

JAERI-M

7 6 4 6

J  
A  
E  
R  
I  
·  
M  
  
7  
6  
4  
6

等方性黒鉛の曲げ強さに及ぼす  
応力-ひずみ関係の非直線性の影響

1978年5月

荒井長利・奥達雄

この報告書は、日本原子力研究所がJAERI-Mレポートとして、不定期に刊行している研究報告書です。入手、複製などのお問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部（茨城県那珂郡東海村）あて、お申しこしてください。

JAERI-M reports, issued irregularly, describe the results of research works carried out in JAERI. Inquiries about the availability of reports and their reproduction should be addressed to Division of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken, Japan.

等方性黒鉛の曲げ強さに及ぼす応力-ひずみ関係の非直線性の影響

日本原子力研究所東海研究所燃料工学部

荒井 長利・奥 達雄

(1978年3月28日受理)

黒鉛の曲げ強さに対する応力-ひずみ関係の非直線性の影響を検討するため、等方性黒鉛7477 P Tを用い数種類の角棒の4点曲げ試験を行ない、曲げ荷重と外縁ひずみとの関係を測定した。また非直線性のかつ引張と圧縮とで非対称な応力-ひずみ関係を考慮したはりの応力分布計算法およびワイブル理論による破壊確率計算法を開発した。本実験と解析から以下の結論が得られた。

- 1) 引張応力-ひずみ曲線は応力が大きくなるに従い圧縮応力-ひずみ曲線からずれ非直線性が著しくなる。
- 2) 曲げ破壊時の真の曲げ強さは弾性曲げ強さより10~20%小さくなる。
- 3) 応力-ひずみ関係の非直線性を考慮したワイブル理論の方が、弾性を仮定した理論よりも実験と良く一致する破壊確率分布を与える。

Effect of Nonlinear Stress-Strain Relationship  
on Bending Strength of Isotropic Graphite

Taketoshi ARAI and Tatsuo OKU

Division of Nuclear Fuel Research, Tokai Research  
Establishment, JAERI  
(Received March 28, 1978)

Four-point bending tests were made on rectangular isotropic 7477PT graphite specimens of different sizes to observe the relation between load and outermost fiber strain. Analytical methods, allowing for nonlinear stress-strain relationships different between tension and compression, were developed for calculating the fiber stress distribution in a beam and the failure probability based on the Weibull statistical theory for bending fracture.

With increase of the stress, the stress-strain curves for tension deviate from the linearity and also from those for compression. The true bending strengths of the rectangular bars are 10~20 percent lower than elastic bending strengths. Revised Weibull theory gives failure probability distributions agreeing with measured ones, compared with the theory based on elastic behavior.

Keywords: Graphite, Bending Strength, Nonlinear Stress-Strain Relationship, Stress Analysis, Weibull Statistical Theory

## 目 次

1. 序 論.....	1
2. 実験方法.....	2
3. 解析方法.....	4
3.1 はりの応力・ひずみ分布.....	4
3.2 ワイブルの統計論.....	6
4. 結果と検討.....	7
4.1 測定結果の概要.....	7
4.2 応力-ひずみ関係.....	7
4.3 曲げ強さの性質.....	9
5. 結 論.....	23
謝 辞.....	24
参考文献.....	24
付録 A. 曲げ試験片の応力-ひずみ関係.....	25
A.1 応力-ひずみ関係の直接導出法.....	25
A.2 4点曲げ角棒の繊維応力, ひずみ分布の計算法.....	28
B. ワイブルの統計論.....	31
B.1 Risk of Rupture の計算法.....	31
B.2 最適ワイブルパラメータ $m$ , $\sigma_0$ の計算法.....	32

## Contents

1. Introduction .....	1
2. Experimental Methods .....	2
3. Analytical Methods .....	4
3.1 Stress and Strain Distribution in a Beam .....	4
3.2 Weibull Statistical Theory .....	6
4. Results and Discussions .....	7
4.1 Summary of the Measurements .....	7
4.2 Stress - Strain Relationships .....	7
4.3 Properties of Bending Strengths .....	9
5. Conclusions .....	23
Acknowledgment .....	24
References .....	24
Appendix .....	25
A Stress-Strain Relationships in a Rectangular Bending Specimen .....	25
A.1 Direct Derivation of the Stress - Strain Relationships from a Bending Test .....	25
A.2 Calculation of the Fiber Stress and Strain Distributions in a Rectangular Specimens Subjected to Four-Point Bending .....	28
B Weibull Statistical Theory .....	31
B.1 Calculation of the Risk of Rupture .....	31
B.2 Calculation of the Optimum Weibull Parameters $m$ and $\sigma_0$ .....	32

## List of Tables

Table 1	Dimensions of four-point bending specimens .....	3
Table 2	Summary of measurements on 7477PT graphite' .....	11
Table 3	Properties of strength distributions on bending specimens .....	20

## List of Figures

Fig. 1	Locations of test specimens in a log of 7477 PT graphite .	3
Fig. 2	Measured tensile strengths and fracture strains on tensile and bending specimens .....	11
Fig. 3	Measured uniaxial tensile stress-strain diagrams .....	12
Fig. 4	Measured uniaxial compressive stress-strain diagrams ....	12
Fig. 5	Comparison of uniaxial tensile and compressive stress-strain diagrams .....	13
Fig. 6	Measured load-strain diagrams on bend specimens; type $6 \times 10 \times 50$ .....	14
Fig. 7	Measured load-strain diagrams on bend specimens; type $8 \times 8 \times 50$ .....	15
Fig. 8	Calculated stress-strain curves from the bending tests ..	16
Fig. 9	Comparison of stress-strain relations derived from bending and uniaxial compression tests .....	16
Fig. 10	Comparison of load-tensile strain diagrams between measurements and calculations .....	17
Fig. 11	Comparison of tensile fracture strains between measurements and calculations .....	18
Fig. 12	Shift of neutral surface towards compressive sides of bending specimens .....	19
Fig. 13	Comparison of maximum elastic and true tensile stresses on rectangular cross-section beams .....	19
Fig. 14	Comparison of experimental and theoretical probabilities of failure based on elastic bending stress .....	21
Fig. 15	Comparison of experimental and theoretical probabilities of failure based on true bending stress .....	21
Fig. 16	Comparison of test volume dependence of median bend strengths .....	22
Fig. 17	Probability of failure on tensile specimens of a test volume $1.61 \text{ cm}^3$ .....	22

# 1. 序 論

日本原子力研究所において開発を進めている多目的高温ガス実験炉および諸外国において実用化に向いつつある高温ガス冷却炉では、黒鉛が炉心の構造材として使用されている。その形状形式としては円筒型燃料スリーブ、六角型黒鉛ブロックおよび球殻などがある。これらの黒鉛構造物には、使用形態によって多少異なるが、熱負荷による温度勾配にもとづく熱応力および黒鉛の中性子照射による寸法変化にもとづく照射応力が発生している。高温ガス炉の通常運転状態において黒鉛構造物に発生している応力は、主として、このような熱力応力および照射応力である。これらは応力形態からみて多軸 2 次応力と呼ばれるものである。すなわち、各応力成分が部材中で引張側から圧縮側へと非一様に分布している形態である。黒鉛構造物の健全性を合理的に評価するために、このような多軸 2 次応力形態での破壊挙動、破壊基準を究明する必要がある。現状においては、多軸性に関する実験的研究は少なく確かな破壊基準は判明していない。しかし、少くとも 2 次応力形態での破壊については、応力形態として最も類似している材料試験データである曲げ強さを基準として考えることが提案されている<sup>(1)</sup>。というのは、黒鉛の材料試験の結果によると、一般的に曲げ強さは単軸引張強さよりも 20~70% も大きく、この相異は構造設計との関連からみた時に、積極的に利用すべき性質と考えられるからである。

一方、黒鉛の応力-ひずみ関係が非直線性を示すことは、従来の単軸引張および単軸圧縮試験の結果によって広く認められている。特に、この傾向は未照射材において著しい。黒鉛の曲げ強さは、従来、弾性論に基づく最大引張応力として表現されているが、材料のより正確な破壊基準を考える際には応力-ひずみ関係の非直線性の影響について調べておくことが重要である。

本研究は、角棒の曲げ試験によって曲げ荷重と外縁ひずみとの関係を実測し、これに基づいて板厚内の非直線的な繊維応力と繊維ひずみとの関係を考慮する解析法により、曲げ荷重時の真の引張破壊応力を検討しようとするものである。

曲げ強さに関する応力-ひずみ関係の非直線性効果については、これ迄に Greenstreet ら<sup>(2)</sup> および Brocklehurst ら<sup>(3)</sup> によって実験的に検討されている。

Greenstreet らは異方性黒鉛 EGCR-type AGOT を、また、Brocklehurst らは準等方性黒鉛 NI などそれぞれ使用している。これらの研究から、

- ① 曲げ荷重と外縁ひずみとは非直線的な関係を示す。
- ② 外縁引張ひずみと外縁圧縮ひずみとは若干異なる<sup>(2)</sup>、あるいは、殆んど同じであり<sup>(3)</sup>、概略的には、引張応力側と圧縮応力側とは応力-ひずみ関係が対称的である。
- ③ 曲げ強さ(弾性値)と単軸引張強さとの比は両実験共に約 1.5 であるが、引張と圧縮で対称的な応力-ひずみ関係の非直線性を考慮しても、この引張破壊応力の相違を説明できない。
- ④ 曲げ荷重時の破壊の特性、すなわち、応力勾配下の破壊であって強度が試験片体積に依存すること、を考慮して破壊条件を検討するために、弾性挙動を前提としたワイブルの統計理論を適用した結果、実験とは必ずしも良い一致が得られない。



などの結論が得られている。

本研究は、上記の研究に続くものであるが、実験結果を理解する際に異方性や不均質性などの複雑な要素を無視できる利点のために、等方性黒鉛を使用している。また実験解析の点では、引張側と圧縮側とで非対称でかつ非直線的な応力-ひずみ関係を考慮していること、および、ワイプルの統計論においてもそのような一般的な応力-ひずみ関係を考慮していること、などの点で従来の研究を発展させたものである。

黒鉛の破壊挙動のうち、特に非一様な引張応力状態での破壊（曲げ破壊の他にもリング圧縮破壊、厚肉円筒の内圧破壊）については未解明の点が多い。非一様応力場での破壊基準は、本研究のように最も単純な試験を手掛りとして検討をすすめていくのが適切であると考えられる。

## 2. 実験方法

曲げ荷重時の応力-ひずみ関係および強度を検討するため数種類の角棒試験片を用いて4点曲げ試験を行なった。また比較検討のために引張および圧縮試験を行なった。

供試材料はLe Carbone Lorraine (LCL) 社製の石油コークス系微粒等方黒鉛 7477 PTである。全ての試験片は同一のブロック（原形は平径 30 cm、高さ 37 cm）から、Fig. 1 に示す位置から切り出されたものである。

曲げ試験では Table 1 に示すような板厚やスパン距離の異なる5種類の試験片をそれぞれ8個ずつ使用した。これらは全長にわたって断面積が一定の角棒形状である。曲げ試験片の中央スパン部の上面および下面にそれぞれ1枚ずつ電気抵抗式ひずみゲージ（ゲージ長 5 mm）を接着剤アルテコエース、Type E-10 を用いて貼付した。

引張試験片（8個）は平行部の長さ 32 mm、直径 8 mm の丸棒（平行部体積  $1.61 \text{ cm}^3$ ）である。引張試験では、平行部の中央に貼付したひずみゲージおよびゲージ長 25 mm の非接着型変位形（ひずみゲージ型）を用いてひずみを測定した。圧縮試験片（8個）は  $8 \times 8 \times 20 \text{ mm}$  の角柱である。ひずみ測定には電気抵抗式ひずみゲージを用いると共に治具の変形を補正してクロスヘッド速度から求める方法とを並用した。

全ての試験はインストロン型万能試験機を使用し、クロスヘッド速度を  $0.5 \text{ mm/min}$  とした。

試験に先立って全ての曲げ試験片および圧縮試験片についてかさ密度と超音波伝播速度法（100 kHz の縦波を使用）により、 $E = \rho v^2$ （ $E$ ：ヤング率、 $\rho$ ：密度、 $v$ ：超音波伝播速度）からヤング率を求めた。

Table 1 Dimensions of four-point bending specimens

Type	Thickness (mm)	Width (mm)	Span of outer knife edges (mm)	Volume between outer knife edges (cm <sup>3</sup> )
4 × 16 × 50	4	16	39.2	2.51
6 × 10 × 50	6	10.7	39.2	2.51
8 × 8 × 50	8	8	39.2	2.51
8 × 8 × 120	8	8	101.6	6.50
12 × 12 × 120	12	12	101.6	14.63

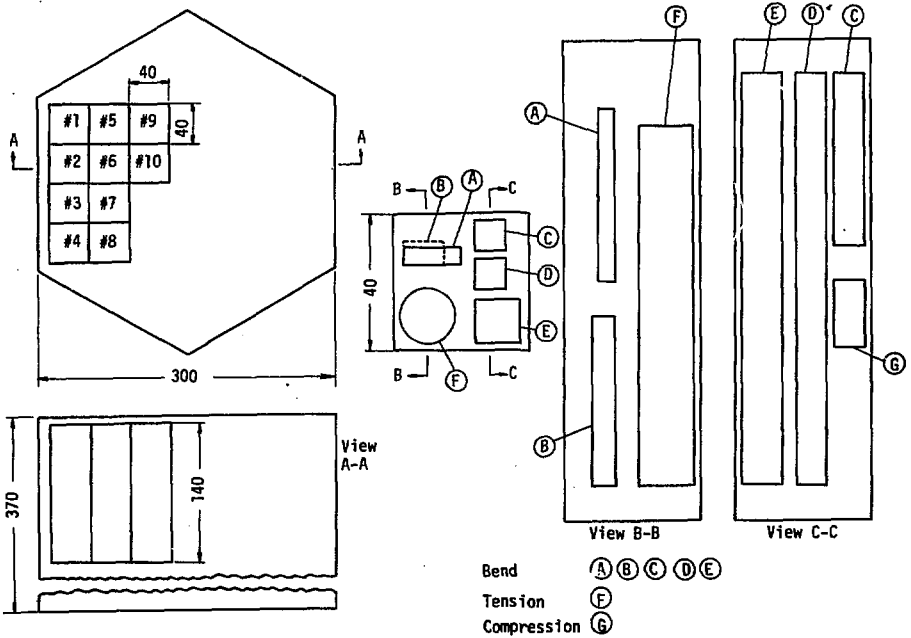


Fig. 1 Locations of test specimens in a log of 7477PT graphite

### 3. 解析方法

#### 3.1 はりの応力、ひずみ分布

曲げ荷重を受ける真直はりの垂直応力（曲げ応力又は繊維応力）は通常のはり理論では材料が Hook の法則に従うものと仮定して計算される。本研究では、先ず最初に実験により得られている一連の曲げモーメントと外縁引張および圧縮ひずみとの関係を用いて直接的に引張および圧縮応力-ひずみ関係を導出する。次にこの応力-ひずみ関係に基づいて、引張応力側と圧縮応力側とで非対称でかつ非直線的な応力-ひずみ関係式を定め、これを用いてワイブルの統計論の検討のために必要なはり全体の応力、ひずみ分布を計算する。

曲げ試験結果から材料の引張応力および圧縮応力-ひずみ関係を直接的に導出する方法は Nadai の方法<sup>(4)</sup>による。この詳細は付録 A.1 に記す。すなわち、外支点間距離  $l$ 、幅  $w$ 、厚さ  $h$  の角棒の 4 点曲げ試験によって、中央スパン部について曲げモーメント  $M$ 、外縁引張ひずみ  $\epsilon_t$ 、外縁圧縮ひずみ  $\epsilon_c$  の一連の関係が得られているものとする。その引張ひずみ  $\epsilon_t$  および圧縮ひずみ  $\epsilon_c$  に対する引張応力  $\sigma_t$  および  $\sigma_c$  はそれぞれ次の式で与えられる。

$$\sigma_t = \frac{1}{wh^2} \frac{\frac{d\epsilon_t}{d\phi} - \frac{d\epsilon_c}{d\phi}}{\frac{d\epsilon_t}{d\phi}} \left( 2M + \phi \frac{dM}{d\phi} \right) \quad (1)$$

$$\sigma_c = \frac{1}{wh^2} \frac{\frac{d\epsilon_t}{d\phi} - \frac{d\epsilon_c}{d\phi}}{\frac{d\epsilon_c}{d\phi}} \left( 2M + \phi \frac{dM}{d\phi} \right) \quad (2)$$

ここで、

$$\phi = \frac{l}{4h} (\epsilon_t - \epsilon_c) \quad (3)$$

である。

次に、引張応力側と圧縮応力側とで非対称でかつ非直線的な応力-ひずみ関係として、純粋に経験的なものであるが、一般性を有する次のような表示式を仮定する。

$$\text{引張} \quad \sigma = E_t \epsilon + D_t \epsilon^{p_t} \quad (4)$$

$$\text{圧縮} \quad \sigma = E_c \epsilon + D_c (-\epsilon)^{p_c} \quad (5)$$

ここで  $E_t$ 、 $D_t$ 、 $p_t$ 、 $E_c$ 、 $D_c$ 、 $p_c$  は材料定数である。なお  $E_t$ 、 $E_c$  はそれぞれ引張および圧縮ヤング率である。

この関係式は後述の解析結果で示されるように、曲げ試験において問題となる応力、ひずみ範

図に対してきわめて精度よくフィッティングできる。さらにこの関係式の定数は僅かな手計算によって定めることができるという利点があると同時に、次に述べるように曲げモーメントと外縁ひずみとの関係が簡単な式で表わすことができるという特徴がある。

次に、応力-ひずみ関係が(4)および(5)式で与えられる角棒の縦軸方向任意点の横断面Aを考え、これに曲げモーメントMが作用しているものとする、この横断面内で板厚方向に中立面からの距離yにおける繊維応力とひずみ $\sigma(y)$ 、 $\epsilon(y)$ は通常のはり理論と同様な計算法によって求められる。その詳細を付録A.2に記す。すなわち、はりの釣合条件式

$$\int_A \sigma dy = 0 \tag{6}$$

$$M = \int_A \sigma y dA \tag{7}$$

から、外縁引張ひずみ $\epsilon_t$ 、外縁圧縮ひずみ $\epsilon_c$ との関係が以下のように得られる。

$$\epsilon_t^2 E_t + \frac{2D_t}{p_t + 1} \epsilon_t^{p_t + 1} = \epsilon_c^2 E_c - \frac{2D_c}{p_c + 1} (-\epsilon_c)^{p_c + 1} \tag{8}$$

$$\frac{3M}{wh^2} = \frac{1}{(\epsilon_t - \epsilon_c)^2} \left[ \epsilon_t^3 E_t + \frac{3D_t}{p_t + 2} \epsilon_t^{p_t + 2} + (-\epsilon_c)^3 E_c - \frac{3D_c}{p_c + 2} (-\epsilon_c)^{p_c + 2} \right] \tag{9}$$

(8)、(9)式を数値解法によって解いて $\epsilon_t$ 、 $\epsilon_c$ が得られる。従って中立面( $y = 0$ )の位置は引張応力側、圧縮応力側の表面からそれぞれ、

$$e_t = \frac{\epsilon_t}{\epsilon_t - \epsilon_c} h \tag{10}$$

$$e_c = \frac{-\epsilon_c}{\epsilon_t - \epsilon_c} h \tag{11}$$

の深さにある。よって、繊維ひずみ分布は

$$\epsilon(y) = \begin{cases} \frac{\epsilon_t}{e_t} y & (\text{引張側, } y \geq 0) \\ -\frac{\epsilon_c}{e_c} y & (\text{圧縮側, } y < 0) \end{cases} \tag{12}$$

で与えられるから、(4)および(5)式によって繊維応力分布 $\sigma(y)$ が得られる。

なお、応力-ひずみ関係が引張応力側と圧縮応力側とで対称である場合には( $E_t = E_c = E$ ,  $D_t = -D_c = D$ ,  $p_t = p_c = p$ ) (8)式より $\epsilon_t = \epsilon_c$ となり中立面は板厚中央に固定される。この場合、(9)式は次式に簡略化される。

$$M = \frac{wh^2}{6} \left[ E \epsilon_t + \frac{3D}{p + 2} \epsilon_t^p \right] \tag{13}$$

この式から解るように応力-ひずみ関係が直線的であるとすると、外縁引張応力を  $\sigma_t^{e1}$  として、

$$M = \frac{wh^2}{6} \sigma_t^{e1} \quad (14)$$

であるから、 $\sigma_t^{e1}$  と真の外縁ひずみ  $\epsilon_t$  との関係は次式で与えられる。

$$\sigma_t^{e1} = E \epsilon_t + \frac{3D}{p+2} \epsilon_t^p \quad (15)$$

同様に(14)式を(9)式に代入した関係は角棒の形状に依存しないことに注目したい。

ところで、今考えている角棒の4点曲げの場合曲げモーメントMは次式で与えられる。

$$M = \begin{cases} \frac{4M_0}{\ell} x & 0 \leq x \leq \frac{\ell}{4} \\ M_0 & \frac{\ell}{4} \leq x \leq \frac{3\ell}{4} \\ \frac{4M_0}{\ell} (\ell - x) & \frac{3\ell}{4} \leq x \leq \ell \end{cases} \quad (16)$$

ただし  $\ell$  は外側支点間の距離、 $x$  は片方の外側支点からの距離、 $M_0$  は中央スパン部の曲げモーメントで荷重を  $P$  として  $P\ell/8$  である。従って(16)式を(9)式に代入することによって、はりの任意点の応力およびひずみ分布が定められる。

### 3.2 ワイブルの統計論

従来の曲げ強度に対するワイブル統計論の検討は、はりの内部の応力-ひずみ関係が直線的であるとしていたが、本研究では(4)および(5)式で与えられる応力-ひずみ関係を考慮する。

ワイブルの統計論によれば  $\sigma$  をはりの内部の応力分布、 $V$  を引張応力部分の体積とすると、このはりの破壊の確率  $F$  は

$$F = 1 - \exp \left\{ - \int_V \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dV \right\} \quad (17)$$

で与えられる。ここで  $m$ 、 $\sigma_0$  は材料強度の統計的性質から定まる材料定数である。(17)式は付録B.1に述べるように

$$F = 1 - \exp \left\{ - \frac{w}{\sigma_0^m} \left[ \frac{\ell}{2} S \left( \frac{\ell}{4} \right) + 2 \int_0^{\frac{\ell}{4}} S(x) dx \right] \right\} \quad (18)$$

ただし、

$$S(x) = \int_0^{e_t} \left\{ \frac{E_t \epsilon_t}{e_t} y + D_t \left( \frac{\epsilon_t}{e_t} \right)^{p_t} y^{p_t} \right\}^m dy \quad (19)$$

(  $\epsilon_t$ 、 $e_t$  が  $x$  の関数である )

と表わされ、Fの値は数値計算法によって求められる。

以上のように理論破壊確率分布は(8)式で表わされるが、分布パラメータ $m$ 、 $\sigma_0$ は実験による破壊確率分布に基づいて付録B.2に述べた最小2乗法によって定めることができる。

## 4. 結果と検討

### 4.1 測定結果の概要

測定結果の概要をTable 2に示す。また破断時の応力とひずみをFig. 2に示す。使用した試験片は意図したように極めて均質なものであることが密度やヤング率の測定結果から明らかである。強度については、第1に曲げ強さ(弾性論による計算値)の変動係数(標準偏差/平均値)は0.06~0.1であり引張強さについての値0.16より著しく小さく、曲げ強さのばらつきは引張強さのそれより少ないこと、第2に、平均曲げ強さは平均引張強さの1.5~1.85倍であること、などが特徴的である。また破断時のひずみについては曲げ試験片の外縁ひずみは単軸引張の平均値に対して、最大で約2倍、平均して1.6倍であり、曲げ破壊についての特徴的な性質が現われている。さらに、曲げ試験の結果は破断時の外縁引張応力、ひずみは試験片体積が小さいものの方が試験片体積が大きいものより明らかに大きいこと、および破断時の外縁引張りひずみは外縁圧縮ひずみよりも試験片の種類に拘らず系統的に大きいことを示している。

以下に実験値に基づく曲げ破壊時の真の引張応力の検討を進める。

### 4.2 応力-ひずみ関係

曲げ試験結果について述べる前に比較検討のために実施した引張試験および圧縮試験による応力-ひずみ線図をそれぞれFig. 3およびFig. 4に示す。また両者の比較をFig. 5に示す。引張試験によるヤング率は平均で約950 kg/mm<sup>2</sup>であり、圧縮の場合の値約900 kg/mm<sup>2</sup>より若干大きい。ただし、それぞれ超音波伝播速度法によるヤング率の平均値1070 kg/mm<sup>2</sup>より10%および15%程小さいものである。上記の結果から解るように静的試験によるヤング率の値はばらつきが著しい。このことが動的ヤング率との相違を生じさせる原因の一つと考えられる。また引張応力-ひずみ線図の特徴はFig. 5に示されるようにひずみが大きくなるに従って圧縮応力-ひずみ線図から下側にずれてくることである。この傾向は後に見るように曲げ試験の場合に更に顕著になる。

次に、曲げ試験により得られた荷重-外縁ひずみ線図の代表例として2つの試験片形状に対する結果をFig. 6およびFig. 7に示す。明らかなように荷重対ひずみ線図は非直線的であり、また外縁引張りひずみと外縁圧縮ひずみとの相異は曲げ荷重が破断荷重よりも相当に小さい条件でも、つまり外縁ひずみが約0.1%程度の条件でも有意となっている。この事実は試験材料の応力-ひずみ関係が非直線的でありかつ引張側と圧縮側とで異なる非対称性を有するものであることを意

味している。また同一荷重に対して外縁引張りひずみの方が圧縮ひずみより大きいということは、この材料の変形に対する抵抗は圧縮荷重に対する方が大きい (Fig. 5の単軸荷重の場合の傾向と一致する) ということであり、従って曲げ試験片の板厚方向圧縮応力側へ中立面の移動が起っていることを示唆している。

なお、曲げ試験による荷重-外縁ひずみ線図に共通して言えることは、荷重が極く小さい範囲において、両者の関係は極めてばらつきが少ない。この範囲では弾性挙動を示すとみなして良いから、(13)式を簡略化して得られる

$$E = \frac{3P\ell}{4wh^2} \cdot \frac{1}{\epsilon_{meas}} \quad (20)$$

により静的なヤング率を定めることができる。Fig. 6およびFig. 7に示した結果の場合その平均値はそれぞれ 1070, 1150 kg/mm<sup>2</sup>である。これらの値が単軸試験により得られたヤング率の場合と比べて超音波伝播速度法によるヤング率と極めて近い値であることは興味深い。

さて、Fig. 6およびFig. 7のような曲げ荷重-外縁ひずみ線図は荷重の大きい範囲でばらつきが大きい。そこで後の解析の便宜のためにそれらの平均挙動に基づいて、(1)~(3)式による応力-ひずみ関係の直接導出を行なった。Fig. 8に2種類の曲げ試験片に対する結果を示す。両者の応力-ひずみ関係は極めて良く一致している。同図に示した平均的な応力-ひずみ関係を(4)および(5)式で近似し次の結果を得た。

$$\text{引張} \quad \sigma = 1000 \cdot \epsilon - 1.10 \times 10^5 \epsilon^{2.17} \quad (21)$$

$$\text{圧縮} \quad \sigma = 1200 \cdot \epsilon + 3.29 \times 10^4 (-\epsilon)^{1.94} \quad (22)$$

これらと圧縮試験による結果とをFig. 9に示す。曲げ試験から定めた圧縮応力-ひずみ曲線は応力一定のとき圧縮試験によるそれよりもひずみが小さくなる方向にずれている。また引張応力-ひずみ曲線はひずみが0.5%以下においては圧縮試験による平均的な応力-ひずみ曲線に近いものとなっている。なお、圧縮試験による応力-ひずみ曲線の上限は曲げ試験より得られた平均的な引張および圧縮応力-ひずみ曲線のほぼ中間に相当するものであるが、以後の応力値の検討の際に引張側と圧縮側とで対称的な応力-ひずみ関係を仮定する場合にこれを参照する。これは次式で近似される。

$$\sigma = 1060 \epsilon \mp 4.94 \times 10^5 (\pm \epsilon)^{2.50} \quad (23)$$

正負付号の上側が引張、下側が圧縮である。

応力-ひずみ関係(21)および(22)式により計算された曲げ荷重対外縁引張りひずみとの関係を全ての曲げ試験実測値と比較してFig. 10に示す。計算は実験と良い一致を示している。また特に破断点での外縁引張りひずみについての計算値と実測値との比較をFig. 11に示す。計算では3種類の応力-ひずみ関係を仮定している。弾性論に基づくひずみは(14)式および(15)式の右辺第1項を考慮しかつ動的ヤング率を使用して求めたものである。結果は予想されるとおりで実測ひずみ値より平均して約20%も低くなる。また対称的な応力-ひずみ関係、(23)式を仮定し(13)式により求めたひずみ値はやはり実測ひずみ値より平均して約10%低くなっている。応力-ひずみ関係として(21)および(22)式を仮定し、(8)および(9)式から求めた破断ひずみは全体的に実測された破断条件(モーメント

ントとひずみとの関係)と良く一致することがFig. 11により確認された。

なお、本節の初めにおいて曲げ荷重時の中立面の移動について言及したが、ここでは破断点におけるひずみの実測値を用いて(10)式により得られる $e_t/h$ および(11)および(12)式を仮定した場合の計算値をFig. 12に示す。実験値はひずみの測定誤差のためにばらつきが著しい。計算値は外縁ひずみすなわち曲げ荷重が小さい範囲においても中立面の移動が発生していることを示しているが、これは応力-ひずみ関係のフィッティング式(11)および(12)が同上の荷重条件に対しても引張と圧縮とで異なるものとしていることに因るもので、必ずしも材料に本質的なものではない。

#### 4.3 曲げ強さの性質

先ず最初に4点曲げ強さ(破断時の中央スパン部外縁引張応力)と応力-ひずみ曲線との関係を求める。曲げモーメントと弾性曲げ強さとは(14)式によって関係づけられるから、応力-ひずみ関係の非直線性の影響は弾性曲げ強さとの相対値として考えることができる。応力-ひずみ関係を(12)式または(11)、(12)式で表わすものとし、真の外縁引張応力をそれぞれ(13)式または(8)、(9)式によって求めた。結果をFig. 13に示す。曲げ試験より得られた応力-ひずみ関係(11)、(12)式によれば曲げ強さの範囲( $\sigma^{el} = 3.9 \sim 5.7 \text{ kg/mm}^2$ )に対して、真の外縁引張応力は弾性値よりも10~20%も小さい値となる。これは絶対値として $0.5 \sim 1.0 \text{ kg/mm}^2$ に相当し黒鉛の破壊基準の検討または構造物の設計に際しても無視できないものと考えられる。なお、引張と圧縮で対称的であるとすれば曲げ試験結果の評価の点で便宜であるが、(13)式の場合の計算結果は上記の真の曲げ強さより5~10%高い値となり曲げ破壊条件を詳しく検討する際には疑問であろう。

従って以下においては非直線的な応力-ひずみ関係としては(11)および(12)式を考えるものとする。

5種類の曲げ試験片に対する平均強さおよび第3.2節に述べた方法により定めたワイブルのパラメータ $m$ 、 $\sigma_0$ の最適値をTable 3に示す。この表には弾性曲げ強さに対する同様の性質を合せて示す。真の曲げ強さの平均値は弾性曲げ強さのそれより約15%小さくなっている。また、ワイブルのパラメータについての同様な比較では $m$ は大きくなり、 $\sigma_0$ は小さくなっている。これは応力-ひずみ関係の非直線性の影響が高い応力程著しく、また同時に平均値も小さくなることと符号している。

Table 3にみられるようにそれぞれの試験片の強度分布に最適なワイブルパラメータはデータ数も少ないこともあって一致していない。そこで3種類の短かい試験片のワイブルパラメータを用いて(18)式によって曲げ試験片の理論破壊確率を計算する。弾性曲げ強さに基づくもの、および真の曲げ強さに基づくものを実験値と比較してそれぞれFig. 14、Fig. 15に示す。小試験片の実験破壊確率分布はワイブル理論による分布と比較的良く合っており、特に真の曲げ応力基準で評価するとばらつきが小さくなるために理論分布との一致は更に良好となる。また、大試験片のうち試験体積が $16.43 \text{ cm}^3$ のものについては理論分布と実験分布との一致は良いが、 $6.50 \text{ cm}^3$ のものについては悪い。

強度の体積依存性についての実験と理論との比較を曲げ強さの中央値で考え、これをFig. 16に示す。やはり実験と理論との一致は真の曲げ強さを基準に考えた方が優れている。ただし、試験体積の実験点が僅か3点であるから、曲げ強さの体積依存性がワイブルの統計論に従うものと



結論することは危険である。実験値は体積が大きくなると強度の減少が少なくなることを示している。従来の研究で引張強さの場合には試験体積が大きくなると体積効果が無くなるという例<sup>(3)</sup>もあるが、曲げ強さについても同様な性質があるとも考えられる。試験体積が  $20 \text{ cm}^3$  以上の曲げ強さの検討は今後に残された課題である。

最後に単軸引張強さと曲げ強さとの関係をワイブル理論の立場から検討してみる。Fig. 17 に実験破壊確率分布と3種類のワイブル理論破壊確率分布とを示す。ワイブルの理論破壊確率分布のうち  $m=10.8$ ,  $\sigma_0=8$  とする理論分布および  $m_0=11.5$ ,  $\sigma_0=6.5$  とする理論分布は曲げ試験から定めた  $m$ ,  $\sigma_0$  を用いたもので、前者が弾性曲げ強さに基づいたもので、後者が真の曲げ強さに基づいたものである。また、他の1つの理論分布は引張試験片に対する破壊確率

$$F = 1 - \exp \left\{ -V_1 \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right\}$$

において  $V_1 = 1.608 \text{ mm}^3$ ,  $m=11.5$  とし、引張強さの中央値 ( $F=0.5$  となる) を用いて  $\sigma_0$  を定めたものである。Fig. 17 から明らかなように、真の曲げ強さを基準とする理論分布は、弾性曲げ強さを基準とする理論分布よりも実験値には近くなるが、しかし、実験分布とは  $\sigma_0$  の値が異なるために、ある一定応力に対する破壊確率を実験値よりも小さく評価している。このように単軸引張強さと曲げ強さに対するワイブル理論の斉合性は良くない。

Table 2 Summary of measurements on 7477PT graphite\*

Strength test	Number of specimens	Apparent density (g/cm <sup>3</sup> )	Young's modulus (kg/mm <sup>2</sup> )	Strength (kg/mm <sup>2</sup> )	Fracture tensile (%)	Strain compressive (%)
Tension	8	-	-	2.76±0.44	0.35 ±0.078	-
Compression	8	1.726±0.010	1070±35	10.58±0.28	-	2.76 ±0.25
Bend (4×16×50)	8	1.730±0.012	1040±20	5.09±0.33**	0.580±0.064	0.478±0.089
Bend (6×10×50)	8	1.728±0.007	1060±15	4.99±0.50**	0.565±0.054	0.500±0.039
Bend (8×8×50)	8	1.735±0.012	1060±30	5.11±0.45**	0.588±0.065	0.505±0.069
Bend (8×8×120)	8	1.723±0.009	1060±25	4.29±0.32**	0.505±0.069	0.445±0.063
Bend (12×12×120)	8	1.726±0.009	1080±20	4.31±0.27**	0.537±0.061	0.475±0.075

\* Mean±standard deviation.

\*\* Calculated from  $\sigma=6M/wh^2$ , where M is the applied moment, w and h are the width and height of the beam, respectively.

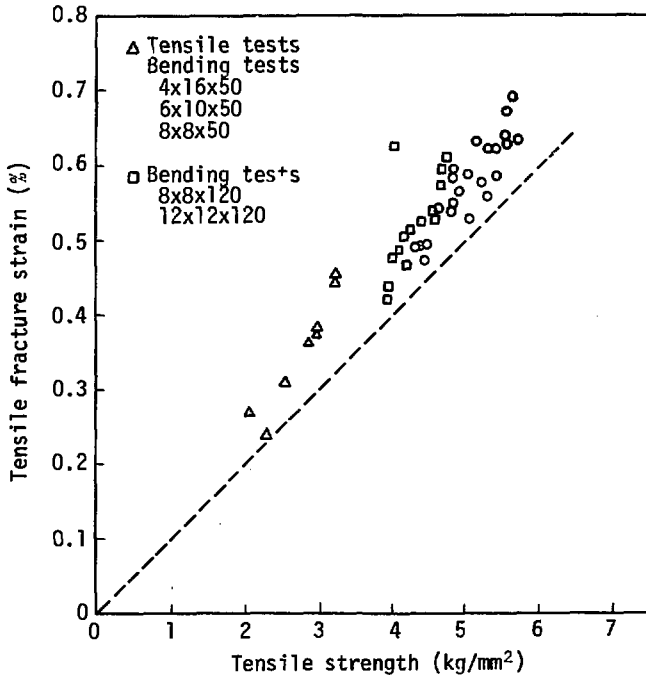


Fig. 2 Measured tensile strengths and fracture strains on tensile and bending specimens

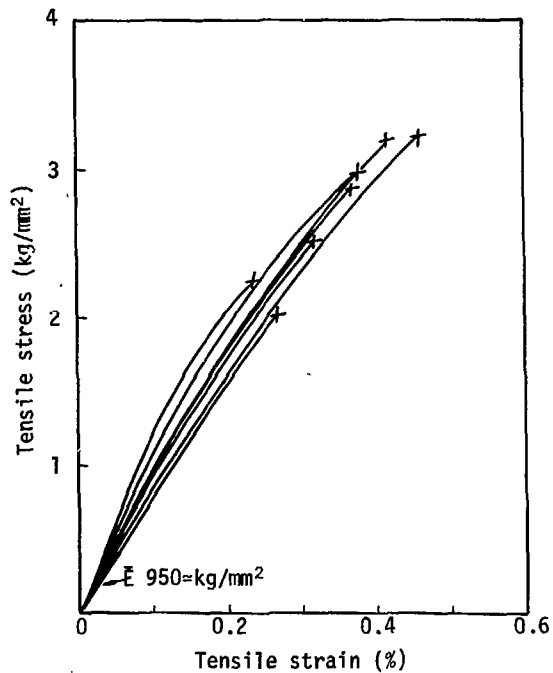


Fig. 3 Measured uniaxial tensile stress-strain diagrams

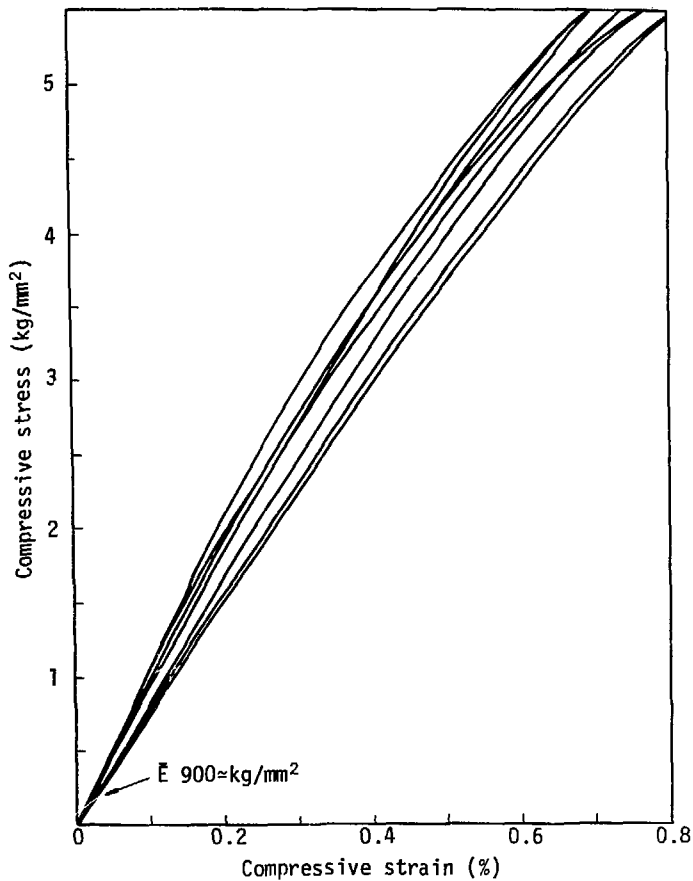


Fig. 4 Measured uniaxial compressive stress-strain diagrams

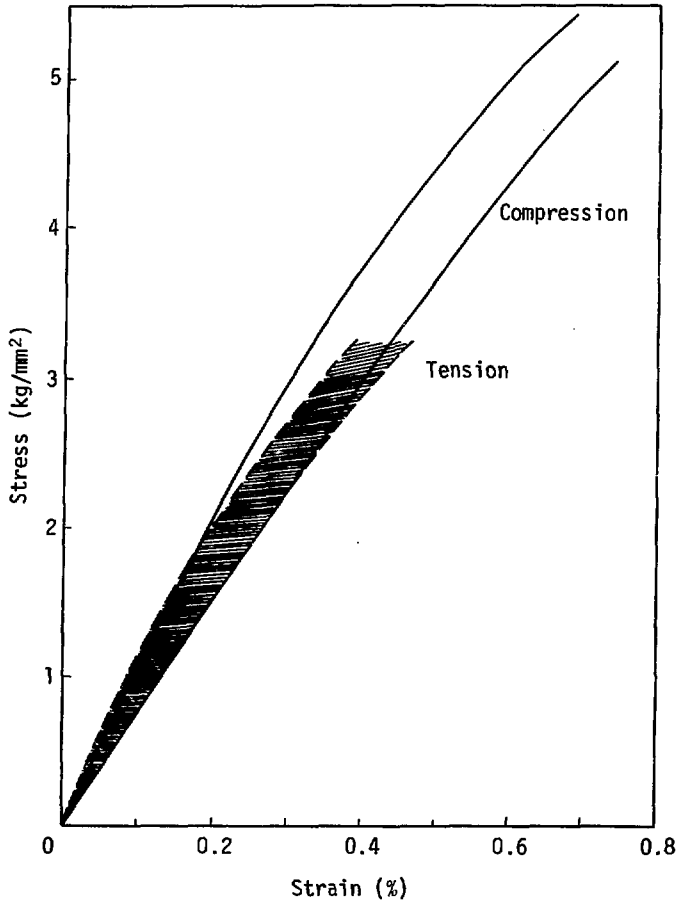


Fig. 5 Comparison of uniaxial tensile and compressive stress-strain diagrams

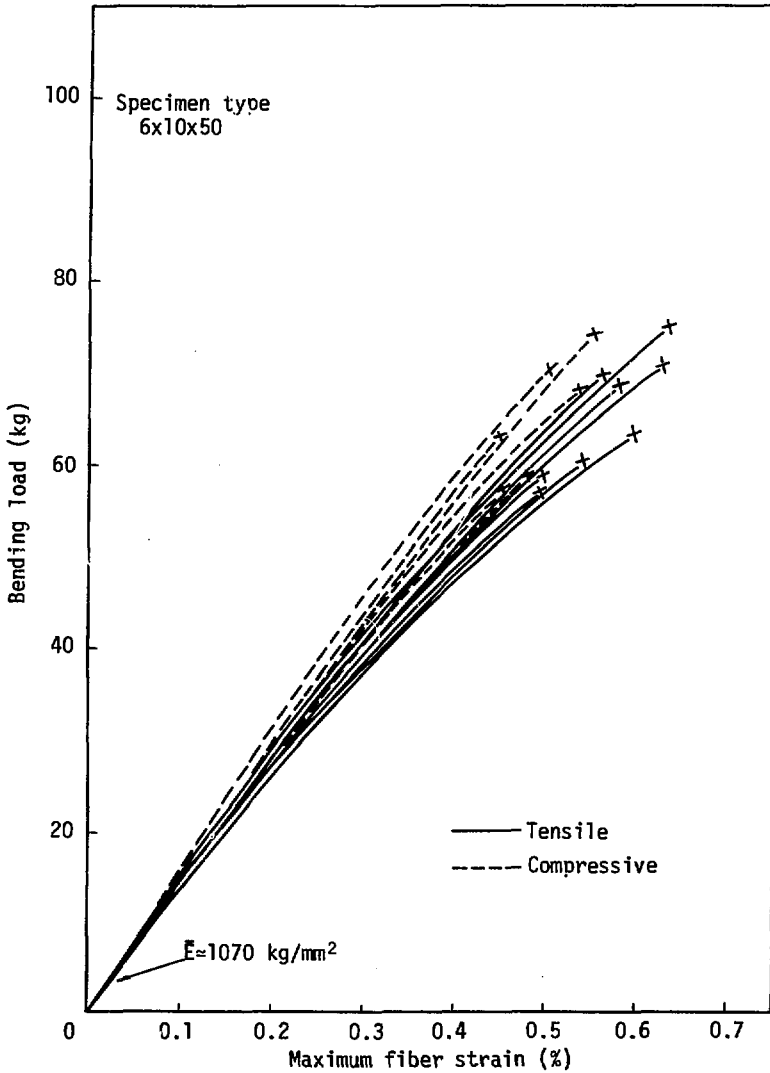


Fig. 6 Measured load-strain diagrams on bend specimens; type 6x10x50

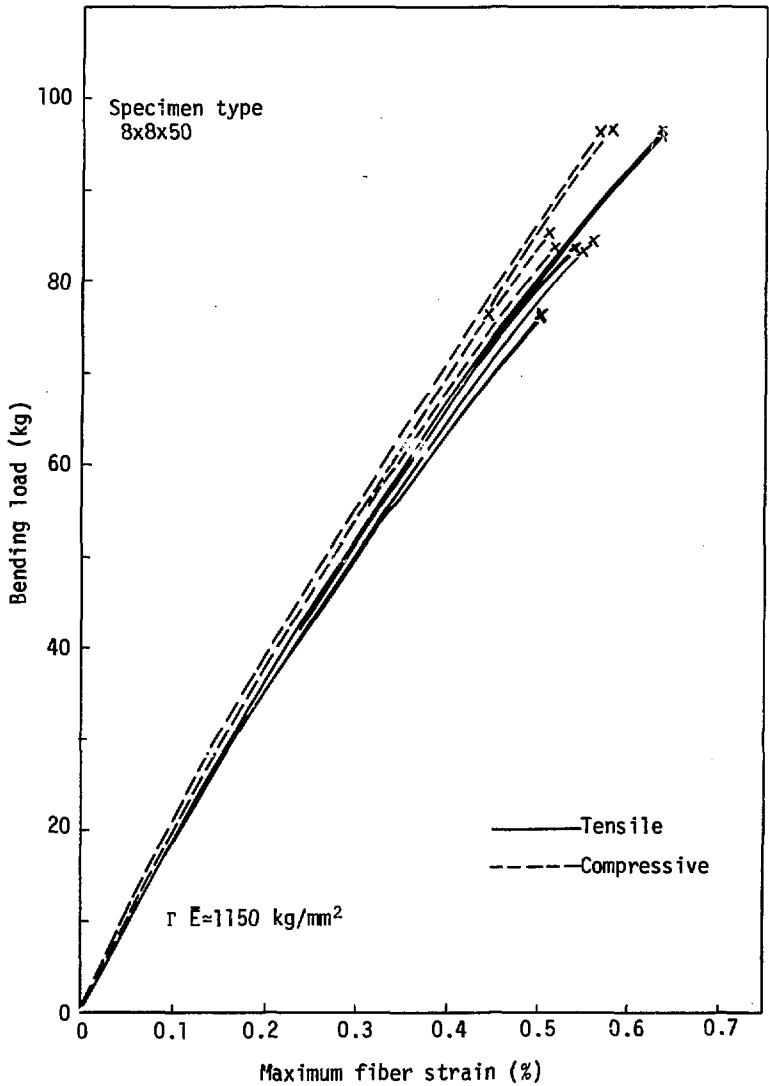


Fig. 7 Measured load-strain diagrams on bend specimens; type 8x8x50

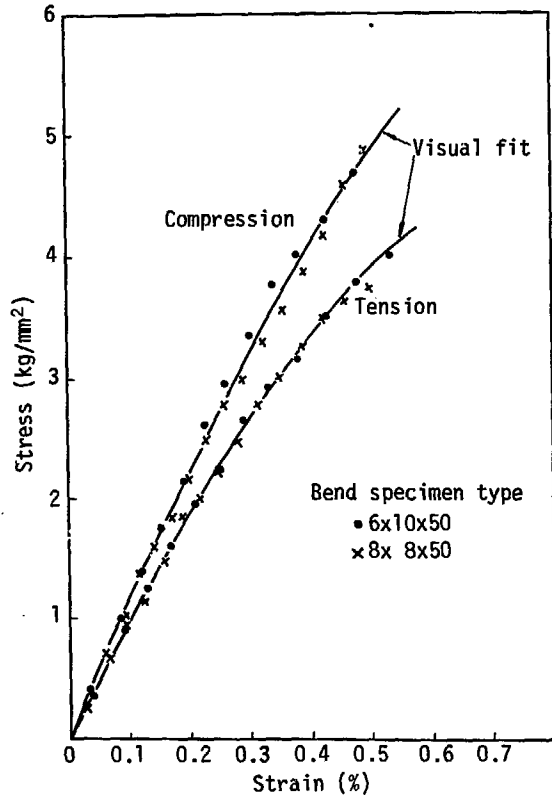


Fig. 8 Calculated stress-strain curves from the bending tests

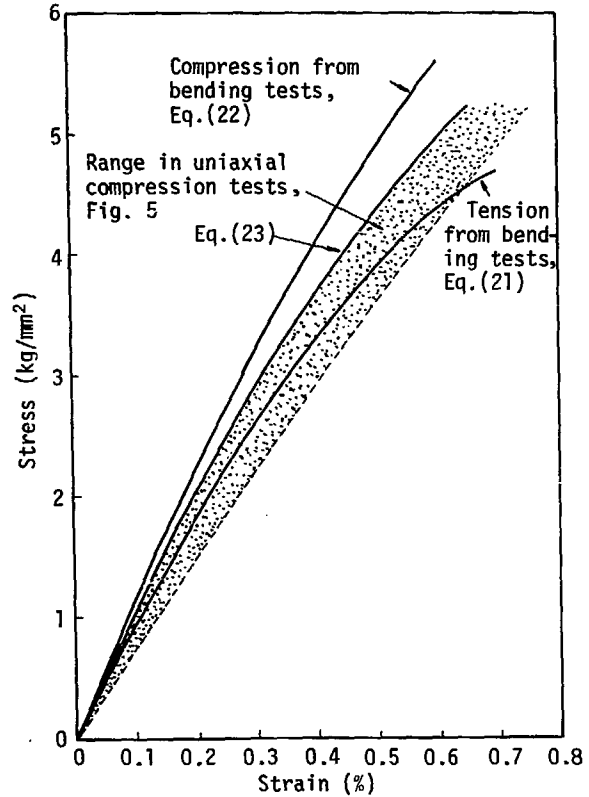


Fig. 9 Comparison of stress-strain relations derived from bending and uniaxial compression tests

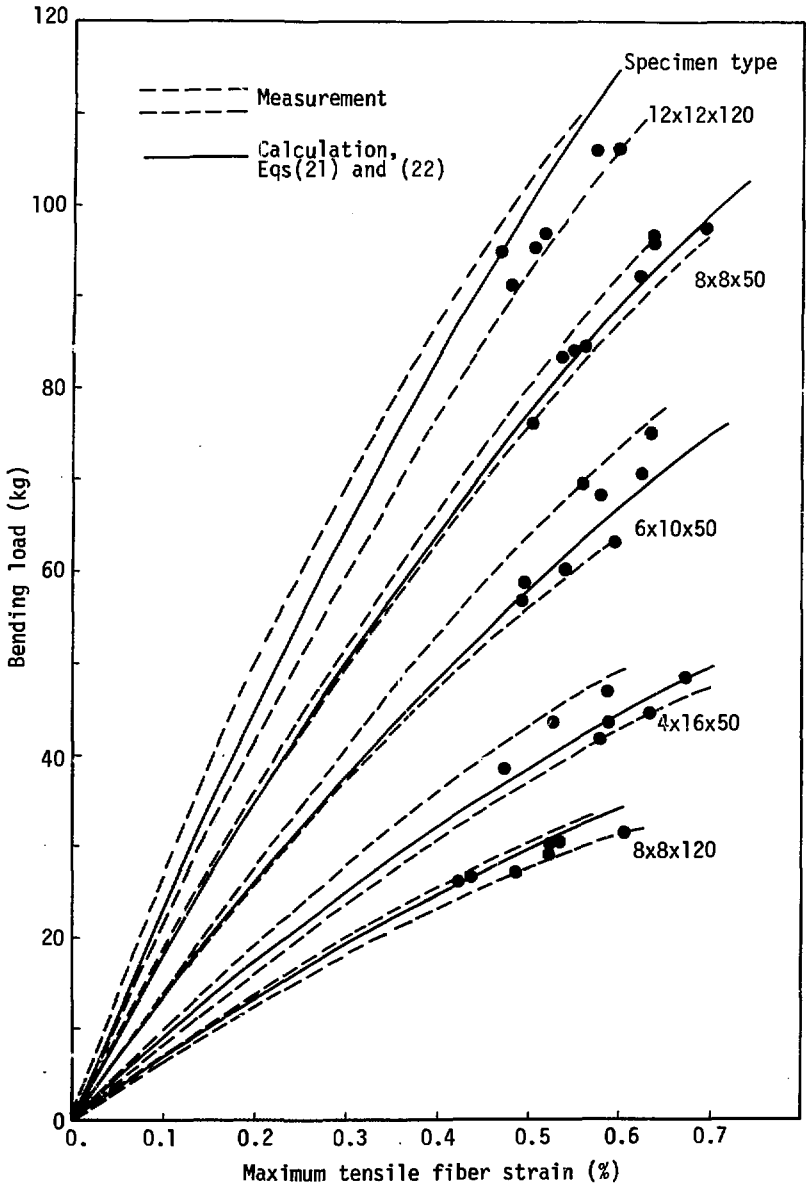


Fig. 10 Comparison of load-tensile strain diagrams between measurements and calculations



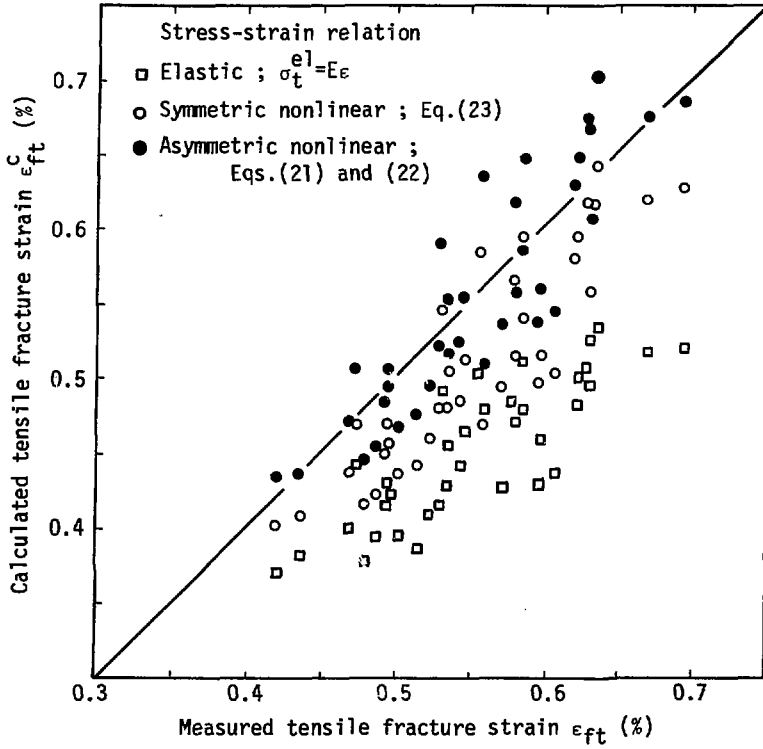


Fig. 11 Comparison of tensile fracture strains between measurements and calculations

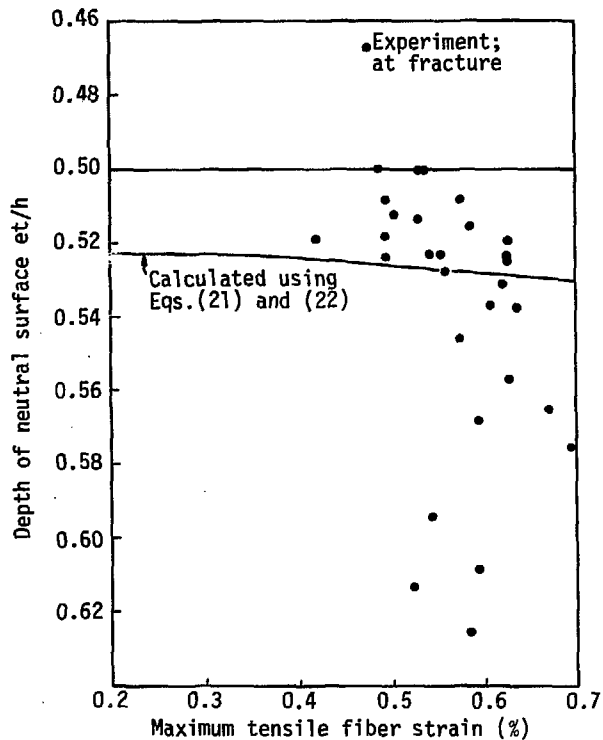


Fig. 12 Shift of neutral surface towards compressive sides of bending specimens

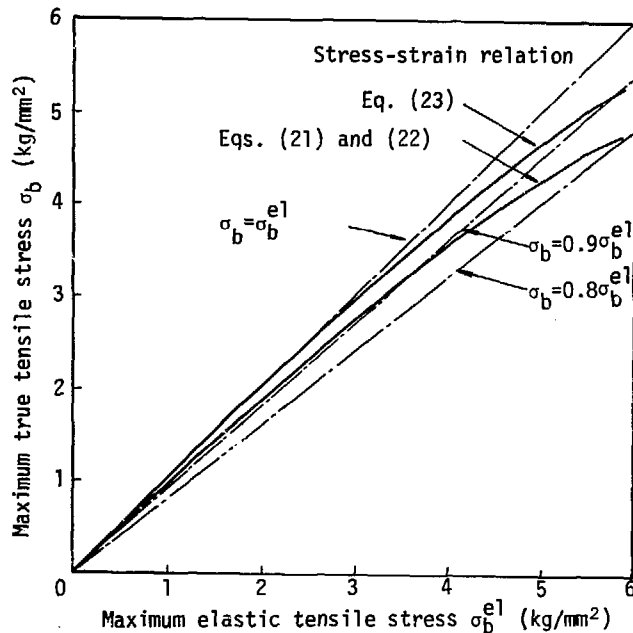


Fig. 13 Comparison of maximum elastic and true tensile stresses on rectangular cross-section beams

Table 3 Properties of strength distributions on bending specimens

Specimen type	Linear $\sigma$ - $\epsilon$ relation			Nonlinear $\sigma$ - $\epsilon$ relation		
	Average strength (kg/mm <sup>2</sup> )	Weibull parameters m	$\sigma_0$	Average strength (kg/mm <sup>2</sup> )	Weibull parameters m	$\sigma_0$
4 × 16 × 50	5.09	14	6.9	4.32	16	5.8
6 × 10 × 50	4.99	9	8.3	4.25	11	6.7
8 × 8 × 50	5.11	9	8.5	4.29	11	6.8
8 × 8 × 120	4.29	12	6.7	3.78	14	5.6
12 × 12 × 120	4.31	7	10.4	3.66	9	7.7

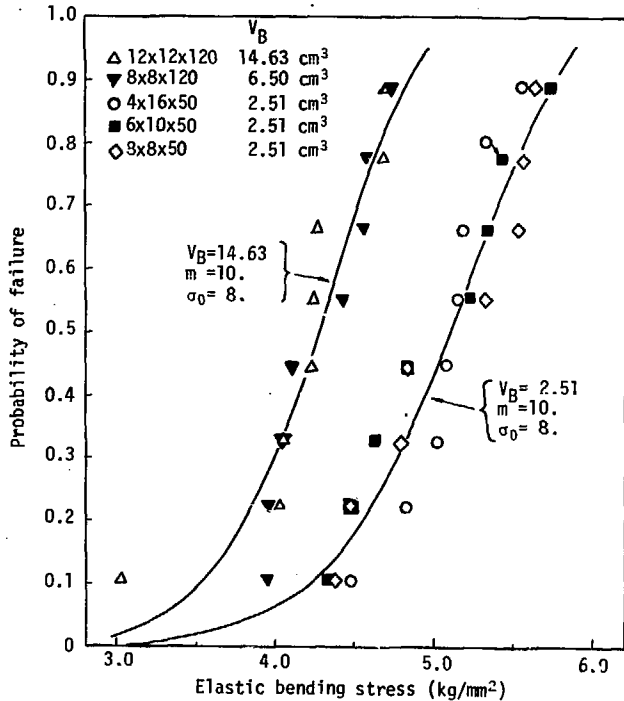


Fig. 14 Comparison of experimental and theoretical probabilities of failure based on elastic bending stress

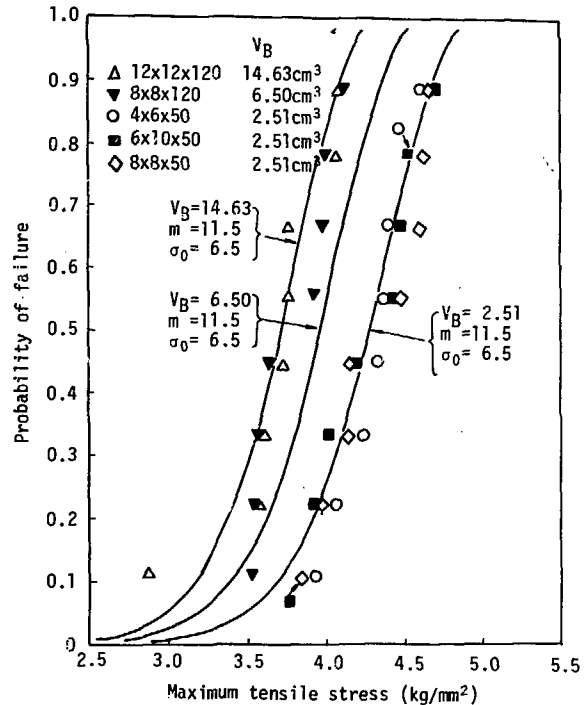


Fig. 15 Comparison of experimental and theoretical probabilities of failure based on true bending stress

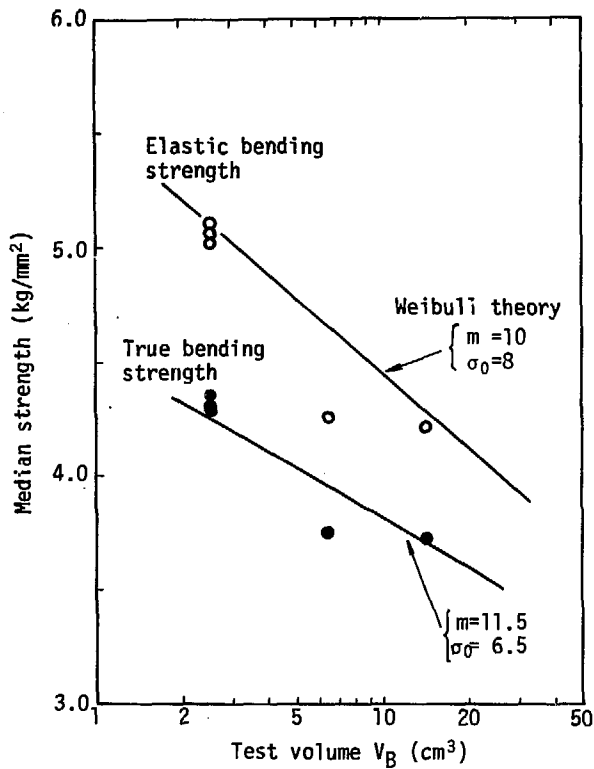


Fig. 16 Comparison of test volume dependence of median bend strengths

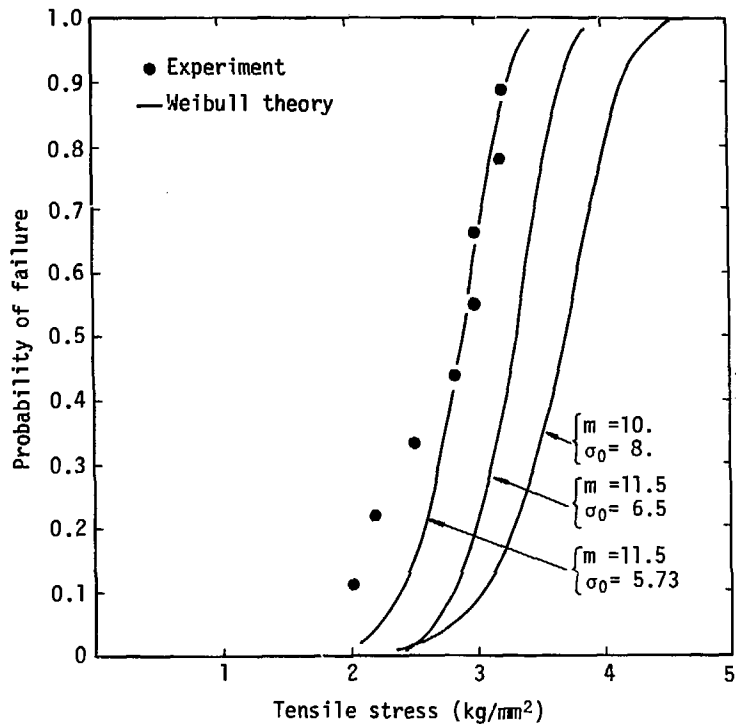


Fig. 17 Probability of failure on tensile specimens of a test volume 1.61 cm³

## 5. 結 論

黒鉛の応力勾配下の引張破壊条件を究明するためには先ず曲げ破壊の性質を詳細に検討することが重要である。本研究では応力-ひずみ関係の非直線性が曲げ強さに及ぼす影響を考察するため、等方性黒鉛 7477 PTを用いて数種類の角棒の4点曲げ試験を行ない、曲げ荷重対外縁ひずみとの関係を測定した。また比較検討のために単軸引張および単軸圧縮試験も行った。さらに非直線的でかつ引張と圧縮とで非対称な応力-ひずみ関係を考慮したはりの応力分布計算法およびワイブル理論による破壊確率計算法を開発し、曲げ試験データの解析に応用した。この実験および解析的検討から、7477 PT黒鉛の応力-ひずみ関係と曲げ強さに関して以下のような結論が導びかれた。

(1) 引張および圧縮試験によるヤング率はばらつきが大きい、曲げ試験によるヤング率はばらつきが少なくまた動的ヤング率とおおよそ一致する。

(2) 引張応力-ひずみ曲線は応力が大きくなるに従って圧縮応力-ひずみ曲線からずれ非直線性がより著しくなる。すなわち真の曲げ強さを評価するためには応力-ひずみ関係の非直線性と引張と圧縮との非対称性を考慮する必要がある。

(3) 曲げ破壊時の外縁引張ひずみは単軸引張破壊ひずみと比較して、平均的にみて約60%も大きい。従って両者の破壊条件として最大主ひずみ説を考へることはできない。

(4) 曲げ破壊時の外縁引張応力は弾性曲げ強さより10~20%小さい値となるが、しかしなお単軸引張強さよりも30~50%大きい。このことから破壊基準として最大主応力説を採ることはできない。

(5) 真の曲げ強さの統計分布はワイブルの理論分布と良い一致を示すが、弾性曲げ強さをベースとする理論分布に比べて、応力-ひずみ関係の非直線性効果のためにパラメータ $m$ は増加し、 $\sigma_0$ は減少する。

(6) 曲げ強さの体積依存性についても、異なる試験片体積の数は少ないが、真の曲げ強さをベースとする理論値は実験値との一致が良くなる傾向を示す。

以上のように黒鉛の応力勾配下の破壊を検討する際に応力-ひずみ関係の非直線性と非対称性を考慮することが重要であること、またこれに従ってワイブル統計論の再検討が必要であること、など今後の研究への提言が得られた。本研究での供試材料は高密度等方性黒鉛に属するものであって、これは商用高温ガス炉で使用されている異方性あるいは準等方性黒鉛と比較して応力-ひずみ関係の非直線性が著しく小さいものと考えられる。異方性あるいは準等方性黒鉛の場合における応力-ひずみ関係の非直線性効果は今後の検討課題である。

## 謝 辞

本研究のための試験片の準備と実験の一部については、高温材料強度研究室藤崎勝夫氏および群馬大学大学院学生（夏期実習生）伊与久達夫氏の協力を得た。ここに感謝の意を表す。

## 参 考 文 献

- (1) 奥, 今井, 荒井 : “多目的高温ガス実験炉黒鉛構造設計の考え方” 未公開資料 (1975)
- (2) Greenstreet B.L., et al. : “Room-Temperature Mechanical Properties of EGCR-Type AGOT Graphite”; USAEC Report ORNL-3728 (1965)
- (3) Brocklehurst J.L. and Darby M.H. : “Concerning the Fracture of Graphite under Different Test Conditions”; Mater. Sci. Eng., **16** 91 (1974)
- (4) A. Nadai : “Theory of Flow and Fracture of Solids Vol. I”, Chapter 22, Mc Grawhill, New York. (1950)

## 付録A. 曲げ試験片の応力-ひずみ関係

### A.1 応力-ひずみ関係の直接導出

Fig. A. 1 に示すような外支点間距離  $l$ , 幅  $w$ , 厚さ  $h$  の角棒の4点曲げ試験において, 曲げ荷重  $P$  の時の内スパン部の両外縁ひずみ  $\epsilon_t$  (引張),  $\epsilon_c$  (圧縮) が測定されているとする。これらの実測値を用いて Nadai の方法<sup>(4)</sup> によって直接的に角材の応力-ひずみ関係を導出する。

その一般的な計算法を導出するために, 通常のはりの曲げ応力を解析する場合と同様に次のような性質を仮定する。

(1) はりは最初真直で, 横断面は縦軸方向に一様かつ対称軸を有する。そして横荷重はこの対称軸に沿って作用し, はりの曲がりはその対称平面内において生ずる。

(2) はりの横断面ははりが曲がった後も平面を保ち, かつ曲がった後の縦軸線に直交する。

(3) はりには縦軸方向の垂直外力はなく, はりの縦軸方向に繊維状に考えた材料は単軸応力の状態にあって自由に伸縮する。

(4) はりは均質である。

次に, はりの縦軸方向の位置  $x$  において曲げモーメント  $M$  が作用している横断面を考える。この場合, 中立面の位置は Fig. A. 2 に示すように両外縁から  $e_c$  および  $e_t$  の距離にあるものとする。

$$e_t + e_c = h \quad (\text{A. 1})$$

前述の仮定からはりの横断面は平面を保つから,  $\rho$  を中立軸の描くたねみ曲線の曲率半径とすると, 中立面からの距離  $y$  における繊維ひずみは

$$\epsilon = \frac{y}{\rho} \quad (\text{A. 2})$$

で与えられる。従って外縁の最大引張りひずみ  $\epsilon_t$ , 最大圧縮ひずみ  $\epsilon_c$  は次の式で与えられる。よって, この式を用いて (A. 2) 式を書き直すと,

$$\epsilon_t = \frac{e_t}{\rho} \quad (\text{A. 3})$$

$$\epsilon_c = - \frac{e_c}{\rho}$$



$$\epsilon = \begin{cases} \frac{\epsilon_t}{e_t} y & (y \geq 0, \text{引張側}) \\ \frac{\epsilon_c}{e_c} y & (y \leq 0, \text{圧縮側}) \end{cases} \quad (\text{A. 4})$$

となる。

今考えている横断面 A 内の垂直応力分布を  $\sigma$  とすると、縦軸方向軸力およびモーメントに関する釣合条件は次式で与えられる。

$$\int_A \sigma dA = 0 \quad (\text{A. 5})$$

$$\int_A \sigma y dA = M \quad (\text{A. 6})$$

ここで、角棒の場合には  $dA = w dy$  である。

材料の応力-ひずみ関係が次の函数形

$$\sigma = f(\epsilon) \quad (\text{A. 7})$$

で与えられるものとする、(A.2)式を用いて(A.5)、(A.6)式は次のように表わせる。

$$\int_{\epsilon_c}^{\epsilon_t} f(\epsilon) d\epsilon = 0 \quad (\text{A. 5}')$$

$$w \rho^2 \int_{\epsilon_c}^{\epsilon_t} f(\epsilon) \epsilon d\epsilon = M \quad (\text{A. 6}')$$

さて4点曲げ試験片の中央スパン部に上の関係を適用する。この部分は単純曲げの状態にあるから距離  $l/2$  にある両支点での両横断面のなす角を  $2\phi$  とすると、

$$2\phi = \frac{l}{2\rho} \quad \text{すなわち} \quad \phi = \frac{l}{4\rho} \quad (\text{A. 8})$$

である。一方曲率半径  $\rho$  は(A.1)および(A.3)式より  $\rho = h/(\epsilon_t - \epsilon_c)$  であるから、

$$\phi = \frac{l(\epsilon_t - \epsilon_c)}{4h} \quad (\text{A. 9})$$

となる。同様に(A.6')式のMは、

$$M = \frac{Pl}{8} = \frac{wh^2}{(\epsilon_t - \epsilon_c)^2} \int_{\epsilon_c}^{\epsilon_t} f(\epsilon) \epsilon d\epsilon \quad (\text{A. 10})$$

となる。実験によって荷重Pの時の外縁ひずみ  $\epsilon_t$ 、 $\epsilon_c$  との関係が得られているとすれば、その時の  $\phi$  とMが決められる。このような関係が一連のPについて決められるとすればMを  $\phi$  の函数とみなすことができる。

先ず(A.5')式より

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \int_{\epsilon_c}^{\epsilon_t} f(\epsilon) d\epsilon = f(\epsilon_t) \frac{d\epsilon_t}{d\phi} - f(\epsilon_c) \frac{d\epsilon_c}{d\phi} = 0$$

であり、 $\sigma_t = f(\epsilon_t)$ 、 $\sigma_c = f(\epsilon_c)$  であるから

$$\sigma_t \frac{d\epsilon_t}{d\phi} - \sigma_c \frac{d\epsilon_c}{d\phi} = 0 \tag{A.11}$$

なる関係がある。更に (A.9) 式より

$$\frac{d\epsilon_t}{d\phi} - \frac{d\epsilon_c}{d\phi} = \frac{4h}{\ell} \tag{A.12}$$

であるから、これらによって次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_t}{d\phi} &= -\frac{4h}{\ell} \frac{\sigma_c}{\sigma_t - \sigma_c} \\ \frac{d\epsilon_c}{d\phi} &= -\frac{4h}{\ell} \frac{\sigma_t}{\sigma_t - \sigma_c} \end{aligned} \tag{A.13}$$

次に、(A.9) 式を (A.10) 式に代入した式

$$M\phi^2 = \frac{w\ell^2}{16} \int_{\epsilon_c}^{\epsilon_t} f(\epsilon) \epsilon d\epsilon \tag{A.10'}$$

は次のように変形する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} (M\phi^2) &= \frac{w\ell^2}{16} \left[ f(\epsilon_t) \epsilon_t \frac{d\epsilon_t}{d\phi} - f(\epsilon_c) \epsilon_c \frac{d\epsilon_c}{d\phi} \right] \\ &= \frac{w\ell^2}{16} \left( \sigma_t \epsilon_t \frac{d\epsilon_t}{d\phi} - \sigma_c \epsilon_c \frac{d\epsilon_c}{d\phi} \right) \end{aligned}$$

ここで (A.9) および (A.13) 式を用いると、結局次のような関係になる。

$$wh^2 \frac{\sigma_t \sigma_c}{\sigma_t - \sigma_c} = -\frac{1}{\phi} \frac{d}{d\phi} (M\phi^2) = -\phi \frac{dM}{d\phi} - 2M \tag{A.14}$$

よって (A.11) とから外縁の引張応力  $\sigma_t$ 、圧縮応力  $\sigma_c$  は次式で与えられることになる。

$$\sigma_t = \frac{2M + \phi \frac{dM}{d\phi}}{wh^2} \frac{\frac{d\epsilon_t}{d\phi} \frac{d\epsilon_c}{d\phi}}{\frac{d\epsilon_t}{d\phi}} \tag{A.15}$$

$$\sigma_c = \frac{2M + \phi \frac{dM}{d\phi}}{wh^2} \frac{\frac{d\epsilon_t}{d\phi} - \frac{d\epsilon_c}{d\phi}}{\frac{d\epsilon_c}{d\phi}} \tag{A.16}$$

## A.2 4点曲げ角棒の繊維応力、ひずみ分布

前節の方法により曲げ試験より直接的に得られる応力-ひずみ関係は一般的に言って引張側と圧縮側とで非対称かつ非直線的な関係となる。このような場合はり全体の繊維応力、ひずみ分布の計算法を示す。

先ず上記のような性質を表わす応力-ひずみ関係として次式のような一般的な表示式を考えろ。

$$\text{引張} \quad \sigma = E_t \epsilon + D_t \epsilon^{p_t} \quad (\text{A. 17})$$

$$\text{圧縮} \quad \sigma = E_c \epsilon + D_c (-\epsilon)^{p_c} \quad (\text{A. 18})$$

ここで  $E_t$ 、 $D_t$ 、 $p_t$ 、 $E_c$ 、 $D_c$ 、 $p_c$  は材料の定数である。前節 (A.4) 式を用いると外縁における繊維ひずみおよび中立軸からの距離が引張側で  $\epsilon_t$ 、 $e_t$ 、圧縮側で  $\epsilon_c$ 、 $e_c$  である場合の繊維応力分布は次式で与えられる。

$$\sigma = \begin{cases} \frac{E_t \epsilon_t}{e_t} y + D_t \left( \frac{\epsilon_t}{e_t} \right)^{p_t} y^{p_t} & (y \geq 0) \\ \frac{E_c \epsilon_c}{e_c} y + D_c \left( -\frac{\epsilon_c}{e_c} \right)^{p_c} (-y)^{p_c} & (y < 0) \end{cases} \quad (\text{A. 19})$$

これをはりの釣合条件式 (A.5)、(A.6) 式に代入し、さらに (A.1) および (A.3) 式から得られる関係式

$$e_t = \frac{\epsilon_t}{\epsilon_t - \epsilon_c} h, \quad e_c = -\frac{\epsilon_c}{\epsilon_t - \epsilon_c} h \quad (\text{A. 20})$$

を考慮すると次式のように外縁ひずみ  $\epsilon$  と  $\epsilon$  との関係を表わす式が得られる。

$$E_t \epsilon_t^2 + \frac{2D_t}{p_t+1} \epsilon_t^{p_t+1} = E_c \epsilon_c^2 - \frac{2D_c}{p_c+1} (-\epsilon_c)^{p_c+1} \quad (\text{A. 21})$$

$$\frac{3M}{wh^2} = \frac{1}{(\epsilon_t - \epsilon_c)^2} \left[ E_t \epsilon_t^3 + \frac{3D_t}{p_t+2} \epsilon_t^{p_t+2} - E_c \epsilon_c^3 - \frac{3D_c}{p_c+2} (-\epsilon_c)^{p_c+2} \right] \quad (\text{A. 22})$$

曲げモーメント  $M$  が与えられるとすればこの連立方程式を後述する方法により解いて  $\epsilon_t$ 、 $\epsilon_c$  が求まれば、(A.20) 式より  $e_t$ 、 $e_c$  が定まり、従って (A.19) 式から繊維応力、ひずみ分布が定められる。

ところで、Fig. A.1 に示したような4点曲げ試験の場合のモーメントの分布は、中央スパンのモーメントを  $M_0 = Pl/8$  とすると、

$$M = \begin{cases} \frac{4M_0}{l} x & 0 \leq x \leq \frac{l}{4} \\ M_0 & \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{3l}{4} \\ \frac{4M_0}{l} (l-x) & \frac{3l}{4} \leq x \leq l \end{cases} \quad (\text{A. 23})$$

となる。従って (A.22) 式の M に上式の値を用いることによって縦軸方向の任意点の応力・ひずみ分布の計算が可能となる。

$\epsilon_t$  および  $\epsilon_c$  を求める (A.21), (A.22) 式は 2 元の超越方程式である。ここでは Newton 法による数値解を求める。

今、

$$F(\epsilon_t, \epsilon_c) = E_t \epsilon_t^2 + \frac{2D_t}{p_t + 1} \epsilon_t^{p_t + 1} - E_c \epsilon_c^2 + \frac{2D_c}{p + 1} (-\epsilon_c)^{p_c + 1} \quad (\text{A. 24})$$

$$G(\epsilon_t, \epsilon_c) = E_t \epsilon_t^3 + \frac{3D_t}{p_t + 2} \epsilon_t^{p_t + 2} - E_c \epsilon_c^3 - \frac{2D_c}{p_c + 2} (-\epsilon_c)^{p_c + 2} - \frac{3M}{wh^2} (\epsilon_t - \epsilon_c)^2 \quad (\text{A. 25})$$

とおき、

$$J \equiv \frac{\partial}{\partial \epsilon_t} F(\epsilon_t, \epsilon_c) \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon_c} G(\epsilon_t, \epsilon_c) - \frac{\partial}{\partial \epsilon_t} G(\epsilon_t, \epsilon_c) \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon_c} F(\epsilon_t, \epsilon_c) \quad (\text{A. 26})$$

$$\Delta \epsilon_t \equiv \frac{1}{J} \left[ -F(\epsilon_t, \epsilon_c) \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon_c} G(\epsilon_t, \epsilon_c) + G(\epsilon_t, \epsilon_c) \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon_c} F(\epsilon_t, \epsilon_c) \right] \quad (\text{A. 27})$$

$$\Delta \epsilon_c \equiv \frac{1}{J} \left[ -G(\epsilon_t, \epsilon_c) \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon_t} F(\epsilon_t, \epsilon_c) + F(\epsilon_t, \epsilon_c) \cdot \frac{\partial}{\partial \epsilon_t} G(\epsilon_t, \epsilon_c) \right] \quad (\text{A. 28})$$

とする。第 n 回目の予測値を  $\epsilon_t^{(n)}$ ,  $\epsilon_c^{(n)}$  とすると次の関係の反復公式が得られる。

$$\epsilon_t^{(n)} = \epsilon_t^{(n-1)} + \Delta \epsilon_t^{(n-1)} \quad (\text{A. 29})$$

$$\epsilon_c^{(n)} = \epsilon_c^{(n-1)} + \Delta \epsilon_c^{(n-1)} \quad (\text{A. 30})$$

以上の関係によって十分な精度の  $\epsilon_t$  と  $\epsilon_c$  が求められる。なお、初期値としては引張と圧縮で対称的な応力・ひずみ関係の場合の解  $\epsilon^* = \epsilon_t = -\epsilon_c$  を用いると収束が良好である。

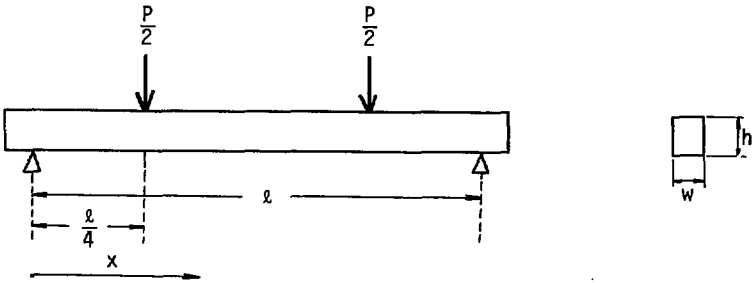


Fig. A-1 Schematic representation of rectangular cross-section beam subjected to four-point bending

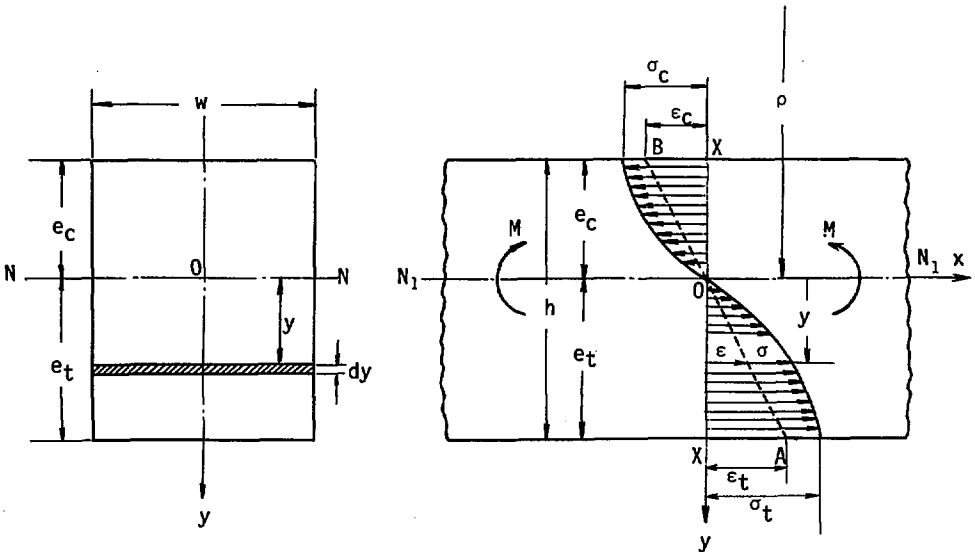


Fig. A-2 Schematic calculational model of a rectangular cross-section beam

## 付録B. ワイブルの統計論

## B.1 Risk of Rupture の計算法

“最弱リンクモデル”に基づくワイブルの統計論によれば構造物の引張破壊の確率Fは、

$$F = 1 - \exp \left\{ - \int_V \left( \frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m dV \right\} \quad (\text{B. 1})$$

で与えられる。ここで、 $m$ 、 $\sigma_0$ 、 $\sigma_u$ は材料の強度分布を記述するワイブル分布のパラメータ、 $\sigma$ は構造物内の応力分布、 $V$ は引張応力部の体積である。ワイブル分布のパラメータのうち $\sigma_u$ を一意的に定めることは難しく、通常は $m$ 、 $\sigma_0$ の2パラメータ分布を考える。

上式の右辺の積分はRisk of rupture  $B$  と呼ばれる。

$$B = \int_V \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dV \quad (\text{B. 2})$$

ここでは、Fig. A-1 で示した4点曲げ時の角棒のBの計算法を述べる。

はりの縦軸方向の任意点 $x$ における引張応力の分布は前節の計算によって(A-19)式で与えられている。

$$\sigma = \frac{E_t \varepsilon_t}{e_t} y + D_t \left( \frac{\varepsilon_t}{e_t} \right)^{P_t} y^{P_t} \quad (y \geq 0) \quad (\text{B. 3})$$

$\varepsilon_t$ 、 $e_t$  が $x$  に依存している。Bの積分を中央スパン部 $B_I$ と外側スパン部 $B_O$ に分ける。

$$B = B_I + B_O \quad (\text{B. 4})$$

$B_I$ と $B_O$ はそれぞれ以下で記述される。

$$\begin{aligned} B &= \int_{V_I} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dV \\ &= w \int_{\frac{\ell}{4}}^{\frac{3\ell}{4}} dx \int_0^{e_t} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dy \\ &= \frac{2w}{2\sigma_0^m} \int_0^{e_t} \left\{ \frac{E_t \varepsilon_t}{e_t} y + D_t \left( \frac{\varepsilon_t}{e_t} \right)^{P_t} y^{P_t} \right\}^m dy \end{aligned} \quad (\text{B. 5})$$

$$\begin{aligned} B_O &= \int_{V_O} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m dy \\ &= \frac{2w}{\sigma_0^m} \int_0^{\frac{\ell}{4}} dx \int_0^{e_t} \left\{ \frac{E_t \varepsilon_t}{e_t} y + D_t \left( \frac{\varepsilon_t}{e_t} \right)^{P_t} y^{P_t} \right\}^m dy \end{aligned} \quad (\text{B. 6})$$

今、 $y$  に関する積分を

$$S(x) = \int_0^{e_t} \left\{ \frac{E_t \epsilon_t}{e_t} y + D_t \left( \frac{\epsilon_t}{e_t} \right)^{P_t} y^{P_t} \right\}^m dy \quad (\text{B. 7})$$

とおくと、結局  $B_I$  と  $B_O$  は次のように表わせる。

$$B = \frac{\ell w}{2 \sigma_0^m} S \left( \frac{\ell}{4} \right) \quad (\text{B. 8})$$

$$B = \frac{2w}{\sigma_0^m} \int_0^{\frac{\ell}{4}} S(x) dx \quad (\text{B. 9})$$

(B-7) および (B-9) 式の積分は Gauss 数値積分法により得られる。

## B.2 最適ワイブルパラメータ $m$ , $\sigma_0$ の計算法

ある構造物の強度試験の結果をある引張応力で表わすとして、これが  $N$  個あるとする。これを小さい順に並べる。

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_N$$

今考えている角棒の4点曲げ強さの場合は、付録Aの計算法により求めた中央スパン部の外縁最大引張応力を  $\sigma$  と考える。このような強度データの場合、第  $i$  番目の応力  $\sigma_i$  に対する破壊の確率  $F_i^O$  は mean ranking 指定によって、

$$F_i^O = \frac{i}{N+1} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (\text{B. 10})$$

で与えられる。

他方ワイブルの統計論による理論破壊確率  $F_i^T$  は、

$$F_i^T = 1 - \exp \left( - \int_V \left( \frac{\sigma_i^*}{\sigma_0} \right)^m dV \right) \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (\text{B. 11})$$

で与えられる。ここで  $\sigma_i^*$  は、中央スパン部の外縁引張応力が  $\sigma_i$  であるときのり全体の応力分布である。  $N$  個の対の値  $F_i^O$ ,  $F_i^T$  との誤差が最少となるようなパラメータ  $m$ ,  $\sigma_0$  を  $m$ ,  $\sigma_0$  の最適値という。  $m$ ,  $\sigma_0$  の最適値を定めることが破壊に関するワイブル統計論の検討の第1歩である。

(B-11) 式の右辺の積分を  $B_i$ 、

$$B_i = \int_V \left( \frac{\sigma_i^*}{\sigma_0} \right)^m dV \quad (\text{B. 12})$$

とすると、この式ははりの応力-ひずみ関係が直線的であるとすれば良く知られているように、

$$B_i = \frac{V_B}{4} \frac{[m]+2}{([m]+1)^2} \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^{[m]} \quad (\text{B. 13})$$

ここで、 $[m]$  は整数

$V_B$  は外側エッジ間の全はり体積

と簡略化され、かつ  $\sigma_i$  を用いて表示することができる。しかし、応力-ひずみ関係が非直線的な場合には、前節 B.1 に示した手順の計算によって  $B_i$  が得られる。

$m$ ,  $\sigma_0$  の最近値は、 $B_i$  が解析表示不能で最尤法 (ML, Maximum Likelihood Method) が適用できないため以下に述べるような最少 2 乗法により定める。

(B-11), (B-12) 式により次式を得る。

$$\log \log \frac{1}{1-F_i^T} = \log B_i \quad (\text{B.14})$$

そして実験破壊確率と理論破壊確率の誤差として

$$\begin{aligned} D^2 &= \sum_{i=1}^N \left[ \log \log \left( \frac{1}{1-F_i^0} \right) - \log \log \left( \frac{1}{1-F_i^T} \right) \right]^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left[ \log \log \frac{N+1}{N+i-1} - \log B_i \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

を考える。この  $D^2$  は  $m$  と  $\sigma_0$  の関数である。 $D^2$  が最小値となる条件は

$$\frac{\partial D^2}{\partial m} = 0 \quad \text{および} \quad \frac{\partial D^2}{\partial \sigma_0} = 0 \quad (\text{B.16})$$

である。(B-16) を満足する  $m$ ,  $\sigma_0$  の値は (B-15) 式をパラメトリックに計算し、 $D^2$  を最小にする値として決定される。