sejam iguais, i.ê.,  $\rho^{(n)} = \rho^{(n-1)}$ .

Admitimos que as órbitas da base de HF de um núcleo par-par, com  $N=Z$ , cujo número de partículas é um múltiplo de 4, caso do  $Ne^{20}$  que estamos estudando, são invariantes pelas seguintes operações de simetria:

- i) Reflexão no plano xz através do operador  $P e^{i\pi J}$  (P = operador paridade)
- ii) Rotação de um ângulo  $\pi$  em torno do eixo z:  $e^{i\pi x_z}$
- iii) Inversão temporal:  $T$ .

Além disso, a invariância por rotação de um ângulo qualquer,  $\Theta$ , em torno do eixo z, implicará na presença de uma simetria axial (forma prolata ou oblata). Procedeu-se por tentativa, atribuindo-se ao núcleo a simetria que levou à menor energia de HF. O  $Ne^{20}$  tem simetria axial na forma prolata, ou seja, com momento de quadrupolo positivo.

Desprezamos a interação coulombiana entre as partículas, de modo que basta considerar um sistema com  $\frac{A}{2} = 10$  nucleons; os demais terão comportamento idêntico. É impossível admitir que estas partículas se distribuam por todos os estados do modelo de camadas; a fim de tornar o cálculo exequível supomos que o sub-espaço disponível seja o da camada 1s-0d com 12 estados, deste o  $0^{16}$  até o

$\text{Ca}^{40}$ . Neste caso,  $|\Phi_{0^{16}}\rangle$  passa a representar o novo vácuo, a partir do qual se contrõe o núcleo do  $\text{Ne}^{20}$ . Supõe-se que  $0^{16}$  constitua um caroço estável, inerte e esférico.

Assim:

$$|\Phi_{\text{HF}}\rangle = |\Phi_{N_0^{20}}\rangle = a_{p_1}^+ a_{p_2}^+ a_{n_1}^+ a_{n_2}^+ |\Phi_{0^{16}}\rangle \quad (\text{I.14})$$

Com as hipóteses de que o estado ocupado por uma partícula (p ou n) seja o inverso temporal do estado da outra (p ou n) mais a simetria de carga, segue que  $|\Phi_{N_0^{20}}\rangle = a_p^+ |\Phi_{0^{16}}\rangle$ , sendo este estado quadri-degenerado.

Pelas mesmas razões, a expansão (I.6) da órbita  $|\xi\rangle$ , de HF, na camada s-d do oscilador, conterà apenas 6 termos, ou seja:

$$|jm\rangle = |1/2, 1/2\rangle, |3/2, 1/2\rangle, |5/2, 1/2\rangle, |3/2, -3/2\rangle, |5/2, -3/2\rangle, |5/2, 5/2\rangle.$$

O operador de inversão temporal  $\mathcal{T}$  produz o seguinte efeito ao atuar sobre  $|\xi\rangle$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}|\xi\rangle &= \mathcal{T} \sum_{m \ell j} a_{m \ell j}^{\xi} |m \ell j m_{\xi} \tau_{\xi}\rangle \\ &= \sum_{m \ell j} a_{m \ell j}^{\xi *} |m \ell j -m_{\xi} \tau_{\xi}\rangle (-1)^{\ell+j-m_{\xi}} \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Na expansão acima, a órbita de HF é um auto-estado de  $J_z$ , caso do  $\text{Ne}^{20}$ , e os coeficientes da expansão foram considerados reais.

Na tabela (I-1) apresentamos os coeficientes  $c_{jm}^{\xi}$ , bem como as energias de partículas independente  $e_{\xi}$  para as interações KLS, SUSSEX, KUO e YUKAWA.

As energias de HF e os momentos de quadrupolo com as respectivas interações estão na tabela (I-2).

É importante notar a ocorrência de um hiato de energia entre o estado ocupado e o primeiro não ocupado, o que sugere a estabilidade do estado fundamental. Este hiato de energia é uma característica da aproximação de H.F. e os mesmos estão representados na tabela (I-3).

$ \xi\rangle \backslash  jm\rangle$	$ 1/2\ 1/2\rangle$	$ 3/2\ 1/2\rangle$	$ 5/2\ 1/2\rangle$	$ 3/2-3/2\rangle$	$ 5/2-3/2\rangle$	$ 5/2\ 5/2\rangle$	$e_{\xi}$
$ 1\rangle$	-0.531	-0.369	0.763	0.000	0.	0.	-14.48
$ 2\rangle$	0.	0.	0.	0.132	0.991	0.	- 7.90
$ 3\rangle$	0.	0.	0.	0.	0.	1.	- 5.92
$ 4\rangle$	0.800	0.77	0.595	0.	0.	0.	- 5.77
$ 5\rangle$	0.278	0.926	0.254	0.	0.	0.	- 4.00
$ 6\rangle$	0.	0.	0.	0.991	-0.132	0.	- 0.36

Tab. (I.1) As orbitas de H.F. para o  $Ne^{20}$  com a interação de KLS. As energias de partícula independente  $e_{\xi}$  em MeV e os coeficientes  $c_{jm}^{\xi}$ . A primeira linha corresponde à orbita ocupada.



	$\langle \phi_{\text{Ne}^{20}}   H   \phi_{\text{Ne}^{20}} \rangle$ (MeV)	$\langle \phi_{\text{Ne}^{20}}   Q_0^2   \phi_{\text{Ne}^{20}} \rangle$ (fm <sup>2</sup> )
KLS	- 35.37	50.20
K	- 37.79	50.51
S	- 37.20	50.01
Y	- 37.01	50.75
SK	- 35.12	47.90

Tab. (I-2) A energia de H.F  $E_{\text{HF}}$  e o valor esperado do momento de quadrupolo para diferentes interações.

KLS	K	S	Y	SK
6.57	7.25	6.35	8.68	3.90

Tab. (I-3) Os hiatos de energia em MeV do  $\text{Ne}^{20}$  para diferentes interações.

## II. Determinação de estados com momento angular bem definido

A função de onda de Hartree-Fock  $|\phi_{\text{HF}}\rangle$ , que representa o estado fundamental do núcleo, não é um auto-estado do operador  $\hat{J}^2$ . Os estados com momento angular total bem definido são obtidos por projeção, usando o método de Peierls e Yoccoz<sup>(12)</sup>.

$$|\hat{\Phi}_{MK}^J\rangle = \hat{P}_{MK}^J |\Phi_K\rangle \quad (\text{II-1})$$

Os índices M e K são as terceiras componentes do momento angular no sistema de laboratório e no sistema fixo ao núcleo, respectivamente.  $\hat{P}_{MK}^J$  é o operador de projeção

$$\hat{P}_{MK}^J = \frac{2J+1}{8\pi^2} \int d\Omega \hat{D}_{MK}^{J*}(\Omega) \hat{R}(\Omega) \quad (\text{II-2})$$

com as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \hat{P}_{MK}^J |\omega J' K'\rangle = \delta_{JJ'} \delta_{KK'} |\omega J M\rangle \quad (\text{II-3a})$$

$$(ii) \quad \hat{P}_{MK}^J \hat{P}_{MK}^{J'} = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \hat{P}_{KK'}^{J'} \quad (\text{II-3b})$$

$$(iii) \quad \hat{P}_{MK}^{J+} = \hat{P}_{KM}^J \quad (\text{II-3c})$$

com  $\omega$  representando qualquer série completa de números quânticos diferentes de J, M e K.

$\hat{R}(\Omega)$  é o operador rotação:

$$\hat{R}(\Omega) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} \quad (\text{II-4})$$

que depende dos ângulos de Euler,  $\Omega = \alpha, \beta, \gamma$ , cujo elemento de ângulo sólido  $d\Omega$ , é dado por:

$$d\Omega = \int_0^\pi d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^\infty d\alpha \quad (\text{II-5})$$

e,  $D_{MK}^J(\alpha)$  é o elemento de matriz:

$$D_{MK}^J(\alpha) = \langle JM | R(\alpha) | J'K' \rangle \delta_{JJ'} \quad (\text{II-6})$$

O elemento de matriz de um operador tensorial irreduzível,  $T_q^{(k)}$ , entre dois estados dados por (II-1) escreve-se

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{M_i k_i}^{J_i} | T_q^{(k)} | \Phi_{M_f k_f}^{J_f} \rangle &= \frac{2J_i + 1}{8\pi^2 C_{J_i k_i J_f k_f}} \\ &\cdot (J_f M_f k_f | J_i M_i) \sum_{\mu\nu} (J_f k_f k_\nu | J_i \mu) \\ &\cdot \int_0^\pi d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^\infty d\alpha \, d_{k_i \mu}^J(\beta) \langle \Phi_{k_i} | e^{-i\beta J_y} T_q^{(k)} | \Phi_{k_f} \rangle \end{aligned} \quad (\text{II-7})$$

com a constante de normalização

$$C_{JK}^2 = \frac{2J+1}{2} \int_0^\pi d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^\infty d\alpha \, d_{KK}^J(\beta) \langle \Phi_K | e^{-i\beta J_y} | \Phi_K \rangle, \quad (\text{II-8})$$

onde

$$d_{KK}^J(\beta) = \langle JK | e^{-i\beta J_y} | JK \rangle. \quad (\text{II-9})$$

Pode ser demonstrado que os valores para o momento angular projetado devem ser pares. Em particular, para o núcleo em questão, ( $\text{Ne}^{20}$ ), os valores de  $J$  possíveis são ( $J=0, 2, 4, 6, 8$ ).

14.

Na tabela (II-1) estão os níveis de energia obtidos com as interações mencionadas anteriormente e os respectivos  $C_J^2$ .

J	KLS		K		S		Y		SK		$E_J$ exp.
	$E_J$	$C_J^2$	$E_J$	$C_J^2$	$E_J$	$C_J^2$	$E_J$	$C_J^2$	$E_J$	$C_J^2$	
0	0.	0.111	0.	0.104	0.	0.112	0.	0.117	0.	0.107	0.
2	1.284	0.403	1.11	0.386	1.14	0.405	1.36	0.417	1.37	0.390	1.63
4	4.096	0.336	3.64	0.339	3.62	0.335	4.27	0.331	4.16	0.337	4.25
6	8.115	0.131	7.73	0.144	7.09	0.129	8.06	0.118	9.68	0.140	8.78
8	10.332	0.021	12.06	0.026	9.61	0.020	11.44	0.016	14.29	0.026	11.95

Tabela II-1 - Apresentamos as energias dos estados projetados do  $Ne^{20}$  com os respectivos coeficientes  $C_J^2$  para diferentes interações. Os valores da última coluna são os experimentais. Em MeV.

### III - A Densidade Nuclear

Na seção (I), foram determinadas as funções de onda de partícula independente na base de H.F. Com o conhecimento de tais funções, podemos determinar a distribuição da densidade de um núcleo com A nucleons,  $\rho_A(\bar{r}) = \sum_{i=1}^A |\phi_i(\bar{r})|^2$ , onde (i) percorre todos os números quânticos dos A estados ocupados. Com a hipótese do caroço inerte, a soma separa-se em duas partes, uma delas sobre os estados deste último e a outra contendo os nucleons de valência do  $\text{Ne}^{20}$ . Portanto:

$$\rho_{\text{Ne}^{20}} = \sum_{\substack{n l j m_l c \\ \in 0s, 0p}} |\phi_{n l j m_l c}|^2 + \sum_{i=17}^{20} |\phi_i(\bar{r})|^2 \quad (\text{III-1})$$

onde:

$$\phi_{n l j m_l c}(\bar{r}) = \sum_{\substack{m_s \\ m_c}} (1/2 m_s l m_l | j m) \phi_{n l m_l}(\bar{r}) \chi^{(m_s)} \chi^{(m_c)} \quad (\text{III-2})$$

$\phi_{n l m_l}(\bar{r})$ , pode ser separada em partes radial e angular na seguinte forma:

$$\phi_{n l m_l}(\bar{r}) = R_{n l}^{(r)} Y_{l m_l}^{(\Omega)} \quad (\text{III-3})$$

com a parte radial dada por

$$R_{n l}^{(r)} = N_{n l} e^{-x^2/2b^2} L_n^{l/2} L_m^{l+1/2}(x^2) \quad (\text{III-4})$$

onde b é a constante do oscilador harmônico.

$$L_n^{\ell+1/2}(r^2) = \sum_{\lambda=0}^n (-1)^\lambda \frac{(n+\ell+1/2)!}{(n-\lambda)!(\ell+\lambda+1/2)!\lambda!} (r^2)^\lambda \quad (\text{III-5})$$

é um polinômio de Laguerre, e,

$$N_{n\ell} = \left[ \frac{2n!}{(2n+\ell+1/2)!} \right]^{1/2} b^{-3/2} \quad (\text{III-6})$$

é a constante de normalização.

Somando sobre as partes de spin e isospin no termo correspondente ao caroço inerte em (III-1) e usando as propriedades dos coeficientes de Clebsch-Gordan obtemos,

$$\begin{aligned} \rho_{0^6}^{(\lambda)} &= \sum_{\substack{n\ell j m, c \\ \text{os.op}}} |\phi_{n\ell j m, c}^{(\lambda)}|^2 \\ &= 4 \sum_{n\ell m_\ell} |\phi_{n\ell m_\ell}^{(\lambda)}|^2 \end{aligned} \quad (\text{III-7})$$

Usando agora a eq. (III-3) em (III-7), e propriedades dos coeficientes de C.G, (III-7) reduz-se a

$$\rho_{0^6}^{(\lambda)} = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n\ell \\ \text{os.op}}} (2\ell+1) R_{n\ell}^{(\lambda)}{}^2 \quad (\text{III-8})$$

onde os números quânticos  $n, \ell$  tomam os valores possíveis na camada os, op:  $(n\ell) = (00), (01)$ .

Quanto ao desenvolvimento do segundo termo de (III-1), devemos considerar também as simetrias axial e de inversão temporal impostas ao núcleo, (ver seção I), portanto

$$\begin{aligned} \rho_{15,0d}(\bar{x}) &= \sum_{i=17}^{20} |\phi_i(\bar{x})|^2 \\ &= \sum_{i,m} \left[ |\phi_{im}^{(i)}(\bar{x})|^2 + |\phi_{i\bar{m}}(\bar{x})|^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{III-9})$$

onde  $\phi_{i\bar{m}}$  (com  $m$  representando o número quântico magnético do momento angular do  $i$ -ésimo estado ocupado) é o estado de reversão temporal de

$$\phi_{im}^{(i)}(\bar{x}) = \sum_{n,l,j} c_{n,l,j,m}^i \phi_{n,l,j,m}(\bar{x}) \quad (\text{III-10})$$

Desenvolvendo,

$$\begin{aligned} \rho_{15,0d}(\bar{x}) &= 2 \sum_i \sum_{n,l,j,m} \sum_{n',l',j',m'} \left[ c_{n,l,j,m}^{i*} c_{n',l',j',m'}^i \right. \\ &\quad \left. \phi_{n,l,j,m}(\bar{x}) \phi_{n',l',j',m'}(\bar{x}) + c_{n,l,j,m}^{i*} c_{n',l',j',m'}^i \frac{\phi_{n,l,j,m}(\bar{x})}{n,l,j,m} \frac{\phi_{n',l',j',m'}(\bar{x})}{n',l',j',m'} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-11})$$

Considerando os coeficientes  $c_{n,l,j,m}^i$  reais, podemos escrever

$$\begin{aligned} \rho_{15,0d}(\bar{x}) &= 2 \sum_i \sum_{\substack{n,l,j,m \\ n',l',j',m'}} c_{n,l,j,m}^i c_{n',l',j',m'}^i \left[ \phi_{n,l,j,m}(\bar{x}) \phi_{n',l',j',m'}(\bar{x}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\phi_{n,l,j,m}(\bar{x})}{n,l,j,m} \frac{\phi_{n',l',j',m'}(\bar{x})}{n',l',j',m'} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-12})$$



Com a expressão (III-2) e propriedades dos coef. de Clebsch-Gordan, a expressão acima fica:

$$\begin{aligned}
 \rho_{15,0d}^{(\bar{\lambda})} &= 2 \sum_i \sum_L \sum_{\substack{m_l j m \\ m' l' j'}} \left( \frac{2L+1}{4\pi} \right)^{1/2} Y_{LO}^{(\Omega)} \\
 &\times \sigma_{m_l j m}^i \sigma_{m' l' j'}^i R_{m l}^{(R)} R_{m' l'}^{(R)} \left[ (2l'+1)(2j'+1) \right]^{1/2} \\
 &\times (L 0 l' 0 | l 0) (L 0 j' m | j m) \\
 &\times W(L l' j' 1/2; l j') (1 + (-1)^L)
 \end{aligned}$$

(III-13)

onde  $W(L l' j' 1/2; l j')$  é um coeficiente de Racah.

Introduzindo os elementos de matriz da matriz de H.F.

$$\rho_{m_l j m}^{HF} = \sum_i \sigma_{m_l j m}^i \epsilon_{m_l j m}^i$$

(III-14)

e, fazendo uso da relação  $Y_{LO}^{(\Omega)} = \sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} P_L(\cos \theta)$  teremos,

$$\begin{aligned}
 \rho_{15,0d}^{(\bar{\lambda})} &= \sum_L \frac{2L+1}{4\pi} \sum_{\substack{m_l j m \\ m' l' j'}} \rho_{m_l j m}^{HF} R_{m l}^{(R)} R_{m' l'}^{(R)} \\
 &\times (L 0 l' 0 | l 0) (L 0 j' m | j m) W(L l' j' 1/2; l j') \\
 &\times \sqrt{(2l'+1)(2j'+1)} (1 + (-1)^L) P_L(\cos \theta)
 \end{aligned}$$

(III-15)

Portanto, a distribuição da densidade total do núcleo será dada pela soma das relações (III-8) e (III-15), ou seja:

$$\begin{aligned}
 \rho_A(\vec{r}) &= \rho_{orb}(\vec{r}) + \rho_{s.d.d}(\vec{r}) \\
 &= \sum_L \left\{ \frac{L}{\pi} \sum_{m, l \in 0, \phi} (2L+1) R_{ml}^2(\vec{r}) \delta_{L0} + \right. \\
 &\quad + \frac{2L+1}{4\pi} \sum_{\substack{m, l, j, m \\ m', l', j', m'}} R_{ml}(\vec{r}) R_{m'l'}(\vec{r}) \sqrt{(2l'+1)(2j'+1)} \\
 &\quad \times (L0l'0)(L0j'm|j'm) W(Ll'j'1/1; l'j') \\
 &\quad \left. \times (1 + (-1)^L) \right\} P_L(\cos \theta)
 \end{aligned}$$

(III-16)

$$= \sum_L P_L(\mu) P_L(\cos \theta) \quad (III-17)$$

Os coeficientes  $P_L(\mu)$  para  $L = 0, 2$  e  $4$  estão plotados na fig. (III-1), para a interação (KLS).

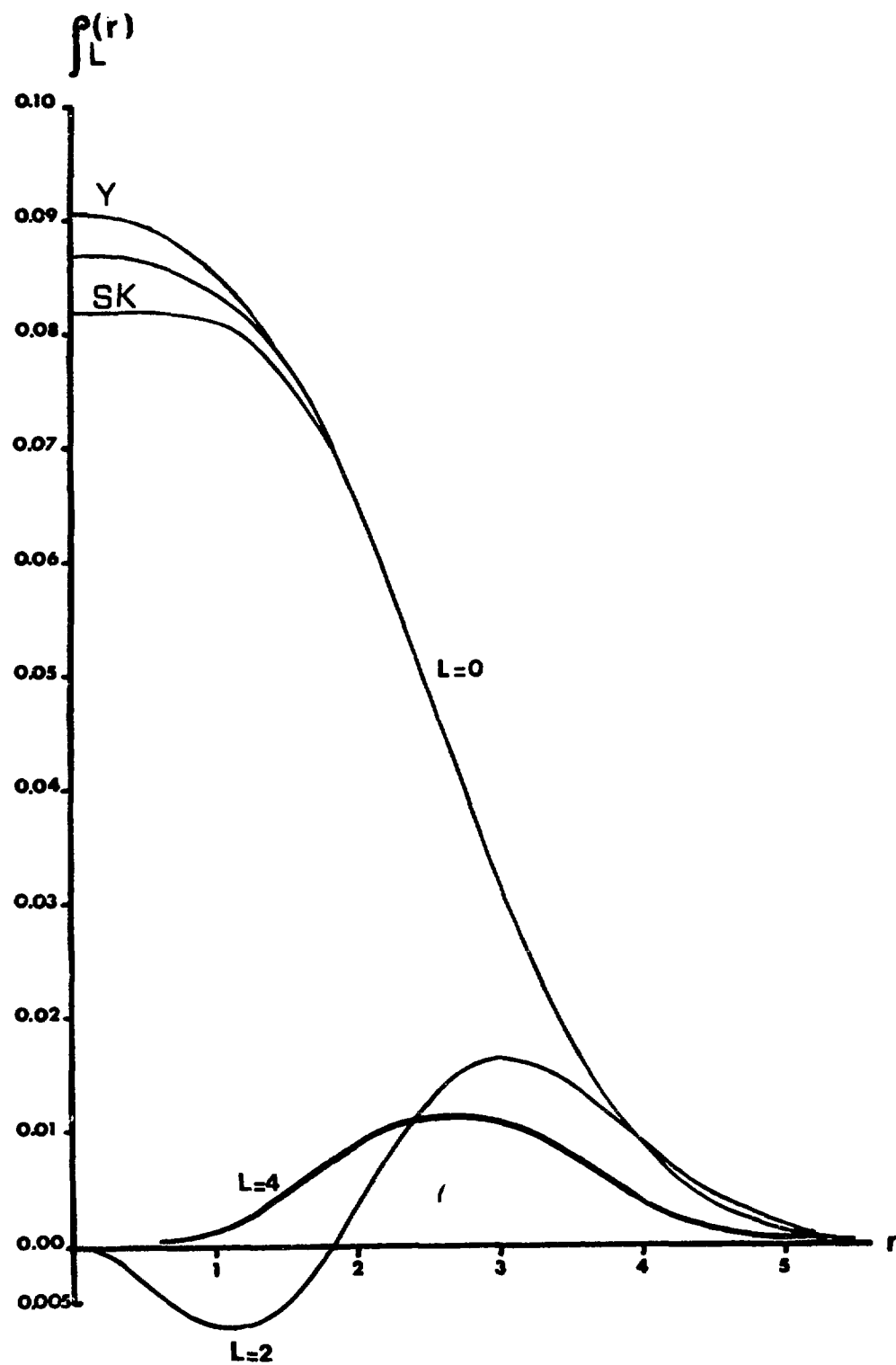


Fig.III-1. Os coeficientes da distribuição de carga do  $Ne^{20}$  com a interação KLS, para  $L = 0, 2$  e  $4$ . As curvas Y e SK foram obtidas com as interações de Yukawa e Skyrme, ambas para  $L=0$ .

IV- Fatores de Forma

A secção de choque do espalhamento elétron núcleo pode ser escrita na forma:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\Omega} = 4\pi \bar{\sigma}_M |F(k)|^2 \quad (\text{IV-1})$$

onde  $\bar{\sigma}_M$  é a secção de choque de Mott que representa o caso do espalhamento de eletrons por uma carga pontual  $Ze$ . O termo  $|F(k)|^2$  leva em conta efeitos de estrutura nuclear da distribuição de carga e é comumente chamada de "fator de forma". Na aproximação de Born, pode-se demonstrar<sup>(17)</sup> que o fator de forma pode ser escrito como sendo a transformada de Fourier da densidade de carga nuclear  $\rho(\vec{r})$ . Ou seja:

$$F(k) = \frac{1}{Ze} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \rho(\vec{r}) d^3r \quad (\text{IV-2})$$

onde  $Z$  é o número de protons e  $\vec{k}$  é o vetor de onda do momentum transferido. É facil ver que  $F(0)=1$ , uma vez que a densidade de carga nuclear é normalizada a

$$Ze = \int \rho(\vec{r}) d^3r. \quad (\text{IV-3})$$

Estamos interessados em determinar uma expressão geral para os fatores de forma elástico e inelástico do núcleo. Para o caso inelástico a quantidade  $\rho(\vec{r})$  torna-se uma "densidade de de transição" e deve, portanto, ser expressa pelo elemento de matriz do operador correspondente. Então:

$$F(k) = \frac{1}{Ze} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \langle J_i M_i | \hat{\rho}(k) | J_i M_i \rangle d^3r \quad (\text{IV-4})$$

onde

$$\hat{\rho}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^A \left\{ \frac{1}{2} (1 + \tau_y(i)) e_p^{ef} + \frac{1}{2} (1 - \tau_y(i)) e_n^{ef} \right\} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

(IV-5)

é o operador densidade de carga e  $e_p^{ef}$  e  $e_n^{ef}$  são as cargas efetivas do próton e do nêutron respectivamente.  $\tau_y$ , representa o operador terceira componente do isospin, com auto valores: (+1) para prótons e (-1) para nêutrons. Os estados  $|J_i M_i\rangle$  e  $|J_f M_f\rangle$  que aparecem em (IV-3) são os estados inicial e final do núcleo, ambos com momento angular J bem definido, que foram determinados por projeção (Seção II), a partir dos estados intrínsecos, obtidos com a aproximação de H.F. (Seção I).

Vamos expandir  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  em ondas parciais tomando, sem perda de generalidade z na direção  $\vec{k}$ :

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_L i^L \sqrt{4\pi(2L+1)} j_L(kr) Y_{L0}(\Omega) \quad (IV-6)$$

onde  $j_L(kr)$  são funções de Bessel esféricas de ordem L.

Com a substituição de (IV-5) e, introduzindo o operador tensorial de densidade de carga, de ordem L,

$$\hat{M}_{L0} = i^L \int j_L(kr) Y_{L0}(\Omega) \rho(\vec{r}) d^3r, \quad (IV-7a)$$

cujos elementos de matriz serão:

$$\langle J_f M_f | \hat{M}_{L0} | J_i M_i \rangle = i^L \int j_L(kr) Y_{L0}(\Omega) \cdot \langle J_f M_f | \hat{\rho}(\vec{r}) | J_i M_i \rangle d^3r \quad (IV-7b)$$

a equação (IV-3) torna-se

$$F(\omega) = \frac{(4\pi)^{1/2}}{Z_2} \sum_L (2L+1)^{1/2} \langle J_f M_f | \hat{M}_{L0} | J_i M_i \rangle$$

(IV-8)

Tomando-se o módulo ao quadrado, fazendo a média sobre todas as orientações possíveis do estado nuclear inicial  $J_i$  com número quântico magnético  $M_i$  e, uma soma sobre os números quânticos magnético final  $M_f$ , correspondente ao estado final  $J_f$ , nós obtemos:

$$|F(\omega)|_{J_i \rightarrow J_f}^2 = \frac{4\pi}{Z_2^2 (2J_i+1)} \sum_{M_i, M_f} \left| \sum_L \langle J_f M_f | \hat{M}_{L0} | J_i M_i \rangle \right|^2 \cdot (2L+1)^{1/2}$$

(IV-9)

Usando agora o teorema de Wigner-Eckart no elemento de matriz no lado direito de (IV-9):

$$\langle J_f M_f | \hat{M}_{L0} | J_i M_i \rangle = \frac{1}{(2J_i+1)^{1/2}} (J_i M_i L 0 | J_f M_f) (J_f \| \vec{M}_L \| J_i)$$

(IV-10)

ficamos com

$$|F(\omega)|_{J_i \rightarrow J_f}^2 = \frac{1}{Z_2^2} \frac{4\pi}{(2J_i+1)(2J_i+1)} \sum_{M_i, M_f}$$

$$\left| \sum_L (2L+1)^{1/2} (J_i M_i L 0 | J_f M_f) (J_f \| \vec{M}_L \| J_i) \right|^2$$

(IV-11)

Efetuada a soma nas orientações nucleares, e usando propriedades dos coeficientes de Clebsch-Gordan obtemos

$$\left| F(k) \right|_{J_i \rightarrow J_f}^2 = \frac{1}{(Ze)^2} \frac{4\pi}{2J_i+1} \sum_L \left| \langle J_f \| \vec{M}_L \| J_i \rangle \right|^2.$$

(IV-12)

Invertendo a equação (IV-10) e usando a definição (IV-7b) o elemento de matriz reduzido (IV-12) torna-se

$$\begin{aligned} \langle J_f \| \vec{M}_L \| J_i \rangle &= (2L+1)^{1/2} \sum_{M_i M_f} \langle J_i M_i J_f - M_f | L 0 \rangle \\ &\int_0^\infty j_L(kr) r^2 dr \int \langle J_f M_f | \rho(r) | J_i M_i \rangle \\ &Y_{L0}(\Omega) d\Omega \end{aligned}$$

(IV-13)

e, o fator de forma fica

$$\left| F(k) \right|_{J_i \rightarrow J_f}^2 = \frac{4\pi}{(Ze)^2 (2J_i+1)} \sum_L \left| \int_0^\infty j_L(kr) \rho_{L0}(r) r^2 dr \right|^2,$$

(IV-14)

onde foi definida nova quantidade

$$\begin{aligned} \rho_{L0}(r) &= (2L+1)^{1/2} \sum_{M_i M_f} (-1)^{J_i - M_i} \langle J_i M_i J_f - M_f | L 0 \rangle \\ &\times \int \langle J_f M_f | \rho(r) | J_i M_i \rangle Y_{L0}(\Omega) d\Omega \end{aligned}$$

(IV-15)

chamada densidade de transição radial.

Na seção (II) mencionamos que os estados possíveis (projetados) eram os com momento angular  $J$  par. Os estados inicial e final em que estamos interessados são  $J_i=0$  e  $J_f=0,2,4$ , respectivamente. Teremos então que considerar um caso elástico ( $J_i=J_f=0$ ) e dois casos inelásticos ( $J_i=0, J_f=2,4$ ).

Fixando então  $J_i=0, M_i=0$  e  $J_f=J, M_f=M$  na relação (IV-15) teremos:

$$\sum_{M_i, M_f}^{J_i, M_i} (-1)^{J_i - M_i} \langle J_i M_i J_f - M_f | L 0 \rangle \rightarrow \sum_M (0 0 J M | L 0) \delta_{M 0} \delta_{J L} \equiv 1 \quad (\text{IV-16})$$

Ou seja:

$$\rho_{tr}^{(M)} = (2J+1)^{1/2} \int \langle J 0 | \hat{\rho}(\vec{r}) | 0 0 \rangle Y_{J 0}(\alpha) d\Omega \quad (\text{IV-17})$$

e

$$\left| F(\kappa) \right|_{0 \rightarrow J}^2 = \frac{4\pi}{(Z_e)^2} \left| \int_L j_L(\kappa r) \langle J 0 | \hat{\rho}(\vec{r}) | 0 0 \rangle Y_{J 0}(\alpha) d^3r \right|^2. \quad (\text{IV-18})$$

Vamos calcular separadamente o elemento de matriz  $\langle J 0 | \hat{\rho}(\vec{r}) | 0 0 \rangle$ . Com o intuito de separar a parte radial da parte angular, vamos expandir  $\hat{\rho}(\vec{r})$  em multipolos. Então:

$$\langle J 0 | \hat{\rho}(\vec{r}) | 0 0 \rangle = \sum_{lm} \langle J 0 | \hat{\rho}_{lm}(r) Y_{lm}(\alpha) | 0 0 \rangle, \quad (\text{IV-19})$$

com  $\rho_{lm}^{(r)}$  dado por



$$\begin{aligned}
 \rho_{lm}^{(n)} &= \int y_{lm}^*(\Omega) \hat{\rho}(\vec{r}) d\Omega \\
 &= \sum_{i=1}^A \left[ \frac{1}{2} (1 + \tau_{ij}^{(i)}) \rho_P^{(i)} + \frac{1}{2} (1 - \tau_{ij}^{(i)}) \rho_n^{(i)} \right] \\
 &\quad \cdot y_{lm}^*(\Omega_i) \frac{\delta(r - r_i)}{r_i^2} .
 \end{aligned} \tag{IV-20}$$

Com o auxílio da equação (II-7), a equação (IV-19) torna-se:

$$\begin{aligned}
 \langle J_0 | \hat{\rho}(\vec{r}) | 00 \rangle &= \sum_{l,m} \frac{1}{2 C_J C_0} (00 | l m | J_0) , \\
 &\quad \cdot \sum_{\mu} (00 | l \mu | J_{\mu}) \int d\rho \, \rho_{\mu} \, d_{0\mu}^J(\rho) \\
 &\quad \cdot \langle \Phi_{HF} | e^{-i\rho J_{J_0}} \rho_{J_{\mu}}^{(n)} y_{lm}(\Omega) | \Phi_{HF} \rangle \delta_{lJ} \delta_{m0} \\
 &= \frac{1}{2 C_J C_0} \sum_{\mu} \int d\rho \, \rho_{\mu} \, d_{0\mu}^J(\rho) \langle \Phi_{HF} | e^{-i\rho J_{J_0}} \\
 &\quad \rho_{J_{\mu}}^{(n)} y_{lm} | \Phi_{HF} \rangle
 \end{aligned} \tag{IV-21}$$

onde  $C_J$  e  $C_0$  são constantes de normalização.

$$d_{0\mu}^J(\rho) = \langle J_0 | e^{-i\rho J_{J_0}} | J_{\mu} \rangle \tag{IV-22}$$

e,  $|\Phi_{HF}\rangle$  é o estado fundamental de H.F. definido pela (I-14).

Vamos inserir no elemento de matriz da eq. (IV-21) o projetor partícula-buraco definido por:

$$\mathbb{1} = |\Phi_{HF}\rangle \langle \Phi_{HF}| + \sum_{m,j} |\Phi_{mj}\rangle \langle \Phi_{mj}| + \dots \tag{IV-23}$$

onde  $|\Phi_{mj}\rangle = a_m^+ a_j |\Phi_{HF}\rangle$ . Ou seja!

$$\begin{aligned} \langle 00 | \hat{\rho}(\vec{r}) | 00 \rangle &= \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_m} \sum_{\mu} \int d\rho_{\mu} \rho_{\mu} d_{0\mu}^{J(\rho)} \cdot \\ &\cdot \left[ \langle \Phi_{HF} | e^{-i\rho J_{\mu}} | \Phi_{HF} \rangle \langle \Phi_{HF} | \right. \\ &\hat{\rho}_{J_{\mu}}^{(n)} Y_{J_{\mu}}^{(n)} | \Phi_{HF} \rangle + \sum_{\substack{m, j \\ \epsilon_m \epsilon_j}} \langle \Phi_{HF} | \\ &e^{-i\rho J_{\mu}} | a_m^+ a_j | \Phi_{HF} \rangle \cdot \\ &\left. \cdot \langle \epsilon_m | \hat{\rho}_{J_{\mu}}^{(n)} Y_{J_{\mu}}^{(n)} | j \epsilon_j \rangle \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV-24})$$

Mas

$$\langle \Phi_{HF} | \hat{\rho}_{J_{\mu}}^{(n)} Y_{J_{\mu}}^{(n)} | \Phi_{HF} \rangle = Y_{J_{\mu}}^{(n)} \sum_{i=1}^A \langle i | \hat{\rho}_{J_{\mu}}^{(n)} | i \rangle \quad (\text{IV-25})$$

usando agora (IV-20) teremos

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{HF} | \hat{\rho}_{J_{\mu}}^{(n)} Y_{J_{\mu}}^{(n)} | \Phi_{HF} \rangle &= Y_{J_{\mu}}^{(n)} \sum_i \int |\phi_i^{(n, \alpha)}|^2 \\ &\cdot \left[ \frac{1}{2} (1 + \epsilon_j(i)) \rho_p^{e\dagger} + \frac{1}{2} (1 - \epsilon_j(i)) \rho_m^{e\dagger} \right] \\ &Y_{J_{\mu}}^{(n)*}(\alpha) d\alpha \\ &= Y_{J_{\mu}}^{(n)} \left[ \rho_p^{e\dagger} \int \sum_{i=1}^Z |\phi_i^p(n, \alpha)|^2 Y_{J_{\mu}}^{(n)*}(\alpha) d\alpha + \right. \\ &\left. + \rho_m^{e\dagger} \int \sum_{i=1}^N |\phi_i^m(n, \alpha)|^2 Y_{J_{\mu}}^{(n)*}(\alpha) d\alpha \right] \end{aligned} \quad (\text{IV-26})$$

Uma vez que desprezamos a interação coulombiana,

$$\sum_{i=1}^Z |\phi_i^p(\vec{r})|^2 = \rho_Z^p(\vec{r}) = \frac{1}{2} \rho_A^p(\vec{r}) \quad (\text{IV-27a})$$

e

$$\sum_{i=1}^N |\phi_i^n(\vec{r})|^2 = \rho_N^n(\vec{r}) = \frac{1}{2} \rho_A^n(\vec{r}) \quad (\text{IV-27b})$$

onde  $\rho_Z^p(\vec{r})$  ( $\rho_N^n(\vec{r})$ ) corresponde à densidade de prótons (neutrons) e  $\rho_A^p(\vec{r})$  é a distribuição de densidade de partículas que, quando expandida em termos dos polinômios de Legendre toma a seguinte forma:

$$\rho_A^p(\vec{r}) = \sum_L \rho_L(r) P_L(\cos\theta) \quad (\text{IV-28})$$

conduzindo a expressão (IV-26) a

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{HF} | \rho_{j\mu}^{(n)} Y_{j\mu}^{(n)} | \Phi_{HF} \rangle &= (e_p^{+1} + e_n^{+1}) \sum_L Y_{j\mu}^{(n)} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}} \rho_L(r) \int_{\Omega} Y_{L0}^{(n)} Y_{j\mu}^{(n)*} d\Omega \\ &= (e_p^{+1} + e_n^{+1}) \rho_j(r) P_j(\cos\theta) \delta_{j\mu 0} \end{aligned} \quad (\text{IV-29})$$

O termo seguinte de (IV-24) é

$$\begin{aligned} \langle n\tau_n | \hat{\rho}_{j\mu}^{(n)} Y_{j\mu}^{(n)} | j\tau_j \rangle &= (e_p^{+1} + e_n^{+1}) \int \Phi_n^*(\vec{r}') \Phi_j(\vec{r}) \\ &\quad Y_{j\mu}^{(n)*}(\alpha') Y_{j\mu}^{(n)}(\alpha) \frac{d(\ln r')}{r'^2} d^3r' \end{aligned} \quad (\text{IV-30})$$

Lembrando que:

$$\phi_i(\bar{r}) = \sum_{m \ell j m} c_{m \ell j m}^i \phi_{m \ell j m}(\bar{r})$$

e  $\phi_{m \ell j m}(\bar{r})$  é dada pela (III-2), é fácil demonstrar que:

$$\begin{aligned} \phi_m^*(\bar{r}) \phi_j(\bar{r}) &= \sum_{\substack{m \ell j m \\ m' \ell' j' m'}} \sum_L (-1)^{L+m-m'} c_{m \ell j m}^L c_{m' \ell' j' m'}^L R_{m \ell}^{(L)} R_{m' \ell'}^{(L)} \\ & (L \ m \ m' \ j' \ m' \ | \ j \ m) (L \ 0 \ 0 \ 0) \\ & \times \sqrt{\frac{(2L+1)(2\ell'+1)(2j'+1)}{4\pi}} W(J \ell' j' 1/2; \ell j) \\ & \cdot Y_{L, m'-m}(\varrho) \end{aligned} \quad (IV-31)$$

Substituindo a relação acima na (IV-30) e integrando resulta:

$$\begin{aligned} \langle n | \rho_{J_p}^{(n)} Y_{J_p}^{(\varrho)} | j \rangle &= (a_p^+ + a_n^+) \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \cdot \\ & \cdot \sum_{\substack{m \ell j m \\ m' \ell' j' m'}} c_{m \ell j m}^2 c_{m' \ell' j' m'}^2 (-1)^{m-m'} R_{m \ell}^{(L)} R_{m' \ell'}^{(L)} \\ & \cdot \sqrt{\frac{(2\ell'+1)(2j'+1)}{4\pi}} (J \ 0 \ 0 \ 0) \\ & (J \ m \ m' \ j' \ m' \ | \ j \ m) Y_{J_p}^{(\varrho)} \\ & \cdot W(J \ell' j' 1/2; \ell j) \delta_{\mu, m-m'} \end{aligned} \quad (IV-32)$$

Vamos agora substituir as expressões (IV-32) e (IV-29) na (IV-24), obtendo assim:

$$\begin{aligned}
\langle J_0 | \hat{\rho}^{(2)} | 00 \rangle &= \frac{(e_p^{+1} + e_n^{+1})}{2 \mathcal{C}_J \mathcal{C}_0} \left\{ \rho^{(2)} \frac{\mathcal{P}(\cos \theta)}{J} \right. \\
&\times \int d\rho \sin \beta d_{00}^{(J)}(\rho) \langle \Phi_{HF} | e^{-i\rho J_y} | \Phi_{HF} \rangle + \\
&+ \sum_{\mu, \mu'} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \int d\rho \sin \beta d_{0\mu}^{(J)}(\rho) \\
&\times \langle \Phi_{HF} | e^{-i\rho J_y} a_m^+ a_j | \Phi_{HF} \rangle \sum_{\substack{n_j m_j \\ n_j' m_j'}} \frac{n_j}{n_j'} \\
&\times \begin{matrix} j \\ n_j m_j \end{matrix} \begin{matrix} m-m' \\ (-1) \end{matrix} (2j+1)(2j'+1) \langle J_0 | 0 | J_0 \rangle \\
&(J \ m-m' \ j' \ m' | j \ m) R_{m\ell}^{(2)} R_{m'\ell'}^{(1)} \\
&Y_{J\mu}^{(2)} W(J\ell j \ 1/2; \ell j') \delta_{\mu, m-m'} \quad (IV-33)
\end{aligned}$$

A primeira integral entre colchetes pode ser calculada com o auxílio da equação (II-8) e resulta  $\frac{2 \mathcal{C}_J^2}{2J+1}$ .

Levando o resultado obtido para a expressão (IV-32) na expressão para o fator de forma (IV-19) obtemos:

$$\begin{aligned}
|F(k)|^2 &= \left[ \frac{4\pi \mathcal{C}_J}{(2J+1) \mathcal{C}_0} \right]^2 \frac{(e_p^{+1} + e_n^{+1})^2}{(Z_e)^2} \times \\
&\times \left| \int_0^J j_J^{(2)}(kx) x^2 dx \left[ \rho_J^{(2)} + \rho_J^{(1)} \right] \right|^2 \quad (IV-34)
\end{aligned}$$

que é a fórmula desejada para o caso inelástico onde,  $\rho_J^{(2)}$  é a "densidade partícula-buraco" dada por:

$$\begin{aligned}
 \rho_J^{(n)} &= \frac{1^{p-1b}}{8\pi^2 e_j^2} \sum_{m,j} \int d\rho_{sum} \rho d_{00}^J(\rho) \times \\
 &\times \langle \Phi_{HF} | e^{-i\rho J} a_n^+ a_j | \Phi_{HF} \rangle \sum_{\substack{m'j'm' \\ m'j'm'}} \sqrt{(2l'+1)(2j'+1)} \\
 &\times (J_0 l' 0 l_0) (J_0 j' m' l j m) R_{m'l}^{(n)} R_{m'l}^{(n)} \times \\
 &\times W(J l' j' 1/2; l j')
 \end{aligned}$$

(IV-35)

e,  $\rho_J^{(n)}$  pode ser determinada na comparação das equações (IV-28) e (III-16).

Para o caso elástico, a expressão do fator de forma pode ser facilmente obtida considerando  $J=0$  na eq. (IV-34), lembrando que o termo que considera as cargas efetivas não contribue,  $(e_p^{e+} + e_n^{e+}) = e$ , uma vez que não há transições. Portanto:

$$|F(k)|^2 = \frac{1}{k^2} (4r)^2 \left| \int j_0(RL) n^2 dr \left[ \rho_0^{(n)} + \rho_0^{(n) 1^{p-1b}} \right] \right|^2$$

(IV-36)

Resta ainda acrescentar às expressões (IV-34) e (IV-36), as correções que levam em conta o tamanho finito do proton e o movimento do centro de massa a serem vistas na próxima seção.

V. Correções do centro de massa e tamanho finito do próton

Elliott e Skyrme<sup>(21)</sup>, mostraram que a ausência de invariância translacional (quando as autofunções do Hamiltoniano total  $H$  não são autofunções do momentum total do núcleo  $\vec{P}$ ) em potenciais usuais no modelo de camadas, dava origem a estados espúrios. Somente no caso do potencial do O.H., a função de onda nuclear pode ser escrita como um produto da parte correspondente ao Centro de Massa e outra correspondente ao movimento interno, isto é:

$$\Phi(\vec{\pi}_1, \dots, \vec{\pi}_A) = \Phi_{CM}(\vec{R}) \Phi_{int}(\vec{\pi}'_1, \vec{\pi}'_2, \dots, \vec{\pi}'_{A-1}) \quad (V-1)$$

onde

$$\vec{R} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \vec{\pi}_i \quad (V-2a)$$

e

$$\vec{\pi}'_i = \vec{\pi}_i - \vec{R} \quad (V-2b)$$

Os estados espúrios correspondem aos diferentes estados excitados da função de onda do centro de massa  $\Phi_{CM}(\vec{R})$ .

Para evitar o aparecimento de tais estados,  $\Phi_{CM}(\vec{R})$  deve permanecer no estado fundamental

$$\Phi_{CM}(\vec{R}) = \left[ \frac{A^3}{\pi^3 b^3} \right]^{1/4} \exp \left( -\frac{AR^2}{2b^2} \right) \quad (V-3)$$

onde  $b$  é a constante do O.H.

O fator de forma "sem correção",  $F_{SC}$ , será então expresso por

$$F_{SC}(k) = \int d^3 r_i \Phi_{int}(\vec{r}_i) \sum_p e^{i\vec{r}_i \cdot \vec{k}_p} \Phi_{int}(\vec{r}_i) \times$$

$$\sqrt{\int d^3 R \left| \Phi_{CM}(\vec{R}) \right|^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}}$$

(V-4)

onde a integral sobre as coordenadas internas será representada por  $F(k)$  e a segunda integral corresponde ao fator de forma do C.M. Exprimindo  $\Phi_{CM}(\vec{R})$  por (V-2) este fator de forma escreve-se

$$F_{CM}(k) = \left[ \frac{A^3}{\pi b^6} \right]^{1/2} \int d^3 R e^{-\frac{AR^2}{b^2}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}}$$

(V-5)

Integrando nos ângulos, obtemos,

$$F_{CM}(k) = \left[ \frac{A^3}{\pi b^6} \right]^{1/2} \frac{4\pi}{k} \frac{d}{dk} \int dR e^{-\frac{AR^2}{b^2}} \cos kR$$

(V-6)

ou seja

$$F_{CM}(k) = \exp\left[-\frac{1}{4} k^2 b^2 / A\right]$$

(V-7)

Dai, o fator de forma nuclear contendo a correção do C.M. será

$$F(k) = \frac{F_{SC}(k)}{F_{CM}(k)}$$

$$= F_{SC}(k) \left[ \exp\left(\frac{1}{4} \frac{b^2 k^2}{A}\right) \right]$$

(V-8)



Devido ao tamanho finito do próton, uma segunda correção é necessária, uma vez que a distribuição de densidade de prótons  $\rho_z^{(p)}$  considera este último como uma carga puntual. A distribuição de carga corrigida é escrita como

$$\rho_{cor}(\vec{r}) = \int \rho_z^{(p)}(\vec{r}') \rho_p(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' \quad (V-9)$$

e o correspondente fator de forma será

$$F_{cor}(k) = \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \rho_{cor}(\vec{r}) d^3r \quad (V-10)$$

Subst. (V-9) em (V-10),

$$\begin{aligned} F_{cor}(k) &= \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r \int \rho_z^{(p)}(\vec{r}') \rho_p(\vec{r} - \vec{r}') d^3r' \\ &= \int d^3r' \rho_z^{(p)}(\vec{r}') e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \int d^3r e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} \rho_p(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned} \quad (V-11)$$

e efetuando a substituição de variáveis,  $\vec{\xi} = (\vec{r} - \vec{r}')$ , teremos

$$\begin{aligned} F_{cor}(k) &= \int d^3r' \rho_z^{(p)}(\vec{r}') e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}'} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{\xi}} \rho_p(\vec{\xi}) d^3\xi \\ &= F_{sc}(k) \times F_p(k) \end{aligned} \quad (V-12)$$

o que mostra que o fator de forma corrigido será o produto do fator de forma sem correção, pelo fator de forma de carga do

proton  $F_p(k)$ .

Uma maneira de representar a distribuição da densidade de protons  $\rho_p(\vec{r})$  é através de uma Gaussiana:<sup>(16)</sup>

$$\rho_p(\vec{r}) = \frac{1}{(\pi^{1/2} a_p)^3} \exp\left[-\frac{r^2}{a_p^2}\right], \quad (V-13)$$

conduzindo à seguinte expressão para  $F_p(k)$ :

$$F_p(k) = \exp\left[-\left(\frac{1}{4} a_p^2 k^2\right)\right]. \quad (V-14)$$

Disto concluímos então que o fator de forma, considerando as duas correções, exprimir-se-a como

$$\begin{aligned} \frac{F(k)}{\text{cont}} &= \frac{F_{SC}(k) F_p(k)}{F_{CH}(k)} \\ &= F_{SC}^{(2)} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(a_p^2 - \frac{b^2}{A}\right)k^2\right]. \end{aligned} \quad (V-15)$$

onde  $F_{SC}(k)$  corresponde ao fator de forma determinado na seção (IV).

### VII. Comentários e Conclusões

Trabalhos anteriores<sup>(8), (9)</sup> mostraram que a interação (KLS) conseguia reproduzir com melhor precisão o espectro dos níveis de energia do  $\text{Ne}^{20}$  e as probabilidades de transição eletromagnética entre esses níveis. As demais interações aqui usadas apresentavam resultados menos satisfatórios quanto ao espectro. Usando a interação de Skyrme<sup>(5)</sup>, com um termo repulsivo dependendo da densidade, o resultado foi análogo ao obtido com a (KLS), evidenciando-se todavia uma tendência de os níveis se dilatarem a partir de  $J=6$ .

Ao iniciarmos este trabalho em que comparamos interações de dois corpos admitíamos que a melhor comparação com os resultados experimentais deveria ocorrer quando usássemos a interação (KLS); os resultados obtidos por S.S. Mizrahi usando a interação de Skyrme, foram aqui citados como ilustração, sendo geralmente melhores que os obtidos por nós.

As distribuições da densidade para  $L=0, 2$  e  $4$  estão mostradas na figura (III-1), para as interações (KLS), K, S, Y e Skyrme. Constatamos numericamente que a contribuição do termo de uma partícula-um buraco,  $\rho^{1p-1b}(\vec{r})$ , à densidade total, era praticamente nula, tendo sido desprezado. Observa-se que para distâncias acima de  $r=1,6$  fm, todas as interações produzem os mesmos valores de  $\rho_0(r)$ . Somente na região mais interna do núcleo as diversas interações conduzem a densidades que diferem entre si numa faixa de, no máximo, 10% do valor no centro do núcleo. Não foi possível distinguir no desenho as curvas obtidas com (KLS), K e S, as quais praticamente coincidem.

A interação de Yukawa (Y) leva a uma densidade  $\rho_0(r)$  acima das demais, nesta região mais interna do núcleo, lembrando ainda que se trata da menos sofisticada entre as interações usadas. Seria de se esperar que essas densidades permanecessem aproximadamente constantes antes de atingirem o ponto  $r=0$ . Isto não ocorre com a interação de Y, e parece ocorrer num intervalo de aproximadamente 0,5 fm para as 3 coincidentes. Estamos incluindo a densidade obtida com a interação de Skyrme, cujo intervalo de saturação vai da origem até quase 1 fm.

Os coeficientes da distribuição de densidade com multipolaridades  $L=2$  e  $L=4$  praticamente coincidem para todas as interações, inclusive a de Skyrme. Dados experimentais sobre a densidade nuclear são obtidos indiretamente. O que se extrai da experiência de espalhamento de elétrons é a seção de choque diferencial da qual obtém-se o fator de forma que nos fornece informação sobre a estrutura nuclear. Muitos autores escolhem uma expressão analítica parametrizada para a densidade, ajustando-a de modo a melhor reproduzir os fatores de forma experimentais. Não cabe este procedimento em nosso trabalho. Usamos as distribuições de densidades teóricas aqui obtidas, a fim de determinar os correspondentes fatores da forma, os quais foram comparados com os medidos experimentalmente (29).

O fator de forma elástico se caracteriza por uma figura de difração, cujo mínimo tem valor zero; este mínimo provém dos zeros da função de Bessel. Sendo funções do momentum transferido  $\vec{k}$ , a curva com o primeiro pico corresponde à região de baixos valores de  $|\vec{k}|$ , ou seja, à superfície do núcleo. Obtivemos uma absoluta coincidência com os dados experimentais para todas as inte-

rações, na reprodução da curva do fator de forma que contém o primeiro pico (Fig.V-1). Seria uma indicação de que as funções de onda de Hartree-Fock utilizadas contêm todas as informações necessárias para descrever fenômenos envolvendo a superfície nuclear, apesar de serem determinantes de Slater de funções de onda de partícula independente.

Somos levados a concluir que o coeficiente de distribuição da densidade  $\rho_0(r)$ , calculado, representa fielmente a densidade nuclear na superfície do núcleo.

Quanto à curva que contém o segundo pico do fator de forma elástico, na Figura (V-2), vemos que os resultados teóricos se comportam de maneira análoga às densidades das quais foram obtidos. As curvas provenientes das interações de Skyrme e de Yukawa aparecem separadas pelo resultado coincidente produzido pelas interações (KLS), S e K. Agora dispomos de dados experimentais com os quais podemos estabelecer comparações.

A interação de Skyrme, ajustada por S.S. Mizrahi, é a que conduz a resultados mais próximos dos experimentais. Do ponto de vista da reprodução do espectro de energia, (KLS) foi a melhor sucedida; a interação de Yukawa se equivalia às demais. Agora, entretanto, esta simples interação de 2 corpos produz o pior resultado, o que seria de se esperar. Podemos admitir que entre as densidades apresentadas na Fig.(III-1), a obtida com a interação de Skyrme é a que melhor representaria a distribuição experimental. Acompanhando a tendência das curvas dos fatores de forma, provavelmente, a densidade nuclear verdadeira terá seu valor de saturação ligeiramente abaixo daquele alcançado pela interação de Skyrme.

Nas figuras (V-3) e (V-4) mostramos as curvas dos fatores de forma inelásticos do  $Ne^{20}$ , correspondentes às transições  $0^+ \rightarrow 2^+$  e  $0^+ \rightarrow 4^+$ , respectivamente. Limitamo-nos a mostrar resultados obtidos com a interação KLS. Neste caso as curvas que obtivemos com as diversas interações são praticamente coincidentes, diferindo bastante dos pontos experimentais <sup>(29)</sup>.

A curva teórica contendo o primeiro pico do fator de forma inelástico na transição  $0^+ \rightarrow 2^+$  é igualmente reproduzida por todas as interações usadas. Quanto à segunda curva, somente aquelas obtidas com as interações de Yukawa e de Skyrme diferem ligeiramente das demais, situando-se acima e abaixo da KLS (coincidente com S e K), respectivamente.

Caberiam algumas considerações sobre como os atuais resultados teóricos poderiam ser melhorados, admitindo-se que as interações empregadas sejam as corretas. Como a curva que contém o segundo pico localiza-se na região dos maiores momentos transferidos, parte mais interior do núcleo, é provável que os desvios apresentados se devam a natureza simples das funções de onda de partícula independente de Hartree-Fock. Já foi constatado <sup>(31)</sup> que funções de onda que incluem correlações de curto alcance produzem uma curva cujo segundo pico está deslocado para cima.

É necessário ter em mente que as funções de onda utilizadas neste trabalho se restringem a camada  $1s-0d$ . Se de um lado tal simplificação possibilita a realização do cálculo numérico, por outro lado, sabemos que as deformações nucleares seriam melhor descritas num subespaço maior. Uma primeira tentativa no sentido de melhorar os resultados aqui obtidos, seria ampliar a

base das funções de onda do modelo de camadas que entram na expansão das órbitas de HF. Isto também implicaria na não introdução da hipótese do caroço inerte.

Dentro das limitações aqui adotadas, todavia, os resultados mostram que as interações KLS, K e S pouco diferem entre si, descrevendo de maneira idêntica algumas situações. Ficou claro também que a interação de Skyrme dependente da densidade tem um desempenho superior às demais.

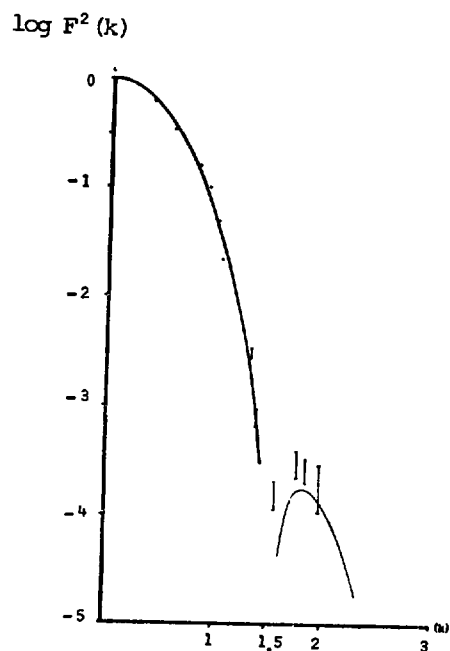


Fig.V-1 - Fator de forma do espalhamento elástico para o  $\text{Ne}^{20}$ , com a interação KLS, e os pontos experimentais (29).

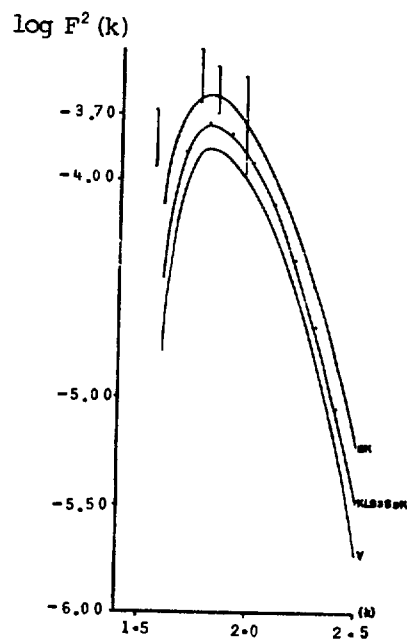


Fig.V-2 - Segundo pico da figura (V-1) obtido com as diferentes interações.



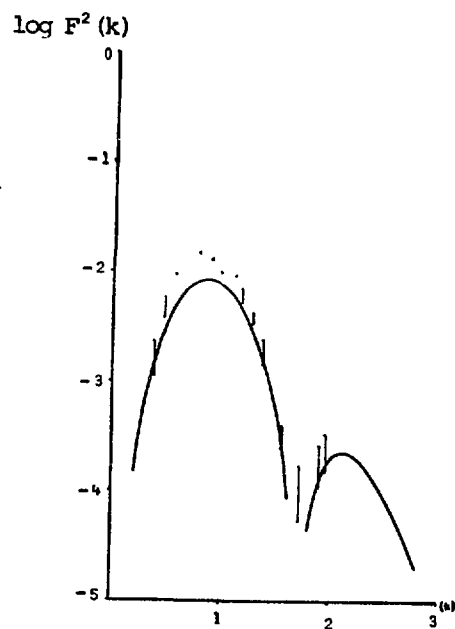


Fig.V-3 - Fator de forma inelástico da transição  $0^+ \rightarrow 2^+$  para o  $\text{Ne}^{20}$  com a interação (KLS) e os pontos experimentais.

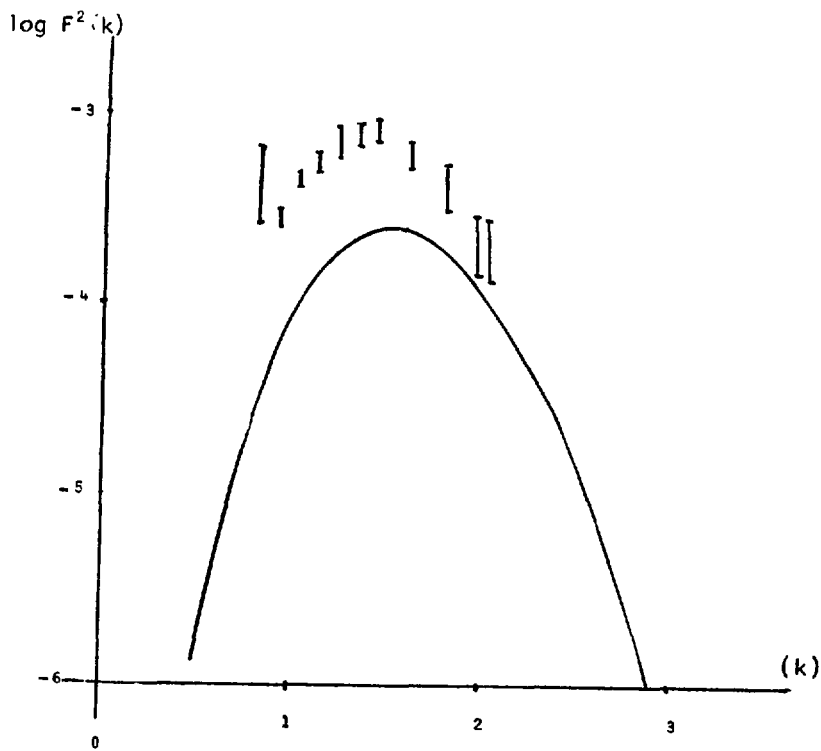


Fig.V-4 - Fator de forma inelástico da transição  $0^+ \rightarrow 4^+$  para o  $\text{Ne}^{20}$  com a interação (KLS), e os pontos experimentais.

Bibliografia

1. G. Rypka Lec. Theor. Phys. VIII C (65) 237.
2. G. Rypka Advances in Nucl. Phys. 1 (68) 183.
3. D.R. de Oliveira, Tese de Doutorado, (IFT) (72)
4. D.B. Isabelle e G.R. Bishop, Nucl.Phys. 45 (63) 209.
5. S.S. Mizrahi, Tese de Doutorado, (IFT) (76).
6. D.R. de Oliveira e S.S. Mizrahi, Rev.Bras.Fis. 2 (72) 311
7. K. Hara, II Simp.Bras.Fis.Teórica PUC, Rio de Janeiro, (69).
8. D.R.de Oliveira, Rev.Bras.de Fis. I-3, (71) 403.
9. M. Soyeur e A.P. Zucher, Phys. Letter, 41B (72) 135.
10. F. Villars, "Proc.Int.School Phys. E. Fermi" XXIII Academic Press, (63).
11. M.A. Preston e R.K. Bhaduri, "Structure of the Nucleus " , Addison Wesley Publ. Comp. (75).
12. R.E. Peierls e J. Yoccoz, Proc.Phys. Soc. A70, (57) 381.
13. S. Fallieros e R.A. Ferrel, Phys. Rev. 116 (59) 660.
14. A.de Shalit, Phys. Rev. 113 (59) 547.
15. H. Überall, "Electron Scatt. from Complex Nuclei, partes A e B - Coleção Pure and Applied Physics, Academic Press, (71).
16. R. Hofstadter e E.E.Chambers, Phys. Rev. 103 (56) 1454.
17. J. Eisenberg e W. Greiner, "Excitations Mechanisms of the Nucleus", Noth-Holland, (70).
18. T. de Forest e J.D. Walecka, Adv.Phys. 15 (66) 1.
19. I. Kelson, Nucl.Phys. 89 (66) 387.
20. A. de Shalit e H. Feshbach, "Theoretical Nuclear Physics" J. Wiley & Sons (74).
21. J.P. Elliot e T.H.R. Skyrme, Proc.Soc.Serv. A232 (55) 561.
22. E. Amaldi, G. Fidecaro e J. Mariano, Nuovo Cimento, 7 (50) 553.
23. C. Villi, Nucl. Phys. 10 (59) 166.
24. D.J. Thouless, Nucl.Phys. 21 (60) 225.
25. S. Kahana, H.C.Lee e C.K. Scott, Phys.Rev. 185 (69) 1378.
26. J.P.Elliot, H.A. Mavromatis e E.A. Sanderson, Phys.Lett. 24B (67) 358.
27. T.T.S. Kuo, Nucl. Phys. A103, (67) 71. Princeton Univ. Press (57).
28. Y.Torizuka *et al.* Phys.Lett. 36B (71) 9.
29. G. Ripka, "Proc.Int.Nucl.Struc.Studies", Sendai, Ed. K.Khoda e H.Ui, (72).
30. W.F. Ford, R.C. Braley e J.Bar-Touv, Phys. Rev. C4 (71) 2099.
31. D.A. Sparrow e W.J. Grace, Nucl. Phys. A145 (70) 289.