СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P5 - 11415

В.М.Лебеденко

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ К КЛАССАМ PR- ГРУПП И PR- АЛГЕБР

1978

P5 - 11415

В.М.Лебеденко

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ К КЛАССАМ *PR*- ГРУПП И *PR*- АЛГЕБР

Лебеденко В.М. Р5 - 11415

О принадлежности к классам PR-групп и PR-алгебр

Найдены необходимые и достаточные условия принадлежности алгебр Ли к классу PR-алгебр, то есть алгебр с коммутационными соотношениями типа $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ $(i < j)$. Благодаря этому получен критерий принадлежности групп Ли классу PR-групп, связных и односвязных групп Ли, алгебры Ли которых являются PR-алгебрами.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Lebedenko V.M. P5 - 11415

On PRGroup Classes and PR Algebra Membership

The necessary and sufficient conditions are found for the membership of Lee algebras to PR algebra class, i.e., of algebras with commuting relations of $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ $(i < j)$ type. Due to this, a criterion is obtained for the membership of the Lee groups to PR group classes, connected and simply connected Lee groups, which Lee algebras are PR algebras.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах /2-4/ автором получен ряд результатов о PR-группах.

Связную и односвязную неабелеву группу Ли G мы называем PR-группой, если в ее алгебре Ли L имеется такой базис $[H_1,\dots,H_p, H_{p+1},\dots,H_n]$,

элементы которого удовлетворяют соотношениям:

$$[H_i,H_j] = 0 \quad \text{при всех } i,j \le p \text{ и всех } i,j > p$$
$$[H_i,H_j] = r_{ij} H_i \quad \text{при всех } i,j,\ i \le p,\ j > p \qquad /1/$$

/$r_{ij} \in R$; при любом фиксированном i, $r_{ij} \not\equiv 0$ /.

Соответственно, такую алгебру Ли мы называем PR-алгеброй, а базис указанного типа - PR-базисом.

Легко видеть, что не всякий базис алгебры Ли, даже у PR-алгебры, является PR-базисом.

Пусть, например, $L = \{H_1, H_2, H_3\}$

$$[H_1,H_3] = H_1,\ [H_2,H_3] = 2H_2,\ [H_1,H_2] = 0,$$

$$H'_1 = H_1,\ H'_2 = H_1 + H_2,\ H'_3 = H_3.$$

Тогда $[H'_2,H'_3] = H_1 + 2H_2 = 2H'_2 - H'_1$.

В связи с указанными выше результатами может возникнуть вопрос: является ли данная группа /алгебра/ Ли PR-группой /алгеброй/? Настоящая работа и посвящена рассмотрению этого вопроса. Ниже будут найдены условия принадлежности к классам PR-алгебр и PR-групп.

2. *ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ*

Установим некоторые необходимые условия принадлежности к классам PR-алгебр и PR-групп.

Если алгебра Ли L является PR-алгеброй, то она имеет базис, удовлетворяющий соотношениям /1/. Следовательно, L – 2-разрешима /то есть $[[L,L],[L,L]] = 0$ /, так как $[L,L] = \{H_1,\dots,H_p\}$ /здесь и ниже $\{M\}$ будет означать пространство, натянутое на множество M /. Если группа G является PR-группой, то она также 2-разрешима, то есть $[[G,G],[G,G]] = E$ /см./3/ /.

Заметим, что в наших предположениях алгебра Ли L не только 2-разрешима, но и разлагается в прямую сумму своих абелевых подалгебр:

$$L = \{H_1,\dots,H_p\} + \{H_{p+1},\dots,H_n\},$$

где /2/

$$\{H_1,\dots,H_p\} = \{L,L\}.$$

Не всякая 2-разрешимая алгебра Ли имеет такое разложение. Пусть, например,

$$L = \{x, y, z\}, \qquad \text{где} \quad [x,y] = z, \quad [x,z] = 0 = [y,z].$$

Подалгебра $[L,L]$ равна $\{z\}$. Алгебра L не имеет требуемого разложения, поскольку коммутатор

$$[k_1 x + \ell_1 y + m_1 z,\ k_2 x + \ell_2 y + m_2 z] = (k_1\ell_2 - k_2\ell_1)z$$

равен нулю тогда и только тогда, когда

$$\dim\{k_1 x + \ell_1 y + m_1 z,\ k_2 x + \ell_2 y + m_2 z, z\} \le 2.$$

Ниже будут найдены условия существования разложений типа /2/.

С точки зрения топологии, PR -группы связны и односвязны /см.[1,3,6,7] /. Всякая PR -группа гомеоморфна /см.[7] / евклидову пространству /см.[3] /. Наоборот, если некоторая топологическая группа гомеоморфна евклидову пространству, то она связна и односвязна /см.[6,7]/.

Таким образом, группа Ли является PR-группой тогда и только тогда, когда она гомеоморфна евклидову пространству, а ее алгебра Ли является PR-алгеброй.

3. О РАЗЛОЖЕНИИ 2-РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБР ЛИ В ПРЯМУЮ СУММУ АБЕЛЕВЫХ ПОДАЛГЕБР

Найдем условие существования разложения типа /2/ для 2-разрешимых алгебр Ли.

Пусть L -такая алгебра, $[L,L]=\{H_1,\dots,H_p\}$, а элементы $H_{p+1},\dots,H_n$ - линейно независимы по модулю $[L,L]$. Легко показать, что L имеет требуемое разложение тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $H'_j = H_j + \sum_{t=1}^{p} x_{jt} H_t$ $(p+1 \le j \le n)$, что $[H'_j, H'_k]=0$ при любых j, k, $p+1 \le j$, $k \le n$. Рассмотрим эти условия подробнее. Пусть $[H_i, H_j] = \sum_{t=1}^{p} c_{ij}^{(t)} H_t$ для всех i, j, $1 \le i \le p < j < n$, а $[H_j, H_k] = \sum_{t=1}^{p} \ell_{jk}^{(t)} H_t$ для всех j, k, $j,k > p$, $j < k$. Тогда существование требуемых элементов H'_j $(p < j \le n)$ эквивалентно разрешимости системы из $\frac{(n-p)(n-p-1)}{2}$ уравнений /мы считаем, что $n-p>1$;при

$n-p=1$ задача, очевидно, разрешима/ с $p(n-p)$ неизвестными

$$\begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{t=1}^{p} (x_{jt} c_{tk}^{(s)} - x_{kt} c_{tj}^{(s)}) = -\ell_{jk}^{(s)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \qquad /3/$$

где индексы пробегают все допустимые значения: $1 \le s \le p$, $p+1 \le j, k \le n (j<k)$. Условия разрешимости линейной системы очевидны. Теперь мы получаем следующее утверждение.

Предложение 1. 2-разрешимая алгебра Ли L имеет разложение типа /2/ тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы /3/, соответствующей L, совпадает с рангом ее расширенной матрицы.

4. *О ПОСТРОЕНИИ* PR-*БАЗИСА*

Пусть алгебра Ли L имеет разложение типа /2/:

$L = \{H_1, \dots, H_p\} + \{H_{p+1}, \dots, H_n\}$.

Тогда $[H_i, H_j] = \sum_{t=1}^{p} a_{ij}^{(t)} H_t$ при всех i,j, $1 \le i \le p < j \le n$.

Если L – PR-алгебра, то существуют такие элементы

$H'_i = \sum_{t=1}^{p} y_{it} H_t$, $1 \le i \le p$, $\det \| y_{it} \| \ne 0$, и элементы

$H'_j = a_j + b_j$, $p < j \le n$,

$a_j \in \{H_1, \dots, H_p\}$, $\{H_{p+1}, \dots, H_n\} = \{b_{p+1}, \dots, b_n\}$,

что $[H'_i, H'_j] = r_{ij} H'_j$. Отсюда вытекает, что для любого $b \in \{H_{p+1}, \dots, H_n\}$ и $i \le p$, $[H'_i, b] = \lambda_i H'_i$. В частности, $[H'_i, H_j] = r'_{ij} H_i$ при всех i, j, $1 \le i \le p < j \le n$. Наоборот, если последние соотношения имеют место для некоторой 2-разрешимой алгебры Ли, то она является PR-алгеброй.

Элементы H_j можно рассматривать как линейные операторы на пространстве $\{H_1, \dots, H_p\}$. Матрицы этих операторов имеют вид:

$$\begin{pmatrix} a^{(1)}_{1j} & \dots\dots\dots & a^{(1)}_{pj} \\ a^{(2)}_{1j} & \dots\dots\dots & a^{(2)}_{pj} \\ & & \\ a^{(p)}_{1j} & \dots\dots\dots & a^{(p)}_{pj} \end{pmatrix} = A_j . \qquad /4/$$

Условие существования элементов H'_i эквивалентно наличию такого базиса в $\{H_1, \dots, H_p\}$, в котором все операторы H_j имеют диагональные матрицы.

Для того чтобы линейный оператор с матрицей A имел в некотором базисе действительного пространства диагональную матрицу, необходимо и достаточно выполнение условий /см. /5//:

а/ все характеристические корни матрицы A действительны;

/5/

б/ минимальный многочлен матрицы A не имеет кратных корней.

Для того чтобы все операторы H_j имели в некотором базисе диагональные матрицы, необходимо и достаточно, чтобы A_j попарно коммутировали и удовлетворяли условиям /5/. Доказательство этого утверждения содержится в приложении. Его можно также использовать и для практического нахождения требуемого базиса. Матрицы A_j коммутируют в силу тождества Якоби.

Сформулируем теперь наш результат.

Предложение 2. У 2-разрешимой алгебры Ли L, имеющей разложение типа /2/, существует PR-базис тогда и только тогда, когда матрицы A_j операторов $H_j (p < j \le n)$ удовлетворяют условиям /5/.

5. О КАНОНИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ

Пусть уже выбран такой базис $[H_1,\dots,H_p,H_{p+1},\dots,H_n]$ алгебры Ли L группы G, что $[H_i,H_j]=0$ при всех $i,j \le p$ и при всех $i,j > p$, $[H_j,H_i]=r_{ij} H_i$ при всех i,j, $1 \le i \le p < j \le n$ /короче, $[H_i,H_j]=r_{ij}H_i, i<j$/ и G гомеоморфна евклидову пространству /то есть G связна и односвязна/. Существует абстрактная связная и односвязная PR-группа G', изоморфная G, с алгеброй Ли

$$L' = \{H'_1,\dots,H'_p,H_{p+1},\dots,H'_n\},\ [H'_i,H'_j]=r_{ij}H'_i, 1\le i<j\le n$$

/см. /3/ /.

Для элементов g' группы G' справедливо каноническое разложение $g' = a'_1(t_1)\dots a'_n(t_n)$ $([a'_i(t_i)]_{t_i\in R} \to H'_i)$. При таком разложении закон умножения в группе G' выглядит весьма просто /см. /3/ /. Полезно получить аналогичное разложение для группы G, поскольку все наши рассмотрения проводились именно для него /см. /2-4/ /.

Касательным вектором для каждой однопараметрической подгруппы $[a'_i(t)]_{t\in R}$ является элемент $H'_i, 1\le i\le n$ /см. /3/ /. Пусть f - изоморфизм L' на L, удовлетворяющий условиям $H'_i f = H_i$. Тогда существует такой изоморфизм ϕ группы G' на группу G, что при $a_i(t)=a'_i(t)\phi_{(1\le i\le n)}$, каждая подгруппа $[a(t)]_{t\in R}$ имеет касательный вектор H_i /см. теоремы 84 и 89 работы /1/ и теорему о монодромии из работы /1/ /. Так как $a'_i(t)$ - элементы канонического разложения, то есть

$$a'_j(t)a'_i(s) = a'_i(e^{-r_{ij}t}s)a'_j(t)$$

при любых t, s, i, j, $t,s\in R$, $1\le i<j\le n$ /см. /2,3/ /, то для $a_i(t) = a'_i(t)\phi$ выполняются аналогичные соотношения.

Поэтому $a_i(t)$ - элементы канонического разложения группы G.

Отсюда вытекает практический способ нахождения канонического разложения группы G. Подгруппы $[a_i(t)]_{t \in R}$, рассмотренные нами, определяются однозначно, как однопараметрические подгруппы с касательными векторами H_i /см. /1/ /.

Если такие подгруппы уже найдены, то они образуют каноническое разложение G. В качестве $a_i(t)$ можно взять элементы $\exp(tH_i)$. Здесь $x \to \exp x$ - каноническое экспоненциальное отображение алгебры L в группу G /см. /1,8//.

Заметим, что для матричных групп

$$\exp(tH) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k H^k}{k!} \qquad \text{/см. /1//.}$$

Сформулируем окончательный результат.

Предложение 3. Пусть G - гомеоморфная евклидову пространству /связная и односвязная/ группа Ли с алгеброй $L = \{H_1, \dots, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n\}$, где $[H_i, H_j] = 0$ при всех $i,j \le p$ и при всех $i,j > p$, $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ при всех $i \le p < j \le n$, а $[a_i(t)]_{t \in R}$ - однопараметрические подгруппы с касательными векторами H_i $(a_i(t) = \exp(tH_i))$. Тогда подгруппы $[a\ (t)]_{t \in R}$ образуют каноническое разложение группы G $(G \ni g \to g = a_1(t_1) \dots a_n(t_n))$ в смысле работы /3/.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность В.Г.Кадышевскому за инициирование этой работы, А.П.Мишиной за ценные советы, А.В.Матвеенко и Г.Л.Мазному за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть линейные операторы T_i $(1 \le i \le m)$ имеют матрицы A_i, соответственно, в некотором базисе действительного пространства V. Для существования базиса пространства V, в котором матрицы всех операторов T_i диагональны, необходима и достаточна попарная перестановочность матриц A_i и выполнимость для них условий /5/.

Доказательство

Необходимость указанных условий очевидна. Для доказательства достаточности будем пользоваться методом индукции. При $m = 1$ утверждение выполняется.

Пусть оно справедливо при некотором $m \geq 1$. Рассмотрим $m+1$ операторов T_i с матрицами A_i, соответственно, удовлетворяющих условию.

Из нашего предположения следует, что существует такой базис пространства V, в котором операторы $T_i (1 \leq i \leq m + 1)$ имеют матрицы A_i', где первые m диагональны. Пусть этот базис состоит из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$. Так как $A_i x_1 = \lambda_{i1} x_1$, то $x_1 \in V_{\lambda_{i1}}$ $(i = 1,\ldots,m)$, где $V_{\lambda_{i1}}$ - собственные подпространства операторов T_i, относящихся к собственным значениям λ_{i1}.

Из соотношений $x \in V_{\lambda_{i1}}$, $A_i A_{m+1} x = \lambda_{i1}(A_{m+1} x)$, $1 \leq i \leq m$,

вытекает, что при $V^{(1)} = \bigcap\limits_{i=1}^{m} V_{\lambda_{i1}}$, $T_{m+1} V^{(1)} \subseteq V^{(1)}$. Так

как $x_1 \in V^{(1)}$, то $\dim V^{(1)} \geq 1$. Пусть $\dim V^{(1)} > 1$. Базис $V^{(1)}$ содержится в множестве $[x_1,\ldots,x_n]$. Минимальный многочлен матрицы оператора T_{m+1} в подпространстве $V^{(1)}$ является делителем минимального многочлена матрицы A_{m+1}. *Поэтому он не имеет кратных корней.* Характеристический многочлен указанной матрицы тоже является делителем характеристического многочлена матрицы A_{m+1}. Поэтому его корни действительны.

Отсюда вытекает, что в пространстве $V^{(1)}$ есть базис $x_1',\ldots, x_k'$ $(1 \leq k \leq n)$ - собственный для T_{m+1} и, естественно, для T_i $(1 \leq i \leq m)$. Теперь представим V в виде прямой суммы $V = \{x_1',\ldots,x_k'\} + \{[x_i]_1^n \setminus V^{(1)}\}$. Если второе слагаемое не равно нулю, то, выбрав некоторый элемент из $[x_i]_1^n \setminus V^{(1)}$, можно аналогично построить собственное подпространство $V^{(2)}$, $V^{(1)} \cap V^{(2)} = 0$, и выбрать в нем базис, собственный для всех операторов

T_i, $1 \leq i \leq m+1$. Поступая так далее, можно на некотором шагу получить базис всего пространства V, собственный для всех операторов $T_i (1 \leq i \leq m+1)$.

Утверждение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кириллов А.А. Элементы теории представлений. "Наука", М., 1972.*
2. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-9384, Дубна, 1975.*
3. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-9867, Дубна, 1976.*
4. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-10535, Дубна, 1977.*
5. *Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. "Наука", М., 1970.*
6. *Наймарк М.А. Теория представлений групп. "Наука", М., 1976.*
7. *Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. "Наука", М., 1973.*
8. *Шевалле К. Теория групп Ли, том. 1, ИЛ, М., 1948.*

Рукопись поступила в издательский отдел 24 марта 1978 года.

ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Заказ 24663. Тираж 530. Уч.-изд. листов 0,62.
Редактор Б.Б.Колесова.
Корректор Т.Е.Жильцова. Подписано к печати 10.04.78 г.