

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



SU 7810808

P5 - 11595

В.М.Лебеденко

О PR-АЛГЕБРАХ

1978

P5 - 11595

В.М.Лебеденко

О PR -АЛГЕБРАХ

О PR -алгебрах

Изучаются PR -алгебры, т.е. алгебры Ли с коммутационными соотношениями типа $[H_i, H_j] = \gamma_{ij} H_i \ (i < j)$. На основании результатов, полученных ранее, дается критерий принадлежности 2-разрешимых алгебр Ли к классу PR -алгебр. Условия, налагаемые критерием, формулируются на языке линейной алгебры.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

On PR-Algebras

PR-algebras, i.e. Lie algebras with commutation relations of $[H_i, H_j] = \gamma_{ij} H_i \ (i < j)$ type are investigated. On the basis of former results a criterion for the membership of 2-solvable Lie algebras to the PR-algebra class is given. The conditions imposed by the criterion, are formulated in the linear algebra language.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

ВВЕДЕНИЕ

В работе^{/5/} автором получены условия принадлежности алгебры Ли к классу PR-алгебр. Неабелеву действительную алгебру Ли L мы называем PR-алгеброй, если она имеет базис $[H_1, \dots, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n]$ ($n \geq 2$), элементы которого удовлетворяют соотношениям:

$$[H_i, H_j] = 0 \text{ при всех } i, j \leq p \text{ и всех } i, j > p,$$

$$[H_i, H_j] = r_{ij} H_i \text{ при всех } i, j, \quad i \leq p, j > p \quad /1/$$

$r_{ij} \in \mathbb{R}$; при любом фиксированном $i, r_{ij} \neq 0$ /. Всякий базис указанного типа будем называть PR-базисом.

Прежде всего видно, что всякая PR-алгебра 2-разрешима: $[[L, L], [L, L]] = 0$, где $[L, L] = \{H_1, \dots, H_p\} \neq 0$. /Здесь и ниже $\{M\}$ будет означать подпространство, натянутое на $M \neq \emptyset$./

Далее легко заметить, что всякая PR-алгебра разлагается в прямую сумму $[L, L]$ и некоторой абелевой подалгебры A /например, $A = \{H_{p+1}, \dots, H_n\}$ /. Кроме того, очевидно, что все элементы H_j ($j > p$), рассматриваемые как операторы на $\{H_1, \dots, H_p\}$ ($H_j \longmapsto -\text{ad}(H_j)$), диагональны.

В указанной выше работе дан следующий критерий расщепляемости алгебры L в прямую сумму $[L, L] + A$. Пусть $L = \{H_1, \dots, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n\}$ ($n \geq 2$), где $[L, L] = \{H_1, \dots, H_p\}$, а элементы H_{p+1}, \dots, H_n линейно независимы по модулю $[L, L]$. Алгебра L раз-

ложима в прямую сумму $[L, L] + A$, где A - некоторая абелева подалгебра, тогда и только тогда, когда существуют такие элементы

$$H'_j = H_j + \sum_{t=1}^p x_{jt} H_t \quad (p+1 \leq j \leq n), \quad /2/$$

что $[H'_j, H'_k] = 0$ при любых $j, k, p+1 \leq j; k \leq n$.

Другими словами, пусть $[H_i, H_j] = \sum_{t=1}^p c_{ij}^{(t)} H_t$ для

всех $i, j, 1 \leq i \leq p < j \leq n$ и $[H_j, H_k] = \sum_{t=1}^p \ell_{jk}^{(t)} H_t$ для всех $j, k > p; j < k$. Тогда для того чтобы алгебра L имела требуемое разложение, необходимо и достаточно совпадение ранга матрицы системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \sum_{t=1}^p (c_{tk}^{(s)} x_{jt} - c_{tj}^{(s)} x_{kt}) = \ell_{jk}^{(s)} \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \quad /3/$$

для которой индексы пробегает все допустимые значения: $1 \leq s \leq p, p+1 \leq j, k \leq n, j < k$, с рангом ее расширенной матрицы.

Далее в той же работе дан следующий критерий принадлежности расщепляемой 2-разрешимой алгебры Ли к классу PR-алгебр. Пусть 2-разрешимая алгебра Ли L разлагается в прямую сумму

$$L = \{H_1, \dots, H_p\} + \{H_{p+1}, \dots, H_n\}$$

$$(p \geq 1, n-p \geq 1), \quad \{H_1, \dots, H_p\} = [L, L].$$

Алгебра L является PR-алгеброй тогда и только тогда, когда существует такой базис в $\{H_1, \dots, H_p\}$, относительно которого все операторы $H_j (H_j \mapsto \text{ad}(H_j), p < j \leq n)$, диагональны. Иначе говоря, если A -матрицы операторов $H_j (p < j \leq n)$ в базисе H_1, \dots, H_p , то для того чтобы L была PR-алгеброй, необходима и достаточна выполнимость условий:

а/ все характеристические корни матриц A_j ($p < j \leq n$) действительны;

б/ минимальные многочлены матриц A_j ($p < j \leq n$) ^{4/} не имеют кратных корней.

Ниже мы объединим эти два критерия в один и тем самым уточним указанные результаты. При этом мы будем пользоваться всеми обозначениями, принятыми в этой главе.

2. КРИТЕРИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ АЛГЕБР ЛИ К КЛАССУ PR-АЛГЕБР

Теорема. 2-разрешимая алгебра Ли $L = \{H_1, \dots, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n\}$ является PR-алгеброй тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы /3/, связанной с L , совпадает с рангом ее расширенной матрицы, а матрицы A_j полученных операторов $H'_j = H_j + \sum_{t=1}^p x_{jt} H_t$ удовлетворяют условиям /4/.

Доказательство. Если алгебра Ли L удовлетворяет нашим условиям, то она, очевидно, является PR-алгеброй.

Пусть алгебра Ли L с некоторым базисом $\{H_i\}_1^n$, ($[L, L] = \{H_1, \dots, H_p\}$) является PR-алгеброй. Тогда у нее есть PR-базис $\{h_i\}_1^n$ ($\{[h_i]_1^p\} = [L, L]$). Элементы H_k линейно выражаются через $\{h_i\}_1^n$, $\{H_1, \dots, H_p\} = \{h_1, \dots, h_p\}$. Поэтому существуют

$$\text{элементы } H'_j = H_j + \sum_{t=1}^p x'_{jt} h_t = H_j + \sum_{t=1}^p x_{jt} H_t$$

требуемого вида, то есть ранг матрицы системы /3/, соответствующей L , совпадает с рангом ее расширенной

матрицы. Далее, полученные операторы $H'_j = H_j + \sum_{t=1}^p x_{jt} H_t$

$= \sum_{t=1}^n \alpha_{jt} h_t$ диагональны в базисе $\{h_i\}_1^p$ пространства $\{H_1, \dots, H_p\} = \{h_1, \dots, h_p\}$.

Следовательно, матрицы этих операторов в базе $[N_j]_1^p$ удовлетворяют условиям /4/ /см. /5,6/. Утверждение доказано.

Следствие: Алгебра Ли $L = \{N_1, \dots, N_p, N_{p+1}, \dots, N_n\}$ не является PR-алгеброй, если не все матрицы операторов N_j ($p < j \leq n$) удовлетворяют условиям /4/.

В заключение автор считает своим принятым долгом выразить благодарность В.Г.Кадышевскому за инициирование этой работы и А.В.Матвеевко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. "Наука", М., 1972.
2. Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-9384, Дубна, 1975.
3. Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-9867, Дубна, 1976.
4. Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-10535, Дубна, 1977.
5. Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-11415, Дубна, 1978.
6. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. "Наука", М., 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 мая 1978 года.

Нет ли пробелов в Вашей библиотеке?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

P1,2-7642	Труды Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Гомель, 1973.	623 стр.	7 р. 15 к.
ДЗ-7991	Труды II Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1974.	552 стр.	2 р. 50 к.
Д1,2-8405	Труды IV Международного симпозиума по физике высоких энергий и элементарных частиц. Варна, 1974.	376 стр.	2 р. 05 к.
P1,2-8529	Труды Международной школы-семинара молодых ученых. Актуальные проблемы физики элементарных частиц. Сочи, 1974.	582 стр.	2 р. 60 к.
Д6-8846	XIV совещание по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1975.	180 стр.	1 р. 90 к.
Д13-9164	Международное совещание по методике проволочных камер. Дубна, 1975.	344 стр.	4 р. 20 к.
Д1,2-9224	IV Международный семинар по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1975.	307 стр.	3 р. 60 к.
Д13-9287	Труды VIII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна, 1975	469 стр.	5 р. 00 к.
Д7 - 9734	Международная школа-семинар по взаимодействию тяжелых ионов с ядрами и синтезу новых элементов /Дубна, 1975 г./	298 стр.	3 р. 00 к.
Д2 - 9788	Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля /Алушта, 1976 г./	390 стр.	2 р. 40 к.
Д-9920	Труды Международной конференции по избранным вопросам структуры ядра /Дубна, 1976 г./	452 стр.	3 р. 50 к.
Д9-10500	Труды II Симпозиума по коллективным методам ускорения. Дубна, 1976.	292 стр.	2 р. 50 к.
Д2-10533	Труды X Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Баку, 1976.	560 стр.	3 р. 50 к.

- Д13-11182 Труды IX Международного симпозиума по ядерной электронике. Варна, 1977. 435 стр. 5 р. 00 к.
- Д10,11-11264 Труды Совещания по программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1977. 554 стр. 6 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79,
издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.

Заказ 24982. Тираж 530. Уч.-изд. листов 0,32.

Редактор В.Л.Аншенико

Подписано к печати

16.06.78

Корректор Н.А.Кураева