

מודלים תיאורטיים לרקומבילנציה בגז מתמשט

י' אברון, ס' כהנא

אלול תשל"ח - ספטמבר 1978

RECEIVED 10 Dec 1978

English title and abstract included

קריה למחקר גרעיני - 111



הוועדה לאנרגיה אטומית

ISRAEL ATOMIC ENERGY COMMISSION, NUCLEAR RESEARCH CENTRE-NEGEV



מודלים תיאורטיים לרקומבינציה בגז מתפשט

י' אכרון, ס' כהנא

אלול תשל"ח - ספטמבר 1978

תקציר

בתהליך ההפרדה של אורניום אטומי באמצעות קרינת לייזר מתעוררת הכעיה העיונית של הערכת ריכוז אטומי האורניום המיוננים תרמית בתהליך האידי. לחקירת כעיה זו נבנו מודלים עיוניים לתהליך רקומבינציה בגז מתפשט, בהערך שיווי-משקל תרמודינמי מקומי. התפשטות הגז מתוארת כמשוואות הידרודינמיות במודלים פתירים אנליטית והרקומבינציה מתוארת במשוואות קצב. נלקחו בחשבון תהליך הרקומבינציה של תומסון ורקומבינציה קרינתית. ניתנות תוצאות כלליות על אפקט הקפיאה עבור תחומים מתאימים של פרמטרי הגז. מוכחת אי-האפשרות לשיווי-משקל תרמי במערכת דו-מרכיבית בהתפשטות תרמודינמית.

## THEORETICAL MODELS FOR RECOMBINATION IN EXPANDING GAS

Yossi AVRON and Sylvian KAHANE

September 1978

## ABSTRACT

In laser isotope separation of atomic uranium, one is confronted with the theoretical problem of estimating the concentration of thermally ionized uranium atoms. To investigate this problem theoretical models for recombination in an expanding gas and in the absence of local thermal equilibrium have been constructed. The expansion of the gas is described by soluble models of the hydrodynamic equation, and the recombination by rate equations. General results for the freezing effect for suitable ranges of the gas parameters are obtained. The impossibility of thermal equilibrium in expanding two-component systems is proven.

עמודתוכן העניינים

1	מבוא	1
2	מודלים אנליטיים לזרימה	2
3	זרימה עמידה	2.1
7	זרימה חד-מימדית דמיונית	2.2
9	התפשטות דמיונית של כדור גז	2.3
15	התפשטות מולקולרית תופשית	3
18	גז עם מרכיבים דומים כריאקציה	4
21	רקומבינציה	5
25	הנעה תודה	
26	סימוכין	

נדרן בהתפשטות לתוך וואקום של גז שאינו נמצא בשיווי-משקל תרמודינמי עם דרגות החופש הפנימיות. במיוחד נבחן את הקינטיקה של ההתקררות, המתבטאת ברקומבינציה אל האמבט הטרנסלטורי.

המוטיבציה לעבודה זו קשורה בהפרדה איזוטופית של אורניום אטומי בעזרת קרינת לייזר. השלב הראשון בהפרדה איזוטופית כזאת הוא יצירת גז של המחכת. הגז צריך להיות קר מבחינה תרמודינמית כך שהשלב הבא של העירור הסלקטיבי בעזרת הקרינה יוכל להתבצע ביעילות. מצב כזה הוא אחד היתרונות החשובים של הפרדה  $UF_6$  לעומת הפרדה של אורניום אטומי. אידוי המתכת נעשה בטמפרטורה גבוהה הגוררת עירור של דרגות החופש האלקטרוניות ויינון טבעי שכמוכך אינו סלקטיבי.

די קל להראות שבתנאי העשרה אידיאליים (כלומר בהערך חילוף מטען, פינוי מגנטו-הידרודינמי מושלם, יינון סלקטיבי מושלם וכדומה), ההעשרה של איזוטופ בעל שכיחות טבעית  $q^*$  היא בקירוב:

$$\frac{q^*}{q^* + q}$$

כאשר  $q$  הוא ריכוז האטומים המיוננים תרמית.

נטפל בהערכה של  $q$ . בעיה זו היא טיפוסית לזרימה בהעדר שיווי-משקל תרמודינמי מקומי. הקושי התיאורטי הוא בכך שהטיפול במשוואת בולצמן בתנאים כאלו אינו מעשי, ומאידך טיפול הידרודינמי טהור אינו מוצדק מבחינת הנחותיו. נקטנו כאן בדרך ביניים: את דרגות החופש של הטרנסלציה תארנו במשוואות ההידרודינמיות. את הרקומבינציה, לעומת זאת, נתאר במשוואות קצב. בשיטה זו אפשר לטפל גם ברלקסציה של העירורים האלקטרוניים. זה לא נעשה כאן מהסיבה של תהליכים אלה אין בידינו, לפי שעה, חכמי פעולה מהימנים.

לשם פשטות מניחים את ההנחות הבאות:

(א) אין מעבר חום מהרקומבינציה לתנועה ההידרודינמית.

(ב) את הגז ניתן לאפיין על-ידי קבוע אדיאבטי  $\gamma$ .

(ג) מוליכות החום של הגז זניחה.

המודל הוא קירוב מתקבל על הדעת לגז שאינו דליל מדי ( $\lambda \ll 10^{16}$  חלקיקים לסמ"ק) ולכן, הרחק מהמקור תנאי המודל אינם מתקיימים. אך כפי שנראה, רוב הרקומבינציה מתרחשת קרוב מאד למקור ולכן המודל מקבל צידוק א-פוסטריורי.

בפרק 2 נסקור את המודלים האנליטיים לזרימה ההידרודינמית; בפרק 3 נדון בהתפשטות מולקולרי חופשית; בפרק 4 מתואר המודל הקינטי באופן כללי; ובפרק 5 מתוארת הרקומבינציה.

## 2 מודלים אנליטיים לזרימה

המודלים שלהלן הם פתרונות של משוואת הזרימה בתנאי סימטריה מסכימלית, בלי גלי הלם, ובלי חיכוך. בסימטריה מסכימלית הכוונה לפתרונות בסימטריה כדורית בשלושה מימדים, בסימטריה גלילית בשני מימדים, וכו'.

המשוואות ההידרודינמיות עבור שדה המהירות  $U(x,t)$ , הצפיפות  $\rho(x,t)$  והלחץ  $P(x,t)$  הן משוואות הרציפות, משוואת אוילר ומשוואת שימור-האנרגיה. משוואת המצב קובעת את שדה הטמפרטורה. שתי המשוואות האחרונות מתבססות על הנחות תרמודינמיות שנעמוד עליהן בקצרה. תנאי האדיאבטיות מניח מוליכות חום גרועה, כלומר מספר Péclet גדול מאד ביהם לאחר. משוואת המצב מניחה שיווי-משקל תרמודינמי מקומי. שיווי-משקל כזה קיים רק באיזורים של מרחב-זמן בהן יש מספיק התנגשויות, למשל:

$$\lambda \rho \gg 1$$

כאשר  $\lambda$  רדיוס האיזור ו- $\rho$  חתך הפעולה להתנגשות. בחתפשות לוואקום,  $\rho$  לפעמים כה קטן עד ש- $\lambda$  הוא מסדר גודל המערכת. במקרה זה הפלוקטואציות סביב שיווי-המשקל התרמודינמי הן חשובות. הדיון במקרה התרמודינמי הוא לכן דיון במקרה הממוצע.

המודלים מתלקים לשני סוגים:

(א) זרימה עמידה.

(ב) זרימה דמיונית (self-similar).

בזרימה דמיונית הפתרונויות הם פונקציה של משתנה יחיד,  $x/t$  למשל  $x/[R(t)]$  במקרה הכללי). עך כדי שינוי סקלה הפתרון דומה לעצמו בכל זמן  $t$ .

נשתמש בהבחנה המקובלת בין קואורדינטות אוילר ולגרנג'. בראשונות  $x, t$  הם משתנים בלתי תלויים. בקואורדינטות לגרנג'  $x$  הוא משתנה תלוי בזמן  $t$  ובאינדקס  $x_0$  המציין נקודת חומר הנעה עם הנוזל<sup>(1)</sup>.

### 2.1 זרימה עמידה

בזרימה עמידה אינגטריציה של משוואת אוילר (שימור התנע) נותנת את משוואת ברנולי (שימור האנרגיה) כאשר במאזן האנרגיה נכנסת אנרגיה חרמית (אנחלפיה) בנוסף על האנרגיה הקינטית של הזרימה. משוואות הזרימה הן:

$$\rho Ux^{(d-1)} = Q \quad (2.1) \quad (\text{רציפות})$$

$$\frac{1}{2}U^2 + \omega = A \quad (2.2) \quad (\text{ברנולי})$$

$$p\rho^{-\gamma} = S \quad (2.3) \quad (\text{שימור אנטרופיה})$$

כאשר  $\omega$  האנחלפיה ליחידת מסה<sup>(1)</sup>:

$$\omega = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\mu} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{k_B T}{\mu} \quad (2.4)$$

$\mu$  המשקל האטומי,  $\gamma = C_p/C_v$  ו- $d$  מספר המימדים.

$A, Q$  ו- $S$  הם קבועים המאפיינים את המקור. נגדיר:

$$U_0^2 \equiv 2\omega_0 \theta \quad (2.5)$$

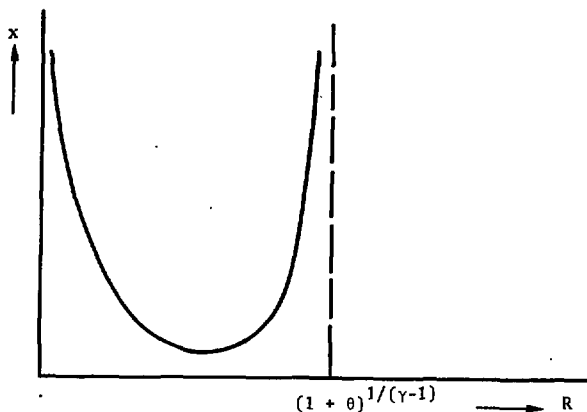
$$x \equiv r/r_0, \quad R \equiv \rho/\rho_0$$

כאשר אינדקס אפס מציין גדלים על-פני המקור ( $\theta$  קשור למספר Mach,  $M$ ):  $(M^2 = \frac{2}{\gamma-1} \theta)$

מניפולציה של המשוואות [2.1]-[2.4] נותנת:

$$x^{2(d-1)} = \frac{\theta}{1+\theta} R^{-2} \left[ 1 - \frac{1}{1+\theta} R(\gamma-1) \right]^{-1} \quad (2.6)$$



תאור  $x$  כפונקציה של  $R$  מוכא כצירור 2.1.ציור 2.1 תאור  $x$  כפונקציה של  $R$ .

ל- $R(x)$  יש שני ענפים:  $R_+(x) \rightarrow 0$  כאשר  $x \rightarrow \infty$  ו- $R_-(x) \rightarrow \infty$  כאשר  $x \rightarrow 0$ .  
 $R_+$  מתאים לזרימה תת-קולית ו- $R_-$  לזרימה על-קולית.

נגדיר:

$$\theta^* = \frac{\gamma - 1}{2} \quad [2.7]$$

$\theta^*$  מתאים למספר Mach יחידה).

$\theta^* > \theta$ : הזרימה על-קולית,  $R = R_-$ , ומתארת התפשטות לתוך וואקום.

$\theta^* < \theta$ : הזרימה תת-קולית,  $R = R_+$ , ואתאר את ההתנגדות של גז במרחב לתוך

בור (sink).

$\theta$  הוא תכונה של המקור, אך קיים:

$$\theta \leq \theta_{\max} = \frac{2}{\gamma - 1} \quad [2.8]$$

(ראה [2.13]).

כתנאי של התפשטות לתוך וואקום  $R_-$  הוא פתרון אם תנאי השפה במקור הוא של זרימה על-קולית. אם המקור הוא תת-קולי אין פתרון עמיד, וזאת כיון שאין שום מכניזם שמאפשר

האצה לענף העל-קולי, ובמיוחד אי-אפשר להאיץ את הגז לענף העל-קולי בעזרת גלי הלם (זה נובע משיקולים של יציבות: החבאים משני צידי גל הלם אינם סימטריים ותלויים בזרימה<sup>(1)</sup>).

כמה תכונות של הפתרונות  $R_-$  הם:

$$\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|x|^{d-1}} \leq R_-(x) \leq \frac{1}{|x|^{d-1}} \quad [2.9] \quad (\kappa)$$

$$R_-(x) \rightarrow \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|x|^{d-1}}, \quad |x| \rightarrow \infty$$

(ב)  $U(x)$  [מהירות הגז] מונוטונית עולה:

$$U_0 \leq U(x) \leq S \left(\frac{1+\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} U_0 \quad [2.10]$$

$$U(x) \rightarrow \left(\frac{1+\theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{2}} U_0, \quad |x| \rightarrow \infty$$

(ג)  $T(x)$  [טמפרטורה] מונוטונית יורדת לאפס:

$$T(x) \rightarrow \text{const}/|x|^{(d-1)(\gamma-1)}, \quad |x| \rightarrow \infty \quad [2.11]$$

(ד)  $P(x)$  [מומנטום] מונוטונית יורדת לאפס:

$$P(x) \rightarrow \text{const}|x|^{-\gamma(d-1)}, \quad |x| \rightarrow \infty \quad [2.12]$$

הפונקציות  $\rho/\rho_0$  ו- $T/T_0$  הן פונקציות אוניברסליות של  $x/x_0$  עבור  $\theta$  נתון. הפונקציות  $\rho^* = \rho/\rho_0$  ו- $T^* = T/T_0$  מתוארות בצירורים 2.2 ו-2.3, בהתאמה, עבור הערכים  $\theta = 1.1$ ,  $\theta = 2.2$ .

נסמן  $r^* = r/x_0$ ,  $T^* = T/T_0$ . הזנחת מוליכות החום מוצדקת כתנאי שטפנד  $Péclet$  גדול:

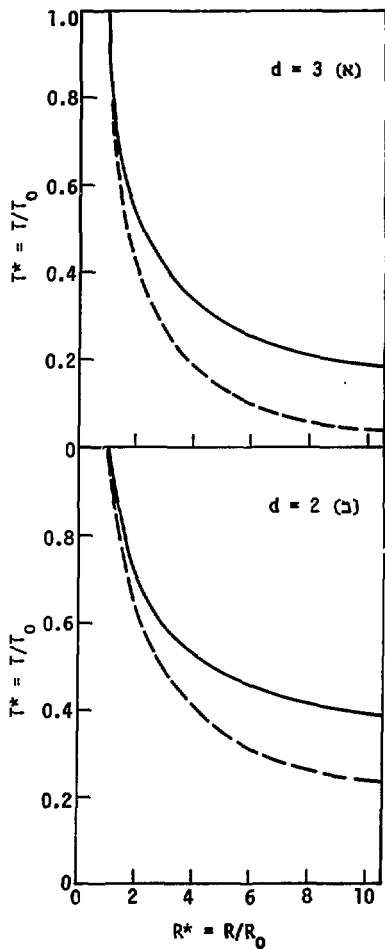
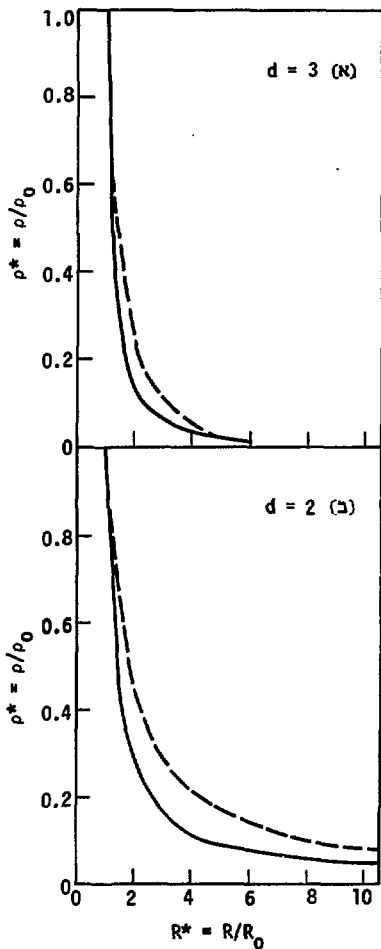
$$\frac{r_0 U_0 \rho_0 C_p}{\kappa} \gg \left| \frac{d \ln T^*}{dr^*} (r^*)^{d-1} \right|$$

$C_p$  קיבול החום ו- $\kappa$  מוליכות החום. בפלטמה מיוננת מעט, בעלת שבר יונים  $q$ :

$$\kappa = \frac{5}{2} \frac{q k_B}{\sigma} \left( \frac{k_B T}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

כאשר  $k_B$  קבוע בולצמן ו- $m$  מסת האלקטרון. עד כדי סדר גודל:  $\sigma \sim 4 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$

$$\frac{d \ln T^*}{dr^*} \sim (\gamma - 1)(d - 1)$$



ציור 2.3 תלות  $\rho^*$  ב-  $R^*$   
 עבור  $\gamma = 1.3$   
 $\theta = 1.1$  —————  
 $\theta = 2.2$  - - - - -  
 .d = 2 (ב) ; d = 3 (א)

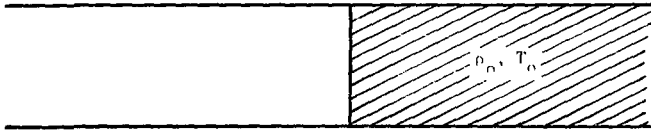
ציור 2.2 תלות  $T^*$  ב-  $R^*$   
 עבור  $\gamma = 1.3$   
 $\theta = 1.1$  —————  
 $\theta = 2.2$  - - - - -  
 .d = 2 (ב) ; d = 3 (א)

ולכן בקירוב של פקטורים מסדר גודל יחידה, מספר Peclet גדול אם מתקיים אי-השוויון:

$$\frac{\rho_o r_o}{q} \gg \frac{(x^*)^{(d-1)}}{(T^*)^{1/2}} 10^{16}$$

## 2.2 זרימה חד-מימדית דמיונית

תנאי ההחלה לזרימה חד-מימדית דמיונית ב-  $t = 0$  נתונים בצירוף 2.4.



צירוף 2.4 תנאי ההחלה לזרימה חד-מימדית דמיונית.

$c_o = \left(\frac{\gamma \bar{R} T}{\mu}\right)^{1/2}$  לגז השקט נכנס גל התרווחות במהירות  $T_o = const, \rho_o = const$  (קבוע הגזים) ובאיזור  $x \geq c_o t$  נשמרים תנאי שקט. לואקום יוצא גל התרווחות במהירות  $c_o \frac{2}{\gamma - 1}$  (סימור 2). גל ההתרווחות מוגבל לאיזור:

$$\frac{-2}{\gamma - 1} c_o \leq \frac{x}{t} \leq c_o \quad [2.15]$$

מסימור 2 מתקבלת מהירות הגז:

$$U = \frac{2}{\gamma + 1} \left( \frac{x}{t} - c_o \right) \quad [2.14]$$

$$c = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{x}{t} + \frac{2}{\gamma + 1} c_o \quad [2.15]$$

c מהירות הקול הלוקלית. מ- [2.14] ו- [2.15] ניתן לקבל את  $\rho(x, t)$  ו-  $T(x, t)$ :

$$c^2 = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S = \frac{\gamma}{\mu} \frac{P}{\rho} \quad [2.16]$$

$$P = A_o \gamma \quad [2.17]$$

S מציינ אנטרופיה.

:מחבל:

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{c}{c_0} \right)^{2/(\gamma-1)} \quad [2.18]$$

$$P = P_0 \left( \frac{c}{c_0} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} \quad [2.19]$$

$$T = T_0 \left( \frac{c}{c_0} \right)^2 \quad [2.20]$$

:תנועת הגז בקואורדינטות לגרנג'יות נקבעת מתוך [2.14] (ראה סימוך 3):

$$\frac{dx}{dt} = U \quad [2.21]$$

המשוואה [2.21] היא משוואה דיפרנציאלית לא הומוגנית מסדר ראשון.

:ההצבה:

$$x = \frac{-2c_0}{\gamma-1} t + y$$

מתקבלת עבור  $y$  משוואה הומוגנית הפתירה בקלות. קבוע האינטגרציה של המשוואהנקבע מהרדיטה של רציפות: לכל  $x(t, x_i) = x_i$  כאשר  $0 \leq x_i \leq t_i$ נגריר  $\varepsilon = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$  מתקבל לבסוף:

$$x(t, x_i) = \begin{cases} x_i & t \leq t_i \\ \frac{-2c_0}{\gamma-1} t + \frac{c_0}{\varepsilon} t \left( \frac{t}{t_i} \right)^{-\varepsilon} & t \geq t_i \end{cases} \quad [2.22]$$

מכאן גם:

$$U = \frac{-2c_0}{\gamma-1} + \frac{2c_0}{\gamma-1} \left( \frac{t}{t_i} \right)^{-\varepsilon} \quad [2.23]$$

$$T = T_0 \left( \frac{t}{t_i} \right)^{-2\varepsilon} \quad t \geq t_i \quad [2.24]$$

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{t}{t_i} \right)^{-2/(\gamma+1)} \quad t \geq t_i \quad [2.25]$$

### 2.3 התפשטות דמיונית של כדור גז

Sedov הראה (4) שבתנאי התחלה מתאימים לצפיפות וללחץ (ראה משוואות [2.27], [2.28]) מתקבלים פתרונות דמיוניים להתפשטות כדור גז לוואקום בשלושה מימדים. עבור ערכים דיסקרטים של  $\gamma = \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \dots$ , המשוואה הדיפרנציאלית המתקבלת ניתנת לפיתרון בשיטות אלמנטריות.

מניחים פיתרון מהצורה:

$$U(r, t) = r \dot{R}(t)/R(t) \quad [2.26]$$

$$\rho(r, t) = \rho_c(t) [y(r, t)]^{1/(\gamma-1)} \quad [2.27]$$

$$P(r, t) = P_c(t) [y(r, t)]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad [2.28]$$

$$T(r, t) = T_c(t) [y(r, t)] \quad [2.29]$$

כאשר:

$$y \equiv 1 - r^2/R^2(t) \quad [2.30]$$

$R(t)$  הוא רדיוס הכדור המתפשט בזמן  $t$  (ציור 2.5).

משוואת אוילר:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{\rho \mu} \frac{\partial P}{\partial r} = 0 \quad [2.31]$$

מקבלת את הצורה:

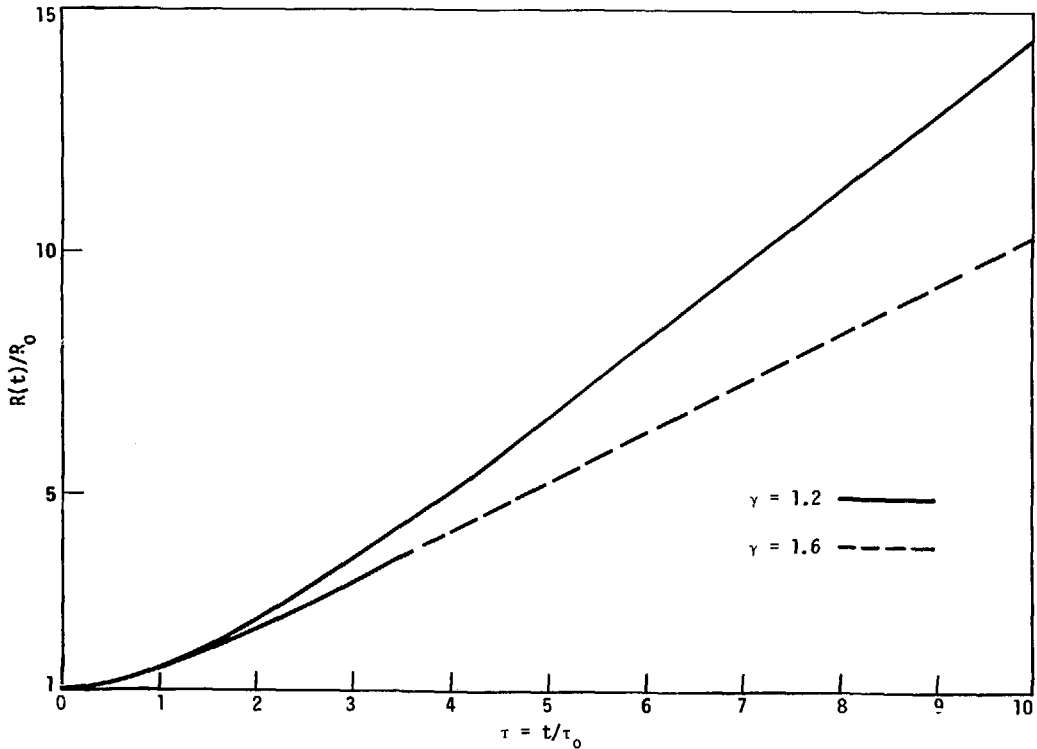
$$\ddot{R}(t) = \frac{2P_c(t)}{m \rho_c(t)} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{R(t)} \quad [2.32]$$

( $m$  מסת החלקיקים ו- $\rho$  מספר החלקיקים לסמ"ק).

$$P_c = A_0 \rho_c^\gamma \quad \rho_c(t) \text{ קשורים בתנאי איזנטרופיות}$$

$\rho_c(t)$  מקימים:

$$N = 4\pi \rho_c(t) R^3(t) \int_0^1 (1-x^2) \frac{1}{\gamma-1} x^2 dx = \rho_c(t) R^3(t) a(\gamma) \quad [2.33]$$



ציור 2.5 הפתרון לרדיוס כדור דמיוני מתפשט  $R(t)/R_0$  כפונקציה של  $t$  ביחידות זמן טבעי  $\tau_0$ .

כאשר  $N$  מספר החלקיקים בכדור וכן:

$$a(\gamma) \equiv 2\pi\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)/\Gamma\left(\frac{5\gamma-3}{2}\right) \quad [2.34]$$

במיוחד:

$$a(5/3) = \pi^2/8$$

נסמן:  $x = R/R_0$  ונגדיר זמן אופייני:

$$\tau_0(\gamma) \equiv \left( \frac{m(\gamma-1)}{2\gamma} \frac{\rho_c(0)}{P_c(0)} \right)^{1/2} R_0 \quad [2.35]$$

הפונקציה  $(T_c)$  מתוארת בציר 2.6.

הצבה של [2.33] ב-[2.32] נותנת:

$$\tau_0^2 \ddot{x} = x^{-(3\gamma-2)}$$

ולכן עבור  $\tau = t/\tau_0$  מתקבלת משוואה אניברסלית:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = x^{-(3\gamma-2)} \quad [2.36]$$

ולה אינטגרל ראשון:

$$\left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = \frac{2}{3(\gamma-1)} [1 - x^{-3(\gamma-1)}]$$

המשוואה [2.36] אינה פתירה אנליטית עבור  $\gamma$  כללי. אולם עבור  $\gamma = 5/3$  הפתרון פשוט.

יוצא:

$$R^2(t) = R_0^2 + \left( \frac{5k_B T_c(0)}{m} \right) t^2 \quad [2.37]$$

המשוואה [2.33] מקבלים:

$$\rho_c(t) = \rho_c(0) [R_0/R(t)]^3 \quad [2.38]$$

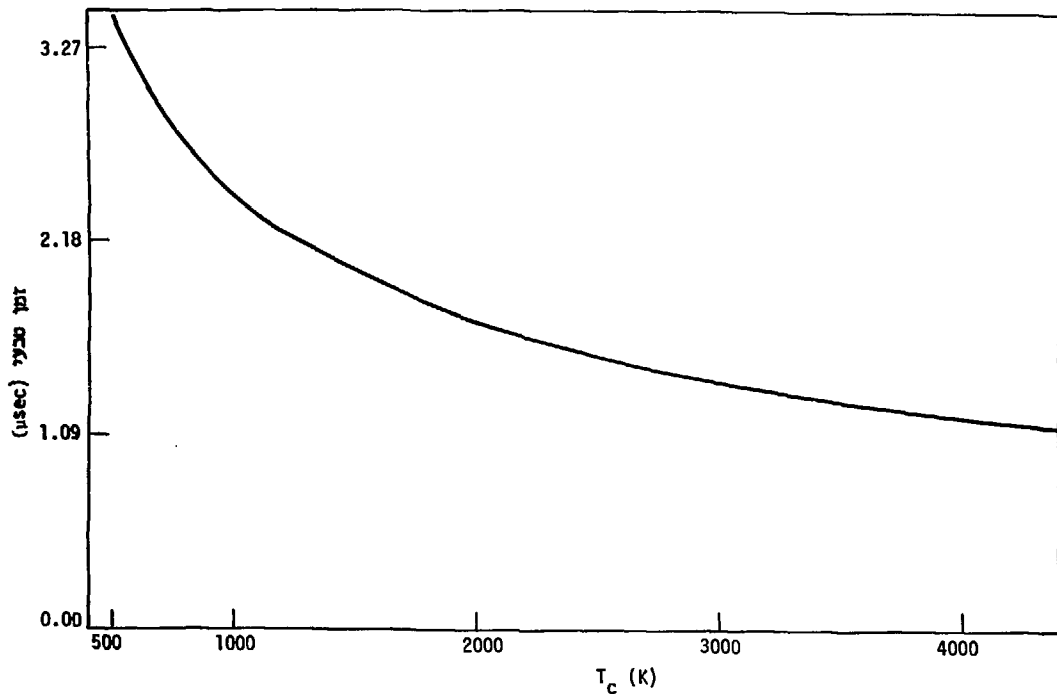
$P_c(t)$  נקבע מתנאי איזנטרופיות,  $T_c(t)$  ממשוואת המצב. פילוג הטמפרטורה מופיע

בציר 2.7 וזרם החלקיקים מתואר בציר 2.8.

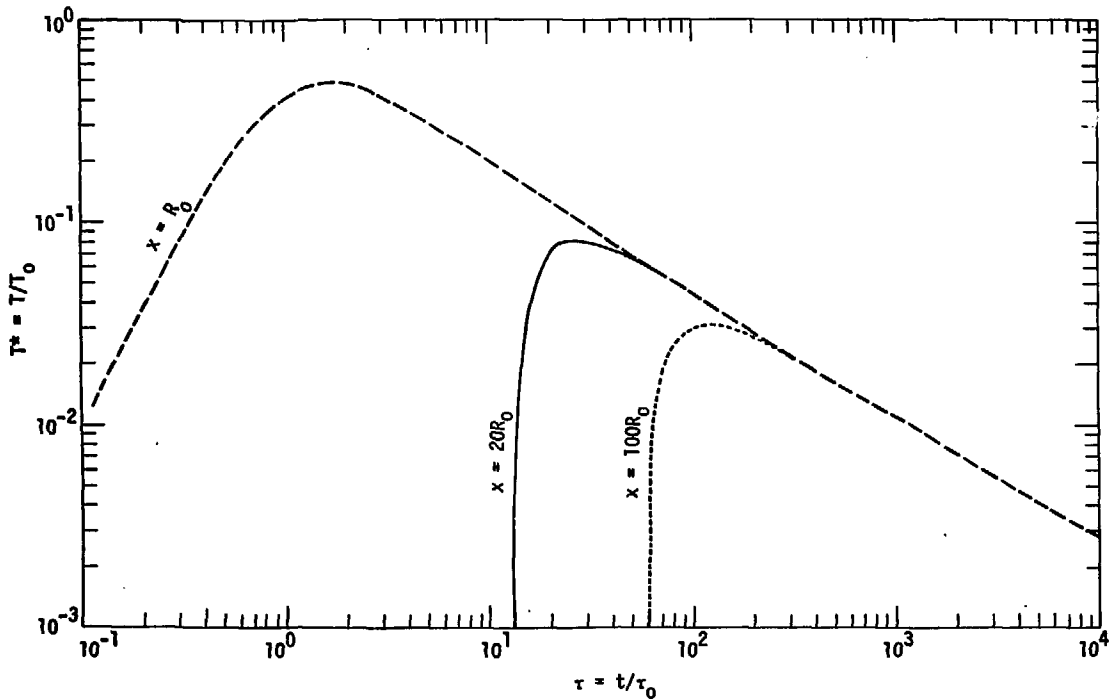
בקואורדינטות לגרנג'יות:

$$r(t) = r_0 R(t)/R_0 \quad [2.39]$$

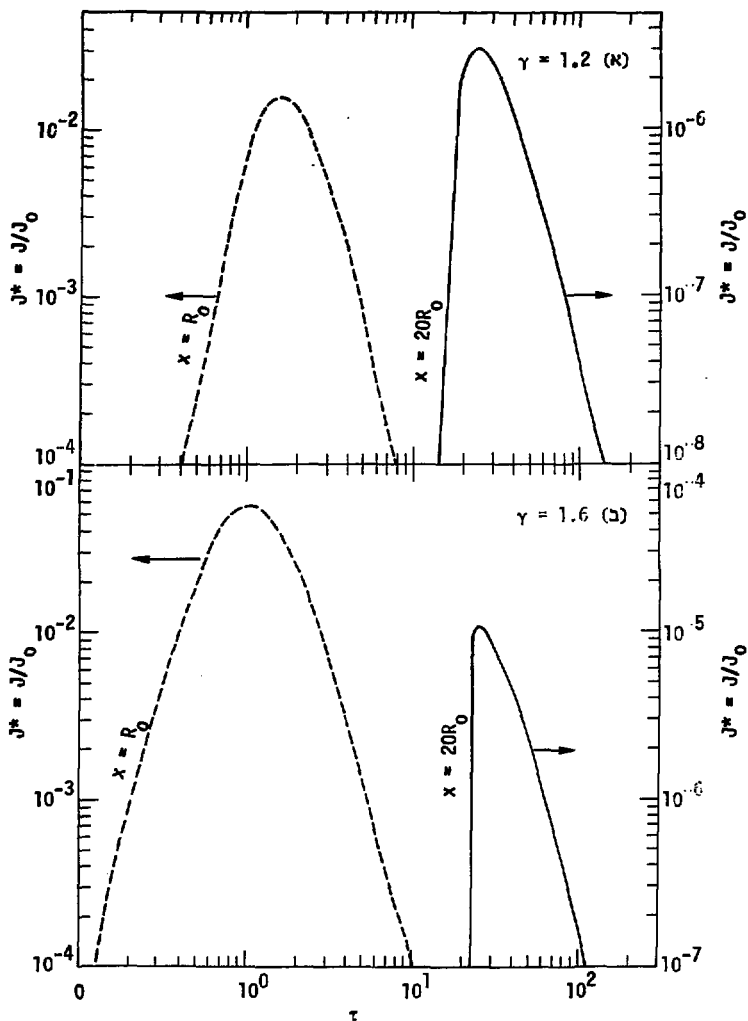




ציור 2.6 הזמן הטבעי  $\tau_0 [\gamma / (\gamma - 1)]^{1/2} / (\sqrt{\mu R_0})$  כפונקציה של הטמפרטורה  $T_c$  במרכז הכדור.



ציור 2.7 פילוג הטמפרטורה  $T^*$  כפונקציה של הזמן הטבעי  $\tau$  בשלושה מימדים עבור  $\gamma = 1.2$ .  $x$ , ביחידות של  $R_0$ , הן נקודות קבועות במרחב.



ציר 2.8 זרם החלקיקים  $J^*$  כפונקציה של הזמן הטבעי בנקודות  $x$  קבועות במרחב.  $\gamma = 1.6$  (ב) ;  $\gamma = 1.2$  (א)

$$\rho(r_o, t) = \rho_c(t) \left[ 1 - \left( \frac{r_o}{R_o} \right)^2 \right]^{1/(\gamma-1)} \quad [2.40]$$

$$T(t, r_o) = T_c(t) \left[ 1 - \left( \frac{r_o}{R_o} \right)^2 \right] \quad [2.41]$$

### 3 התפשטות מולקולרית חופשית

יהי  $N(\tau, x)$  מקור חלקיקים בעל עצמה  $N$  בנקודה  $x$  ובזמן  $\tau$ . נטמן  $\beta = \frac{\mu}{2k_B T}$ . בהנחה של פילוג מהירות מסטולי, והתפשטות חופשית (ללא התנגשויות) (ראה גם סימור 5):

$$\begin{aligned} \rho(r, t) &= (\beta/\pi)^{d/2} \int_0^t d\tau \int d^d y N(\tau, y) e^{-\beta v^2} \delta[y - r - v(t - \tau)] \\ &= (\beta/\pi)^{d/2} \int_0^t d\tau \int d^d y \frac{N(\tau, y)}{(t - \tau)^d} \exp[-\beta(y - r)^2 / (t - \tau)^2] \end{aligned} \quad [3.1]$$

פונקצית הדלתה מבטאת התפשטות חופשית.

מקרה פרטי של [3.1] הוא:

$$N(\tau, x) = \delta(\tau) N(x) \quad [3.2]$$

הביטוי [3.2] מתאר התפשטות עגון. במקרה זה:

$$\rho(r, t) = (\beta/\pi)^{d/2} t^{-d} \int d^d y N(y) \exp[-\beta(y - r)^2 / t^2] \quad [3.1']$$

כאשר המקור הוא גאוסיאן ניתן לבצע את האינטגרלים המרחביים במפורש. יהי:

$$N(\tau, x) = \phi(\tau) \prod_{i=1}^d (2\pi a_i)^{-1/2} \exp[-x_i^2 / 2a_i^2] \quad [3.3]$$

אזי:

$$\rho(x, t) = (2\pi)^{-d} \int_0^t \phi(\tau) d\tau \left( \prod_{i=1}^d A_i^{-1/2} \right) \exp[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^d x_i^2 / A_i] \quad [3.4]$$

כאשר:

$$A_i \equiv \frac{(t - \tau)^2}{2\beta} - a_i^2 \quad [3.5]$$

במיוחד, כתנאי "ענן":

$$\rho(x, t) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \prod_{i=1}^d \left( \frac{2\beta}{t^2 + 2\beta a_i} \right)^{\frac{k}{2}} \exp[-x_i^2 \beta / (t^2 + 2\beta a_i)] \quad [3.6]$$

שתי תכונות פשוטות של התפשטות חופשית הן:

$$(א) \quad |p| \leq ct^{-d}, \quad \text{קבועה מקיימת, נקודה } x \text{ קבועה}$$

$$(ב) \quad \text{רדיוס הענן } t - ct = \infty \text{ הוא בקירוב } t/\beta^{\frac{1}{2}}$$

הדיון לעיל מכליל למקורות  $N(\tau, y)$  עבודה של Molmud<sup>(5)</sup> על האפשרות לקרב משוואותהידרודינמיות על-ידי התפשטות חופשית. את המהירות  $U$  המתאימה ניתן לקבוע

ממשוואת הרציפות:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(U\rho) = 0$$

דרך אחת היא לחשב מומנטים של פונקציית פילוג ההסתברות  $P_t(x, U)$  לפילוג המהירויותולפילוג המרחבי. אם  $P_t$  ידועה, המהירות  $U$  נקבעת על-ידי המומנט הראשון:

$$\vec{U}(x) = \int P_t(x, v) \vec{v} d^3v \quad [3.7]$$

אם נסמן את כיוון הזרימה  $\parallel$  והכיוון האנכי  $\perp$ , טמפרטורה מקבילה  $T_{\parallel}$  ואנכית  $T_{\perp}$ 

מוגדרות:

$$T_{\parallel} \sim \int v_{\parallel}^2 P_t(x, v) d^3v - U_{\parallel}^2(x) \quad [3.8]$$

$$T_{\perp} \sim \int v_{\perp}^2 P_t(x, v) d^3v \quad [3.9]$$

כפי שנראה, בהתפשטות חופשית יש התקררות גיאומטרית.

נסמן ב- $N(x, v, t)$  את מספר החלקיקים הנפלטים ליחידת מהירות ליחידת נפח ליחידת זמן

מקור, ואז:

$$P_t(x, v) \sim \int_{-\infty}^0 dt' N(x - vt', v, t + t') \quad [3.10]$$

נסתכל במקור עמיד בו נפלטים החלקיקים ממשטח השפה  $S(x) = 0$ . ללא הגבלת הכלליות

$$|\nabla S(x)| = 1 \text{ על השפה.}$$

למקור כזה

$$N = P(v)\delta[S(x)] \quad [3.11]$$

ואינטגרציה על [3.10] נותנת:

$$P(x, v) \sim \frac{P(v)}{|\sqrt{S(x - vt_c)} \cdot v|} \quad [3.12]$$

כאשר  $t_c$  נקבע במשוואה  $S(x - vt_c) = 0$  והשויון בביטוי [3.12] הוא עד כדי גורם נרמול.

כדוגמה נחבונן במקור כדורי בעל רדיוס  $a$ :

$$S = \frac{r^2 - a^2}{2a} \quad [3.13]$$

מתקבל:

$$P(x, v) \sim \frac{P(v)}{|v| \cos \psi} \quad [3.14]$$

כאשר  $\psi$  נקבע משתי המשוואות:

$$\sin \psi = \left| \frac{x}{a} \right| \sin \phi \quad [3.15]$$

$$\operatorname{tg} \phi = v_{\perp} / v_{\parallel} \quad [3.16]$$

כאשר ל-  $v_{\parallel}$  ו-  $v_{\perp}$  יש המובן הטבעי של מהירות רדיאלית ומהירות בכיוון המאונך לרדיוס ממרכז הכדור, בהתאמה.

מהמשוואה [3.14] ניתן לקבוע את כל המומנטים של  $\vec{v}$  ו-  $\vec{x}$ , ובמיוחד אם מגדירים את הטמפרטורה המקבילה  $T_{\parallel}$  כוריאנט של  $v_{\parallel}$  ובדומה לכך  $T_{\perp}$ . ניתן לחשב את ההתקררות הגיאומטרית בהתפשטות מולקולרית חופשית. החישובים הם די מסובכים אבל ניתן לעשותם במרחק גבול מהמקור. יוצא לבסוף:

$$T_{\parallel} \rightarrow \text{const} \quad [3.17]$$

$$T_{\perp} \rightarrow \frac{\text{const}}{r^2}$$

כלומר יש התקררות רק של  $T_{\perp}$ , הרומה להתקררות האדיאבטית. לעומת זאת  $T_{\parallel}$  אינו מתקרר.

4 גז עם מרכיבים דומים בריאקציה

נסמן ב- $n_i$  את הצפופים של הרכיב ה- $i$ . מתקיים:

$$\rho = \sum_{i=1}^N n_i \quad [4.1]$$

כש- $N$  מספר המרכיבים. המשתנים ההידרודינמיים הם:

$$\{T, P, U, n_1, \dots, n_N\} \quad [4.2]$$

כאשר הנחנו ש- $T$  אינו תלוי באינדקס  $i$ , ו- $P_i$  הלחץ החלקי.

על המשוואות ההידרודינמיות מוסיפים  $(N - 1)$  משוואות ריאקציה בלתי תלויות מהצורה:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla(n_i U) = -Q_i \quad [4.3]$$

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0$$

אלו הן משוואות רציפות עם מקורות. נגדיר את שבר הצפיפות

$$n_i \equiv \rho q_i \quad [4.4]$$

הצבה ב- [4.3] נותנת:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial t} + U \nabla q_i = \frac{-Q_i}{\rho} \quad [4.5]$$

בתנאי שיווי-משקל תרמודינמיים:

$$Q_i(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_N, T, P) = 0 \quad [4.6]$$

כאשר  $\bar{q}_i$  מסמן את ריכוז שיווי-המשקל. למשל, במערכת של יונים ואטומים, ריכוזי

שיווי-המשקל נקבעים לפי משוואת Saha, במערכת של אטומים ברמות עירור שונות

האכלוסים נקבעים לפי משקלי בולצמן וניווני הרמות וכו'.

כידוע, בתנאים הידרוסטטיים ( $U \equiv 0$ ) יש שאיפה לתנאי שיווי-משקל של המרכיבים

השונים:  $\bar{q}_1 + q_1$ . כפי שנראה בתנאי זרימה הידרודינמיים לא מתקיים בהכרח  $\bar{q}_1 + q_1$

ויחכן אפקט של קפיאה (freezing) (4).

בקפיאה הריאקציה בין המרכיבים נפסקת למעשה והמערכת אינה מתקרבת לשינוי-משקל.

השוני בין המקרה ההידרודינמי להידרוסטטי מודגם בטיעון הבא:

משפט: נניח ש- $\bar{q}_1(t)$  הן פונקציות מבוטונות (עולות או יורדות) של  $t$  ו- $N = 2$ .

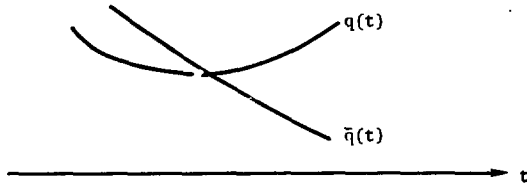
אזי עבור תנאי התחלה שרירותיים הקו  $\{q_1(t)\}$  יכול לחצות את הקו  $\{\bar{q}_1(t)\}$  לכל

היותר בנקודה  $t = t_0$  יחידה. במיוחד, המערכת לא יכולה להישאר בשינוי-משקל:

$$q(t) = \bar{q}(t) \text{ אינו פתרון.}$$

הוכחת המשפט נובעת מהתנאי [4.6]. כפי שרואים מצירור 4.1  $q_1(t)$  יכל לחצות את

$\bar{q}_1(t)$  לכל היותר פעם אחת, כיון שבנקודת החיתוך יש ל- $q(t)$  נגזרת אפס.



צירור 4.1  $q(t)$  ו- $\bar{q}(t)$  בסביבת נקודת החציה.

המשפט אינו נכון כאשר  $N \geq 3$  כיון שאז הקו  $q(t)$  יכל לעבור "מתחת"  $\bar{q}(t)$  בלי לחצות

אותו על-ידי יציאה ממישור הדף.

המשפט אינו נכון גם כאשר  $\frac{d\bar{q}}{dt}$  מחליף סימן. במערכת מתפשטת, שומר סימן אם האמבט

הטרנסלטורי אינו מקבל חום מדרגות החופש הפנימיות. כאשר יש החלפת חום ביניהם אין

סיבה א-פריודי מדוע  $\frac{d\bar{q}}{dt}$  ישמור סימן.

נשוב למערכת של  $N$  מרכיבים. נבחין בשלושה מקרים: התנגשות פנטון-חלקיק, התנגשות שני

חלקיקים וחתנגשות שלושה חלקיקים. אלו הן הריאקציות הרלוונטיות בקונטקסט שלנו.

את  $Q_i$  ניוחן לכתוב בעזרת הריאקציות הללו. פיתוח בטור עד סדר שלישי בצפיפות  $\rho$

נכ- $\{q_i\}$  נותן:

$$Q_i = \rho \sum_j k_j^i q_j + \rho^2 \sum_{j,l} k_{jl}^i q_j q_l + \rho^3 \sum_{j,l,m} k_{jlm}^i q_j q_l q_m \quad [4.7]$$



המקדמים  $k$  הם, עד כדי סימן, קבועי הריאקציה. בהמשך כמובן לא נטפל בכיטוי כל כך כללי, והריאקציה התלת-גופית היחידה שנדון בה היא תהליך Thomson: פיזור שני אלקטרונים מיון בתהליך רקומבינציה<sup>(4,6)</sup>. החשיבות של ההצגה [4.7] היא שהתלות הפונקציונלית ב- $q_1$  וב- $\rho$  פשוטה יחסית. כפי שנראה מיד בהמשך, התלות של המקדמים  $k$  בטמפרטורה היא יותר מסובכת ובנוסף לכך פחות אמינה.

התלות הפונקציונלית של  $k$  בטמפרטורה נקבעת על-ידי ההתנהגות של חתך הפעולה המתאים בסביבת אנרגיות הסף: בקונטקסט שלנו הטמפרטורות נמוכות בדרך כלל ביחס לאנרגיות עירורים טיפוסיות. לכן ברור שרק תחום צר של אנרגיות משחק תפקיד. נניח חתך פעולה  $\sigma$  מהצורה<sup>(7)</sup>:

$$\sigma = \begin{cases} 0 & E \leq \epsilon \\ \chi(E - \epsilon)^\phi & E > \epsilon \end{cases} \quad [4.8]$$

כאשר  $\epsilon$  היא אנרגיית הסף לעירור ( $\epsilon$  יכולה כמובן להתאפס).  $\sigma$  מתאר את חתך הפעולה ליד הסף. נסתכל קודם נקבוע האינטראקציה  $k$  המתאים ל-[4.8], באינטראקציה של שני גופים בעלי מסות  $m_1$  ו- $m_2$  (למשל עירור של רמות אלקטרוניות כתוצאה מהתנגשות באלקטרון חופשי):

$$k \equiv (m_1 \beta / 2\pi)^{3/2} (m_2 \beta / 2\pi)^{3/2} \int \exp[-m_1 \beta v_1^2 / 2 - m_2 \beta v_2^2 / 2] |v_1 - v_2| \sigma(v_1 - v_2) d^3v \\ = (\mu \beta / 2\pi)^{3/2} \int e^{-\mu \beta v^2 / 2} |v| \sigma(v) d^3v \quad [4.9]$$

הצבתי [4.8] ב-[4.9] מתקבל אינטגרל מידי<sup>(4)</sup>:

$$k = \frac{4\chi (k_B T)^{(\theta+1/2)}}{(2\pi\mu)^{1/2}} e^{-\beta\epsilon} [\Gamma(1+\theta)] (1+\theta+\beta\epsilon) \quad [4.10]$$

במיחוד, בגבול של טמפרטורות נמוכות:

$$k = 4\chi (k_B T)^{(\theta-1/2)} e^{-\beta\epsilon} \Gamma(1+\theta) / (2\pi\mu)^{1/2} \quad [4.10']$$

טיפול דומה אפשר לעשות לפוטונים, למשל לאינטראקציה של עירור רמות אלקטרוניות בעזרת פוטונים, או יוניזציה. כאן:

$$k \equiv \frac{1}{\pi^2 c^2} \int e^{-\beta h \omega} \omega^2 \sigma(\omega) d\omega \quad [4.11]$$

כאשר הנחנו פילוג Wien לפוטונים. האינטגרציה, בהצבת [4.8], היא מיידית ומקבלים:

$$k = \frac{\chi h^{-3} \beta^{-\theta-3}}{\pi^2 c^2} e^{-\beta \epsilon} (\Gamma(3 + \theta) + 2e\beta \Gamma(2 + \theta) + (\epsilon\beta)^2 \Gamma(1 + \theta)) \quad [4.12]$$

במיוחד, בטמפרטורות נמוכות:

$$k = \frac{\chi (k_B T)^{(\theta+1)}}{4\pi^2 c^2} \epsilon^2 e^{-\beta \epsilon} \Gamma(1 + \theta) \quad [4.12']$$

למעשה, פרט למקרים מיוחדים, אין אנו יודעים את התלות הפונקציונלית בטמפרטורה. מהדיון שלמעלה נודע רק שהביטוי הוא מהצורה:

$$k^a \cdot e^{-\beta \epsilon}$$

כאשר  $\epsilon$  אנרגית הסף. על  $a$  איננו יודעים הרבה ולפעמים אפילו לא את סימנו. נוסף לכך בדרך כלל על חתכי הפעולה או על המקדם  $\chi$  אין הערכות טובות יותר מאשר עד כדי דיוק של סדר גודל (9,8,7). יוצא מן הכלל הוא תהליך הרקומבינציה בו נדון בפרק 5 בו ידוע הרבה יחסיה על הקבועים הקוונטיים.

## 5 רקומבינציה

נתאר את הרקומבינציה בתהליך במערכת דו-מרכיבית,  $N = 2$ , ושני המרכיבים הם יונים וטומים ניוטרלים. ריכוז האלקטרונים נקבע אוטומטית מתנאי ניוטרליות משמלית. נבית גם ששכר היונים  $q \gg 1$ . בהנחה זו הזרימה ההידרודינמית אינה מושפעת מהריאקציה (האכסותרמית) של הרקומבינציה.

התהליך העיקרי לרקומבינציה הוא תהליך שלושה גופים (6,4) (פיזור Thomson):

$$A^+ + e + e \rightarrow A + e \quad [5.1]$$

כאשר הצפיפות נמוכה מאד יש להביא בחשבון גם רקומבינציה קרינתית (9,8,4):

$$A^+ + e + A + h\nu \quad [5.2]$$

תהליכים אחרים, כמו התנגשויות חלקיקים כבדים, הם זניחים.

בהמשך יהיה נוח להכליל את הטיפול ולדון במקרה בו לקדינה יש טמפרטורה  $T_e$  שאינה

בהכרח טמפרטורת הגז  $T$ :

$T_r = T$ : הגז אטום לקרינה. זה המצב בכוכבים ובפלסמות צפופות.

$T_r = 0$ : גז שקוף אופטית בתוך וואקום שחור.

$T_r = \text{const}$ : גז שקוף אופטית בתוך וואקום חם, למשל בתוך תנור.

מתוך המשוואות [5.1], [5.2] ניתן לקבוע את  $Q$ . בצורה שדונוה בפרק 4, מכיל  $Q$  שני תהליכי רקומבינציה ושני תהליכי דיסוציאציה (הריאקציות התפוכות):

$$Q = a_1 \rho^3 q^3 - a_2 \rho^2 q + b_1 \rho^2 q^2 - b_2 \rho \quad [5.3]$$

בשיווי-משקל  $q = \bar{q}$  ותנאי איזון מפורט נותן:

$$a_1 \rho \bar{q}^2 = a_2 \quad [5.4]$$

$$b_1 \rho \bar{q}^2 = b_2 \quad [5.5]$$

לכן:

$$Q = a_1 \rho^3 q(q^2 - \bar{q}^2) + b_1 \rho^2 (q^2 - \bar{q}^2) \quad [5.6]$$

המשוואה [5.6] מתארת את הקינטיקה בגז אטום לקרינה. כאשר הגז שקוף ולקרינה יש טמפרטורה  $T \neq T_r$  תהליך הדיסוציאציה  $b_2 \rho$  גדל מתכונתית למספר הפוטונים. מהנוסחה [4.12'] ועבור  $\theta = 0$  מתקבל לכן לבסוף:

$$\frac{dq}{dt} = -A(T) \rho^2 q(q^2 - \bar{q}^2) - B(T) \rho (q^2 - \bar{q}^2) \quad [5.7]$$

$$\bar{q}_2 = \bar{q}(T_r/T) \exp[I(\beta - \beta_r)] \quad [5.8]$$

$$(B(T) = b_1, A(T) = a_1)$$

עבור מימן ואטומים דמויי מימן יש חישובים מפורטים של  $A(T)$  ו- $B(T)$  (6,4). מתקבל:

$$A(T) = AT^{-9/2}, \quad A = 1.77 \times 10^{-8} \ln \Lambda [cgs] \quad [5.9]$$

$$B(T) = BT^{-3/4}, \quad B = 3.02 \times 10^{-10} \text{ cgs} \quad [5.10]$$

$\ln \Lambda$  הוא פרמטר פלסמה (4) ולהלן  $\ln \Lambda = 1$ . הביטוי [5.9] אמין עד 3000 K בקירוב.

בתהליך הרקומבינציה של תומסון [5.1] התרומה באה בעיקר מאפקט קולקטיבי של הרמות הגבוהות בהן האלקטרון נלכד הרחק מהיון (רמות אלה מועדפות בגלל הסיכוי הגדול יותר

למציאת אלקטרון נוסף שייטול את האנרגיה העודפת). כיון שכל יון, מטפיק רחוק מהגרעין, נראה כאטום מיון, הקירוב [5.9] הוא בעל אופי אוניברסלי, בטמפרטורות נמוכות. בטמפרטורות גבוהות חשובים ספקטרוסקופיים<sup>(11,10)</sup>. הסיבה לכך היא שלמעשה האבר  $T^{-9/2}$  הוא האבר הראשון בטור עם חזקות עולות של  $T$  (ראה משוואה [4.10]) ולמשל רמות אוטויוניזטיביות, או רמות נמוכות אחרות, יתרמו אברים שונים. אבל בטמפרטורות נמוכות,  $T^{-9/2}$  הוא האבר הדומיננטי. לעמות זאת בתהליך הקרינתו יש משקל גבוה דווקא לרקומכינציה לרמות נמוכות ולכן אין לצפות שהביטוי [5.10] הוא קירוב טוב למחכות, למשל.

לסיום נעיר שבאטומים היוצרים יונים מולקולרים תהליך חישוב נוסף הוא:

$$AA^+ + e \rightarrow A + A \quad [5.11]$$

נשוב עתה לאפקט הקפיאה<sup>(4)</sup>. נסתכל בביטוי:

$$\frac{dq}{dt} = -\text{const} T^\alpha \rho^2 q(q^2 - \bar{q}^2) \quad [5.12]$$

const הוא גורם שרירותי. בהתפשטות אדיאבטית:

$$\frac{dq}{dt} = -\text{konst} \rho^\psi q(q^2 - \bar{q}^2) \quad [5.12']$$

באשר:

$$\psi = 2 - \alpha + \alpha\gamma \quad [5.13]$$

מגדירים זמן טבעי למערכת  $\tau$ :

$$\tau = \int_0^t \text{konst} \cdot \rho^\psi dt \quad [5.14]$$

ואזי הביטוי [5.12'] מקבל את הצורה הפשוטה:

$$\frac{dq}{d\tau} = -q(q^2 - \bar{q}^2) \quad [5.12'']$$

אם  $0 < \psi$ ,  $\tau \rightarrow \infty$  כאשר  $t \rightarrow \infty$ . אבל אם  $0 > \psi > \psi_0$ :

$$\tau(\infty) = \text{konst} \int_0^\infty \rho^\psi dt < \infty \quad [5.15]$$

במקרה כזה קל לראות ש- $q(t)$  קופא לא בשינוי-משקל ובמיוחד  $q(t) \neq \bar{q}(t)$ .

בטבלה 5.1 מחוארות כמה דוגמות מפורשות לתלות של  $\tau$  ב- $t$  לפי המשוואה [5.14].

טבלה 5.1 תלות  $\tau$  ב- $t$  לפי המשוואה [5.14].

מורל	$\tau(t) \sim$	$\tau(t; a=-9/2) \sim$
היררוסטטי	$t$	$t$
תלת-ממדי עמיד	$t^{-2\psi+1}$	$t^{3(3\gamma-4)}$
דו-ממדי עמיד	$t^{-\psi+1}$	$t^{(9\gamma-11)/2}$
חד-ממדי דמיותי	$t^{-2\psi/(\gamma-1)+1}$	
תלת-ממדי, "עבן"	$t^{-3\psi+1}$	$t^{(27\gamma-37)/2}$

הערה:  $t^0 \sim \ln t$

המשוואה [5.12'] היא משוואת ברנולי<sup>(12)</sup> בעלת הפתרון:

$$q^{-2}(t) = q^{-2}(0)e^{-f(t)} + 2\text{konst} e^{-f(t)} \int_0^t dt' \rho^\psi e^{f(t')} \quad [5.16]$$

$$f(t) \equiv 2 \text{konst} \int_0^t q^{-2} \rho^\psi dt'$$

כאשר  $\bar{q} = 0$

$$q^{-2}(t) = q^{-2}(0) + 2 \text{konst} \int_0^t \rho^\psi dt \quad [5.16']$$

מנוסחות [5.16], [5.16'] ומטבלה 5.1 ניתן עתה לקבל בקלות את קצב הדעיכה של  $q(t)$ , ואת הערך האסימפטוטי שלו.

נסיים בהערה על שקיפות אופטית. השקיפות האופטית תלויה באינטגרל (בקואורדינטות אוילר):

$$\int \rho dx \quad [5.17]$$

אם האינטגרל [5.17] גדול (ביחס לחוץ הפעולה לבליעה), המערכת אטומה ואם הוא קטן ביחס אליו היא שקופה. כמובן שאם האינטגרל סופי, שקיפות או אטימות נקבעים לפי ערכים מספריים של חתכי הפעולה, הצפיפות וכו'. במקרה הדו-ממדי העמיד האינטגרל מחברד ולכן הגז אטום אופטית בלי תלות בחתכי פעולה.

הבעת תודה

חובה נעימה היא להודות לד"ר ג' ארז על הצגת הבעיה. חלקים רבים בדו"ח צמחו מחוץ שיחות עם ע' כפרי ובמיוחד פרק 3 על זרימה מולקולרית חופשית. ד"ר ע' כפרי הואיל לעבור על הנוסח הראשוני של הדו"ח ותודתנו נתונה לו על הערותיו.

Referencesסימוכין

1. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, London, 1959.
2. 'י גבנצל, פיסיקה של לחצים גבוהים, הרצאות שניתנו במכון ויצמן, תשל"ד - 1974.
3. E. Wasserstrom and J. Stricker, "Population inversion of CO<sub>2</sub> by free expansion", *Phys. Fluids* 17, 1335-1337 (1974).
4. Y. B. Zel'dovitch and Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Vols. 1-2, Academic Press, New York, 1967.
5. P. Molmud, "Expansion of rarefield gas cloud into a vacuum", *Phys. Fluids* 3, 362-366 (1960).
6. E. Hinnoy and J. G. Hirschberg, "Electron-ion recombination in dense plasmas", *Phys. Rev.* 125, 795-801 (1962).
7. P. G. Burke and J. F. Williams, "Electron scattering by atoms and molecules", *Phys. Repts. (Phys. Lett. C)* 34, 325-369 (1977).
8. N. F. Mott and H. S. W. Massey, *The Theory of Atomic Collisions*, 3rd Edition, Oxford University Press, 1971.
9. H. S. W. Massey, E. H. I. Burhop, and H. G. Gilbody, *Electronic and Ionic Impact Phenomena*, Oxford University Press, 1969.
10. D. R. Bates, "Electron recombination in helium", *Phys. Rev.* 77, 718-719 (1950).
11. E. W. McDaniel, *Collision Phenomena in Ionized Gases*, John Wiley, New York, 1964.
12. E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover, 1956.