CEA
EURATOM

ASSOCIATION EURATOM-CEA
[illegible] Fontenay aux Roses (France)

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE DU PLASMA
ET DE LA FUSION CONTROLEE

DPh - PFC - STGI

EUR - CEA - FC - 897

CORRESPONDANCES
RELATIONS D'EQUIVALENCE

G.M. BOULIGAND

Mars 1978

Abstract

We comment on sections §3 "Correspondences" and §6 "Equivalence Relations" in chapter II of "Eléments de mathématique" by N. Bourbaki in order to simplify their comprehension.

§3 exposes the ideas of a graph, correspondence and map or of function ; and their composition laws.

We draw attention to the following points :

1) Adopting the convention of writing from left to right, the composition law for two correspondences (A,F,B), (U,G,V) of graphs F, G is written in full generality $(A,F,B)\circ(U,G,V) = (A,F\circ G,V)$. It is not therefore assumed that the co-domain B of the first correspondence is identical to the domain U of the second (EII.13 D.7),(1970).

2) The axiom of choice consists of creating the Hilbert terms from the only relations admitting a graph.

3) The statement of the existence theorem of a function h such that $f = g\circ h$, where f and g are two given maps having the same domain (of definition), is completed if h is more precisely an injection.

§6 considers the generalisation of equality : First, by "the equivalence relation associated with a map f of a set E identical to $(x \in E$ and $y \in E$ and $x{:}f = y{:}f)$. Consequently, every relation $R\{x,y\}$ which is équivalent to this is an equivalence relation in E (symmetrical, transitive, reflexive) ; then R admits a graph included in $E \times E$, etc. Secondly, by means of the Hilbert term $\theta\{x\} \equiv \tau R\{x,\square\}$ of a relation R submitted to the equivalence $R\{x,y\} \Leftrightarrow (\theta\{x\} = \theta\{y\}$ and $R\{x,x\}$ and $R\{y,y\})$. In this last case, if $R\{x,y\}$ is separately collectivizing in x and y, $\theta\{x\}$ in not the class of objects equivalent to x for R (EII.47.9),(1970).

The interest of bringing together these two subjects, apart from this logical order, resides also in the fact that the theorem mentioned in 3) can be expressed by means of the equivalence relations associated with the functions f and g.

The solutions of the examples proposed reveal their simplicity.

Résumé

Nous commentons les paragraphes §3 "Correspondances", §6 "Relations d'équivalence" au chapitre II des "Eléments de mathématique" par N. Bourbaki, pour en faciliter la lecture.

Le §3 expose les notions de graphe, de correspondance et d'application ou de fonction ; et leurs lois de composition.

A ce sujet, nous attirons l'attention sur les points suivants :
1) Dans l'écriture de gauche à droite adoptée par la suite, la loi de composition de deux correspondances (A,F,B), (U,G,V) de graphes F, G, s'écrit en toute généralité $(A,F,B)\circ(U,G,V) = (A,F\circ G,V)$. Elle ne suppose donc pas que l'ensemble d'arrivée B de la première soit identique à l'ensemble de départ U de la seconde (EII.13 D.7),(1970).

2) L'axiome du choix revient à générer les termes de Hilbert des seules relations munies d'un graphe.

3) L'énoncé du théorème d'existence d'une fonction h telle que $f = g\circ h$, où f et g sont deux applications données ayant même ensemble de définition, se complète si h est plus précisément une injection.

Le §6 traite de la généralisation de l'égalité : Primo, par "la relation d'équivalence associée à une application f d'un ensemble E" identique à ($x \in E$ et $y \in E$ et $x{:}f = y{:}f$). Dès lors, toute relation $R\{x,y\}$ qui lui est équivalente est une relation d'équivalence dans E (symétrique, transitive, réflexive) ; puis R admet un graphe inclus dans $E \times E$, etc. Secondo, par le recours au terme de Hilbert $\theta\{x\} \equiv \tau R\{x,\square\}$ d'une relation R soumise à l'équivalence $R\{x,y\} \Leftrightarrow (\theta\{x\} = \theta\{y\}$ et $R\{x,x\}$ et $R\{y,y\})$. Dans ce dernier cas, si $R\{x,y\}$ est séparément collectivisante en x et y, $\theta\{x\}$ n'est pas la classe d'objets équivalents à x pour R (EII.47.9),(1970).

L'intérêt de rapprocher ces deux sujets, outre leur suite logique, réside aussi en ce que le théorème évoqué au 3) s'exprime à l'aide des relations d'équivalence associées aux fonctions f et g.

Les résolutions des exercices proposés révèlent leur simplicité.

CORRESPONDANCES

1.-INTRODUCTION.- Le premier rapport /1/ "Lire le formalisme de Nicolas Bourbaki", noté F.B. par la suite, s'achève sur la définition du produit de deux ensembles en application de la notion de couple. Evidemment les concepts qui reposent sur cette notion ne s'arrêtent pas là. Aussi l'objet de ce second rapport, en suite à F.B. est de développer le sous chapitre "Correspondances", inclus dans le chapitre II "Théorie des ensembles" de Bourbaki /2/, vue son importance en mathématique.

N.B. Dans cette rédaction, toute relation prise pour référence sera un théorème d'une théorie.

2.-PREAMBULE.- Etant donné la faculté de représenter un couple (x,y) par une lettre z au moyen de la relation $z = (x,y)$, lorsqu'elle est vraie, les théorèmes suivants précédemment établis seront utilisés à plusieurs reprises :

1) Lorsque la relation $(z \text{ est un couple}) \equiv (\exists x)(\exists y)(z = (x,y))$ est vraie, les relations $(\exists y)(z = (x,y))$, $(\exists x)(z = (x,y))$ sont fonctionnelles en x et y respectivement. Alors EI.41 C46 et EI.27 C14 prouvent les implications :

(1) $\quad (z \text{ est un couple}) \Rightarrow ((\exists y)(z = (x,y)) \Leftrightarrow (x = pr_1 z))$,

(2) $\quad (z \text{ est un couple}) \Rightarrow ((\exists x)(z = (x,y)) \Leftrightarrow (y = pr_2 z))$.

2) L'équivalence

(3) $\quad (z = (x,y)) \Leftrightarrow ((z \text{ est un couple}) \text{ et } x = pr_1 z \text{ et } y = pr_2 z)$

par des substitutions convenables admet pour corollaires les égalités

(4) $\quad x = pr_1(x,y) \quad , \quad$ (5) $\quad y = pr_2(x,y)$

et l'équivalence

(6) $\quad (z = (pr_1 z, pr_2 z)) \Leftrightarrow z \text{ est un couple.}$

3) Le changement de variables $z = (x,y)$ dans une relation R exprimée avec la lettre z ou les lettres x, y donne lieu aux équivalences :

(7) $\quad (\exists x)(\exists y)(z = (x,y) \text{ et } R\{x,y\}) \Leftrightarrow (z \text{ est un couple et } R\{pr_1 z, pr_2 z\})$,

(8) $\quad (\exists z)(z = (x,y) \text{ et } R\{z\}) \Leftrightarrow R\{(x,y)\}$,

(9) $\quad (\exists z)(z = (x,y) \text{ et } R\{pr_1 z, pr_2 z\}) \Leftrightarrow R\{x,y\}$,

(10) $\quad (\exists x)(\exists y)R\{x,y\} \Leftrightarrow (\exists z)(z \text{ est un couple et } R\{pr_1 z, pr_2 z\})$,

(11) $\quad (\forall x)(\forall y)R\{x,y\} \Leftrightarrow (\forall z)(z \text{ est un couple} \Rightarrow R\{pr_1 z, pr_2 z\})$,

les équivalences (7), (8) faisant l'objet des théorèmes 3 et 4 p.34 de F.B. l'équivalence (9) est un corollaire de (8), les équivalences (10) et (11) données en exercices en EII.49 résultent de (7).

3.- GRAPHES.- La relation $(\forall z)(z \in G \Rightarrow (z \text{ est un couple}))$, où la lettre z ne figure pas dans G, se désigne par "G est un graphe". Dans l'affirmative, "si G est un graphe", elle exprime que tout élément de l'ensemble G est un couple ; elle a donc un caractère exclusif en ce sens qu'aucun élément de G ne peut être un objet distinct d'un couple. Alors selon EI.34 C30, l'implication $z \in G \Rightarrow (z \text{ est un couple})$ est un théorème de $\mathcal{T}$ lorsque G est un graphe.

<u>Remarque</u>.- Si G est un graphe qui n'est pas un couple, la relation $G \in G$ n'est pas vraie ; si la relation (G est un couple) est vraie -par exemple $G \equiv \{(x,x)\} \equiv (\{x\},\{x\})$- selon EI.26 C9, l'implication $G \in G \Rightarrow$ (G est un couple) est vraie, mais elle ne précise pas la qualité de la relation $G \in G$.

<u>Lemme</u> 1. Si le terme G est un graphe, les relations $(\exists y)((x,y) \in G)$, $(\exists z)(x = pr_1 z \text{ et } z \in G)$ sont équivalentes.

<u>Preuve</u>.- Pour $R \equiv z \in G$, la relation (8) justifie l'équivalence $(x,y) \in G \Leftrightarrow (\exists z)(z = (x,y) \text{ et } z \in G)$. Il en résulte la suivante : $(\exists y)((x,y) \in G) \Leftrightarrow (\exists z)((\exists y)(z = (x,y)) \text{ et } z \in G)$; et compte tenu de ce que G est un graphe, la relation (1) achève la preuve de ce lemme par C14.

De là, en ce qui concerne la Proposition 1 en EII.9, il est clair que la relation $(\exists z)(x = pr_1 z \text{ et } z \in G)$ dans laquelle G est un terme est collectivisante en x selon EII.5 C53, et que la relation $(\exists y)((x,y) \in G)$ l'est aussi lorsque G est un graphe d'après le lemme précédent et le lemme de F.B.p.25. Dans ces conditions elles sont donc équivalentes à la relation d'appartenance $x \in \{x \mid (\exists y)((x,y) \in G)\}$.

Les symboles abréviateurs $pr_1 G$, $pr_2 G$ qui désignent les termes $\{x \mid (\exists y)((x,y) \in G)\}$, $\{y \mid (\exists x)((x,y) \in G)\}$ sont appelés première et seconde projection de G. Ce procédé est naïf ; ultérieurement à propos de la composition des graphes il serait plus expressif de mentionner la lettre libre (ou variable) qui tient lieu d'élément dans la dite projection.

<u>Exemple</u>.- Pour un graphe G formé des couples (x,y), $(\emptyset,v)$, on a $G = \{(x,y),(\emptyset,v)\}$, $pr_1 G = \{x,\emptyset\}$, $pr_2 G = \{y,v\}$.

<u>Théorème 1</u>.- Un graphe est inclus dans le produit direct de ses projections. Réciproquement toute partie d'un produit de deux ensembles est un graphe dont les projections sont respectivement incluses dans les facteurs de ce produit. Si G est un graphe, on a l'équivalence $G = \emptyset \Leftrightarrow (pr_1 G = \emptyset \text{ et } pr_2 G = \emptyset)$.

<u>Preuve</u>.- Selon EI.33 S5, si G est un graphe, on a les implications

$$\left.\begin{array}{ll} (12) & ((x,y) \in G) \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G) \Leftrightarrow x \in pr_1 G \\ (13) & ((x,y) \in G) \Rightarrow (\exists x)((x,y) \in G) \Leftrightarrow y \in pr_2 G \end{array}\right\} \text{ et de là la suivante}$$

$$(14) \quad ((x,y) \in G) \Rightarrow (x \in pr_1 G \text{ et } y \in pr_2 G) \Leftrightarrow (x,y) \in pr_1 G \times pr_2 G,$$

l'équivalence étant justifiée par le théorème 6 en F.B.p.35, mais ne permet pas de conclure à l'inclusion de G dans $pr_1 G \times pr_2 G$. Pour cela, il faut revenir à la lettre z correspondant au changement de variables $z = (x,y)$. Ainsi, dans (14), la substitution double $(pr_1 z|x)(pr_2 z|y)$ prouve l'implication : $(G \text{ est un graphe et } (pr_1 z, pr_2 z) \in G) \Rightarrow (pr_1 z \in pr_1 G \text{ et } pr_2 z \in pr_2 G)$.
Selon (6), l'affirmation (G est un graphe) donne lieu aux implications

$$(15) \quad z \in G \Rightarrow (z = (pr_1 z, pr_2 z) \text{ et } z \in G) \Rightarrow (pr_1 z, pr_2 z) \in G.$$

Alors si G est un graphe, la relation
$(\forall z)(z \in G \Rightarrow ((z \text{ est un couple}) \text{ et } pr_1 z \in pr_1 G \text{ et } pr_2 z \in pr_2 G))$ est vraie.
Selon l'équivalence (7), elle s'abrège en l'inclusion énoncée. C.Q.F.D.
Tout ensemble de couples est donc une partie d'un produit.

Réciproquement, la relation d'inclusion $Z \subset X \times Y$ est identique à $(\forall z)(z \in Z \Rightarrow z \in X \times Y)$; alors compte tenu de l'équivalence en EII.8

$(z \in X \times Y) \Leftrightarrow ((z$ est un couple) et $pr_1 z \in X$ et $pr_2 z \in Y)$, on a l'implication $(Z \subset X \times Y) \Rightarrow (\forall z)(z \in Z \Rightarrow ((z$ est un couple) et $pr_1 z \in X$ et $pr_2 z \in Y))$.

De plus lorsque $G \subset X \times Y$ est vraie, selon le théorème 6 de F.B.p.35 $(x,y) \in G \Rightarrow (x,y) \in X \times Y \Leftrightarrow (x \in X$ et $y \in Y) \Rightarrow x \in X$; d'où il est vrai que $(\exists y)((x,y) \in G) \Rightarrow x \in X$, dès lors, $x \in pr_1 G \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G) \Rightarrow x \in X$. Ceci ayant lieu pour tout x, il en résulte $pr_1 G \subset X$, de même $pr_2 G \subset Y$. C.Q.F.D.

L'implication $G = \emptyset \Rightarrow (pr_1 G = \emptyset$ et $pr_2 G = \emptyset)$ se justifie en observant que le terme de Russell d'une relation fausse est vide. L'implication inverse résulte de $G \subset pr_1 G \times pr_2 G$. Voir aussi le corollaire 1 p.6.

Graphe d'une relation.- Soient $R\{x,y\}$ une relation, x et y désignant deux lettres distinctes, et G une lettre distincte de x et de y et ne figurant pas dans R. La relation $(\forall x)(\forall y)(R \Leftrightarrow (x,y) \in G)$ n'est pas a priori univoque en G car, même lorsqu'elle est vraie, G peut avoir des éléments e qui ne sont pas des couples (Précisément $(\exists e)(e \in G$ et $\neg(e$ est un couple)) peut être vraie). Ainsi, à partir des deux hypothèses auxiliaires :

$(\forall x)(\forall y)(R \Leftrightarrow (x,y) \in g)$, $(\forall x)(\forall y)(R \Leftrightarrow (x,y) \in h)$ résultent les équivalences $R \Leftrightarrow (x,y) \in g$, $R \Leftrightarrow (x,y) \in h$
justifiant $((x,y) \in g) \Leftrightarrow ((x,y) \in h)$ sans conséquence directe.
Or l'équivalence $(\forall x)(\forall y)R\{x,y\} \Leftrightarrow (\forall z)((z$ est un couple$) \Rightarrow R\{pr_1 z, pr_2 z\})$ de EII.49 établie en L.F.N.B.p 47 justifie la suivante :
$(\forall x)(\forall y)(R \Leftrightarrow (x,y) \in g) \Leftrightarrow (\forall z)((z$ est un couple$) \Rightarrow (R \Leftrightarrow (pr_1 z, pr_2 z) \in g))$.
Dès lors la première hypothèse auxiliaire revient à supposer vraie
$(\forall z)((z$ est un couple$) \Rightarrow (R \Leftrightarrow (pr_1 z, pr_2 z) \in g))$, soit compte tenu de (6)
$(\forall z)((z = (pr_1 z, pr_2 z) \Rightarrow (z = (pr_1 z, pr_2 z)$ et $R \Leftrightarrow (pr_1 z, pr_2 z) \in g))$, soit
$(\forall z)((z$ est un couple$) \Rightarrow (R \Leftrightarrow z \in g))$, donc aussi
$(z$ est un couple$) \Rightarrow (R \Leftrightarrow z \in g)$; la seconde $(z$ est un couple$) \Rightarrow (R \Leftrightarrow z \in h)$.
Par suite lorsque g, h sont des graphes, selon C14, l'équivalence $z \in g \Leftrightarrow z \in h$ en résulte et dont la conséquence est $g = h$. D'où ce résultat :
Théorème 2. La relation $(G$ est un graphe et $(\forall x)(\forall y)(R \Leftrightarrow (x,y) \in G)) \equiv W$ est univoque en G.

La relation $(\exists G)(G$ est un graphe et $(\forall x)(\forall y)(R \Leftrightarrow ((x,y) \in G)))$, compte tenu de ce que les lettres x,y,z ne figurent pas dans $\tau_G W$, est identique à la conjonction $((\forall z)(z \in \tau_G W \Rightarrow (z$ est un couple$))$ et $(\forall x)(\forall y)(R \Leftrightarrow (x,y) \in \tau_G W))$. Lorsqu'elle est vraie, on dit que "R admet un graphe par rapport aux lettres x et y"; et l'équivalence $R \Leftrightarrow (x,y) \in \tau_G W$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

Théorème 3.- Z étant une lettre distincte de x,y et ne figurant pas dans R, la relation R admet un graphe inclus dans Z lorsque la relation $(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow ((x,y) \in Z))$ est vraie.

<u>Preuve</u>.- Supposons vraie dans une théorie $\mathcal{T}'$ la conjonction $((z \text{ est un couple}) \text{ et } (R\{pr_1 z, pr_2 z\} \Rightarrow (z \in Z)))$, alors d'après EII.5 C52, la relation $((z \text{ est un couple}) \text{ et } R\{pr_1 z, pr_2 z\})$ est collectivisante en z dans $\mathcal{T}'$, et l'ensemble $\{z \mid (z \text{ est un couple}) \text{ et } (R\{pr_1 z, pr_2 z\}\}$ est un graphe G inclus dans Z selon F.B.p.29 ; il donne lieu dans $\mathcal{T}'$ à l'équivalence :

$$z \in G \Leftrightarrow ((z \text{ est un couple}) \text{ et } R\{pr_1 z, pr_2 z\}).$$

Alors, selon EI.27 C14, l'implication : $((z \text{ est un couple}) \text{ et } (R\{pr_1 z, pr_2 z\} \Rightarrow z \in Z) \Rightarrow (z \in G \Leftrightarrow ((z \text{ est un couple}) \text{ et } R\{pr_1 z, pr_2 z\}))$ est un théorème de $\mathcal{T}$. De même, selon EI.23 C3, la substitution $(x,y) | z$ justifie l'implication

$$(R\{x,y\} \Rightarrow (x,y) \in Z) \Rightarrow ((x,y) \in G \Leftrightarrow R\{x,y\}),$$

puis EI.34 C31 l'implication

$$(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in Z) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)((x,y) \in G \Leftrightarrow R).$$

Comme le terme Z ne figure pas dans son conséquent, l'implication

$$(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in Z) \Rightarrow (\forall x)(\forall y)((x,y) \in G \Leftrightarrow R)$$

est aussi un théorème de $\mathcal{T}$.

De là il résulte que lorsque $(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow (x,y) \in Z)$ est vraie, la relation $R\{x,y\}$ admet un graphe G inclus dans Z. (Evidemment G a pour éléments les couples vérifiant R, donc l'ensemble des couples qui vérifient la relation collectivisante (R et $z \in Z$) puisque G est inclus dans Z).

N.B. Pratiquement on réduit l'écriture de ces démonstrations en indiquant une fois pour toutes que la lettre z vérifie une relation (z est un couple).

<u>Corollaire</u>.- T désignant un terme où ne figure aucune des lettres x, y, si l'implication $R \Rightarrow ((x,y) \in T)$ est vraie, R admet un graphe inclus dans T.

<u>Preuve</u>.- En effet, selon EI.32 C26, $(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow ((x,y) \in T))$ est vraie, puis, selon EI.33 S5, $(\exists Z)(\forall x)(\forall y)(R \Rightarrow ((x,y) \in Z))$ est vraie. C.Q.F.D.
<u>Remarque</u>.- La relation $x = y$ n'admet pas de graphe. (Autrement dit l'expression non formalisée $\{z \mid (z \text{ est un couple}) \text{ et } pr_1 z = pr_2 z\}$ est une classe Z).

En effet, dans le cas contraire on aurait une théorie $\mathcal{T}'$ dans laquelle les relations $(\forall x)(\forall y)(x = y \Leftrightarrow (x,y) \in \tau_G W)$, $x = y \Leftrightarrow (x,y) \in \tau_G W$, $(x,x) \in \tau_G W$ seraient vraies et aussi $(\exists U)(\forall x)((x,x) \in U)$ ce qui semble suspect ! Plus précisément dans $\mathcal{T}'$, $pr_1 G \equiv \{x \mid (\exists y)((x,y) \in G)\}$, compte tenu de l'équivalence $(x,y) \in G \Leftrightarrow (x = y)$, serait contradictoirement égale à la classe $\{x \mid (\exists y)(x = y)\}$ (qui ne s'identifie à aucun terme puisque la relation $(\exists y)(x = y)$ est vraie ; voir L.F.N.B.p.46.) A fortiori la lettre G de $\mathcal{T}'$ est aussi une classe dans $\mathcal{T}$ puisqu'elle ne peut s'identifier à aucun terme.

<u>Théorème</u> 4.- Le graphe d'une relation fausse égale l'ensemble vide.

<u>Preuve</u>.- Les projections du graphe d'une relation R sont égales aux termes $\{x|(\exists y)R\}$, $\{y|(\exists x)R\}$. D'où $x \in pr_1 G \Leftrightarrow (\exists y)R \equiv R\{x,\tau_y\}$; $y \in pr_2 G \Leftrightarrow R\{\tau_x,y\}$. Donc lorsque R est fausse $(\forall x)(x \notin pr_1 G)$, $(\forall y)(y \notin pr_2 G)$ sont vraies, de même les égalités $pr_1 G = \emptyset$, $pr_2 G = \emptyset$ par leurs équivalences respectives.

<u>Image d'un ensemble par un graphe</u>.- Soient G un graphe et X un ensemble. Le corollaire précédent indique que la relation $(x \in X$ et $(x,y) \in G)$ admet un graphe G'. Il en résulte l'équivalence $(x \in X$ et $(x,y) \in G) \Leftrightarrow (x,y) \in G'$.

D'où $pr_1 G' \equiv \{x|(\exists y)((x,y) \in G')\} = \{x|(\exists y)(x \in X \text{ et } (x,y) \in G)\}$

$= \{x|x \in X \text{ et } (\exists y)((x,y) \in G)\} = \{x|x \in X \text{ et } x \in pr_1 G\} = X \cap pr_1 G$;

$pr_2 G' = \{y|(\exists x)((x,y) \in G')\} = \{y|(\exists x)(x \in X \text{ et } (x,y) \in G)\} \equiv X:G$.

Par définition, le terme X:G est l'image de l'ensemble X par le graphe G.

<u>Théorèmes</u> 5-8.- Soient G un graphe et X un ensemble ; les quatre relations $X:G \subset pr_2 G$, $pr_1 G:G = pr_2 G$, $\emptyset:G = \emptyset$, $(X \neq \emptyset$ et $X \subset pr_1 G) \Rightarrow X:G \neq \emptyset$ sont vraies.

<u>Preuves</u> :

1) L'implication $(\exists x)(x \in X$ et $(x,y) \in G) \Rightarrow (\exists x)((x,y) \in G)$, selon la remarque qui suit EII.5 C52, montre que $X:G \equiv \{y|(\exists x)(x \in X \text{ et } (x,y) \in G)\}$ est un terme inclus dans $\{y|(\exists x)((x,y) \in G)\} = pr_2 G$. C.Q.F.D.

2) $pr_1 G:G \equiv \{y|(\exists x)(x \in pr_1 G \text{ et } (x,y) \in G)\}$, or l'implication (12) p.2 justifie l'équivalence $(x \in pr_1 G$ et $(x,y) \in G) \Leftrightarrow ((x,y) \in G)$. D'où il résulte l'égalité $pr_1 G:G = \{y|(\exists x)((x,y) \in G)\} \equiv pr_2 G$. C.Q.F.D.

3) $\emptyset:G \equiv \{y|(\exists x)(x \in \emptyset \text{ et } (x,y) \in G)\}$, or $x \notin \emptyset$ étant vraie, la relation $(x \in \emptyset$ et $(x,y) \in G)$ est fausse, de même la relation $(\exists x)(x \in \emptyset$ et $(x,y) \in G)$ $\equiv (\tau \in \emptyset$ et $(\tau,y) \in G)$. Le terme de Russell de cette dernière égale l'ensemble vide (Voir F.B en 9) p.46) ; d'où $\emptyset:G = \emptyset$. C.Q.F.D.

4) En F.B.p.31 résulte l'équivalence $(X \neq \emptyset) = (\exists x)(x \in X)$.
Par définition $(X \subset pr_1 G) \equiv (\forall x)(x \in X \Rightarrow x \in pr_1 G)$,
or l'équivalence $(x \in pr_1 G) \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G)$ est vraie.
D'où $(X \subset pr_1 G) \Rightarrow (\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G))$.
D'ailleurs en EI.48 l'implication $((\exists x)A$ et $(\forall x)B) \Rightarrow (\exists x)(A$ et $B)$ montre que $(X \neq \emptyset$ et $X \subset pr_1 G) \Rightarrow (\exists x)(x \in X$ et $(x \in X \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G)))$ est vraie.
Or, selon C14, $(A$ et $(A \Rightarrow B)) \Rightarrow (A$ et $B)$; d'où
$(X \neq \emptyset$ et $X \subset pr_1 G) \Rightarrow (\exists x)(x \in X$ et $(\exists y)((x,y) \in G))$;
or C33 donne l'équivalence du conséquent avec $(\exists x)(\exists y)(x \in X$ et $((x,y) \in G))$ puis C34 l'équivalence de ce dernier avec $(\exists y)(\exists x)(x \in X$ et $((x,y) \in G))$,
$\Leftrightarrow (\{y|(\exists x)(x \in X \text{ et } ((x,y) \in G))\} \neq \emptyset) \equiv (X:G \neq \emptyset)$. C.Q.F.D.-car il est vrai que si $\{u|R\}$ est un terme U, on a $u \in U \Leftrightarrow R$, et comme $(U \neq \emptyset) \Leftrightarrow (\exists u)(u \in U)$, alors $(\{u|R\} \neq \emptyset) \Leftrightarrow (\exists u)R$ est vraie.

Corollaire 1. Les relations $G = \emptyset$, $pr_1 G = \emptyset$, $pr_2 G = \emptyset$ sont équivalentes.
Preuve.- Elle résulte des théorèmes 1 p.2 et 6-7 p.5, et par raison de symétrie.

Proposition 2.- L'inclusion de deux ensembles implique celle de leurs images respectives par tout graphe.
Preuve.- Soient G un graphe, X et Y deux ensembles. Sous l'hypothèse $X \subset Y$, l'implication $x \in X \Rightarrow x \in Y$ est un théorème de $\mathfrak{T}'$. De même l'implication $(x \in X \text{ et } (x,y) \in G) \Rightarrow (x \in Y \text{ et } (x,y) \in G)$, puis la relation $(\forall y)((\exists x)(x \in X \text{ et } (x,y) \in G) \Rightarrow (\exists x)(x \in Y \text{ et } (x,y) \in G))$ sont des théorèmes de $\mathfrak{T}'$; d'où, selon EII.4 C50, $X:G \subset Y:G$ est vraie dans $\mathfrak{T}'$, ce qui justifie l'implication $X \subset Y \Rightarrow X:G \subset Y:G$ dans $\mathfrak{T}$ selon C14. C.Q.F.D.

Corollaire.- L'implication $(pr_1 G \subset A) \Rightarrow (pr_2 G = A:G)$ est vraie.
Preuve.- La proposition 2 prouve l'implication $(pr_1 G \subset A) \Rightarrow (pr_1 G:G \subset A:G)$ les théorèmes précédents 2), 1), les relations $pr_1 G:G = pr_2 G$, $A:G \subset pr_2 G$.

Coupe d'un graphe suivant x.- Soient G un graphe et x un terme. La coupe de G suivant x est le terme $\{x\}:G \equiv \{y \mid (\exists u)(u \in \{x\} \text{ et } (u,y) \in G)\}$.

Théorème 9. Les relations $y \in \{x\}:G$, $(x,y) \in G$ sont équivalentes ; l'égalité $\{x\}:G = \{y \mid (x,y) \in G\}$ est vraie.
Preuve.- Compte tenu de l'équivalence $u \in \{x\} \Leftrightarrow u = x$, on a les suivantes :
$y \in \{x\}:G \Leftrightarrow (\exists u)(u \in \{x\} \text{ et } (u,y) \in G) \Leftrightarrow (\exists u)(u = x \text{ et } (u,y) \in G)$
$\Leftrightarrow (\exists u)(u = x \text{ et } (x,y) \in G) \Leftrightarrow ((\exists u)(u = x) \text{ et } (x,y) \in G)) \Leftrightarrow (x,y) \in G$. C.Q.F.D.

Corollaire.- La relation $(\exists y)((x,y) \notin G)$ est vraie.
Preuve.- En effet, elle est équivalente à la relation vraie $(\exists y)(y \notin \{x\}:G)$.

Théorème 10. Si G, G' sont deux graphes, les relations $G \subset G'$, $(\forall x)(\{x\}:G \subset \{x\}:G')$ sont équivalentes.
Preuve.- L'inclusion $G \subset G'$ dans $\mathfrak{T}'$ y donne l'implication $(x,y) \in G \Rightarrow (x,y) \in G'$ et, compte tenu du théorème précédent $y \in \{x\}:G \Rightarrow y \in \{x\}:G'$.
Par conséquent $(\forall x)(\{x\}:G \subset \{x\}:G')$ est un théorème de $\mathfrak{T}'$; d'où l'implication $G \subset G' \Rightarrow (\forall x)(\{x\}:G \subset \{x\}:G')$ dans $\mathfrak{T}$, selon C14.

Inversement, dans $\mathfrak{T}'$ supposons vraie $(\forall x)(\{x\}:G \subset \{x\}:G')$, alors l'inclusion $\{x\}:G \subset \{x\}:G'$ l'est aussi, puis $y \in \{x\}:G \Rightarrow y \in \{x\}:G'$, soit $(x,y) \in G \Rightarrow (x,y) \in G'$, enfin $(\forall x)(\forall y)((x,y) \in G \Rightarrow (x,y) \in G')$ est un théorème de $\mathfrak{T}'$ équivalent à
$(\forall z)((z \text{ est un couple}) \Rightarrow ((pr_1 z, pr_2 z) \in G \Rightarrow (pr_1 z, pr_2 z) \in G'))$ équivalent à $(\forall z)((z \text{ est un couple}) \Rightarrow (z \in G \Rightarrow z \in G'))$. De là, l'implication $(z \text{ est un couple}) \Rightarrow (z \in G \Rightarrow z \in G')$ est un théorème de $\mathfrak{T}'$, et puisque G est un graphe, il en résulte aussi $z \in G \Rightarrow z \in G'$ par laquelle $G \subset G'$ dans $\mathfrak{T}'$.
D'où, selon C14, l'implication $(\forall x)(\{x\}:G \subset \{x\}:G') \Rightarrow G \subset G'$. C.Q.F.D.

Graphe réciproque

Définition.- Soit G un graphe de couples (x,y). Le graphe réciproque de G, désigné par $\overset{-1}{G}$, est le graphe de couples (y,x).

Cette définition exprime l'équivalence $((x,y)\in G)\Leftrightarrow((y,x)\in\overset{-1}{G})$; de là, $X:\overset{-1}{G}$, l'image réciproque de X par G, désigne l'ensemble :

$$\{v\mid(\exists u)(u\in X \text{ et } (u,v)\in\overset{-1}{G})\}=\{v\mid(\exists u)(u\in X \text{ et } (v,u)\in G)\}.$$

Composé de graphes.- F et G désignant deux graphes, les implications (12), (13) donnent les relations :

$$(x,y)\in F\Rightarrow x\in pr_1F \quad , \quad (y,z)\in G\Rightarrow z\in pr_2G$$

d'où, en désignant par * la conjonction ou la disjonction, les implications vraies : $((x,y)\in F * (y,z)\in G)\Rightarrow(x\in pr_1F) * (z\in pr_2G)$.

Dés lors, dans le premier cas, le théorème 6 de F.B p 35 justifie l'implication $((x,y)\in F \text{ et } (y,z)\in G)\Rightarrow(x,z)\in pr_1F\times pr_2G$;

dans le second cas on ne dispose pas d'un théorème analogue au précédent. Par conséquent, seule la conjonction $C\{x,y,z\}\equiv((x,y)\in F \text{ et } (y,z)\in G)$, en vertu du corollaire de la page 4, admet un graphe lié à y par rapport à x et z.

D'autre part, l'implication précédente justifie les deux suivantes :

$(\forall y)C\{x,y,z\}\Rightarrow(x,z)\in pr_1F\times pr_2G \quad , \quad (\exists y)C\{x,y,z\}\Rightarrow(x,z)\in pr_1F\times pr_2G$

qui montrent de même que les relations $(\forall y)C\{x,y,z\}$, $(\exists y)C\{x,y,z\}$ admettent chacune un graphe par rapport à x et z inclus dans $pr_1F\times pr_2G$.

Alors, selon le théorème 4 p 5, le graphe de $(\forall y)C\{x,y,z\}$ est vide puisque cette relation est fausse. En effet, selon EI.34 C32 $(\forall y)C\{x,y,z\}$ est équivalente à la conjonction des deux relations $(\forall y)((x,y)\in F)$, $(\forall y)((y,z)\in G)$ respectivement équivalentes aux deux relations $(\forall y)(y\in\{x\}:F)$, $(\forall y)(y\in\{z\}:\overset{-1}{G})$ d'après le théorème 9 p.6, et qui sont fausses selon F.B B) p 46. Ceci étant établi, j'appelle le graphe de $(\exists y)C\{x,y,z\}$ composé de F et de G (par abréviation de "graphe composé de F et de G) et que je note $F\circ G$ contrairement à l'usage (EII.11 Définition 6).

Proposition 3.- Le graphe réciproque du composé de deux graphes est égal au composé inverse de leurs graphes réciproques : $(F\circ G)^{-1}=\overset{-1}{G}\circ\overset{-1}{F}$.

Preuve.- Soient F et G deux graphes. Le graphe $F\circ G$ est le graphe par rapport à x et z de la relation $(\exists y)((x,y)\in F \text{ et } (y,z)\in G)$. Il en résulte l'équivalence : $(x,z)\in F\circ G\Leftrightarrow(\exists y)((x,y)\in F \text{ et } (y,z)\in G)$.

Faisant intervenir l'équivalence associée à la notion de graphe réciproque, on a donc la suite des équivalences :

$(z,x)\in(F\circ G)^{-1}\Leftrightarrow(x,z)\in F\circ G\Leftrightarrow(\exists y)((x,y)\in F \text{ et } (y,z)\in G)\Leftrightarrow$
$(\exists y)((y,z)\in G \text{ et } (x,y)\in F)\Leftrightarrow(\exists y)((z,y)\in\overset{-1}{G} \text{ et } (y,x)\in\overset{-1}{F})\Leftrightarrow(z,x)\in\overset{-1}{G}\circ\overset{-1}{F}$.

Dès lors à l'appui des équivalences (6), (11) et de l'axiome d'extensionalité A1 en EII.3, il résulte l'égalité annoncée.

<u>Proposition</u> 4.- La loi de composition des graphes est associative (EII.12).

<u>Proposition</u> 5.- L'image d'un ensemble A par le composé de deux graphes F, G vérifie une loi associative, précisément $A:F\circ G = (A:F):G \equiv A:F:G$

<u>Preuve</u>.- $$\begin{aligned} A:F\circ G &\equiv \{z \mid (\exists x)(x \in A \text{ et } (x,z) \in F\circ G)\} \\ &= \{z \mid (\exists x)(x \in A \text{ et } (\exists y)((x,y) \in F \text{ et } (y,z) \in G))\} \\ &= \{z \mid (\exists y)((\exists x)(x \in A \text{ et } (x,y) \in F) \text{ et } (y,z) \in G)\} \\ &= \{z \mid (\exists y)(y \in A:F \text{ et } (y,z) \in G)\} = (A:F):G. \end{aligned}$$

<u>Exercices</u>

1) $pr_1 F\circ G = \{x \mid (\exists z)((x,z) \in F\circ G)\} = \{x \mid (\exists z)(\exists y)((x,y) \in F \text{ et } (y,z) \in G)\}$
$= \{x \mid (\exists y)((x,y) \in F \text{ et } (\exists z)((y,z) \in G))\} = \{x \mid (\exists y)((x,y) \in F \text{ et } y \in pr_1 G)\}$
$= \{x \mid (\exists y)(y \in pr_1 G \text{ et } (y,x) \in \overline{F}^1)\} = pr_1 G:\overline{F}^1 \subset pr_2\overline{F}^1 = pr_1 F$, selon le th^{me}5.

2) $pr_2 F\circ G = \{z \mid (\exists x)((x,z) \in F\circ G)\} = \{z \mid (\exists x)(\exists y)((x,y) \in F \text{ et } (y,z) \in G)\}$
$= \{z \mid (\exists y)((\exists x)((x,y) \in F) \text{ et } (y,z) \in G)\} = \{z \mid (\exists y)(y \in pr_2 F \text{ et } (y,z) \in G)\}$
$= pr_2 F:G \subset pr_2 G$, selon le théorème 5.

3) $X \subset pr_1 G \Leftrightarrow X \subset (X:G):\overline{G}^1$. En effet, avec l'hypothèse auxiliaire $X \subset pr_1 G \equiv (\forall x)(x \in X \Rightarrow x \in pr_1 G)$ et compte tenu de l'équivalence $x \in pr_1 G \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G)$, l'implication $x \in X \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G)$ est un théorème de $\mathcal{T}'$; de même, selon l'équivalence des graphes réciproques $x \in X \Rightarrow (x \in X \text{ et } (\exists y)((x,y) \in G \text{ et } (y,x) \in \overline{G}^1))$ est vraie, puis, selon EI.33S5 $x \in X \Rightarrow (\exists z)(z \in X \text{ et } (\exists y)((z,y) \in G \text{ et } (y,x) \in \overline{G}^1))$ l'est aussi, de même que $x \in X \Rightarrow (\exists y)((\exists z)(z \in X \text{ et } (z,y) \in G) \text{ et } (y,x) \in \overline{G}^1)$ selon EI.35 C33 ;
$\Leftrightarrow (\exists y)(y \in X:G \text{ et } (y,x) \in \overline{G}^1) \Leftrightarrow x \in (X:G):\overline{G}^1$. Par suite l'inclusion $X \subset (X:G):\overline{G}^1$ est un théorème de $\mathcal{T}'$, ce qui prouve l'implication 3) de gauche à droite. Par un raisonnement analogue se prouve l'implication inverse.

4) Si F_1, G_1, F_2, G_2 sont des graphes, l'implication $(F_1 \subset F_2 \text{ et } G_1 \subset G_2) \Rightarrow (F_1\circ G_1 \subset F_2\circ G_2)$ est un théorème de $\mathcal{T}$.

En effet, $F_1 \subset F_2 \equiv (\forall z)(z \in F_1 \Rightarrow z \in F_2)$; par suite les implications $(x,y) \in F_1 \Rightarrow (x,y) \in F_2$; $(y,z) \in G_1 \Rightarrow (y,z) \in G_2$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}'$. Alors dans $\mathcal{T}'$, $((x,y) \in F_1 \text{ et } (y,z) \in G_1) \Rightarrow ((x,y) \in F_2 \text{ et } (y,z) \in G_2)$ puis, $(x,z) \in F_1\circ G_1 \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in F_1 \text{ et } (y,z) \in G_1) \Rightarrow$
$$(\exists y)((x,y) \in F_2 \text{ et } (y,z) \in G_2) \Leftrightarrow (x,z) \in F_2\circ G_2.$$
Par conséquent $(\forall u)(\forall v)((u,v) \in F_1\circ G_1 \Rightarrow (u,v) \in F_2\circ G_2)$ est un théorème de $\mathcal{T}'$. Dès lors l'équivalence (11) établit l'inclusion $F_1\circ G_1 \subset F_2\circ G_2$ dans $\mathcal{T}'$.CQFD.

5) Si G est un graphe, $\emptyset\circ G = G\circ\emptyset = \emptyset$. En effet, $\emptyset$ est un graphe car $z \in \emptyset$ est une relation fausse, alors on a les équivalences :
$$(x,z) \in \emptyset\circ G \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in \emptyset \text{ et } (y,z) \in G) \Leftrightarrow (x,z) \in \emptyset$$
la première résulte de la définition du composé $\emptyset\circ G$, la seconde, de ce que les relations qui la composent sont fausses. D'où $\emptyset\circ G = \emptyset$, de même $G\circ\emptyset = \emptyset$.

4.-CORRESPONDANCES.- Cette notion est à la source de problèmes énoncés à l'aide des définitions suivantes :

1) Il est usuel de nommer la relation d'appartenance $(x,y) \in G$ "y correspond à x par G", (il n'est donc pas nécessaire que G soit un graphe pour que cette relation soit vraie).

2) <u>Intersection de deux graphes</u>.- La relation ($z \in F$ et $z \in G$) engendre les implications ($z \in F$ et $z \in G$) $\Rightarrow z \in F$, ($z \in F$ et $z \in G$) $\Rightarrow z \in G$; alors le corollaire de la page [illegible] indique qu'elle admet un graphe $F \cap G = G \cap F$ inclus dans les graphes F, G conformément à F.B.p.30.

Selon le lemme de la page 2, les projections de cette intersection sont

$$\mathrm{pr}_1\langle F \cap G\rangle = \{x \mid (\exists z)(x = \mathrm{pr}_1 z \text{ et } z \in F \text{ et } z \in G)\}$$
$$\mathrm{pr}_2\langle F \cap G\rangle = \{y \mid (\exists z)(y = \mathrm{pr}_2 z \text{ et } z \in F \text{ et } z \in G)\}$$

$$\mathrm{pr}_1\langle F \cap G\rangle = \{x \mid (\exists y)((x,y) \in F \text{ et } (x,y) \in G)\}$$
$$\mathrm{pr}_2\langle F \cap G\rangle = \{y \mid (\exists x)((x,y) \in F \text{ et } (x,y) \in G)\}$$

<u>Avis</u>.- Les difficultés mathématiques provenant en partie de notations inadaptées, je modifie résolument celle de Bourbaki sur les correspondances par une simple permutation du triplet, sans laquelle elle masque leurs propriétés mutuelles. (Cet effort supplémentaire dès le début imposé aux initiés leur permettra d'y voir un peu plus clair quant aux sections et rétractions !

3) <u>District</u>.- Un district est un triplet $D = (X,G,Y)$ où le terme du milieu G est un graphe et les termes extrêmes X, Y sont appelés respectivement ensemble de départ, ensemble d'arrivée de D.

4) <u>Correspondance</u>.- Une correspondance est un district $\Gamma = (X,F,Y)$ dont le graphe F est inclus dans le produit $X \times Y$ des ensembles de départ et d'arrivée. Les projections de F sont les projections de Γ appelées respectivement ensemble de définition, ensemble des valeurs de la correspondance.

5) <u>Correspondance d'un district</u>.- On appelle correspondance d'un district $D = (X,G,Y)$ la correspondance $(X, G \cap X \times Y, Y)$ dont le graphe est l'intersection des graphes G, $X \times Y$; elle définit l'ensemble de définition et l'ensemble des valeurs du district.

6) <u>District réciproque ...</u> .- Le district réciproque $\overset{-1}{D}$ de $D = (X,G,Y)$ est le district $(Y,\overset{-1}{G},X)$. De même se définissent la correspondance réciproque et la correspondance réciproque d'un district. Par rapport aux notations ci-dessus, ils ont pour termes respectifs $\overset{-1}{\Gamma} = (Y,\overset{-1}{F},X)$, $(Y,\overset{-1}{G} \cap Y \times X, X)$.

7) <u>Graphe fonctionnel sur un ensemble X</u>.- Un graphe G est fonctionnel sur un ensemble X lorsque p,q désignant des lettres distinctes entre elles et de x, y, et ne figurant pas dans G, pour tout x élément de X, la relation $(x,y) \in G$ est fonctionnelle en y ; c'est à dire lorsque la relation $(\forall x)(x \in X \Rightarrow ((\exists y)((x,y) \in G)$ et $(\forall p)(\forall q)(((x,p) \in G$ et $(x,q) \in G) \Rightarrow (p = q))))$ est vraie. Dans ces conditions X est nécessairement inclus dans $\mathrm{pr}_1 G$.
En effet, dès lors, les implications $x \in X \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G) \Leftrightarrow x \in \mathrm{pr}_1 G$ sont vraies, et entraînent cette conclusion. (Voir Annexe III Application).

8) <u>Graphe fonctionnel</u>.- Un graphe G est fonctionnel lorsqu'il est fonctionnel sur son ensemble de définition $pr_1 G$.

<u>Théorème</u> 11.- Pour qu'un graphe G soit fonctionnel, il faut et il suffit que, pour tout x, il existe au plus un objet correspondant à x par G ; autrement dit que $(\forall x)(\forall p)(\forall q)(((x,p)\in G \text{ et } (x,q)\in G) \Rightarrow p = q)$ soit vraie.
<u>Preuve</u>.- Voir l'annexe III, Application.

<u>Théorème</u> 12.- Le composé de deux graphes fonctionnels est fonctionnel.
<u>Preuve</u>.- Voir p.13.

9) <u>Fonction</u>.- Une fonction f est une correspondance $f = (X,F,Y)$ ayant un graphe fonctionnel sur l'ensemble de départ X.

Par définition, une fonction f est assujettie aux deux conditions :
a) f est une correspondance, soit $F\subset X \times Y$ (il en résulte $pr_1 F\subset X$).
b) Pour tout $x\in X$, il existe un et un seul terme qui correspond à x par F. (On a déjà vu que nécessairement $X\subset pr_1 F$). Alors $X = pr_1 F$. (Voir /1/p 53).

Le terme correspondant à x par F s'appelle la valeur de f pour l'élément x de l'ensemble de départ X et se désigne par $x{:}f$ ou $x{:}F$.

<u>N.B</u>.- Soit $f = (X,F,Y)$ une fonction ; puisque pour tout élément x de l'ensemble X la relation $(x,y)\in F$ est fonctionnelle en y, selon EI.41 C46^{bis}, elle engendre l'équivalence conditionnelle :

$$x\in X \Rightarrow ((x,y)\in F \Leftrightarrow y = x{:}f) \quad \text{avec} \quad x{:}f \equiv \tau_y\overline{(x,y)\in F}.$$

Autrement dit, on a les deux implications

$$(x\in X \text{ et } (x,y)\in F) \Rightarrow y = x{:}f \quad ; \quad (x\in X \text{ et } y = x{:}f) \Rightarrow (x,y)\in F.$$

<u>Lemme</u> 2.- Si F est un graphe fonctionnel, il donne lieu à l'équivalence $(x,y)\in F \Leftrightarrow (x\in pr_1 F \text{ et } y = x{:}f)$ dans laquelle $x{:}f = \tau_y\overline{(x,y)\in F}$.

<u>Preuve</u>.- Selon (12), $(x,y)\in F \Rightarrow x\in pr_1 F$. Compte tenu des deux implications précédentes, on a donc
$(x,y)\in F \Leftrightarrow (x\in pr_1 F \text{ et } (x,y)\in F) \Leftrightarrow (x\in pr_1 F \text{ et } y = x{:}f)$. C.Q.F.D.

<u>Lemme</u> 3.- Si F est un graphe fonctionnel, les relations $x\in pr_1 F$, $(x,x{:}f)\in F$ sont équivalentes. <u>Corollaire</u>.- $x\in pr_1 F \Rightarrow x{:}f\in pr_2 F$.

<u>Preuve</u>.- Selon (12), $(x,x{:}f)\in F \Rightarrow x\in pr_1 F$. Inversement, compte tenu du lemme 2, $(x,y)\in F \Rightarrow ((x,y)\in F \text{ et } y = x{:}f) \Rightarrow (x,x{:}f)\in F$ selon EI.39 C43.
Alors, EI.34 C31 donne $(\exists y)((x,y)\in F) \Rightarrow (x,x{:}f)\in F$.
Donc $x\in pr_1 F \Leftrightarrow (\exists y)((x,y)\in F) \Rightarrow (x,x{:}f)\in F$. C.Q.F.D. $\Rightarrow x{:}f\in pr_2 F$.

10) <u>Application</u>.- Une application de A dans B est une fonction $f = (A,F,B)$ encore notée $A{:}f \to B$. Les mots "fonction","application" sont donc synonymes.

<u>Corollaire</u>.- L'égalité conditionnelle $x \in pr_1 F \Rightarrow (\{x\}:F = \{x:f\})$ est vraie. Autrement dit, la coupe d'un graphe fonctionnel F suivant un élément x de $pr_1 F$ est l'ensemble dont le seul élément est la valeur d'une application f sur F pour l'élément x. Précisément $f = (pr_1 F, F, Y)$ avec $pr_2 F \subset Y$.

<u>Preuve</u>.- En effet, pour justifier cette égalité conditionnelle il suffit d'établir que $x \in pr_1 F \Rightarrow (y \in \{x\}:F \Leftrightarrow y \in \{x:f\})$, ce qui résulte des équivalences $y \in \{x\}:F \Leftrightarrow (x,y) \in F$, $y \in \{x:f\} \Leftrightarrow y = x:f$ et de l'équivalence conditionnelle en N.B p.10. C.Q.F.D.

<u>Axiome du choix</u>.- L'axiome du choix introduit par Zermelo en 1904 devient une conséquence de l'écriture formelle. Il présente plusieurs formulations dont la suivante que nous aurons lieu d'utiliser pour établir la proposition 8 :

<u>Enoncé</u>.- Si $R\{x,y\}$ est une relation qui admet un graphe G, il existe une application $pr_1 G : f \to pr_2 G$ donnant lieu à l'équivalence :

$(\exists y) R\{x,y\} \Leftrightarrow R\{x, x:f\}$, (Voir ER.20 n°10).

<u>Preuve</u>.- Par hypothèse, R et G satisfont à l'équivalence $R\{x,y\} \Leftrightarrow (x,y) \in G$. Désignons par τ le prétendant de la relation R par rapport à la lettre y, et soit la relation $Q\{x,y\} \equiv (R\{x,y\}$ et $y = \tau)$. Alors $Q\{x,y\} \Rightarrow (x,y) \in G$, aussi Q admet un graphe F soumis à l'équivalence $Q\{x,y\} \Leftrightarrow (x,y) \in F$; il est inclus dans G selon le théorème 3 p.3. On a donc $pr_1 F \subset pr_1 G$, et $pr_2 F \subset pr_2 G$; mais il y a plus car, selon l'interprétation du quantificateur existentiel, on a la suite d'implications :
$x \in pr_1 G \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G) \Leftrightarrow (\exists y) R\{x,y\} \equiv R\{x,\tau\} \Leftrightarrow Q\{x,\tau\} \Leftrightarrow (x,\tau) \in F \Rightarrow x \in pr_1 F$, d'où $pr_1 G \subset pr_1 F$; donc $pr_1 F = pr_1 G$. Evidemment F est fonctionnel car $(x,p) \in F \Leftrightarrow Q\{x,p\} \Rightarrow p = \tau$, d'où $((x,p) \in F$ et $(x,q) \in F) \Rightarrow (p=\tau$ et $q=\tau) \Rightarrow p=q$. Ainsi la correspondance $(pr_1 G, F, pr_2 G)$ est une application f qui permet de compléter la suite précédente : $x \in pr_1 F \Leftrightarrow (x, x:f) \in F \Leftrightarrow Q\{x, x:f\} \Rightarrow R\{x, x:f\}$. Inversement, $R\{x, x:f\} \Rightarrow (\exists y) R\{x,y\}$ selon EI.33 S5.
Il en résulte donc l'équivalence $(\exists y) R\{x,y\} \Leftrightarrow R\{x, x:f\}$ dans laquelle $x:f$ est la valeur de la fonction associée à la relation Q ; elle est appelée "axiome du choix".

<u>Remarque</u>.- Nous venons de voir que l'écriture formelle de Bourbaki introduit d'emblée l'axiome du choix dans sa théorie. Evidemment ce dernier n'introduit celle-ci que partiellement : il engendre les prétendants des seules relations munies d'un graphe.

Précisément dans le contexte de EII.21 n°9 on a de même $(\exists y) R\{u,v,y\} \Leftrightarrow R\{u,v,(u,v):f\}$, etc, et $(\exists y) R\{y\} = R\{f\}$ s'il ne figure qu'une seule lettre dans R, où f joue le rôle de τ.

11) <u>Fonction explicite</u>.- Dans les conditions énoncées par EII.15 C54, la relation $R \equiv (x \in A \text{ et } y = T\{x\})$ admet un graphe F par rapport aux lettres x, y. En effet, l'ensemble B des "termes de la forme T pour $x \in A$" est $B \equiv \{y \mid (\exists x)(x \in A \text{ et } y = T)\}$ d'où $y \in B \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \text{ et } y = T) \equiv (\exists x)R$. Or par définition $R \Rightarrow x \in A$, et selon ce qui précède $R \Rightarrow (\exists x)R \Leftrightarrow y \in B$. Donc $R \Rightarrow (x \in A \text{ et } y \in B) \Leftrightarrow ((x,y) \in A \times B)$. De là, selon EII.9, R admet un graphe F par rapport aux lettres x, y puisque l'assemblage $A \times B$ ne contient ni x ni y. Ses projections sont :

$$\begin{aligned} pr_1 F &= \{x \mid (\exists y)((x,y) \in F)\} = \{x \mid (\exists y)(x \in A \text{ et } y = T)\} \\ &= \{x \mid x \in A \text{ et } (\exists y)(y = T)\} = \{x \mid x \in A\} = A. \qquad \text{F.B p 24.} \\ pr_2 F &= \{y \mid (\exists x)((x,y) \in F)\} = \{y \mid (\exists x)(x \in A \text{ et } y = T)\} = B. \end{aligned}$$

D'autre part la correspondance (A,F,B) est bien une fonction en raison des équivalences $(x,y) \in F \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y = T)$, $(x,y') \in F \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y' = T)$ par lesquelles $((x,y) \in F \text{ et } (x,y') \in F) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y = T \text{ et } y' = T) \Rightarrow (y = y')$, ce qui, à l'appui du théorème précédent, montre que le graphe F est fonctionnel.

Enfin, selon le lemme 2 p.10, $(x,y) \in F \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y = x:f)$ est vraie, donc aussi $(x \in A \text{ et } y = T\{x\}) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } y = x:f)$, puis la substitution $(x:f \mid y)$ par laquelle $(x \in A \text{ et } x:f = T\{x\}) \Leftrightarrow x \in A$. Ainsi, pour tout $x \in A$, $x:f = T\{x\}$.

12) <u>Composée de correspondances</u>.- Soient $f = (X,F,Y)$, $g = (V,G,W)$ deux correspondances. La composée $f \circ g$ de ces correspondances est le district $(X, F \circ G, W)$.

<u>Théorème</u> 13.- La composée de deux correspondances est une correspondance.

<u>Preuve</u>.- Par hypothèse $F \subset X \times Y$, $G \subset V \times W$
D'où, conformément au théorème 1, $pr_1 F \subset X$, $pr_2 G \subset W$.
D'ailleurs les exercices 1) et 2) p.8 donnent

$$pr_1 F \circ G \subset pr_1 F \quad , \quad pr_2 F \circ G \subset pr_2 G$$

D'où, selon le théorème 1, $F \circ G \subset pr_1 F \circ G \times pr_2 F \circ G \subset pr_1 F \times pr_2 G \subset X \times W$, les deux dernières inclusions résultant de EII.8 P2. C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> 14.- La correspondance réciproque de $f \circ g$ est la composée $\overset{-1}{g} \circ \overset{-1}{f}$ des correspondances $\overset{-1}{g}$, $\overset{-1}{f}$.

<u>Preuve</u>.- Selon la définition 6) la correspondance réciproque de $f \circ g$ est $(W, (F \circ G)^{-1}, X) = (W, \overset{-1}{G} \circ \overset{-1}{F}, X)$ selon EII.12 P3.
De même, $\overset{-1}{g} = (W, \overset{-1}{G}, V)$, $\overset{-1}{f} = (Y, \overset{-1}{F}, X)$, et suivant la définition 12) $\overset{-1}{g} \circ \overset{-1}{f} = (W, \overset{-1}{G} \circ \overset{-1}{F}, X)$. Comparant ces deux résultats, on a $(f \circ g)^{-1} = \overset{-1}{g} \circ \overset{-1}{f}$ ∎

<u>Proposition</u> 6.- Soient $f = (X,F,Y)$, $g = (V,G,W)$ deux fonctions telles que l'ensemble d'arrivée de f soit inclus dans l'ensemble de départ de g, c'est à dire $Y \subset V$, alors $f \circ g$ est une application de X dans W. De plus, pour tout x élément de X, l'égalité $x:f\circ g = (x:f):g$ est vraie.

<u>Preuve</u>.- Selon le théorème 11, la composée de deux fonctions $f = (X,F,Y)$ et $g = (V,G,W)$ est la correspondance $f\circ g = (X, F\circ G, W)$. Pour établir qu'elle s'identifie à une fonction, il convient de prouver l'égalité $pr_1 F\circ G = X$ et l'implication $((x,p) \in F\circ G$ et $(x,q) \in F\circ G) \Rightarrow p = q$, objet du théorème 11.

L'égalité résulte comme suit de deux relations d'inclusion :
De la loi de composition des graphes, $pr_1 F\circ G \subset pr_1 F$; et de ce que f est une fonction, $pr_1 F = X$; d'où $pr_1 F\circ G \subset X$. L'inclusion inverse résultera de l'implication $x \in X \Rightarrow (\exists z)((x,z) \in F\circ G)$ (qu'il y a lieu d'établir sous l'égide de la définition 7) d'un graphe fonctionnel).
Tenant compte des égalités $X = pr_1 F$, $V = pr_1 G$, et des inclusions $pr_2 F \subset Y \subset V = pr_1 G$, on a $y \in pr_2 F \Rightarrow y \in pr_1 G$. Ceci étant posé, selon (13), $(x,y) \in F \Rightarrow ((x,y) \in F$ et $y \in pr_2 F) \Rightarrow ((x,y) \in F$ et $y \in pr_1 G)$ · donc selon (12), $x \in X \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in F) \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in F$ et $y \in pr_1 G)$ qui de même est équivalente à $(\exists y)((x,y) \in F$ et $(\exists z)((y,z) \in G))$.

D'où $\quad x \in X \Rightarrow (\exists z)(\exists y)((x,y) \in F$ et $(y,z) \in G)$,
soit $\quad x \in X \Rightarrow (\exists z)((x,z) \in F\circ G)$. (C.Q.F.D). Alors, comme précédemment selon (12), $x \in X \Rightarrow (\exists z)((x,z) \in F\circ G) \Leftrightarrow x \in pr_1 F\circ G$. D'où $X \subset pr_1 F\circ G$. C.Q.F.D.

La preuve du théorème 11 résulte de la proposition : Si x ne figure pas dans B et si y ne figure pas dans A, les relations $((\exists x)A$ et $(\exists y)B)$, $(\exists x)(\exists y)(A$ et $B)$ sont équivalentes. Elle complète l'exercice 5) en EI.48, et se justifie par EI.34 C31 et EI.35 C33.
Ainsi de $(x,p) \in F\circ G \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in F$ et $(y,p) \in G)$
et de $\quad (x,q) \in F\circ G \Leftrightarrow (\exists z)((x,z) \in F$ et $(z,q) \in G)$, on a donc
$((x,p) \in F\circ G$ et $(x,q) \in F\circ G) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)((x,y) \in F$ et $(x,z) \in F$ et $(y,p) \in G$ et $(z,q) \in G)$

$\Rightarrow (\exists y)(\exists z)(y = z$ et $(y,p) \in G$ et $(z,q) \in G)$ puisque F est fonctionnel,
$\Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)(y = z$ et $(y,p) \in G$ et $(y,q) \in G)$ selon EI.39 C43,
$\Rightarrow (\exists y)(\exists z)(y = z$ et $p = q)$ puisque G est fonctionnel,
$\Rightarrow p = q$ selon EI.35 C33. C.Q.F.D.

D'autre part, puisque la relation $(x,w) \in F\circ G$ est fonctionnelle en w pour tout x élément de X, selon le lemme 2 p.10, elle donne lieu à l'équivalence :

$(x \in X \text{ et } w = x:f{\circ}g) \Leftrightarrow (x,w) \in F{\circ}G.$

Or, p.7, $(x,w) \in F{\circ}G \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in F \text{ et } (y,w) \quad G)$, et comme ci-dessus,

$(x,y) \in F \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } y = x:f \text{ et } y \in pr_2F)$,

$(y \in pr_2F \text{ et } (y,w) \in G) \Leftrightarrow (y \in pr_2F \text{ et } w = y:g)$ avec $pr_2F \subset V$.

Ces relations conduident à l'équivalence :

$(x \in X \text{ et } w = x:f{\circ}g) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in X \text{ et } y = x:f \text{ et } y \in pr_2F \text{ et } w = y:g)$

dont le second membre est équivalent, selon le lemme 2 p.10, à la relation $(\exists y)(w = y:g \text{ et } (x,y) \in F)$ elle-même équivalente, selon EI.42 C47, à l'égalité $w = (\tau_y(x,y) \in F):g \equiv w = (x:f):g$; ce qui justifie la seconde partie du théorème après la substitution $(x:f{\circ}g|w)$ dans l'équivalence qui en résulte. C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> 15.- Soit f une application de A dans B. Pour toute partie X de A, $X \subset (X:F):\overline{F}^1$; et pour toute partie Y de B, $(Y:\overline{F}^1):F \subset Y$.

<u>Preuve</u>.- L'exercice 3 p.8 établit la première inclusion. La seconde s'établit comme suit : Concernant l'image d'un ensemble par un graphe, p.5, on a les équivalences suivantes : $y \in (Y:\overline{F}^1):F \Leftrightarrow (\exists x)(x \in Y:\overline{F}^1 \text{ et } (x,y) \in F)$

$\Leftrightarrow (\exists x)((\exists z)(z \in Y \text{ et } (z,x) \in \overline{F}^1) \text{ et } (x,y) \in F)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists z)(z \in Y \text{ et } z = x:f \text{ et } y = x:f \text{ et } x \in A)$ en raison du lemme 2 p.10,

$\Rightarrow (\exists z)(z \in Y \text{ et } y = z) \Rightarrow y \in Y$. C.Q.F.D.

13) <u>Injection</u>.- Une application $A:f \rightarrow B$ est une injection si deux éléments distincts de A ont des images distinctes par f ; c'est à dire lorsque l'une des deux implications doubles équivalentes

$(x' \in A \text{ et } x'' \in A) \Rightarrow (x' \neq x'' \Rightarrow x':f \neq x'':f)$

$(x' \in A \text{ et } x'' \in A) \Rightarrow (x':f = x'':f \Rightarrow x' = x'')$ est vraie.

<u>Théorème</u> 16.- Si f est une injection de A dans B, pour toute partie X de A, $(X:F):\overline{F}^1 = X$ et réciproquement.

<u>Preuve</u>.- Pour justifier la première partie de ce théorème, il suffit, en égard au théorème 15, d'établir l'inclusion $(X:F):\overline{F}^1 \subset X$. Or, p.5, de l'image d'un ensemble par un graphe, $x \in (X:F):\overline{F}^1 \Leftrightarrow (\exists y)(y \in X:F \text{ et } (y,x) \in \overline{F}^1)$

$\Leftrightarrow (\exists y)((\exists z)(z \in X \text{ et } (z,y) \in F) \text{ et } (x,y) \in F)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)(z \in X \text{ et } y = z:f \text{ et } y = x:f \text{ et } x \in A)$ selon (12) et le lemme 2,

$\Leftrightarrow (\exists z)(z \in X \text{ et } x:f = z:f \text{ et } x \in A)$ car $a = b \Leftrightarrow (\exists y)(a = y \text{ et } b = y)$,

$\Rightarrow (\exists z)(z \in X \text{ et } x = z) \Rightarrow x \in X$. C.Q.F.D.

Réciproquement, si pour toute partie X de A, $(X:F):\overline{F}^1 = X$, alors l'implication $x \in (X:F):\overline{F}^1 \Rightarrow x \in X$ est vraie, et compte tenu de la dernière équivalence précédente, l'implication $(\exists z)(z \in X \text{ et } x:f = z:f \text{ et } x \in A) \Rightarrow x \in X$ l'est aussi. D'où, selon EI.33 S5, $(z \in X \text{ et } x:f = z:f \text{ et } x \in A) \Rightarrow x \in X$. Alors, selon EI.27 C14, dans l'hypothèse $(x \in A \text{ et } z \in A \text{ et } x:f = z:f)$ on a

$(\forall X)((z \in A \text{ et } z \in X) \Rightarrow x \in X)$ est un théorème de $\mathcal{T}'$, d'où aussi, par implications, $(z \in A \text{ et } z \in \{z\}) \Rightarrow x \in \{z\})$, donc $(z \in A \Rightarrow x = z)$. C.Q.F.D.

14) <u>Surjection</u>.- Une fonction $f = (A,F,B)$ est une surjection lorsque $A{:}F = B$, soit $A{:}f = B$; donc, selon le théorème 6 p.5, si $B = pr_1F{:}F = pr_2F$.

<u>Lemme</u> 4. Si F est un graphe fonctionnel, les relations $Y \subset pr_2F$, $Y = Y{:}\overline{F}^{1}{:}F$ s'équivalent.

<u>Preuve</u>.- Si l'inclusion $Y \subset pr_2F$ est vraie, alors, en posant $A \equiv pr_1F$, $y \in Y \Rightarrow y \in pr_2F \Leftrightarrow (\exists x)((x,y) \in F) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \text{ et } y = x{:}f)$. D'où $y \in Y \Rightarrow (\exists x)(y \in Y \text{ et } y = x{:}f \text{ et } x \in A) \Rightarrow (\exists x)(\exists z)(z \in Y \text{ et } z = x{:}f \text{ et } y = x{:}f \text{ et } x \in A)$ $\Rightarrow y \in Y{:}\overline{F}^{1}{:}F$, selon la preuve du théorème 15. Ainsi $Y \subset pr_2F \Rightarrow Y \subset Y{:}\overline{F}^{1}{:}F$, et compte tenu de ce théorème, l'implication $Y \subset pr_2F \Rightarrow Y = Y{:}\overline{F}^{1}{:}F$ est vraie.

Inversement, si l'égalité $Y = Y{:}\overline{F}^{1}{:}F$ est vraie, alors $y \in Y \Leftrightarrow y \in Y{:}\overline{F}^{1}{:}F \Leftrightarrow (\exists x)(x \in Y{:}\overline{F}^{1} \text{ et } (x,y) \in F) \Rightarrow (\exists x)((x,y) \in F) \Leftrightarrow y \in pr_2F$. Donc $Y = Y{:}\overline{F}^{1}{:}F \Rightarrow Y \subset pr_2F$ est vraie. C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> 17.- Soit $f = (A,F,B)$ une fonction. Si f est surjective, pour toute partie Y de B, $Y{:}\overline{F}^{1}{:}F = Y$, et réciproquement.

<u>Preuve</u>.- Si f est surjective, $B = pr_2F$; alors le lemme précédent donne l'équivalence : $Y \subset B \Leftrightarrow Y = Y{:}\overline{F}^{1}{:}F$ qui prouve la première partie du théorème. Réciproquement, si l'équivalence précédente est vraie, on a les équivalences $Y \subset B \Leftrightarrow Y = Y{:}\overline{F}^{1}{:}F \Leftrightarrow Y \subset pr_2F$, d'où $B \subset B \Leftrightarrow B = B{:}\overline{F}^{1}{:}F \Leftrightarrow B \subset pr_2F$; de même, $Y \subset pr_2F \Leftrightarrow Y = Y{:}\overline{F}^{1}{:}F \Leftrightarrow Y \subset B$, d'où $pr_2F \subset pr_2F \Leftrightarrow pr_2F = pr_2F{:}\overline{F}^{1}{:}F$ $\Leftrightarrow pr_2F \subset B$. Il en résulte que $B = pr_2F$, donc que f est surjective. C.Q.F.D.

15) <u>Bijection</u>.- Une bijection est une application injective et surjective.

<u>Proposition</u> 7.- Soit f une application de A dans B. Pour que la correspondance $\overline{f}^{1}$ soit une fonction, il faut et il suffit que f soit bijective.

<u>Preuve</u>.- Si $\overline{f}^{1}$ est une fonction, les égalités $B = pr_1\overline{F}^{1} = pr_2F = pr_1F{:}F = A{:}F$ montrent que f est surjective. Pour établir qu'elle est injective, il faut justifier l'implication double $(x \in A \text{ et } y \in A) \Rightarrow (x{:}f = y{:}f \Rightarrow x = y)$, soit l'implication $(x \in pr_1F \text{ et } y \in pr_1F \text{ et } x{:}f = y{:}f) \Rightarrow x = y$.
Or, compte tenu du lemme 3, $x \in pr_1F \Leftrightarrow (x, x{:}f) \in F$, on a $(x \in pr_1F \text{ et } y \in pr_1F \text{ et } x{:}f = y{:}f) \Leftrightarrow ((x{:}f,x) \in \overline{F}^{1} \text{ et } (y{:}f,y) \in \overline{F}^{1} \text{ et } x{:}f = y{:}f)$ $\Rightarrow ((x{:}f,x) \in \overline{F}^{1} \text{ et } (x{:}f,y) \in \overline{F}^{1}) \Rightarrow x = y$, la dernière implication exprimant que le graphe de $\overline{f}^{1}$ est fonctionnel. C.Q.F.D.

Réciproquement, si f est bijective, la correspondance $\overline{f}^{1} = (B,\overline{F}^{1},A)$ admet les deux propriétés d'une fonction, à savoir : $pr_1\overline{F}^{1} = B$ car $pr_1\overline{F}^{1} = pr_2F = pr_1F{:}F = A{:}F = B$, puisque f est surjective ; d'autre part, exprimant que f est injective en tenant compte du lemme 3, on a comme ci-dessus $((x'{:}f,x') \in \overline{F}^{1} \text{ et } (x'{:}f,x'') \in \overline{F}^{1} \text{ et } x'{:}f = x''{:}f) \Rightarrow x' = x''$.

Or, selon EI.42 C47 où $R\{x',y\} = (x',y) \in F$ est fonctionnelle en y et $\tau_y R\{x',y\} = x':f$, l'antécédent de l'implication précédente est équivalent à $(\exists y)(R\{x',y\}$ et $(y,x') \in \overset{-1}{F}$ et $(y,x'') \in \overset{-1}{F}$ et $y = x'':f)$; en outre $(x',y) \in F \Leftrightarrow (y,x') \in \overset{-1}{F}$, $(y,x'') \in \overset{-1}{F} \Leftrightarrow (x'',y) \in F \Rightarrow y = x'':f$. Alors, $((y,x') \in \overset{-1}{F}$ et $(y,x'') \in \overset{-1}{F}) \Rightarrow (\exists y)((y,x') \in \overset{-1}{F}$ et $(y,x'') \in \overset{-1}{F}) \Rightarrow x'=x''$. CQFD.

La preuve que $\overset{-1}{F}$ est fonctionnel résulte plus directement des implications $((y,x') \in \overset{-1}{F}$ et $(y,x'') \in \overset{-1}{F}) \Leftrightarrow ((x',y) \in F$ et $(x'',y) \in F) \Rightarrow$ $(x' \in A$ et $x'' \in A$ et $y = x':f$ et $y = x'':f) \Rightarrow (x' \in A$ et $x'' \in A$ et $x':f = x'':f)$ $\Rightarrow x' = x''$ puisque f est injective. C.Q.F.D.

16) <u>Application réciproque</u>.- En égard à la proposition 7, la correspondance réciproque $\overset{-1}{f}$ d'une bijection f est appelée application réciproque, pour bien souligner que dans ces conditions $\overset{-1}{f}$ est une application.

<u>Théorème</u> 18.- Soit $f = (A,F,B)$ une bijection, alors $\overset{-1}{f}$ est bijective ; en outre $f \circ \overset{-1}{f}$, $\overset{-1}{f} \circ f$ sont les applications identiques de A, B respectivement.

<u>Preuve</u>.- Selon la proposition 7, $\overset{-1}{f} = (B,\overset{-1}{F},A)$ est une fonction g telle que $\overset{-1}{g} = (A,F,B)$ est la fonction f, donc g est bijective d'après cette même proposition, alors $\overset{-1}{f} = g$ est bijective. C.Q.F.D.

En outre les graphes $F \circ \overset{-1}{F}$, $\overset{-1}{F} \circ F$ sont des <u>diagonales</u> (voir EII.13) car $(x,z) \in F \circ \overset{-1}{F} \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in F$ et $(y,z) \in \overset{-1}{F}) \Leftrightarrow (\exists y)((y,x) \in \overset{-1}{F}$ et $(y,z) \in \overset{-1}{F})$ $\Rightarrow x = z$ puisque le graphe $\overset{-1}{F}$ est fonctionnel, et de même $(x,z) \in \overset{-1}{F} \circ F \Rightarrow x=z$ puisque F est fonctionnel. Alors

$$f \circ \overset{-1}{f} = (A,F,B) \circ (B,\overset{-1}{F},A) = (A,F \circ \overset{-1}{F},A) = (A,\Delta_A,A) = \mathrm{Id}_A$$
$$\overset{-1}{f} \circ f = (B,\overset{-1}{F},A) \circ (A,F,B) = (B,\overset{-1}{F} \circ F,B) = (B,\Delta_B,B) = \mathrm{Id}_B \ .$$
C.Q.F.D.

<u>Dégénérescences</u>.

1) L'ensemble vide $\emptyset$ est un graphe fonctionnel car $z \in \emptyset$, $(x,p) \in \emptyset$ sont des relations fausses.

2) Si dans le triplet d'une fonction (X,F,Y) un des termes est égal à $\emptyset$, en raison du corollaire 1 p.6, on a les égalités

$$(\emptyset,F,Y) = (X,\emptyset,Y) = (\emptyset,\emptyset,Y)$$
$$(X,F,\emptyset) = (\emptyset,\emptyset,\emptyset) \equiv \text{fonction vide} \equiv (\emptyset,\emptyset \times \emptyset,\emptyset) = \mathrm{Id}_\emptyset \ .$$

3) <u>Critique de EII.18 P8</u>.- Soit $f = (A,F,B)$ une fonction, et $A = \emptyset$; alors $f = (\emptyset,\emptyset,B)$, elle est injective car $(x' \in \emptyset$ et $x'' \in \emptyset)$ est une relation fausse. Si $r = (B,R,C)$, alors $f \circ r = (\emptyset,\emptyset \circ R,C) = (\emptyset,\emptyset,C)$. En outre si $C = \emptyset$, r est la fonction vide et $f \circ r = \mathrm{Id}_\emptyset$.

16) <u>Section, traction</u>.- Soit Id l'application identique, une section s, une traction t, sont des applications qui satisfont aux relations $(\exists q)(s\circ q = Id)$, $(\exists p)(p\circ t = Id)$ respectivement. Pratiquement on est conduit à la définition réaliste suivante :

<u>Définition</u>.- Si s, t sont deux applications telles que $s\circ t = Id$, alors s est une section associée à t et t est une traction associée à s.

En effet, $(s\circ t = Id) \Rightarrow ((\exists q)(s\circ q = Id)$ et $(\exists p)(p\circ t = Id))$.

Ainsi l'assemblage $\tau(s\circ\square = Id)$ est une traction associée à s si $s\circ\tau(s\circ\square = Id) = Id$; de même $\tau(\square\circ t = Id)$ est une section associée à t si $\tau(\square\circ t = Id)\circ t = Id$.

<u>Proposition</u> 8.- Elle énonce les deux équivalences :

$(\exists s)(s\circ f = Id) \Leftrightarrow$ (f est surjective) , $(\exists t)(f\circ t = Id) \Leftrightarrow$ (f est injective)

<u>Preuve</u>.- L'écriture précédente est très abrégée, il faut entendre que

$(\exists s)(X{:}f \to Y,\ Y{:}s \to X,\ s\circ f = Id_Y) \Leftrightarrow (X{:}f \to Y$ est surjective$)$

$(\exists t)(X{:}f \to Y,\ Y{:}t \to X,\ f\circ t = Id_X) \Leftrightarrow (X{:}f \to Y$ est injective$)$.

Il serait même plus correcte d'écrire : Si (U,G,V) désigne une application $U{:}g \to V$ de graphe G tel que $pr_1 G = U$ et G est fonctionnel, alors

$(\exists S)((Y,S,X)\circ(X,F,Y) = (Y,\Delta_Y,Y)) \Leftrightarrow ((Y,F,X)$ est surjective$)$

$(\exists R)((X,F,Y)\circ(Y,R,X) = (X,\Delta_X,X)) \Leftrightarrow ((Y,F,X)$ est injective$)$.

On voit ici que les notations Id_X, Id_Y sont redondantes et peuvent s'abréger en Id sans risque de confusion.

Décomposant chaque équivalence en implications, on a de gauche à droite :

a) Si $(\exists s)(s\circ f = Id)$ est vraie, $(\forall y)(y\in Y \Rightarrow y{:}\tau{:}f = y)$, donc f est surjective. (Plus précisément $Y = Y{:}\tau{:}f \subset A{:}f \subset Y$ d'où $A{:}f = Y$).

b) Si $(\exists r)(f\circ r = Id)$ est vraie, $x\in X \Rightarrow x{:}f{:}\tau = x$,

alors $(x'\in X$ et $x''\in X) \Rightarrow (x'{:}f{:}\tau = x'$ et $x''{:}f{:}\tau = x'')$

puis $(x'\in X$ et $x''\in X$ et $x'{:}f = x''{:}f) \Rightarrow (x' = x'')$, donc f est injective ;

de droite à gauche :

c) Si $X{:}f \to Y$ est surjective, $pr_2 F = Y$ et l'on a la suite d'équivalences : $y\in Y \Leftrightarrow y\in pr_2 F \Leftrightarrow (\exists x)((x,y)\in F) \Leftrightarrow (\exists x)(x\in X$ et $y = x{:}f)$. Or la relation $R\{y,x\} \equiv (x\in X$ et $y = x{:}f)$ admet le graphe $\overline{F}^1$ formé de couples (y,x) ; alors, selon l'axiome de choix p.11, il existe une application s telle que $pr_1\overline{F}^1{:}s \to pr_2\overline{F}^1$, c'est à dire $Y{:}s \to X$ donnant lieu à l'équivalence :

$$(\exists x)(x\in X \text{ et } y = x{:}f) \Leftrightarrow (y{:}s\in X \text{ et } y = y{:}s{:}f).$$

Par conséquent $y\in Y \Leftrightarrow (y{:}s\in X$ et $y = y{:}s{:}f)$, d'où $s\circ f = Id_Y$. C.Q.F.D.

d) Si f est injective, elle est bijective sur $X:f$ où elle admet une fonction inverse $\overline{f}^1$, que l'on va prolonger à Y, si X n'est pas vide, en une fonction t définie par ses valeurs :

$$y:t = \begin{cases} y:\overline{f}^1 & \text{si } y \in X:f \\ a & \text{si } y \in Y - X:f \quad \text{avec } a \in X \ ; \end{cases}$$

alors $x \in X \Rightarrow (x:f \in X:f \text{ et } x:f:t = x:f:\overline{f}^1 = x)$, c'est à dire $f\circ t = Id$.
Si $X = \emptyset$, $t = (\emptyset,\emptyset,\emptyset)$, (Voir Dégénérescences p.16).

Bourbaki justifie strictement ce qui précède comme suit :
Soit D la disjonction $(x \in X \text{ et } y = x:f)$ ou $(x = a \text{ et } y \in Y - X:f) \equiv P$ ou Q (qui sera équivalente à l'égalité $x = y:t$) ; alors D admet un graphe G car
$P \Rightarrow x \in X$, $Q \Rightarrow x \in X$, d'où $D \equiv (P \text{ ou } Q) \Rightarrow x \in X$,
$P \Rightarrow y \in X:f$, $Q \Rightarrow y \in Y - X:f \Leftrightarrow (y \in Y \text{ et } y \notin X:f)$, d'où
$D \equiv (P \text{ ou } Q) \Rightarrow (y \in X:f \text{ ou } (y \in Y \text{ et } y \notin X:f) \Leftrightarrow (y \in X:f \text{ ou } y \in Y) \Leftrightarrow y \in Y$
vu que $X:f \subset Y$. Ainsi $D \Rightarrow (x \in X \text{ et } y \in Y) \Leftrightarrow (x,y) \in X \times Y$, et par conséquent admet un graphe G en (y,x) avec les propriétés suivantes :
1) $pr_1 G = Y$ car $y \in pr_1 G \Leftrightarrow (\exists x)D \Leftrightarrow ((\exists x)P \text{ ou } (\exists x)Q)$
$\Leftrightarrow y \in X:f$ ou $((\exists x)(x = a) \text{ et } y \in Y - X:f) \Leftrightarrow y \in X:f$ ou $(y \in Y \text{ et } y \notin X:f)$
$\Leftrightarrow y \in Y$ comme précédemment, et par suite $pr_1 G = Y$.
2) G est fonctionnel en x, car

$P \Rightarrow (y \in X:f \text{ et } y = x:f) \quad ; \quad Q \equiv (y \in Y - X:f \text{ et } x = a)$, alors
$((y,x') \in G \text{ et } (y,x'') \in G) \Leftrightarrow ((P' \text{ ou } Q') \text{ et } (P'' \text{ ou } Q''))$
$\Leftrightarrow ((P' \text{ et } P'') \text{ ou } (Q' \text{ et } Q'') \text{ ou } y \in \emptyset) = (P' \text{ et } P'') \text{ ou } (Q' \text{ et } Q'')$

$\Rightarrow (y = x':f = x'':f) \text{ ou } (a = x' = x'') \Rightarrow x' = x'' \text{ ou } x' = x'' \Rightarrow x' = x''$
puisque f est injective.
Il en résulte que la correspondance (Y,G,X) est une fonction telle que $(X,F,Y)\circ(Y,G,X) = (X,F\circ G,X)$ et dont le graphe $F\circ G$ est la diagonale de $X \times X$ car $(x',x'') \in F\circ G \Leftrightarrow (\exists y)((x',y) \in F \text{ et } (y,x'') \in G) \Rightarrow (\exists y)(P' \text{ et } (P'' \text{ ou } Q''))$
$= (\exists y)(P' \text{ et } P'' \text{ ou } y \in \emptyset) \Rightarrow (\exists y)(P' \text{ et } P'') \Rightarrow x' = x''$ puisque f est injective.

C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u>.- Une section est injective, une traction est surjective.
<u>Preuve</u>.- Soient s, t deux applications associées par la relation $s\circ t = Id$; alors, selon EI.33 S5, on a

$(s\circ t = Id) \Rightarrow (\exists t)(s\circ t = Id) \Leftrightarrow (s \text{ est injective})$,
$(s\circ t = Id) = (\exists s)(s\circ t = Id) \Leftrightarrow (t \text{ est surjective})$. C.Q.F.D.

En EII.19, le théorème 1 consiste en six corollaires relatifs à la proposition 8 et de l'associativité des fonctions. Le premier de ceux-ci s'énonce plus généralement :

<u>Théorème</u> 19 - La composée de deux injections $f = (X,F,Y)$, $g = (V,G,W)$ telles que $Y \subset V$ est une injection.

<u>Preuve</u>.- $f{\circ}g$ est une application de X dans W et $x{:}f{\circ}g = x{:}f{:}g$ pour tout $x \in X$. Il reste à établir l'implication double

$$(x' \in X \text{ et } x'' \in X) \Rightarrow (x'{:}f{\circ}g = x''{:}f{\circ}g \Rightarrow x' = x'')$$

Or, $(x' \in X \text{ et } x'' \in X) \Rightarrow (x'{:}f \in V \text{ et } x''{:}f \in V \text{ et } (x'{:}f = x''{:}f \Rightarrow x' = x''))$

de même, $(x'{:}f \in V \text{ et } x''{:}f \in V) \Rightarrow (x'{:}f{:}g = x''{:}f{:}g \Rightarrow x'{:}f = x''{:}f)$

D'où

$(x' \in X \text{ et } x'' \in X) \Rightarrow ((x'{:}f{:}g = x''{:}f{:}g \Rightarrow x'{:}f = x''{:}f) \text{ et } (x'{:}f=x''{:}f \Rightarrow x'=x''))$

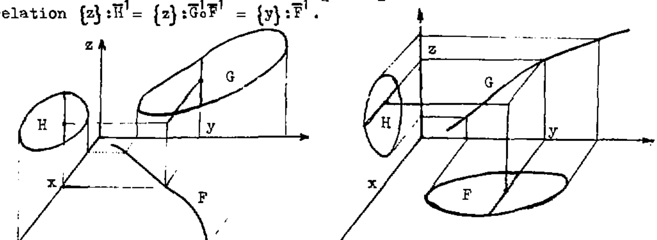
Donc $(x' \in X \text{ et } x'' \in X) \Rightarrow (x'{:}f{:}g = x''{:}f{:}g \Rightarrow x' = x'')$, ce qui conduit à l'implication double annoncée, compte tenu de l'égalité $x{:}f{:}g = x{:}f{\circ}g$ pour tout x élément de X.

N.B. Les différents objets considérés : graphes, correspondances, fonctions munis d'une loi de composition associative engendrent des <u>monoïdes</u> qui, dans la généralité, n'admettent pas de régle de simplification à droite ou a gauche. /3/p.23 et 35.

17) <u>Le problème de décomposition</u>.- Nous avons appris à former le composé de deux graphes, la composée de deux correspondances, de deux fonctions de deux injections de deux surjections ; ces compositions soulèvent des questions réciproques appelées problèmes de décomposition. Par exemple, étant donné un graphe H, existe-t'il deux graphes F, G tels que $H = F{\circ}G$? La réponse est affirmative sous l'une des deux conditions triviales suivantes, et qui d'ailleurs ne font pas progresser sérieusement la question :

a) F est une injection telle que $pr_1 H \subset pr_1 F$, alors G est défini par la relation $\{x\}{:}H = \{x\}{:}F{\circ}G = \{y\}{:}G$;

b) G est une injection telle que $pr_2 H \subset pr_2 G$, alors F est défini par la relation $\{z\}{:}\overline{H}^1 = \{z\}{:}\overline{G}^1{\circ}\overline{F}^1 = \{y\}{:}\overline{F}^1$.



a) b)

L'étude de la décomposition se poursuit par les considérations suivantes relatives aux deux réciproques de la proposition 6 p.13 :

a) Soient deux correspondances (X,F,Y), (X,G,Z) ayant le même ensemble de départ X ; on peut leur associer le district (Y,H,Z) avec $H = \overline{F}^{1} \circ G$ qui en fait une correspondance car
$pr_1 H \subset pr_1 \overline{F}^{1} = pr_2 F \subset Y$ et $pr_2 H \subset pr_2 G \subset Z$, d'où $H \subset pr_1 H \times pr_2 H \subset Y \times Z$.
Evidemment $(y,z) \in H \Leftrightarrow (\exists x)((x,y) \in F \text{ et } (x,z) \in G)$.
Lorsque (X,F,Y), (X,G,Z) sont des fonctions f, g, selon le lemme 2 p.10,

$$(x,y) \in F \Leftrightarrow (x \in pr_1 F \text{ et } y = x{:}f),\quad (x,z) \in G \Leftrightarrow (x \in pr_1 G \text{ et } z = x{:}g) ;$$

alors $((x,y) \in F \text{ et } (x,z) \in G) \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } y = x{:}f \text{ et } z = x{:}g)$.
Ceci nous conduit à la démonstration de la première réciproque :

<u>Proposition</u> 9 a).- Soient deux applications $f = (X,F,Y)$ et $g = (X,G,Z)$; les conditions suivantes sont équivalentes :
a) Il existe une application h telle que $Y{:}h \to Z$ et $g = f \circ h$.
b) Quels que soient x', x'' éléments de X, $(x'{:}f = x''{:}f) \Rightarrow (x'{:}g = x''{:}g)$

En outre h est unique si et seulement si f est surjective, et injective si de plus b) est une équivalence. Enfin b) est une équivalence lorsque h est injective. (Voir p 26).
<u>Preuves</u>.- Si $g = f \circ h$ on a l'implication b) car

$$(x' \in X \text{ et } x'' \in X \text{ et } x'{:}f = x''{:}f) \Rightarrow (x'{:}g = x'{:}f{:}h = x''{:}f{:}h = x''{:}g)$$

Inversement, soit $H = \overline{F}^{1} \circ G$, la correspondance $(pr_2 F, H, Z)$ admet les propriétés d'une fonction ; en effet,
1) $pr_1 H = pr_2 F$, car, compte tenu des égalités $X = pr_1 F = pr_1 G$, on a les équivalences $y \in pr_2 F \Leftrightarrow (\exists x)((x,y) \in F) \Leftrightarrow (\exists x)((x,y) \in F \text{ et } x \in pr_1 F) \Leftrightarrow$
$(\exists x)((y,x) \in \overline{F}^{1} \text{ et } (\exists z)((x,z) \in G)) \Leftrightarrow (\exists z)((y,z) \in \overline{F}^{1} \circ G) \Leftrightarrow y \in pr_1 H$. C.Q.F.D.

2) Sous la condition b) le graphe H est fonctionnel sur sa première projection car $((y,p) \in H \text{ et } (y,q) \in H) \Leftrightarrow$
$((\exists x')(x' \in X \text{ et } y = x'{:}f \text{ et } p = x'{:}g) \text{ et } (\exists x'')(x'' \in X \text{ et } y = x''{:}f \text{ et } q = x''{:}g))$
$\Rightarrow (\exists x')(\exists x'')(x' \in X \text{ et } x'' \in X \text{ et } x'{:}f = x''{:}f \text{ et } p = x'{:}g \text{ et } q = x''{:}g) \Rightarrow p = q$
cette dernière implication tenant compte de l'implication b).
Par conséquent si f est surjective, $Y = pr_2 F = pr_1 H$ et la correspondance (Y,H,Z) est une fonction h. Alors, de $X = pr_1 F = pr_1 G$ et du lemme 3 p.10, on a $x \in X \Leftrightarrow ((x, x{:}f) \in F \text{ et } (x, x{:}g) \in G) \Rightarrow (\exists x)((x, x{:}f) \in F \text{ et } (x, x{:}g) \in G)$

$$\Leftrightarrow (x{:}f, x{:}g) \in H, \text{ par suite } x{:}g = x{:}f{:}h, \text{ d'où } g = f \circ h.$$

L'application h est unique comme identique à la correspondance (Y,H,Z) initialement considérée.

D'ailleurs en se rapportant aux propriétés des sections, pour toute section s associée à f on a $s \circ f = Id$. Alors il est naturel de poser $h = s \circ g$, et l'on vérifie que pour tout $x \in X$ on a $x{:}f = x{:}f \circ s{:}f \equiv x''{:}f$; par conséquent l'implication b) donne $x{:}g = x{:}f \circ s{:}g$, c'est à dire $x{:}g = x{:}f \circ h$, d'où $g = f \circ h$. C.Q.F.D.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, shift left, "f"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[ur, shift left, "s"] \arrow[rr, "h"] & & Z \end{tikzcd}$$

De même h est unique car s'il était possible d'écrire $g = f\circ h_1 = f\circ h_2$, on aurait $s\circ g = s\circ f\circ h_1 = s\circ f\circ h_2$ soit $s\circ g = h_1 = h_2$ puisque $s\circ f = \mathrm{Id}$. C.Q.F.D.

Enfin si f n'est pas surjective et si Z n'est pas vide, il est possible de prolonger la fonction $h = (pr_2F, H, Z)$ sur Y en une fonction k en posant par exemple
$$y:k = \begin{cases} y:h & \text{si } y \in pr_2F \\ e & \text{si } y \in Y - pr_2F \quad \text{avec } e \in Z \end{cases}$$
alors, pour tout $x \in X$, on a $x:f\circ k = x:f:k = x:f:h = x:g$, d'où $f\circ k = g$. Evidemment, si $Z = \emptyset$ cette réciproque n'est vraie que si $Y = \emptyset$.

<u>Exercice</u>.- Dans le cadre de la proposition 9 a), établir l'égalité $F\circ\overline{F}^1\circ G = G$.

<u>Résolution</u>.- La composée des fonctions f, h étant égale à g, on doit avoir $(X,G,Z) = (X,F,Y)\circ(Y,H,Z) \equiv (X,F,Y)\circ(Y,\overline{F}^1\circ G,Z) = (X,F\circ\overline{F}^1\circ G,Z)$ d'où $G = F\circ\overline{F}^1\circ G$, tel est l'origine de l'exercice posé. Or effectivement
$(u,v) \in F\circ\overline{F}^1\circ G \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)((u,y)\in F \text{ et } (y,x)\in \overline{F}^1 \text{ et } (x,v)\in G)$
$\Rightarrow (\exists y)(\exists x)(y = u:f \text{ et } y = x:f \text{ et } v = x:g) \Rightarrow (\exists x)(u:f = x:f \text{ et } v = x:g)$
$\Rightarrow (\exists x)(u:g = x:g = v) \Rightarrow u:g = v$. Par conséquent
$(u,v)\in F\circ\overline{F}^1\circ G \Rightarrow (u \in pr_1F \text{ et } u:g = v) \Rightarrow (u,v)\in G$ puisque $pr_1F = pr_1G = X$.
Inversement, $(u,v)\in G \Rightarrow (u\in X \text{ et } (u,u:f)\in F \text{ et } (u:f,u)\in \overline{F}^1 \text{ et } (u,v)\in G)$
$\Rightarrow (\exists y)(\exists x)((u,y)\in F \text{ et } (y,x)\in\overline{F}^1 \text{ et } (x,v)\in G) \Leftrightarrow (u,v)\in F\circ\overline{F}^1\circ G$. C.Q.F.D.

Une justification de la seconde réciproque de la proposition 6 p.13 repose sur le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 5.- Soient deux graphes F, G. Si F est fonctionnel, les relations $(x,z)\in F\circ G$, $(x \in pr_1F \text{ et } (x:f,z)\in G)$ sont équivalentes, où $x:f \equiv \tau(x,\square)\in F$.

<u>Preuve</u>.- Par définition $(x,z)\in F\circ G \Leftrightarrow (\exists y)((x,y)\in F \text{ et } (y,z)\in G)$.
Lorsque F est fonctionnel, le lemme 2 p.10 : $(x,y)\in F \Rightarrow y = x:f$ justifie l'implication $((x,y)\in F \text{ et } (y,z)\in G) \Rightarrow ((x,x:f)\in F \text{ et } (x:f,z)\in G)$.
Alors $(x,z)\in F\circ G \Leftrightarrow ((x,x:f)\in F \text{ et } (x:f,z)\in G)$ puisque la lettre y ne figure pas au second membre, et en vertu de EI.33 S5. Dès lors le lemme 3 p.10 : $(x,x:f)\in F \Leftrightarrow x\in pr_1F$ achève la preuve de ce lemme.

b) Soient deux correspondances (X,F,Z), (Y,G,Z) ayant le même ensemble d'arrivée Z ; on peut leur associer le district (X,H,Y) avec $H = F\circ\overline{G}^1$ qui en fait une correspondance car
$pr_1H \subset pr_1F \subset X$ et $pr_2H \subset pr_2\overline{G}^1 = pr_1G \subset Y$, d'où $H \subset pr_1H \times pr_2H \subset X \times Y$
Si maintenant (X,F,Z) est une fonction f, selon le lemme précédent
$$(x,y)\in H \Leftrightarrow (x\in pr_1F \text{ et } (y,x:f)\in G)$$
ce qui va nous permettre d'établir la seconde réciproque :

<u>Proposition</u> 9 b).- Soient $f = (X,F,Z)$ une application et $g = (Y,G,Z)$ une injection ; les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe une application h telle que $X{:}h \rightarrow Y$ et $f = h \circ g$.

b) $X{:}f \subset Y{:}g$, soit $pr_2F \subset pr_2G$.

<u>Preuve</u>.- Si $f = h\circ g$, avec $h = (X,H,Y)$, on a $X{:}f = X{:}h{:}g \subset Y{:}g$.
Inversement, si $X{:}f \subset Y{:}g \subset Z$, c'est à dire $pr_2F \subset pr_2G$, et si g est une injection la correspondance (X,H,Y) admet les propriétés d'une fonction car

1) $pr_1H = X$.- En effet, on sait déjà que $pr_1H \subset X$. Inversement $X = pr_1F \subset pr_2G$ d'où $x \in X \Leftrightarrow x \in pr_1F \Leftrightarrow (x,x{:}f) \in F \Rightarrow x{:}f \in pr_2F \Rightarrow x{:}f \in pr_2G \Leftrightarrow (\exists y)((y,x{:}f) \in G)$
d'où $x \in X \Rightarrow (x \in X \text{ et } (\exists y)((y,x{:}f) \in G)) \Leftrightarrow (\exists y)(x \in X \text{ et } (y,x{:}f) \in G) \Leftrightarrow x \in pr_1H$

2) Sous la condition b) H est fonctionnel sur X.- En effet,
$(x,p) \in H \Rightarrow (x \in X \text{ et } p \in Y \text{ et } (p,x{:}f) \in G) \Rightarrow (p \in Y \text{ et } x{:}f = p{:}g)$
lorsque $g = (Y,G,Z)$ est une fonction. Par conséquent
$((x,p) \in H \text{ et } (x,q) \in H) \Rightarrow (p \in Y \text{ et } q \in Y \text{ et } x{:}f = p{:}g = q{:}g) \Rightarrow p = q$
lorsque g est une injection. C.Q.F.D.

Dans ces conditions la correspondance (X,H,Y) est une fonction h. Alors de $X = pr_1F = pr_1H$ et du lemme 3 p.10, on a $x \in X \Leftrightarrow ((x \in pr_1F \text{ et } x \in pr_1H) \Leftrightarrow ((x,x{:}f) \in F \text{ et } (x,x{:}h) \in H) \Rightarrow (\exists x)((x,x{:}f) \in F \text{ et } (x,x{:}h) \in H) \Leftrightarrow (x{:}h,x{:}f) \in G$, par suite $x{:}f = x{:}h{:}g$, d'où $f = h\circ g$.
L'application h est unique comme identique à la correspondance (X,H,Y) initialement considérée.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Y \arrow[rr, shift left, "g"] & & Z \arrow[ll, shift left, "t"]
\end{tikzcd}$$

D'ailleurs en se référant aux propriétés des tractions, pour toute traction t associée à g on a $g\circ t = Id$. Alors il est naturel de poser $h = f\circ t$. Ainsi pour tout $x \in X$ on a $x{:}h\circ g = x{:}f\circ t\circ g$.
Or, pour tout $x \in X$ il y a un y tel que $x{:}f = y{:}g$ car
$x \in X \Leftrightarrow x \in pr_1F \Leftrightarrow (\exists z)((x,z) \in F) \Rightarrow (\exists z)(z = x{:}f \text{ et } z \in pr_2F)$
$\Rightarrow (\exists z)(z = x{:}f \text{ et } z \in pr_2G) \Rightarrow (\exists z)(z = x{:}f \text{ et } (\exists y)((y,z) \in G))$
$\Rightarrow (\exists z)(z = x{:}f \text{ et } (\exists y)(z = y{:}g)) \Rightarrow (\exists y)(x{:}f = y{:}g)$
De là, $x \in X \Rightarrow (\exists y)(x{:}f = y{:}g \text{ et } x{:}h\circ g = x{:}f\circ t\circ g)$
$\Rightarrow (\exists y)(x{:}f = y{:}g \text{ et } x{:}h\circ g = y{:}g\circ t\circ g) \Leftrightarrow (\exists y)(x{:}f = y{:}g \text{ et } x{:}h\circ g = y{:}g)$
$\Rightarrow x{:}h\circ g = x{:}f$, d'où $h\circ g = f$ pour tout $x \in X$.

De même h est unique car s'il était possible d'écrire $f = h_1\circ g = h_2\circ g$ on aurait $f\circ t = h_1\circ g\circ t = h_2\circ g\circ t$, soit $f\circ t = h_1 = h_2$.

Résolution des exercices en EII.49 §3 sur les correspondances.

1) Les relations $x \in y$, $x \subset y$, $x = \{y\}$ n'admettent pas de graphe par rapport à x et y car s'ils existaient, leurs premières projections $\{x | (\exists y)(x \in y)\}$, $\{x | (\exists y)(x \subset y)\}$ correspondant aux deux premières relations et la seconde projection $\{y | (\exists x)(x = \{y\})\}$ relative à la troisième, seraient l'ensemble de tous les objets. Précisément, selon EI.33 §5, les trois implications

$$(\{x\}|y)(x \in y) \equiv x \in \{x\} \Rightarrow (\exists y)(x \in y)$$
$$(x|y)(x \subset y) \equiv x \subset x \Rightarrow (\exists y)(x \subset y)$$
$$(\{y\}|x)(x = \{y\}) \equiv \{y\} = \{y\} \Rightarrow (\exists x)(x = \{y\})$$

sont vraies. Puisque leurs antécédents sont vrais, il en est de même de leurs conséquents qui, par suite, ne sont pas collectivisants (F.B.9)p.46).

2) En l'exercice 3 p.8 l'implication $X \subset pr_1 G \Rightarrow X \subset X:G:\overline{G}^1$ est démontrée. Inversement, sous l'hypothèse auxiliaire $X \subset X:G:\overline{G}^1$, les implications $x \in X \Rightarrow (\exists y)((\exists z)(z \in X \text{ et } (z,y) \in G) \text{ et } (x,y) \in G) \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G)$ sont vraies c'est à dire $x \in X \Rightarrow x \in pr_1 G$, soit $X \subset pr_1 G$. C.Q.F.D.

3) De l'équivalence $H \subset G\circ\overline{G}^1\circ H \Leftrightarrow pr_1 H \subset pr_1 G$.
Trivialement $H \subset G\circ\overline{G}^1\circ H \Rightarrow pr_1 H \subset pr_1 G\circ\overline{G}^1\circ H$, or selon l'exercice 1) p.8 on a $pr_1 G\circ\overline{G}^1\circ H \subset pr_1 G$, d'où $H \subset G\circ\overline{G}^1\circ H \Rightarrow pr_1 H \subset pr_1 G$.
Inversement si $pr_1 H \subset pr_1 G$, on a $x \in pr_1 H \Rightarrow x \in pr_1 G \Leftrightarrow (x,x) \in G\circ\overline{G}^1$, alors $(x,y) \in H \Rightarrow (x \in pr_1 H \text{ et } (x,y) \in H) \Rightarrow ((x,x) \in G\circ\overline{G}^1 \text{ et } (x,y) \in H)$ $\Rightarrow (\exists x')((x,x') \in G\circ\overline{G}^1 \text{ et } (x',y) \in H) \Leftrightarrow (x,y) \in G\circ\overline{G}^1\circ H$.

4) De l'équivalence $G\circ\overline{G}^1 = \emptyset \Leftrightarrow G = \emptyset$.
Dans la théorie T' qui résulte de l'hypothèse auxiliaire $G\circ\overline{G}^1 = \emptyset$, raisonnons par l'absurde en adjoignant $G \neq \emptyset$ aux axiomes explicites de T'. Comme $G \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists z)(z \in G)$, $z \in G \Rightarrow (z \text{ est un couple}) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(z = (x,y))$, alors $G \neq \emptyset \Rightarrow (\exists z)(z \in G \text{ et } (\exists x)(\exists y)(z = (x,y))) \Rightarrow (\exists x)(\exists y)((x,y) \in G)$
$\Leftrightarrow (\exists x)((x,x) \in G\circ\overline{G}^1)$, soit $G \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x)((x,x) \in \emptyset)$. Ainsi la relation $(\exists x)((x,x) \in \emptyset)$ est contradictoire. Donc $G = \emptyset$; et selon C14, $G\circ\overline{G}^1 = \emptyset \Rightarrow G = \emptyset$. Evidemment, l'exercice 5) p.8, à l'appui de C14, justifie l'implication inverse.

5) Des égalités $G\circ(A \times B) = (A:\overline{G}^1) \times B$, $(A \times B)\circ G = A \times (B:G)$
$(x,z) \in G\circ(A \times B) \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G \text{ et } y \in A \text{ et } z \in B) \Leftrightarrow$
$((\exists y)(y \in A \text{ et } (x,y) \in G) \text{ et } z \in B) \Leftrightarrow (x \in A:\overline{G}^1 \text{ et } z \in B) \Leftrightarrow (x,z) \in (A:\overline{G}^1) \times B$,
d'où l'égalité $G\circ(A \times B) = (A:\overline{G}^1) \times B$.
$(x,z) \in (A \times B)\circ G \Leftrightarrow (\exists y)(x \in A \text{ et } y \in B \text{ et } (y,z) \in G) \Leftrightarrow$
$((\exists y)(y \in B \text{ et } (y,z) \in G) \text{ et } x \in A) \Leftrightarrow (z \in B:G \text{ et } x \in A) \Leftrightarrow (x,z) \in A \times (B:G)$
d'où l'égalité $(A \times B)\circ G = A \times (B:G)$.

6) Soit $G' \equiv (pr_1G \times pr_2G) - G$, alors $(\overline{G}^1)' = (pr_1\overline{G}^1 \times pr_2\overline{G}^1) - \overline{G}^1 = (pr_2G \times pr_1G) - \overline{G}^1$ puis $(x,y) \in G' \Leftrightarrow (y,x) \in (G')^{-1} \Leftrightarrow (x \in pr_1G$ et $y \in pr_2G$ et $(x,y) \notin G)$,
de même, $(y,x) \in (\overline{G}^1)' \Leftrightarrow (y \in pr_2G$ et $x \in pr_1G$ et $(x,y) \notin G)$, d'où $(\overline{G}^1)' = (G')^{-1}$.

$(x,x') \in G\circ(\overline{G}^1)' \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G$ et $x' \in pr_1G$ et $y \in pr_2G$ et $(x',y) \notin G)$
$\Rightarrow (x \in pr_1G$ et $x' \in pr_1G$ et $x \neq x') \Rightarrow (x \in A$ et $x' \in A$ et $x \neq x')$
$\Leftrightarrow (x,x') \in (A \times A) - \Delta_A$. D'où $G\circ(\overline{G}^1)' \subset (A \times A) - \Delta_A = \Delta'_A$.

$(y,y') \in (\overline{G}^1)'\circ G \Leftrightarrow (\exists x)(y \in pr_2G$ et $x \in pr_1G$ et $(x,y) \notin G$ et $(x,y') \in G)$
$\Rightarrow (y \in pr_2G$ et $y' \in pr_2G$ et $y \neq y') \Rightarrow (y \in B$ et $y' \in B$ et $y \neq y')$
$\Leftrightarrow (y,y') \in (B \times B) - \Delta_B$. D'où $(\overline{G}^1)'\circ G \subset (B \times B) - \Delta_B = \Delta'_B$.

$(x,y) \in G\circ(\overline{G}^1)'\circ G \Leftrightarrow (\exists u)(\exists v)((x,v) \in G$ et $(v,u) \in (\overline{G}^1)'$ et $(u,y) \in G)$
$\Rightarrow (\exists u)(\exists v)((u,v) \in G')$ puisque $(\overline{G}^1) = (G')^{-1}$. De là, si $G' \equiv (pr_1G \times pr_2G) - G = \emptyset$ et s'il est admis que $(x,y) \in G\circ(\overline{G}^1)'\circ G$, la relation $(\exists u)(\exists v)((u,v) \in \emptyset)$ est contradictoire, alors selon EI.27 C15, $(\forall x)(\forall y)((x,y) \notin G\circ(\overline{G}^1)'\circ G)$ est vraie, soit $G\circ(\overline{G}^1)'\circ G = \emptyset$.

De même, $(x,y) \in G' \Leftrightarrow (x \in pr_1G$ et $y \in pr_2G$ et $(x,y) \notin G)$
$\Rightarrow (\exists u)(\exists v)((x,v) \in G$ et $(u,y) \in G$ et $(x,y) \in G')$
$\Rightarrow (\exists u)(\exists v)((u,y) \in G$ et $(y,x) \in (G')^{-1}$ et $(x,v) \in G) \Leftrightarrow (\exists u)(\exists v)((u,v) \in G\circ(G')^{-1}\circ G)$
De là, si $G\circ(\overline{G}^1)'\circ G = \emptyset$ et s'il est admis que $(x,y) \in G'$, la relation $(\exists u)(\exists v)((u,v) \in G\circ(G')^{-1}\circ G)$ est contradictoire, alors selon EI.27 C15, $(\forall x)(\forall y)((x,y) \notin G')$ est vraie, soit $G' \equiv (pr_1G \times pr_2G) - G = \emptyset$.
Ce qui précède se résume par l'équivalence $G' = \emptyset \Leftrightarrow G\circ(\overline{G}^1)'\circ G = \emptyset$.

7) De l'équivalence $(\forall Y)(Y:\overline{G}^1:G \subset Y) \Leftrightarrow (G$ est fonctionnel$)$.
Le théorème 15 p.14 prouve l'implication de gauche à droite.
Inversement, si $(\forall Y)(Y:\overline{G}^1:G \subset Y)$ est un théorème de $\mathcal{T}'$, les relations suivantes le sont aussi : $(\forall Y)((\exists x)((\exists z)(z \in Y$ et $(x,z) \in G)$ et $(x,y) \in G) \Rightarrow y \in Y)$
$(\exists x)((\exists z)(z \in \{h\}$ et $(x,z) \in G)$ et $(x,y) \in G) \Rightarrow y \in \{h\}$ selon EI.34 C30,
$(\exists x)((\exists z)(z = h$ et $(x,z) \in G)$ et $(x,y) \in G) \Rightarrow y = h$ selon EII.4.5,
$(\exists x)((x,h) \in G$ et $(x,y) \in G) \Rightarrow y = h$ selon EI.39 C43 et EI.39 Th1.
Alors $((x,p) \in G$ et $(x,q) \in G) \Rightarrow (\exists x)((x,p) \in G$ et $(x,q) \in G) \Rightarrow p = q$ selon EI.33 S5 et le théorème précédent de $\mathcal{T}'$. C.Q.F.D.

8) Soient deux correspondances $\Gamma = (A,F,B)$, $\Gamma' = (B,G,A)$, si les relations $(\forall x)(x \in A \Rightarrow \{x\}:\Gamma:\Gamma' = \{x\})$, $(\forall y)(y \in B \Rightarrow \{y\}:\Gamma':\Gamma = \{y\})$ sont vraies, Γ est une bijection de A sur B et $\Gamma' = \Gamma^{-1}$.
En effet, les correspondances considérées Γ, Γ' admettent les propriétés suivantes :

a) $pr_1 F = A$ car d'une part $pr_1 F \subset A$, d'autre part $x \in A \Rightarrow \{x\} : F \neq \emptyset \Rightarrow x \in pr_1 F$.
b) $pr_1 G = B$ car d'une part $pr_1 G \subset B$, d'autre part $y \in B \Rightarrow \{y\} : G \neq \emptyset \Rightarrow y \in pr_1 G$.

c) $(\forall x)(x \in A$ et $\{x\} : F \circ G = \{x\}) \Leftrightarrow F \circ G = \Delta_A \equiv \bar{\Delta}_A^1 = \bar{G}^1 \circ \bar{F}^1$.

d) $(\forall y)(y \in B$ et $\{y\} : G\ F = \{y\}) \Leftrightarrow G\ F = \Delta_B = \bar{\Delta}_B^1 = \bar{F}^1 \bar{G}^1$.

e) $\Delta_A \subset F \circ \bar{F}^1$ car $(x,x) \in \Delta_A \Rightarrow x \in A \Leftrightarrow x \in pr_1 F \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in F$ et $(x,y) \in F)$
$\Leftrightarrow (x,x) \in F \circ \bar{F}^1$.

f) $\Delta_B \subset G \circ \bar{G}^1$ car $(y,y) \in \Delta_B \Rightarrow y \in B \Leftrightarrow y \in pr_1 G \Leftrightarrow (\exists x)((y,x) \in G$ et $(y,x) \in G)$
$\Leftrightarrow (y,y) \in G \circ \bar{G}^1$.

Par conséquent selon c), e) $F \circ G = \Delta_A \subset F \circ \bar{F}^1$, et de même $G \circ F = \Delta_B \subset G \circ \bar{G}^1$.

g) $F = \bar{G}^1$ car $F = F \circ \Delta_B \subset F \circ G \circ \bar{G}^1 = \Delta_A \circ \bar{G}^1 \subset F \circ \bar{F}^1 \circ \bar{G}^1 = F \circ \Delta_B = F$
h) $G = \bar{F}^1$ car $G = G \circ \Delta_A \subset G \circ F \circ \bar{F}^1 = \Delta_B \circ \bar{F}^1 \subset G \circ \bar{G}^1 \circ \bar{F}^1 = G \circ \Delta_A = G$.

Il en résulte $\Delta_A = F \circ \bar{F}^1 = \bar{G}^1 \circ G$, et $\Delta_B = G \circ \bar{G}^1 = \bar{F}^1 \circ F$

La relation $\Delta_A = F \circ \bar{F}^1$ exprime que $\bar{F}^1$ est fonctionnel, de même la relation $\Delta_B = \bar{F}^1 \circ F$ exprime que F est fonctionnel. Par suite la correspondance Γ et sa réciproque sont des fonctions et, selon la proposition 7 en EII.17, elles sont bijectives. C.Q.F.D.

9) Soient $A : f \to B$, $B : g \to C$, $C : h \to D$ trois applications. Si $f \circ g$, $g \circ h$ sont bijectives, alors f, g, h sont bijectives.
En effet, le théorème 1 en EII.19 affirme
en c) que f est injective si $f \circ g$ l'est, par suite f est injective ;
en d) que g est surjective si $f \circ g$ l'est, par suite g est surjective ;
en c) que g est injective si $g \circ h$ l'est, par suite g est injective ;
en d) que h est surjective si $g \circ h$ l'est, par suite h est surjective ;
en e) que f est surjective puisque $f \circ g$ est surjective et g injective ;
en f) que h est injective puisque $g \circ h$ est injective et g surjective.
Il en résulte que f, g, h sont bijectives comme injectives et surjectives.

10) Soient $A : f \to B$, $B : g \to C$, $C : h \to A$ trois applications. Si deux des applications $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$, $h \circ f \circ g$ sont surjectives et l'autre injective, ou deux sont injectives et l'autre surjective, alors f,g,h sont bijectives.
En effet, dans le premier cas si $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ sont surjectives et $h \circ f \circ g$ injective, selon le théorème 1 en EII.19 il apparait successivement
en d) que $f \circ g \circ h$, $g \circ h$, h, $g \circ h \circ f$, $h \circ f$, f sont surjectives ;
en c) que $h \circ f \circ g$, $h \circ f$, h sont injectives ;
en e) que g est surjective puisque $g \circ h$ est surjective et h injective ;
en f) que f est injective puisque $h \circ f$ est injective et h surjective ;
en f) que g est injective puisque $h \circ f \circ g$ est injective et $h \circ f$ est surjective.
Il en résulte que f, g, h sont bijectives comme injectives et surjectives.

11) Déceler l'erreur dans le boniment suivant qui soutient qu'un ensemble E non vide n'a pas de partie vide : Soit A une partie de E, l'application $\{A\}:f \to \{E\}$ est bijective, et $A:f = E$; dès lors raisonnant par l'absurde si $A = \emptyset$, $\emptyset:f = E$, d'où contradictoirement $E = \emptyset$, donc $A \neq \emptyset$.

La relation $A:f = E$ n'est pas une conséquence de $\{A\}:f \to \{E\}$. De plus il y a une confusion du théorème 7 p.5 $\emptyset:F = \emptyset$ où F est le graphe de l'application f, avec l'égalité $\emptyset:f = \emptyset$ (à rapprocher de $(\emptyset,\emptyset) \in F$) qui n'est pas un théorème de $\mathcal{T}$.

12) <u>Preuve du complément à la proposition 9 a) p.20</u> : "Si h est injective b) est une équivalence ; inversement, h est injective lorsque f est surjective et b) une équivalence".

En effet, h étant injective, $(y \in Y \text{ et } y' \in Y \text{ et } y:h = y':h) \Rightarrow y = y'$.
Evidemment $x \in X \Rightarrow x:f \in Y$, et $x:g = x:f:h$; par suite
$(x \in X \text{ et } x' \in X \text{ et } x:g = x':g) \Rightarrow (x:f \in Y \text{ et } x':f \in Y \text{ et } x:f:h = x':f:h)$
$\Rightarrow (x:f = x':f)$ puisque h est injective. Il en résulte que b) est une équivalence.

Inversement, lorsque f est surjective, $u \in Y \Leftrightarrow (\exists x)(x \in X \text{ et } x:f = u)$, d'où suivent les équivalences : $(y \in Y \text{ et } y' \in Y \text{ et } y:h = y':h)$
$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists x')(x \in X \text{ et } x' \in X \text{ et } x:f = y \text{ et } x':f = y' \text{ et } y:h = y':h)$
$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists x')(x \in X \text{ et } x' \in X \text{ et } x:f = y \text{ et } x':f = y' \text{ et } x:f:h = x':f:h)$
$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists x')(x \in X \text{ et } x' \in X \text{ et } x:f = y \text{ et } x':f = y' \text{ et } x:g = x':g)$
et si de plus b) est une équivalence
$\Rightarrow (\exists x)(\exists x')(x \in X \text{ et } x' \in X \text{ et } x:f = y \text{ et } x':f = y' \text{ et } x:f = x':f) \Rightarrow y = y'$.

C.Q.F.D.

13) <u>Théorème</u>.- Soient R, S deux relations qui admettent des graphes Ⓡ, Ⓢ
L'implication $(R \Rightarrow S) \Rightarrow$ Ⓡ $\subset$ Ⓢ est vraie.
<u>Preuve</u>.- Si les relations R, S admettent des graphes, sous l'hypothèse $R \Rightarrow S$, on a les implications $(x,y) \in$ Ⓡ $\Leftrightarrow R\{x,y\} \Rightarrow S\{x,y\} \Leftrightarrow (x,y) \in$ Ⓢ.
Donc $(\forall x)(\forall y)((x,y) \in$ Ⓡ $\Rightarrow (x,y) \in$ Ⓢ$)$. Alors les relations (6) et (11) p.1 donnent $(\forall z)(z$ est un couple $\Rightarrow (z \in$ Ⓡ $\Rightarrow z \in$ Ⓢ$))$. Etant donné que Ⓡ est un graphe, $z \in$ Ⓡ $\Rightarrow z$ est un couple, puis $z \in$ Ⓢ compte tenu de la relation précédente. Il en résulte $(\forall z)(z \in$ Ⓡ $\Rightarrow z \in$ Ⓢ$)$; soit Ⓡ $\subset$ Ⓢ. C.Q.F.D.

14) <u>Théorème</u>.- Soient $f = (X,F,Y)$ une surjection et R une relation. Si la lettre x ne figure pas dans R, on a $(\forall x)(x \in X \Rightarrow R\{x:f\}) \Rightarrow (u \in Y \Rightarrow R\{u\})$.
En effet, $(\forall x)(x \in X \Rightarrow R\{x:f\}) \Rightarrow (\forall x)((x \in X \text{ et } x:f = u) \Rightarrow R\{u\})$
$\Leftrightarrow ((\exists x)(x \in X \text{ et } x:f = u) \Rightarrow R\{u\})$, selon F.B exercice 0) p.47,
$\Leftrightarrow u \in Y \Rightarrow R\{u\}$ selon $u \in pr_2 F \Leftrightarrow (\exists x)(x \in pr_1 F \text{ et } x:f = u)$. C.Q.F.D.

Annexe III

Relations typiques

Introduction.- De même qu'en EI.35 les quantificateurs typiques sont définis par rapport à une relation A, les relations typiques, auxquels elles empruntent leur désignation, sont assujetties à une même relation A.

Il y a lieu de définir deux sortes de relations typiques : les relations univoques et les relations fonctionnelles ; et d'énoncer deux critères les concernant généralisant EI.41 C45 et C46.

Relation typique univoque.- Soient A, R deux relations ; x, y des lettres distinctes pouvant figurer dans R ; p, q des lettres distinctes entre elles, distinctes des lettres x, y, ne figurant pas dans R. Dans ces conditions la relation

$$(1)\quad (\forall x)(A \Rightarrow (\forall p)(\forall q)(((p|y)R\{x,y\} \text{ et } (q|y)R\{x,y\}) \Rightarrow p = q))$$

se désigne par "pour tout x solution de A, il existe au plus un y tel que R". Lorsque cette relation est un théorème de $\mathcal{T}$, on dit que pour toute solution de A, R est univoque en y dans $\mathcal{T}$, ou que R_A est univoque en y dans $\mathcal{T}$.

C45 bis.- Soient R une relation de $\mathcal{T}$, et y une lettre qui n'est pas une constante de $\mathcal{T}$. Si pour toute solution d'une relation A, R est univoque en y dans $\mathcal{T}$, l'implication double $A \Rightarrow (R \Rightarrow y = \tau_y R)$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Réciproquement, si, pour un terme T de $\mathcal{T}$ où ne figure pas y, $A \Rightarrow (R \Rightarrow y=T)$ est un théorème de $\mathcal{T}$ et si y ne figure pas dans A, pour toute solution de A, R est univoque en y dans $\mathcal{T}$.

Preuve.- Adjoignant à $\mathcal{T}$ l'hypothèse (A et R), alors R, $(\tau_y R|y)R$ sont vraies dans $\mathcal{T}'$, de même $(A \text{ et } (\tau_y R|y)A)$ est vraie dans $\mathcal{T}'$. Or, selon (1), l'implication $(R \text{ et } (\tau_y R|y)R) \Rightarrow y = \tau_y R$ est vraie dans $\mathcal{T}'$, et par suite l'égalité $y = \tau_y R$. Par conséquent dans $\mathcal{T}$, selon C14 $(A \text{ et } R) \Rightarrow y = \tau_y R$; autrement dit $A \Rightarrow (R \Rightarrow y = \tau_y R)$.

Réciproquement, supposons que $(A \text{ et } R) \Rightarrow y = T$ soit un théorème de $\mathcal{T}$, selon EI.23 C3, les relations $(p|y)(A \text{ et } R) \Rightarrow p = T$ et $(q|y)(A \text{ et } R) \Rightarrow q = T$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$. Adjoignons à $\mathcal{T}$ les hypothèses $(p|y)(A \text{ et } R)$ et $(q|y)(A \text{ et } R)$; alors $p = T$ et $q = T$ sont vraies dans $\mathcal{T}'$, donc $p = q$ dans $\mathcal{T}'$. Ainsi l'implication $((p|y)(A \text{ et } R) \text{ et } (q|y)(A \text{ et } R)) \Rightarrow p = q$ est un théorème de $\mathcal{T}$. Or si y ne figure pas dans A, l'implication $(A \text{ et } (p|y)R \text{ et } (q|y)R) \Rightarrow p = q$ est vraie dans $\mathcal{T}$; autrement dit $A \Rightarrow (((p|y)R \text{ et } (q|y)R) \Rightarrow p = q)$ l'est aussi. De même, selon EI.34 C31, $A \Rightarrow (\forall p)(\forall q)(((p|y)R \text{ et } (q|y)R) \Rightarrow p = q)$, puis, selon EI.32 C27, la relation (1). C.Q.F.D.

Relation typique fonctionnelle.- Sous les conditions précédentes la conjonction

$$(2)\quad ((\forall x)(A \Rightarrow (\exists y)R) \text{ et "il existe au plus un y tel que } R_A\text{")}$$

se désigne par "pour tout x solution de A, il existe un y et un seul tel que R". Si cette relation est un théorème de $\mathcal{T}$, on dit que "pour toute solution de A, R est fonctionnelle en y dans $\mathcal{T}$", ou que "R_A est fonctionnelle en y dans $\mathcal{T}$".

C46^{bis}.- Soient R une relation de $\mathfrak{T}$, et y une lettre qui n'est pas une constante de $\mathfrak{T}$. Si R_A est fonctionnelle en y dans $\mathfrak{T}$, $A \Rightarrow (R \Leftrightarrow y = \tau_y R)$ est un théorème de $\mathfrak{T}^A$.
Réciproquement, si, pour un terme T de $\mathfrak{T}$ où y ne figure pas, $A \Rightarrow (R \Leftrightarrow y=T)$ est un théorème de $\mathfrak{T}$, et si y ne figure pas dans A, pour toute solution de A, R est fonctionnelle en y dans $\mathfrak{T}$.

Preuve.- Supposons que R_A soit fonctionnelle en y dans $\mathfrak{T}$. Dès lors $A \Rightarrow (R \Rightarrow y = \tau_y R)$ résulte de C45^{bis}, et $A \Rightarrow (\exists y)R$ de EI.34 C30 ; or l'axiome EI.38 S6 donne l'implication $(y = \tau_y R) \Rightarrow (R \Leftrightarrow (\exists y)R)$.
Adjoignant à $\mathfrak{T}$ l'hypothèse (A et $y = \tau_y R$), il apparait que R est un théorème de $\mathfrak{T}'$. D'où il résulte que les implications (A et $y = \tau_y R) \Rightarrow R$, $A \Rightarrow (y = \tau_y R \Rightarrow R)$ sont vraies dans $\mathfrak{T}$.
Réciproquement si $A \Rightarrow (R \Leftrightarrow y = T)$, c'est à dire si la conjonction $((A \text{ et } R) \Rightarrow y = T \text{ et } (A \text{ et } y = T) \Rightarrow R)$ est un théorème de $\mathfrak{T}$, R_A est univoque en y dans $\mathfrak{T}$ selon C45^{bis}. En outre la seconde implication, selon EI.23 C3, justifie les suivantes $(A \text{ et } y = T) \Rightarrow (T|y)R \Rightarrow (\exists y)R$ si la lettre y ne figure pas dans A ; c'est à dire $A \Rightarrow (\exists y)R$, et plus généralement $(\forall x)(A \Rightarrow (\exists y)R)$. C.Q.F.D.

Application.- Ce qui précède s'applique aux relations $A \equiv x \in X$ et $R \equiv (x,y) \in G$, où G désigne un graphe. Dans ces conditions les définitions précédentes concernent en principe un graphe univoque et un graphe fonctionnel sur un ensemble X. Mais nous allons voir que la seconde propriété est liée à la première comme suit :

Théorème 1.- Si un graphe G est univoque sur un ensemble X inclus dans $pr_1 G$, le graphe est fonctionnel sur X.

Preuve.- En effet, $X \subset pr_1 G$ donne $x \in X \Rightarrow x \in pr_1 G$;
or, $x \in pr_1 G \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G)$, d'où $x \in X \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G)$.
Par hypothèse, $x \in X \Rightarrow ((x,p) \in G \text{ et } (x,q) \in G) \Rightarrow p = q)$, par conséquent $x \in X \Rightarrow ((\exists y)((x,y) \in G) \text{ et } (((x,p) \in G \text{ et } (x,q) \in G) \Rightarrow p = q))$. C.Q.F.D.

Théorème 2.- Si un graphe G est univoque sur $pr_1 G$, l'implication $((x,p) \in G \text{ et } (x,q) \in G) \Rightarrow p = q$ est vraie, autrement dit le graphe est univoque ; et selon le théorème précédent, il est fonctionnel sur $pr_1 G$.

Preuve.- Par hypothèse, $x \in pr_1 G \Rightarrow (((x,p) \in G \text{ et } (x,q) \in G) \Rightarrow p = q)$, soit
$(x \in pr_1 G \text{ et } (x,p) \in G \text{ et } (x,q) \in G) \Rightarrow p = q$.
Or, $(x,p) \in G \Rightarrow x \in pr_1 G$, par conséquent
$((x,p) \in G \text{ et } (x,q) \in G) \Rightarrow ((x,p) \in G \text{ et } (x,q) \in G \text{ et } x \in pr_1 G) \Rightarrow p = q$ C.Q.F.D.

Les théorèmes 1 et 2 entrainent la proposition suivante :

Proposition.- Pour qu'un graphe soit fonctionnel sur sa première projection, il faut et il suffit que l'implication $((x,p) \in G \text{ et } (x,q) \in G) \Rightarrow p=q$ soit vraie, autrement dit que G soit univoque.

N.B. Evidemment l'abréviation "G est fonctionnel", pour G est fonctionnel sur $pr_1 G$, est un abus de langage.

Annexe IV

Observations sur l'écriture mathématique

Etant donnés deux graphes F, G, sous l'hypothèse $((x,y)\in F$ et $(y,z)\in G)$, selon l'usage, il convient d'écrire $(x,z)\in pr_1 F \times pr_2 G$ et $(x,z)\in G\circ F$.

Ainsi l'écriture mathématique est capricieuse, allant tantôt de gauche à droite, tantôt de droite à gauche. Il peut en résulter à l'impression une apparence de désordre néfaste à la compréhension du sujet exposé. Par exemple, dans l'étude des correspondances, Bourbaki note comme suit la loi de composition de deux d'entre elles $(P,T,V)\circ(H,U,T) = (P\circ H,U,V)$, laissant entendre par là qu'il y a une contrainte entre les deuxième et troisième projections des triplets composés. Or il n'en est rien, Bourbaki ne domine pas la question, probablement géné par l'écriture en usage. De là, pour découvrir de visu que cette loi est associative, il faut avoir des dispositions mathématiques. Cependant si l'on accepte de changer les notations, tout se clarifie en conservant l'écriture directe de gauche à droite, et la composée de deux quelconques correspondances, selon le théorème 12 p.12 devient $(A,F,B)\circ(U,G,V) = (A,F\circ G,V)$, où l'analogie avec la loi de Chasles suggère immédiatement l'associativité de cette loi de composition.

<u>Correspondance entre l'écriture directe et l'écriture inverse.</u>

Sujet	écriture directe	écriture inverse
Image d'un ensemble X par un graphe G	$X:G$	$G\langle X\rangle$
Coupe d'un graphe G suivant x	$\{x\}:G$	$G\langle\{x\}\rangle$
Graphe par rapport à x et z de la relation $(\exists y)((x,y)\in F$ et $(y,z)\in G)$	$F\circ G$	$G\circ F$
Proposition 5	$A:F\circ G = A:F:G$	$G\circ F\langle A\rangle = G\langle F\langle A\rangle\rangle$
Exercices 1), 2) p.8	$pr_1 F\circ G\subset pr_1 F, pr_2 F\circ G\subset pr_2 G$	$pr_1 G\circ F\subset pr_1 F, pr_2 G\circ F\subset pr_2 G$
District, correspondance	$\Gamma = (X,F,Y)$	$\reflectbox{$\Gamma$} = (F,X,Y)$
" , " réciproque	$\overline{\Gamma}^1 = (Y,\overline{F}^1,X)$	$\overline{\reflectbox{$\Gamma$}}^1 = (\overline{F}^1,Y,X)$
Application f de A dans B	$A:f \to B$	$f:A\to B$
$\tau_y(x,y)\in F$	$x:f$	$f(x)$
Proposition 6	$x:f\circ g = x:f:g$	$g\circ f(x) = g(f(x))$
Vocabulaire	traction	rétraction
Définition p.17	$s\circ t = Id$	$r\circ s = Id$

N.B.- Dans l'écriture directe nous abrégeons le mot rétraction en traction pour conserver l'ordre alphabétique section $\circ$ traction correspondant à l'ordre alphabétique rétraction $\circ$ section de l'écriture inverse.

N.B.- Soient $\Gamma = (X,F,Y)$ une correspondance et A un ensemble inclus dans X. En vue de réduire l'écriture, l'image de A par F notée $A:F$ est encore désignée par $A:\Gamma$ sous le nom d'image de A par la correspondance Γ. Cette convention revient à adjoindre l'égalité formelle $A.F = A:\Gamma$ aux axiomes de Φ. Ainsi, pour une application $f = (pr_1 F,F,Y)$, à l'appui du corollaire p.11, on a $\{x\}:f = \{x\}:F = \{x:f\}$ pour $x\in pr_1 F$.

RELATIONS D'EQUIVALENCE

1.- INTRODUCTION.- L'égalité entre deux lettres x, y d'un ensemble E se généralise en relation d'équivalence au moyen du concept géométrique d'application de cet ensemble. Précisément une relation $R\{x,y\}$ est appelée relation d'équivalence dans E s'il existe une application f de E donnant lieu à l'équivalence

$$(1) \qquad R\{x,y\} \Leftrightarrow (x{:}f = y{:}f \text{ et } x \in E \text{ et } y \in E)$$

Sous la condition (1) lorsque les lettres x, y vérifient la relation R, ils sont dits équivalents suivant R, ce qu'on écrit $x \equiv y (\mathrm{mod}\ R)$, alors l'égalité $x{:}f = y{:}f$ est un théorème de $\mathcal{T}$ qui traduit que x et y ont même image par f.

De là pour qu'une relation $R\{x,y\}$ soit une relation d'équivalence par rapport aux lettres x, y d'un ensemble E, il faut que les trois relations

a) $R\{x,x\} \Leftrightarrow x \in E$ (elle résulte de $(x|y)(1)$)

b) $R\{x,y\} \Rightarrow R\{y,x\}$

c) $(R\{x,y\} \text{ et } R\{y,z\}) \Rightarrow R\{x,z\}$

soient des théorèmes de $\mathcal{T}$. Autrement dit R doit être réflexive, symétrique, transitive. Inversement EII.41 C55 montre que ces trois conditions sont suffisantes pour qu'il existe une application f conduisant à l'équivalence (1).

Je ne pense pas qu'il soit naturel de définir d'emblée la notion de relation d'équivalence dans un ensemble par la conjonction des théorèmes a), b), c) , donc de priver le lecteur de cette introduction. Le risque serait de l'induire dans l'erreur que pour choisir une recherche mathématique il n'y a qu'à prendre au hasard un petit nombre de conditions simples sur une relation par exemple ! Il ne faut pas perdre de vue que le formalisme apporte de la rigueur mais qu'il n'est pas source d'inspiration. Ainsi on observera que la notion de relation d'équivalence (tout court) satisfaisant à b) et c) uniquement n'a que des propriétés formelles.

Ceci étant dit, il demeure que le texte de Bourbaki sur ce sujet doit être lu et compris aisément, ce pour quoi nous allons nous efforcer d'apporter notre secours.

2.- RELATIONS TYPES.- Soit $R\{x,y\}$ une relation où figurent les lettres distinctes x, y ; on dit (par rapport aux lettres x, y) que

1) $R\{x,y\}$ est <u>symétrique</u> si $R\{x,y\} \Rightarrow R\{y,x\}$, alors selon EI.23 C3,
$$R\{x,y\} \Leftrightarrow R\{y,x\}.$$

2) $R\{x,y\}$ est <u>transitive</u> si $(R\{x,y\}$ et $R\{y,z\}) \Rightarrow R\{x,z\}$.

3) $R\{x,y\}$ est <u>réflexive dans E</u> si, x et y ne figurant pas dans E,
$$R\{x,x\} \Leftrightarrow x \in E.$$

4) $R\{x,y\}$ est une <u>relation d'équivalence</u> si elle est symétrique et transitive.

<u>Théorème</u> 1.- Si R est une relation d'équivalence, $R\{x,y\} \Rightarrow (R\{x,x\}$ et $R\{y,y\})$.
<u>Corollaire</u> - Si R est une relation d'équivalence, $R\{x,x\} \Leftrightarrow (\exists y)R\{x,y\}$.

<u>Preuves</u>.- Voir EII.40.

5) Une <u>relation d'équivalence dans E</u> est une relation d'équivalence réflexive dans E. De là, une relation d'équivalence dans $\emptyset$ est fausse. On pourra donc supposer $E \neq \emptyset$.

Si $R\{x,y\}$ est une relation d'équivalence dans E, on a, selon le théorème 1 et la définition 5 :
$$R\{x,y\} \Rightarrow (R\{x,x\} \text{ et } R\{y,y\}) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in E) \Leftrightarrow (x,y) \in E \times E ;$$
donc R admet, par rapport aux lettres x, y, un graphe G inclus dans $E \times E$ et de projections E car $x \in E \Leftrightarrow R\{x,x\} \Leftrightarrow (x,x) \in G \Rightarrow (\exists y)((x,y) \in G) \Leftrightarrow x \in pr_1 G$ d'où $E \subset pr_1 G$, alors $E = pr_1 G$; de même $E = pr_2 G$.

Réciproquement, si la relation d'équivalence $R\{x,y\}$ admet un graphe G, on a $R\{x,y\} \Leftrightarrow (x,y) \in G \Leftrightarrow y \in \{x\}:G$
et selon le corollaire précédent $R\{x,x\} \Leftrightarrow (\exists y)((x,y) \in G) \Leftrightarrow x \in pr_1 G$, de sorte que R est une relation d'équivalence dans $pr_1 G$.

<u>Exemples</u>.- a) Relation d'équivalence associée à une application. Soient f une fonction, E son ensemble de définition, F son graphe ; alors $E = pr_1 F$, puis $(x \in E$ et $y \in E$ et $x:f = y:f)$ est la <u>relation d'équivalence associée à f</u>. Elle est équivalente à la relation $(\exists z)((x,z) \in F$ et $(z,y) \in \overline{F}^1)$ et admet donc $F \circ \overline{F}^1$ pour graphe. En effet, selon COR lemme 2 p.10,
$$((x,z) \in F \text{ et } (z,y) \in \overline{F}^1) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } z = x:f \text{ et } z = y:f)$$
$$\Rightarrow (x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } x:f = y:f).$$
Inversement, selon COR lemme 3 p.10,
$$(x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } x:f = y:f) \Leftrightarrow ((x,x:f) \in F \text{ et } (y,y:f) \in F \text{ et } x:f = y:f)$$
$$\Rightarrow ((x,x:f) \in F \text{ et } (y,x:f) \in F) \Rightarrow (\exists z)((x,z) \in F \text{ et } (z,y) \in \overline{F}^1)$$

b) Soit $R\{x,y\}$ une relation qui admet un graphe F, alors la relation $(pr_1(x,y) = pr_1(u,v)$ et $R\{x,y\}$ et $R\{u,v\})$ est une relation d'équivalence dans F.

c) <u>Equivalence dans un ensemble</u>. Une correspondance (E,G,E), où $(x,y)\in G$ est une relation d'équivalence dans E, est une équivalence dans E.

<u>Proposition</u> 1.- Pour qu'une correspondance $\Gamma = (E,G,E)$ soit une équivalence dans E, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées : a) $E = pr_1 G$, b) $G = \overset{-1}{G}$, c) $G\circ G = G$.

<u>Preuve</u>.- Si Γ est une équivalence dans E, on a $x\in E \Leftrightarrow (x,x)\in G$
$\Rightarrow (\exists y)((x,y)\in G) \Leftrightarrow x\in pr_1 G$. D'où $E\subset pr_1 G$, et par suite a).
D'autre part $(x,y)\in G \Leftrightarrow (y,x)\in G \Leftrightarrow (x,y)\in \overset{-1}{G}$, d'où b).
Enfin $(x,z)\in G\circ G \Leftrightarrow (\exists y)((x,y)\in G$ et $(y,z)\in G) \Rightarrow (x,z)\in G$, d'où $G\circ G\subset G$;
puis $(x,y)\in G \Rightarrow ((x,x)\in G$ et $(x,y)\in G) \Rightarrow (\exists z)((x,z)\in G$ et $(z,y)\in G) \Leftrightarrow$
$(x,y)\in G\circ G$, d'où $G\subset G\circ G$. Donc c).

Réciproquement, supposons les conditions a), b), c) vérifiées. La relation $(x,y)\in G$ est symétrique en vertu de b) car $(x,y)\in G \Leftrightarrow (y,x)\in \overset{-1}{G} \Leftrightarrow (y,x)\in G$, transitive en vertu de c) car
$((x,y)\in G$ et $(y,z)\in G) \Rightarrow (\exists y)((x,y)\in G$ et $(y,z)\in G) \Leftrightarrow (x,z)\in G\circ G \Leftrightarrow (x,z)\in G$
c'est donc une relation d'équivalence qui, en vertu de a), est une relation d'équivalence dans E car $x\in E \Leftrightarrow x\in pr_1 G \Leftrightarrow (\exists y)((x,y)\in G) \Leftrightarrow (x,x)\in G$ selon le corollaire précédent.

<u>Théorème</u> 2.- Une relation d'équivalence dans E définit une équivalence dans E dont le graphe est celui de la relation d'équivalence dans E.
<u>Preuve</u>.- Elle résulte de l'équivalence $R\{x,y\} \Leftrightarrow (x,y)\in G$.

3.- CLASSES D'EQUIVALENCE. ENSEMBLE QUOTIENT.- Les définitions suivantes concernent les relations d'équivalence dans un ensemble.
Soient R une relation d'équivalence dans un ensemble E et G son graphe. On a vu en 5) que $pr_1 G = E$. Ainsi pour tout $x\in E$, la coupe de G suivant x s'appelle la <u>classe d'équivalence</u> de x suivant R ; c'est donc l'ensemble des $y\in E$ tels que $R\{x,y\}$, soit $\{y|R\{x,y\}\} = \{x\}:G$. Alors $R\{x,y\} \Leftrightarrow y\in \{x\}:G$, puis $x\in E \Leftrightarrow R\{x,x\} \Leftrightarrow x\in \{x\}:G$; de là, il résulte que, pour tout $x\in E$, $\{x\}:G$ n'est pas vide. Un élément d'une classe d'équivalence est appelé un <u>représentant</u> de cette classe.

L'ensemble des classes d'équivalence suivant R s'appelle l'<u>ensemble quotient</u> de E par R ou <u>quotient</u> de E par R et se désigne par E/R.
L'<u>application canonique</u> de E sur E/R est l'application $x\mapsto \{x\}:G$.

<u>Critère</u> C55.- Une relation d'équivalence R dane un ensemble E est équivalente à la relation d'équivalence associée à l'application canonique de E sur E/R. Autrement dit, on a l'équivalence :

(1) $R\{x,y\} \Leftrightarrow (x\in E$ et $y\in E$ et $x:p = y:p)$, avec $u\in E \Rightarrow (u:p = \{u\}:G)$.

<u>Preuve</u>.- En effet, soit G le graphe de la relation d'équivalence R dans E. Si $R\{x,y\}$ est vraie, on a d'une part $x \in E$ et $y \in E$, et d'autre part $(x,y) \in G$, soit $y \in \{x\}:G$; d'où, selon EII.10 P2, $\{y\}:G \subset \{x\}:G \circ G = \{x\}:G$ selon EII.41 P1 c) ; de même, selon P1 b), $(y,x) \in G$ et comme précédemment $\{x\}:G \subset \{y\}:G$. D'où $\{x\}:G = \{y\}:G$, c'est à dire $x:p = y:p$.
Réciproquement, si ($x \in E$ et $y \in E$ et $x:p = y:p$), on a $\{x\}:G = \{y\}:G$. Or, étant donné que $x \in E \Leftrightarrow R\{x,x\} \Leftrightarrow (x,x) \in G \Leftrightarrow x \in \{x\}:G$, on a $x \in E$, puis $x \in \{x\}:G$, donc $x \in \{y\}:G$, d'où $(x,y) \in G$, soit $R\{x,y\}$ est vraie.

<u>Théorème</u> 3.- Si R est une relation d'équivalence dans un ensemble E, E/R est une partition de E.

<u>Preuve</u>.- D'une part E/R est une partie de $\mathfrak{P}(E)$ et les éléments de E/R ne sont pas vides. D'autre part, G désignant le graphe de R, <u>si deux classes d'équivalence $\{x\}:G$, $\{y\}:G$ ont un élément commun z, elles sont égales</u>.
En effet, $R\{x,z\}$, $R\{y,z\}$ sont vraies, donc aussi $R\{x,y\}$. Compte tenu de l'implication $R\{x,y\} \Rightarrow (R\{x,u\} \Leftrightarrow R\{y,u\})$ due à la symétrie et transitivité de R, les relations $R\{x,u\}$, $R\{y,u\}$ sont équivalentes, par suite $u \in \{x\}:G \Leftrightarrow u \in \{y\}:G$, d'où $\{x\}:G = \{y\}:G$.
Enfin, compte tenu des équivalences $x \in E \Leftrightarrow x \in \{x\}:G \Leftrightarrow \{x\} \subset \{x\}:G$ et de l'inclusion $\{x\}:G \subset E$, on a $E = \bigcup_{x \in E} \{x\} \subset \bigcup_{x \in E} \{x\}:G \subset E$, d'où $\bigcup \{x\}:G = E$ CQFD.

<u>Théorème</u> 4.- Si R est une relation d'équivalence dans E, l'ensemble des éléments de E qui ont la même classe d'équivalence est cette classe d'équivalence.
<u>Preuve</u>.- Soit R une relation qui admet un graphe G. L'énoncé exprime que la partie de $pr_1 G$ dont les éléments ont la même coupe $\{u\}:G$ de G est cette coupe si R est une relation d'équivalence dans $pr_1 G$.

En effet, soit $X = \{x \mid x \in pr_1 G$ et $u \in pr_1 G$ et $\{x\}:G = \{u\}:G\}$; alors $x \in X \Leftrightarrow (x \in pr_1 G$ et $u \in pr_1 G$ et $\{x\}:G = \{u\}:G) \Leftrightarrow R\{x,u\}$ selon C55, $\Leftrightarrow x \in \{u\}:G$, d'où $X = \{u\}:G$. C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> 5.- Si R est une relation d'équivalence dans un ensemble E, l'équivalence $R\{x,y\} \Leftrightarrow (\exists X)(X \in E/R \text{ et } x \in X \text{ et } y \in X)$ est vraie.

<u>Preuve</u>.- Soit G le graphe de R. Selon EII.5 C53 la relation $(\exists u)(u \in E \text{ et } \{u\}:G = X)$ est collectivisante en X, et l'on a

$$E/R \equiv \{X \mid (\exists u)(u \in E \text{ et } \{u\}:G = X)\}.$$

Il en résulte les équivalences

$(\exists X)(X \in E/R \text{ et } x \in X \text{ et } y \in X) \Leftrightarrow (\exists X)(\exists u)(u \in E \text{ et } \{u\}:G = X \text{ et } x \in X \text{ et } y \in X)$
$\Leftrightarrow (\exists u)(u \in E \text{ et } x \in \{u\}:G \text{ et } y \in \{u\}:G) \Leftrightarrow (\exists u)(u \in E \text{ et } (u,x) \in G \text{ et } (u,y) \in G)$
$\Leftrightarrow (\exists u)(R\{u,x\} \text{ et } R\{u,y\}) \Leftrightarrow R\{x,y\}$. C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> 6.- Soit $(X_i)_{i \in I}$ une partition d'un ensemble E en ensembles non vides, la relation $(\exists i)(i \in I \text{ et } x \in X_i \text{ et } y \in X_i)$ est une relation d'équivalence R dans E.

<u>Preuve</u>.- Soit $R\{x,y\} \equiv (\exists i)(i \in I \text{ et } x \in X_i \text{ et } y \in X_i) \equiv R\{y,x\}$. Alors
$(R\{x,y\} \text{ et } R\{y,z\}) \Rightarrow (\exists p)(\exists q)(p \in I \text{ et } q \in I \text{ et } x \in X_p \text{ et } y \in X_p \text{ et } y \in X_q \text{ et } z \in X_q)$
Or les X_i étant une partition de E, $(y \in X_p \text{ et } y \in X_q) \Rightarrow p = q$; d'où
$(R\{x,y\} \text{ et } R\{y,z\}) \Rightarrow (\exists p)(p \in I \text{ et } x \in X_p \text{ et } y \in X_p \text{ et } z \in X_p) \Rightarrow R\{x,z\}$.
D'autre part, on a les équivalences
$x \in E \Leftrightarrow (\exists i)(i \in I \text{ et } x \in X_i) = (\exists i)(i \in I \text{ et } x \in X_i \text{ et } x \in X_i) \equiv R\{x,x\}$.
C.Q.F.D.

4.- RELATIONS COMPATIBLES AVEC UNE RELATION D'EQUIVALENCE.-

<u>Définition</u> .- $P\{x\}$ est compatible par rapport à x avec la relation d'équivalence $R\{x,x'\}$ si $(P\{x\} \text{ et } (y|x')R\{x,x'\}) \Rightarrow P\{y\}$ où y est une lettre qui ne figure ni dans P ni dans R. Ainsi $(P\{x\} \text{ et } R\{x,y\}) \Rightarrow P\{y\}$.

<u>Critère</u> C56.- Soient $R\{x,y\}$ une relation d'équivalence dans E et $P\{x\}$ une relation compatible avec R. On a l'équivalence

$$(t \in E/R \text{ et } (\exists x)(x \in t \text{ et } P\{x\})) \Leftrightarrow (t \in E/R \text{ et } (\forall x)(x \in t \Rightarrow P\{x\}))$$

où la lettre t ne figure pas dans la relation P.

<u>Preuve</u>.- Supposons d'abord le premier membre de C56 vrai, et montrons qu'il en est de même du second. Dans ces conditions les relations
$t \in E/R$ et $\tau \in t$ et $P\{\tau\}$ sont vraies.
Or p.4 on a $t \in E/R \Leftrightarrow (\exists u)(u \in E \text{ et } \{u\}:G = t) \equiv (\pi \in E \text{ et } \{\pi\}:G = t)$.
Par conséquent les relations suivantes $(\pi \in E \text{ et } \{\pi\}:G = t)$ et $\tau \in t$ et $P\{\tau\}$, et celles qui en résultent $\tau \in t$, $\tau \in \{\pi\}:G$, $R\{\pi,\tau\}$ sont vraies.
De même les implications $x \in t \Leftrightarrow x \in \{\pi\}:G \Leftrightarrow R\{\pi,x\} \Rightarrow (R\{\tau,\pi\} \text{ et } R\{\pi,x\})$
$\Rightarrow R\{\tau,x\} \Rightarrow (R\{\tau,x\} \text{ et } P\{\tau\}) \Rightarrow P\{x\}$ sont vraies ;
donc $(\forall x)(x \in t \Rightarrow P\{x\})$ est vraie aussi.

Inversement supposons le second membre de C56 vrai. Alors les relations $t \in E/R$ et $(\forall x)(x \in t \Rightarrow P\{x\})$ sont vraies.
Or en F.B.p.45 $t \in E/R \Rightarrow t \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists x)(x \in t)$. D'ailleurs, selon EI.48 exercice 4), on a $((\exists x)(x \in t \text{ et } (\forall x)(x \in t \Rightarrow P\{x\})) \Rightarrow (\exists x)(x \in t \text{ et } x \in t \Rightarrow P\{x\})$
$\Rightarrow (\exists x)(x \in t \text{ et } P\{x\})$. C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> 7.- Soient R une relation d'équivalence dans un ensemble E, $P'\{t\} \equiv (t \in E/R \text{ et } (\exists x)(x \in t \text{ et } P\{x\}))$ la relation déduite de $P\{x\}$ par passage au quotient, et p l'application canonique de E sur E/R. Si $P\{x\}$ est compatible avec la relation d'équivalence R, on a l'équivalence

$$(y \in E \text{ et } P'\{y:p\}) \Leftrightarrow (y \in E \text{ et } P\{y\}).$$

<u>Preuve</u>.- $y:p = \{y\}:G$, d'où

$$(y \in E \text{ et } P'\{y:p\}) \Leftrightarrow (y \in E \text{ et } \{y\}:G \in E/R \text{ et } (\exists x)(x \in \{y\}:G \text{ et } P\{x\}))$$
$$\Leftrightarrow (y \in E \text{ et } (\exists x)(R\{y,x\} \text{ et } P\{x\}) \Rightarrow (y \in E \text{ et } P\{y\})$$

Inversement, $y \in E \Leftrightarrow R\{y,y\} \Leftrightarrow (y,y) \in G \Leftrightarrow y \in \{y\}:G$, d'où
$(y \in E \text{ et } P\{y\}) \Rightarrow y \in E \text{ et } \{y\}:G \in E/R \text{ et } (\exists x)(x \in \{y\}:G \text{ et } P\{x\})$
$\Rightarrow (y \in E \text{ et } P'\{y:p\})$. C.Q.F.D.

5.- PARTIE SATUREE.- On dit qu'une partie A d'un ensemble E est saturée pour une relation d'équivalence R dans E si $x \in A$ est compatible par rapport à x avec $R\{x,y\}$.

<u>Théorème</u> 8.- Pour qu'une partie A de E soit saturée pour R, il faut et il suffit que, pour tout $x \in A$, la classe d'équivalence de x soit contenue dans A.
<u>Preuve</u>.- En effet, si A est une partie de E saturée pour R, on a $(x \in A \text{ et } R\{x,y\}) \Rightarrow y \in A$, soit $x \in A \Rightarrow (R\{x,y\} \Rightarrow y \in A)$, soit $x \in A \Rightarrow (y \in \{x\}:G \Rightarrow y \in A)$, soit $x \in A \Rightarrow \{x\}:G \subset A$. C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u>.- Pour qu'un ensemble soit saturé par une relation d'équivalence R, il faut et il suffit qu'il soit réunion d'un ensemble de classes d'équivalence suivant R.
<u>Preuve</u>.- Soit $x \in A$ avec $A \subset E$, alors $x \in \{x\}:G$ est vraie, d'où $\{x\} \subset \{x\}:G$.
Si A est saturé par R, $\{x\}:G \subset A$, et l'on a

$$A = \bigcup_{x \in A}\{x\} \subset \bigcup_{x \in A}\{x\}:G \subset A, \text{ d'où } \bigcup_{x \in A}\{x\}:G = A.$$

Inversement si $\bigcup_{x \in A}\{x\}:G = A$, nécessairement $x \in A \Rightarrow \{x\}:G \subset A$, donc A est saturé par la relation d'équivalence R. C.Q.F.D.

<u>Lemme</u> 1.- Soient G le graphe d'une relation d'équivalence R dans E ; p l'application canonique de E sur E/R, P son graphe. Compte tenu de la convention d'écriture faite en N.B IV;1, on a les égalités suivantes :
$\{x\}:G = \{x\}:P:\overset{-1}{P} = \{x:p\}:\overset{-1}{P} = \{\{x\}:G\}:\overset{-1}{P} = \{x\}:p:\overset{-1}{p} = \{x:p\}:\overset{-1}{p} = \{\{x\}:G\}:\overset{-1}{p}$.

<u>Preuve</u>.- On a vu que la classe d'équivalence de $x \in E$ est la coupe de G suivant x, à savoir une partie de E désignée par $\{x\}:G$.
L'application canonique p de E sur E/R est la correspondance $p = (E,P,E/R)$ où P est le graphe fonctionnel formé des couples $(x,\{x\}:G)$ tels que $x \in E$, $\{x\}:G \in E/R$ et $x:p = \{x\}:G$. Sa correspondance réciproque est $\overset{-1}{p} = (E/R,\overset{-1}{P},E)$, elle a pour graphe $\overset{-1}{P}$ formé des couples réciproques $(\{x\}:G,x)$. Ainsi la coupe de $\overset{-1}{p}$ suivant l'élément $\{x\}:G$ de E/R se note $\{\{x\}:G\}:\overset{-1}{p} = \{x:p\}:\overset{-1}{p} = \{x\}:p:\overset{-1}{p}$; c'est une partie de E dont les éléments ont pour classe d'équivalence $\{x\}:G$, soit $\{x\}:G$ selon le théorème 4. Donc $\{x\}:p:\overset{-1}{p} = \{x\}:G$.

<u>Théorème</u> 9.- La condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie A de E soit saturée pour une relation d'équivalence R dans E est $A = A:p:\overset{-1}{p}$.

<u>Preuve</u>.- Si A est saturé pour R, pour tout $x \in A$, $\{x\}:G \subset A$, et compte tenu du lemme précédent $\{x\}:p:\overset{-1}{p} \subset A$, par suite aussi $A:p:\overset{-1}{p} \subset A$. Comme par ailleurs la remarque en EII.18 justifie l'inclusion inverse, l'égalité $A:p:\overset{-1}{p} = A$ en résulte.
Réciproquement, soit $A = A:p:\overset{-1}{p}$. Comme pour tout $x \in A$, $x:p$ est élément de $\{x\}:p$ donc de $A:p$, on a $\{x:p\} \subset A:p$; et comme $x:p = x:p:\overset{-1}{p}$, on a $x:p \subset A:p:\overset{-1}{p} = A$. C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u>.- Les parties de la forme $B:\overset{-1}{p}$, où $B \subset E/R$, sont saturées pour R.
<u>Preuve</u>. En effet, $(A = B:\overset{-1}{p}) \Rightarrow (A:p = B:\overset{-1}{p}:p)$. Or p étant une surjection de E sur E/R, selon la remarque en EII.18, $B:\overset{-1}{p}:p = B$ pour toute partie B de E/R. Par suite, pour $A = B:\overset{-1}{p}$, on a $A:p = B$, puis $A = B:\overset{-1}{p} = A:p:\overset{-1}{p}$ ∎

<u>Théorème</u> 10.- Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de parties saturées de E, les ensembles $\bigcup_{i\in I} X_i$ et $\bigcap_{i\in I} X_i$ sont saturés.

<u>Preuve</u>.- En effet EII.25 P.3, pour la correspondance $p:\overset{-1}{p}$, donne l'égalité $(\bigcup_{i\in I} X_i):p:\overset{-1}{p} = \bigcup_{i\in I} X_i:p:\overset{-1}{p}$. Or, selon le théorème 9, $X_i:p:\overset{-1}{p} = X_i$; d'où $(\bigcup X_i):p:\overset{-1}{p} = \bigcup X_i$, et selon ce même théorème $\bigcup X_i$ est saturé.

De même, selon le théorème 9, $\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I} X_i p:\overset{-1}{p} = (\bigcap_{i\in I} X_i:p):\overset{-1}{p}$ selon EII.25 P.4. Or, selon le corollaire p.7, ce dernier terme est saturé puisque $\bigcap_{i\in I} X_i:p \subset X_i:p \subset E/R$. C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> 11.- Si $A = B:\overline{p}^1$ est une partie saturée de E, il en est de même de son complémentaire $\complement_E A$.

<u>Preuve</u>.- $\complement_E A = E - B:\overline{p}^1 = E/R:\overline{p}^1 - B:\overline{p}^1 = (E/R - B):\overline{p}^1$ selon EII.27 P.6. Mais ce dernier terme est saturé puisque $E/R - B \subset E/R$, selon le corollaire précédent p.7. C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> 12.- Soit A une partie quelconque de E, $A:p:\overline{p}^1$ est "la plus petite" partie saturée de E contenant A.

<u>Preuve</u>.- Selon EII.12, A est incluse dans l'ensemble $A:p:\overline{p}^1$ qui est saturé d'après le corollaire précédent. Inversement, si une partie saturée S de E contient A, on a $S = S:p:\overline{p}^1$ et $A \subset S$, d'où $A:p:\overline{p}^1 \subset S:p:\overline{p}^1 = S$ selon EII.10 P.2. Par conséquent $A:p:\overline{p}^1$ est bien la plus petite partie saturée de E contenant A. Elle est appelée le <u>saturé</u> de A.

<u>Théorème</u> 13.- Le saturé d'une partie de E est égal à la réunion des classes d'équivalence des éléments de celle-ci.

<u>Preuve</u>.- En effet, le saturé d'un ensemble A est l'image de A par la correspondance $p\circ\overline{p}^1$, soit $A:p:\overline{p}^1 = \{y \mid (\exists x)(x \in A \text{ et } (x,y) \in P\circ\overline{P}^1)\}$,
où $(x,y) \in P\circ\overline{P}^1 \Leftrightarrow (\exists u)((x,u) \in P \text{ et } (y,u) \in P)$
avec $(x,u) \in P \Leftrightarrow (u = \{x\}:G \text{ et } x \in E)$, $(y,u) \in P \Leftrightarrow (u = \{y\}:G \text{ et } y \in E)$
D'où $A:p:\overline{p}^1 = \{y \mid (\exists x)(x \in A \text{ et } \{x\}:G = \{y\}:G \text{ et } x \in E \text{ et } y \in E)\}$ = (selon EII.41 C55) $= \{y \mid (\exists x)(x \in A \text{ et } R\{x,y\})\} = \{y \mid (\exists x)(x \in A \text{ et } y \in \{x\}:G)\}$
$= \bigcup_{x \in A} \{x\}:G$ selon EII.22 D.1. C.Q.F.D.

N.B.- Lorsque $A \equiv \{x\}$, on obtient le lemme 1, à savoir que $\{x\}:p:\overline{p}^1 = \{x\}:G$. En effet, selon COR p.6, on a

$$\{y \mid (\exists z)(z \in \{x\} \text{ et } y \in \{z\}:G)\} = \{y \mid y \in \{x\}:G\} = \{x\}:G.$$

<u>Graphe compatible avec une relation d'équivalence dans un ensemble</u>.- Soient R une relation d'équivalence dans un ensemble E, et F un graphe ayant sa première projection incluse dans E. Dans ces conditions on dit que F est compatible avec la relation R si la relation $(x,y) \in F$ est compatible par rapport à x avec la relation $R\{x,x'\}$; donc si l'implication $((x,y) \in F \text{ et } R\{x,x'\}) \Rightarrow (x',y) \in F$ est vraie. Or l'équivalence $(x,y) \in F \Leftrightarrow x \in \{x \mid (x,y) \in F\}$ montre que la seconde coupe de F suivant y est saturée pour R ; elle est donc réunion d'un ensemble de classes d'équivalence suivant R.

6.- APPLICATION COMPATIBLE AVEC UNE RELATION D'EQUIVALENCE DANS UN ENSEMBLE. Soient R une relation d'équivalence dans un ensemble E, et f une application définie dans E. On dit que f est compatible avec la relation R si l'égalité $y = x{:}f$ est compatible par rapport à x avec la relation $R\{x,x'\}$; donc si l'implication $(R\{x,x'\}$ et $y = x{:}f) \Rightarrow y = x'{:}f$ est vraie. Alors, selon EI.23 C3, l'implication $R\{x,x'\} \Rightarrow (x{:}f = x'{:}f)$ l'est aussi et réciproquement. Ainsi la restriction de f à toute classe d'équivalence est une application constante ; f est constante sur toute classe d'équivalence de x suivant R. Tenant compte de la réflexivité d'une relation d'équivalence dans un ensemble, ce qui précède s'énonce encore :

<u>Théorème</u> 14.- Une application f définie dans E est compatible avec une relation d'équivalence R dans E si et seulement si R implique la relation d'équivalence dans E associée à f.

D'ailleurs la proposition P.9 a) COR p.20 s'énonce aussi :

<u>Théorème</u> 15.- Soient deux applications f, g définies dans un ensemble E. Pour qu'il existe une application h telle que $g = f{\circ}h$, il faut et il suffit que la relation d'équivalence dans E associée à f implique celle qui est associée à g. En outre h est unique si f est surjective. Elle est injective si f est surjective et si les deux relations d'équivalence associées à f et g sont équivalentes.

Plus particulièrement, compte tenu de l'équivalence (1) p.3, résulte le critère suivant :

C57.- Soient R une relation d'équivalence dans E, et p l'application canonique de E sur E/R. Pour qu'une application f de E dans F soit compatible avec R, il faut et il suffit que f puisse se mettre sous la forme $p{\circ}h$, où h est une application de E/R dans F uniquement déterminée par f. Si s est une section associée à p, on a $h = s{\circ}f$. On dit que h est l'<u>application déduite</u> de f par passage au quotient suivant R.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ E/R \arrow[rr, "h"] & & F \end{tikzcd}$$

7.- DECOMPOSITION CANONIQUE D'UNE APPLICATION.- Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Manifestement l'application f est compatible avec la relation d'équivalence $R\{u,v\} \equiv (u \in E$ et $v \in E$ et $u{:}f = v{:}f)$ qui lui est associée, vue l'équivalence $R\{u,v\} \Leftrightarrow (u \in E$ et $v \in E$ et $u{:}f = v{:}f)$. De là, l'application h déduite de f par passage au quotient suivant R est une application injective de E/R dans F selon le théorème 15.

Si A désigne l'image de E par f, l'application de E dans A déduite de f par passage au sous ensemble A de F (EII.15) est surjective. Selon C57 elle se met aussi sous la forme $p{\circ}k$, où k est une application de E/R dans

A, uniquement déterminée par f. Selon EII.19 Th.1 d), l'application k est surjective. Or comme précédemment k est injective. Elle est donc bijective. Par conséquent, si j est l'injection canonique de A dans F, et p l'application canonique de E sur E/R, on a $f = p \circ h$, avec $h = (E/R, H, F) = (E/R, H, A) \circ (A, \Delta, F) = k \circ j$, d'où $f = p \circ k \circ j$.

8.- APPLICATION COMPATIBLE AVEC DEUX RELATIONS D'EQUIVALENCE.- Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F, R et S des relations d'équivalence dans E et F respectivement, u et v les applications canoniques respectives de E sur E/R et de F sur F/S. On dit que f est compatible avec les relations d'équivalence R et S si $f \circ v$ est compatible avec R. Alors, selon la relation (1), on a $(x \in E \text{ et } x' \in E \text{ et } x{:}u = x'{:}u) \Leftrightarrow R\{x,x'\} \Rightarrow$ $(x \in E \text{ et } x' \in E \text{ et } x{:}f \circ v = x'{:}f \circ v) \Rightarrow (x{:}f \in F \text{ et } x'{:}f \in F \text{ et } x{:}f{:}v = x'{:}f{:}v)$ $\Leftrightarrow S\{x{:}f, x'{:}f\}$, la dernière équivalence résultant de ce que v est l'application canonique de F sur F/S.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "f \circ v"] & F \arrow[d, "v"] \\ E/R \arrow[r, "h"] & F/S \end{tikzcd}$$

L'application h de E/R dans F/S déduite de $f \circ v$ par passage au quotient suivant R s'appelle l'application déduite de f par passage aux quotients suivant R et S ; elle est caractérisée par l'égalité $f \circ v = u \circ h$.

9.- IMAGE RECIPROQUE D'UNE RELATION D'EQUIVALENCE ; RELATION D'EQUIVALENCE INDUITE.- Soient φ une application d'un ensemble E dans un ensemble F, et S une relation d'équivalence dans F. Alors il existe dans E une relation d'équivalence $R\{x,y\}$, appelée <u>image réciproque</u> de S par φ, identique à la conjonction $(S\{x{:}\varphi, y{:}\varphi\} \text{ et } x \in E \text{ et } y \in E)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi \circ u"'] & F \arrow[d, "u"] \\ & F/S \end{tikzcd}$$

Elle est équivalente à la relation d'équivalence associée à l'application $\varphi \circ u$, où u désigne l'application canonique de F sur F/S. En effet, compte tenu de l'implication $x \in E \Rightarrow x{:}\varphi \in F$, on a $(x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } S\{x{:}\varphi, y{:}\varphi\}) \Leftrightarrow$ $(x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } x{:}\varphi \in F \text{ et } y{:}\varphi \in F \text{ et } x{:}\varphi{:}u = y{:}\varphi{:}u) \Leftrightarrow$ $(x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } x{:}\varphi \circ u = y{:}\varphi \circ u) \Leftrightarrow R\{x,y\}$.

<u>Théorème</u> 16.- La classe d'équivalence de x suivant $R\{x,y\}$ (l'image réciproque de S par une application φ) est l'image réciproque par φ de la classe d'équivalence de $x{:}\varphi$ suivant S.

<u>Preuve</u>.- Soient G et H les graphes respectifs des relations R, S ; alors $\{x\}{:}G$, $\{x{:}\varphi\}{:}H$ sont les classes d'équivalence de x suivant R et de $x{:}\varphi$ suivant S ; et l'on a les équivalences

$$x' \in \{x\}{:}G \Leftrightarrow R\{x,x'\} \quad , \quad (x \in E \text{ et } z \in \{x{:}\varphi\}{:}H) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } S\{x{:}\varphi, z\}).$$

Vue que l'image réciproque d'un ensemble Z par une application φ définie sur E est $\{x' \mid (\exists z)(z \in Z \text{ et } x' \in E \text{ et } z = x'{:}\varphi)\}$, l'image réciproque de

$\{x:\varphi\}:H$, où $x \in E$, par φ est $\{x' \mid (\exists z)(S\{x:\varphi,z\}$ et $x \in E$ et $x' \in E$ et $z = x':\varphi)\}$
Son égalité avec $\{x\}:G$ résulte des équivalences
$(\exists z)(S\{x:\varphi,z\}$ et $x \in E$ et $x' \in E$ et $z = x':\varphi) \Leftrightarrow (S\{x:\varphi,x':\varphi\}$ et $x \in E$ et $x' \in E)$
$\Leftrightarrow R\{x,x'\} \Leftrightarrow x' \in \{x\}:G$. C.Q.F.D.

En particulier, si A est une partie de E et j l'injection canonique de A dans E (Voir EII.17), l'image réciproque d'une relation d'équivalence R dans E par l'injection j s'appelle la <u>relation d'équivalence induite</u> par R dans A, et se note R_A. Précisément compte tenu de l'équivalence $(x \in A$ et $x:j = y) \Leftrightarrow (x,y) \in \Delta_A$ justifiant la conjonction $(x \in A$ et $x:j = x)$, on a $R_A\{x,x'\} \Leftrightarrow (R\{x:j,x':j\}$ et $x \in A$ et $x' \in A) \Leftrightarrow (R\{x,x'\}$ et $x \in A$ et $x' \in A)$.

<u>Théorème</u> 17.- Les classes d'équivalence suivant R_A sont les traces sur A des classes d'équivalence suivant R qui rencontrent A.

<u>Preuve</u>.- Soit G le graphe de la relation R. Si l'égalité $\{x\}:G = \{y\}:G$ est vraie, avec $y \notin A$, on a $R\{x,x'\} \Leftrightarrow x' \in \{x\}:G \Leftrightarrow x' \in \{y\}:G \Leftrightarrow R\{y,x'\}$, d'où $R_A\{x,x'\} \Leftrightarrow ((R\{y,x'\}$ et $x' \in A)$ et $x \in A) \Leftrightarrow (x' \in \{y\}:G \cap A$ et $x \in \{y\}:G \cap A)$ compte tenu de ce que l'égalité précédente et $x \in \{x\}:G$ justifient $x \in \{y\}:G$

<u>Théorème</u> 18.- L'injection canonique j de A dans E est compatible avec les relations d'équivalence R_A et R.

<u>Preuve</u>.- Soit f l'application canonique de E sur E/R. Compte tenu de la conjonction $(x \in A$ et $x:j = x)$, on a les implications
$R_A\{x,x'\} \Leftrightarrow (R\{x,x'\}$ et $x \in A$ et $x' \in A) \Leftrightarrow$
$(x:f = x':f$ et $x \in A$ et $x:j = x$ et $x' \in A$ et $x':j = x') \Rightarrow (x:j:f = x':j:f)$.
Ainsi $j \circ f$ est compatible avec R_A. C.Q.F.D.

<u>Théorème</u> 19.- L'application h de A/R_A dans E/R déduite de j par passage aux quotients suivant R_A et R est injective.

<u>Preuve</u>.- Soit g l'application canonique de A sur A/R_A.
L'égalité $g \circ h = j \circ f$ résulte du théorème 18.
Par suite, on a les équivalences :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & E \arrow[d, "f"] \\ A/R_A \arrow[r, dashed, "h"] & E/R \end{tikzcd}$$

$(x \in A$ et $x' \in A$ et $x:g \circ h = x':g \circ h) \Leftrightarrow (x \in A$ et $x' \in A$ et $x:j \circ f = x':j \circ f)$
$\Leftrightarrow (x \in A$ et $x' \in A$ et $x:f = x':f)$ compte tenu de $(u \in A$ et $u:j = u)$,
$\Leftrightarrow (R\{x,x'\}$ et $x \in A$ et $x' \in A) \Leftrightarrow R_A\{x,x'\} \Leftrightarrow (x \in A$ et $x' \in A$ et $x:g = x':g)$.

Compte tenu de ce que g est surjective, et de l'équivalence
$(x \in A$ et $x' \in A$ et $x:g = x':g) \Leftrightarrow (x \in A$ et $x' \in A$ et $x:j \circ f = x':j \circ f)$,
selon le théorème 15, h est injective. C.Q.F.D.

N.B.- De $g \circ h = j \circ f$ résulte $A/R_A:h = A:j \circ f = A:f$. Alors, si k est l'application déduite de h par passage aux sous ensembles A/R_A et $A:f$ (Voir EII.15), k est bijective. k et son application réciproque sont dites <u>canoniques</u>.

10.- QUOTIENTS DE RELATIONS D'EQUIVALENCE.- Soient, dans un ensemble E, deux relations d'équivalence par rapport aux lettres x,y. On dit que S est plus fine que R si l'implication $S \Rightarrow R$ est vraie. Dans cette éventualité, COR.p.26, le graphe de S est inclus dans celui de R.

Théorème 20.- Soient R, S deux relations d'équivalence dans un ensemble. Si S est plus fine que R, toute classe d'équivalence suivant R est saturée pour S.

Preuve.- Si $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, et $S \Rightarrow B$ sont vraies, alors $A \Rightarrow (S \Rightarrow C)$ l'est aussi. Or, $R\{x,y\} \Rightarrow (R\{y,z\} \Rightarrow R\{x,z\})$, et $S \Rightarrow R$; donc $R\{x,y\} \Rightarrow (S\{y,z\} \Rightarrow R\{x,z\})$.
Désignant par U le graphe d'une relation U, il vient :
$y \in \{x\}:R \Rightarrow (z \in \{y\}:S \Rightarrow z \in \{x\}:R) \Rightarrow \{y\}:S \subset \{x\}:R$.
Donc $(\forall x)(\forall y)(y \in \{x\}:R \Rightarrow \{y\}:S \subset \{x\}:R)$. Alors le théorème 8 achève cette preuve.

Soient R et S deux relations d'équivalence dans un même ensemble E, telles que S soit plus fine que R ; et $f = (E,F,E/R)$, $g = (E,G,E/S)$ les applications canoniques de E sur E/R et de E sur E/S.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & E/R \\ E/S \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Le théorème 14 indique que la fonction f est compatible avec S car $S \Rightarrow R \Leftrightarrow (x \in E$ et $y \in E$ et $x:f = y:f)$; alors la fonction h déduite de f par passage au quotient suivant S est une application de E/S sur E/R.
La relation d'équivalence notée $R/S \equiv (u \in E/S$ et $v \in E/S$ et $u:h = v:h)$ est associée à h dans E/S et s'appelle le quotient de R par S.

Théorème 21.- Soient R, S deux relations d'équivalence dans un ensemble E, telles que S soit plus fine que R, et g l'application canonique de E sur E/S. Dans ces conditions on a les deux propriétés suivantes :
a) Les relations $x \equiv y(\mathrm{mod}\ R)$, $(x \in E$ et $y \in E$ et $x:g \equiv y:g(\mathrm{mod}\ R/S))$ sont équivalentes.
b) L'image par g de la classe d'équivalence de $x \in E$ suivant R est égale à la classe d'équivalence de $x:g$ suivant R/S.

Preuve.- a) L'équivalence proposée $R\{x,y\} \Leftrightarrow (x \in E$ et $y \in E$ et $R/S\{x:g,y:g\})$ consiste en l'équivalence $(x \in E$ et $y \in E$ et $x:f = y:f) \Leftrightarrow$

$(x \in E$ et $y \in E$ et $x:g \in E/S$ et $y:g \in E/S$ et $x:g:h = y:g:h)$.

Elle résulte en effet de l'implication $u \in E \Rightarrow u:g \in E/S$ et de $f = g \circ h$. C.QFD.
Elle sert de lemme à la seconde partie du théorème.

b) Soit U le graphe d'une relation d'équivalence U dans un ensemble.
L'image par g de la classe d'équivalence de x suivant R est $\{x\}:R:g = \{v \mid (\exists\lambda)(\lambda \in \{x\}:R$ et $(\lambda,v) \in G)\}$, avec $(\lambda,v) \in G \Leftrightarrow (\lambda \in E$ et $v = \lambda:g)$; soit $\{x\}:R:g = \{v \mid (\exists\lambda)(R\{x,\lambda\}$et $\lambda \in E$ et $v = \lambda:g)\}$. D'où résulte l'équivalence

$$v \in \{x\} : ⓡ : g \Leftrightarrow (\exists\lambda)(R\{x,\lambda\} \text{ et } \lambda \in E \text{ et } v = \lambda : g).$$

Compte tenu de la première partie du théorème, on a

$$\begin{aligned} v \in \{x\} : ⓡ : g &\Leftrightarrow (\exists\lambda)(x \in E \text{ et } \lambda \in E \text{ et } R/S\{x:g, \lambda:g\} \text{ et } v = \lambda:g) \\ &\Leftrightarrow ((\exists\lambda)(\lambda \in E \text{ et } v = \lambda:g) \text{ et } x \in E \text{ et } R/S\{x:g, v\}). \end{aligned}$$

Or $(\exists\lambda)(\lambda \in E \text{ et } v = \lambda:g) \Leftrightarrow (\exists\lambda)((\lambda,v) \in G) \Leftrightarrow v \in E/S$; d'où

$$v \in \{x\} : ⓡ : g \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } R/S\{x:g, v\}) \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } v \in \{x:g\} : (R/S))$$

Il en résulte bien $\{x\} : ⓡ : g = \{x:g\} : (R/S)$, pour $x \in E$. C.Q.F.D.

Etant donné que la surjection h est compatible avec la relation d'équivalence R/S qui lui est associée, soit h_1 l'application canonique de E/S sur $(E/S)/(R/S)$; alors l'application h_2 déduite de h par passage au quotient suivant R/S est une bijection de $(E/S)/(R/S)$ en E/R.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "g"'] & & E/R \\ E/S \arrow[urr, "h"] \arrow[rr, "h_1"] & & (E/S)/(R/S) \arrow[u, "h_2"'] \end{tikzcd}$$

Inversement, soient T une relation d'équivalence dans E/S et $R\{x,y\} \equiv (x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } T\{x:g, y:g\})$ la relation d'équivalence dans E, image réciproque par g de la relation T. Alors l'implication $S\{x,y\} \Rightarrow R\{x,y\}$ est vraie. En effet, soit k l'application canonique de E/S sur $(E/S)/T$.

$S\{x,y\} \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } x:g = y:g) \Rightarrow$

$(x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } (x:g \in E/S \text{ et } y:g \in E/S \text{ et } x:g:k = y:g:k)) \Leftrightarrow$

$(x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } T\{x:g, y:g\}) \equiv R\{x,y\}$. C.Q.F.D.

Par conséquent, ce qui précède s'applique aux relations d'équivalence $S\{x,y\}$, $R\{x,y\} \equiv (x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } T\{x:g, y:g\})$ et l'on a donc

$(x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } T\{x:g,y:g\}) \equiv R\{x,y\} \Leftrightarrow (x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } R/S\{x:g,y:g\})$.

Il en résulte $T\{u,v\} \Leftrightarrow R/S\{u,v\}$ pour $u \in E/S$ et $v \in E/S$. (COR. exercice 14 p.26)

En effet, soit $P\{x:f, y:g\} \equiv (T\{x:g,y:g\} \Leftrightarrow R/S\{x:g,y:g\})$; alors

$$\begin{aligned} &(\forall x)(\forall y)((x \in E \text{ et } y \in E) \Rightarrow P\{x:f, y:g\}) \\ \Rightarrow\ &(\forall x)(\forall y)((x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } x:f = u \text{ et } y:g = v) \Rightarrow P\{u,v\}) \\ \Leftrightarrow\ &(\forall x)((\exists y)(x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } x:f = u \text{ et } y:g = v) \Rightarrow P\{u,v\}) \\ \Leftrightarrow\ &((\exists x)(\exists y)(x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } x:f = u \text{ et } y:g = v) \Rightarrow P\{u,v\}) \\ \Leftrightarrow\ &((u \in E/S \text{ et } v \in E/S) \Rightarrow P\{u,v\}) \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

11.- RELATIONS D'EQUIVALENCE STRICTES.- Dans l'extension de l'étude précédente, j'appelle relation d'équivalence stricte $R\{x,y\}$ une relation symétrique, transitive et collectivisante (par rapport à chacune de ses lettres). Par conséquent, elle n'est pas nécessairement réflexive. Autrement dit la condition a) se modifie comme suit : Pour toute valeur de la lettre x la relation $R\{x,y\}$ lui associe une classe d'objets équivalents (Voir F.B.9)p46) $\mathcal{C}\{x\} \equiv \tau_z(\forall y)((y \in z) \Leftrightarrow R\{x,y\})$ entrant dans l'équivalence $y \in \mathcal{C}\{x\} \Leftrightarrow R\{x,y\}$. De la sorte, $\mathcal{C}\{x\}$ est formée des termes K qui vérifient $R\{x,K\}$ et s'appelle la "classe d'équivalence de x suivant R". En particulier $R\{x,x\} \Leftrightarrow x \in \mathcal{C}\{.\}$.

N.B.- S'il existe un terme S tel que $\mathcal{C}\{S\} = \emptyset$, alors $R\{S,y\}$ est fausse ; pour cette raison la condition "pour tout x tel que $\mathcal{C}\{x\} \neq \emptyset$" interviendra à plusieurs reprises.

<u>Théorème</u> 1.- Si deux classes d'équivalence $\mathcal{C}\{x\}$, $\mathcal{C}\{y\}$ d'une relation d'équivalence(stricte) R ont un élément commun z, elles sont égales.

<u>Preuve</u>.- Dans le contexte de l'énoncé $R\{x,z\}$, $R\{y,z\}$ sont vraies, donc aussi $R\{x,y\}$. Compte tenu de l'implication

(1) $\quad R\{x,y\} \Rightarrow (R\{x,u\} \Leftrightarrow R\{y,u\})$,

les relations $R\{x,u\}$, $R\{y,u\}$ sont équivalentes ; d'où l'équivalence $u \in \mathcal{C}\{x\} \Leftrightarrow u \in \mathcal{C}\{y\}$ qui exprime l'égalité $\mathcal{C}\{x\} = \mathcal{C}\{y\}$ des classes d'équivalence considérées.

<u>Corollaire</u>.- $R\{x,y\} \Rightarrow (\mathcal{C}\{x\} = \mathcal{C}\{y\})$.

En désignant par $\theta\{x\} \equiv \tau_u R\{x,u\}$ le prétendant de la lettre u dans la relation $R\{x,u\}$, en sorte que $(\exists y)R\{x,y\} \equiv R\{x,\theta\{x\}\}$, Bourbaki (1970) note, selon EI.38 S7, que

(2) $\quad R\{x,y\} \Rightarrow (\forall u)(R\{x,u\} \Leftrightarrow R\{y,u\}) \Rightarrow (\theta\{x\} = \theta\{y\})$.

Cependant l'implication (2) ne doit pas être confondue avec le corollaire précédent $R\{x,y\} \Rightarrow (\forall u)(u \in \mathcal{C}\{x\} \Leftrightarrow u \in \mathcal{C}\{y\}) \Leftrightarrow (\mathcal{C}\{x\} = \mathcal{C}\{y\})$; autrement dit il n'y a pas lieu d'égaler $\mathcal{C}\{x\}$ à $\theta\{x\}$ en raison de l'énoncé suivant :

<u>Théorème</u> 2.- x et le terme $\theta\{x\}$ associé à une relation d'équivalence(stricte) $R\{x,y\}$ sont éléments de la classe d'équivalence de x suivant R lorsqu'elle n'est pas vide.

<u>Preuve</u>.- En effet, pour tout x tel que $\mathcal{C}\{x\} \neq \emptyset$, les équivalences
$\mathcal{C}\{x\} \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists y)(y \in \mathcal{C}\{x\}) \Leftrightarrow (\exists y)R\{x,y\} \equiv R\{x,\theta\{x\}\} \Leftrightarrow \theta\{x\} \in \mathcal{C}\{x\}$
montrent déjà, sous cette condition, que $\theta\{x\}$ est élément de $\mathcal{C}\{x\}$.

Evidemment, lorsque R est séparément collectivisante en x ou y, $\mathcal{C}\{x\}$ est un terme (et non pas une classe) différent de $\theta\{x\}$ car sinon il serait élément de lui-même. (Voir F.B. observation p.27).

Comme de plus $(\exists y)R\{x,y\} \Leftrightarrow R\{x,x\} \Leftrightarrow x \in \mathscr{C}\{x\}$, sous la même condition, x est aussi élément de $\mathscr{C}\{x\}$. C.Q.F.D.

Corollaires.- Si la classe d'équivalence de x suivant R est non vide, les relations $R\{x,x\}$, $R\{x,\theta\{x\}\}$; $\theta\{x\} = \theta\{\theta\{x\}\} = \theta\{\theta\{\theta\{x\}\}\} = \ldots$ sont vraies.

Preuves.- Les équivalences $\mathscr{C}\{x\} \neq \emptyset \Leftrightarrow R\{x,\theta\{x\}\} \Leftrightarrow R\{x,x\}$ justifient les deux premières relations, et l'implication (2) les égalités qui suivent.

Théorème 3.- Les $\theta\{y\}$ des éléments y d'une classe d'équivalence, suivant une relation d'équivalence (stricte), sont égaux.

Preuve.- Cet énoncé est le syllogisme de l'implication $y \in \mathscr{C}\{x\} \Rightarrow \theta\{y\} = \theta\{x\}$ qui résulte de l'équivalence $y \in \mathscr{C}\{x\} \Leftrightarrow R\{x,y\}$ et de l'implication (2).

Par la suite, cette valeur commune des $\theta\{y\}$, pour tout y élément d'une même classe d'équivalence $\mathscr{C}$, est notée $\theta_{\mathscr{C}}$ et appelée l'étiquette de la classe $\mathscr{C}$. Evidemment, ceci entend que $\mathscr{C} \neq \emptyset$.

Théorème 4.- $\mathscr{C}\{x\}$ et $\theta\{x\}$ satisfont à la même équivalence :

$$R\{x,y\} \Leftrightarrow (R\{x,x\} \text{ et } R\{y,y\} \text{ et } \mathscr{C}\{x\} = \mathscr{C}\{y\})$$
$$R\{x,y\} \Leftrightarrow (R\{x,x\} \text{ et } R\{y,y\} \text{ et } \theta\{x\} = \theta\{y\}).$$

Preuve.- Les implications de gauche à droite résultent de ce que R est une relation d'équivalence, et des implications : $R\{x,y\} \Rightarrow \mathscr{C}\{x\} = \mathscr{C}\{y\}$ et (2).

Inversement, $\mathscr{C}\{x\} = \mathscr{C}\{y\} \Rightarrow (x \in \mathscr{C}\{x\} \Leftrightarrow x \in \mathscr{C}\{y\}) \Leftrightarrow (R\{x,x\} \Leftrightarrow R\{x,y\})$, d'où $(\mathscr{C}\{x\} = \mathscr{C}\{y\} \text{ et } R\{x,x\}) \Rightarrow (R\{x,x\} \Leftrightarrow R\{x,y\} \text{ et } R\{x,x\}) \Rightarrow R\{x,y\}$. C.Q.F.D.

De même, $\theta\{x\} = \theta\{y\} \Rightarrow (R\{x,\theta\{x\}\} \Leftrightarrow R\{x,\theta\{y\}\})$, et $R\{u,u\} \Leftrightarrow R\{u,\theta\{u\}\}$, d'où
$(R\{x,x\} \text{ et } R\{y,y\} \text{ et } \theta\{x\} = \theta\{y\}) \Rightarrow$
$(R\ x,\theta\{x\}\} \text{ et } R\{y,\theta\{y\} \text{ et } R\{x,\theta\{x\}\} \Leftrightarrow R\{x,\theta\{y\}\}) \Rightarrow$
$(R\{x,\theta\{y\}\} \text{ et } R\{y,\theta\{y\}\}) \Rightarrow R\{x,y\}$. C.Q.F.D.

Remarque.- L'équivalence du théorème prédédent n'est pas analogue à la définition d'une relation d'équivalence stricte, car il n'en résulte pas que R est collectivisante ; mais à celle d'une relation d'équivalence.

Théorème 5.- Une relation d'équivalence (stricte) R est réflexive si les étiquettes de R forment un ensemble ω.

Preuve.- Dans la classe d'équivalence $\mathscr{C}\{x\}$ formée des termes K qui vérifient $R\{x,K\}$, on a $\theta\{x\} = \theta\{K\} = \theta_{\mathscr{C}} \in \omega$ et $\mathscr{C}\{x\} = \mathscr{C}\{\theta\{x\}\} \equiv \mathscr{C}_\theta$.
Soit $E = \bigcup_{\theta \in \omega} \mathscr{C}_\theta$, alors R est réflexive dans E. En effet :
d'une part $x \in E \Leftrightarrow (\exists\theta)(\theta \in \omega \text{ et } x \in \mathscr{C}_\theta) \Leftrightarrow (\exists\theta)(\theta \in \omega \text{ et } R\{\theta,x\}) \Rightarrow R\{x,x\}$;
et d'autre part $R\{x,x\} \Leftrightarrow x \in \mathscr{C}\{x\}$ avec $\mathscr{C}\{x\} = \mathscr{C}\{\theta\{x\}\} \subset E$, soit $(\forall u)(u \in \mathscr{C}\{x\} \Rightarrow u \in E)$, et en particulier $x \in \mathscr{C}\{x\} \Rightarrow x \in E$, d'où $R\{x,x\} \Leftrightarrow x \in \mathscr{C}\{x\} \Rightarrow x \in E$. C.Q.F.D.

12.- RELATIONS D'EQUIVALENCE.- En axiomatisant les classes par des relations convenables, les théorèmes et corollaires précédents, énoncés pour les relations d'équivalence strictes, s'étendent aux relations d'équivalence (symétrique, transitive). Précisément, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ désignant des classes on aura : $y \in \mathcal{C} \Leftrightarrow R\{y\}$, $\mathcal{C} \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists y)(y \in \mathcal{C})$
$(\forall u)(u \in \mathcal{A} \Rightarrow u \in \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, $(\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}) \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B}$.

En égard au théorème 5, l'énoncé suivant est trivial ou non selon que les étiquettes de la relation d'équivalence R forment un ensemble ou une classe.

Théorème 6.- Soient R une relation d'équivalence, T un terme ne contenant pas la lettre x et $\circledsim\{T\} = \{z \mid (\exists x)(z = \theta\{x\}$ et $x \in T)\}$ l'ensemble des objets de la forme $\theta\{x\}$ pour $x \in T$, c'est à dire l'ensemble des étiquettes des "classes" d'équivalence de l'ensemble T suivant R.
La relation $(\exists x)(R\{x,x\}$ et $z = \theta\{x\})$ est collectivisante en z si
$(\forall y)(R\{y,y\} \Rightarrow (\exists x)(x \in T$ et $R\{x,y\}))$.

Preuve.- $(\exists x)(R\{x,x\}$ et $z = \theta\{x\}) \Rightarrow (\exists x)(z = \theta\{x\}$ et $(\exists u)(u \in T$ et $R\{u,x\}))$ $\Rightarrow (\exists x)(z = \theta\{x\}$ et $(\exists u)(u \in T$ et $\theta\{u\} = \theta\{x\})) \Leftrightarrow (\exists x)(z = \theta\{x\}$ et $\theta\{x\} \in \circledsim)$ $\Leftrightarrow (\exists x)(z = \theta\{x\}$ et $z \in \circledsim) \Leftrightarrow ((\exists x)(z = \theta\{x\})$ et $z \in \circledsim)$, ce qui, selon EII.5 C51, achève cette preuve.

Théorème 7.- Soit R une relation d'équivalence, $R\{x,y\} \Rightarrow R\{\theta\{x\},y\}$.

Preuve.- $R\{x,y\} \Rightarrow (\exists y)R\{x,y\} \equiv R\{x,\theta\{x\}\}$
D'où $R\{x,y\} \Rightarrow (R\{x,y\}$ et $R\{x,\theta\{x\}\}) \Rightarrow R\{\theta\{x\},y\}$. C.Q.F.D.

Résolution des exercices en EII.51 §6 sur les relations d'équivalence.

1) Pour que G soit le graphe d'une équivalence dans E, il faut et il suffit que a) $pr_1 G = pr_2 G = E$; b) $G \circ \overset{-1}{G} \circ G = G$; c) $x \in E \Rightarrow (x,x) \in G$, soit $\Delta_E \subset G$.

En effet, selon EII.41 P1, le graphe G d'une équivalence dans E vérifie les conditions nécessaires et suffisantes $E = pr_1 G$, $G = \overset{-1}{G}$, $G \circ G = G$, à partir desquelles on a bien a), b), c).

Inversement, puisque G est un graphe $(u,v) \in G \Rightarrow (u \in pr_1 G$ et $v \in pr_2 G)$; d'où, selon a) et c), $(u,v) \in G \Rightarrow (u \in E$ et $v \in E) \Rightarrow ((u,u) \in G$ et $(v,v) \in G)$.
On a donc successivement

$(u,v) \in G \Rightarrow ((u,u) \in G$ et $(u,v) \in G) \Rightarrow (\exists 1)((u,1) \in G$ et $(1,v) \in G) \Leftrightarrow (u,v) \in G \circ G$
$(u,v) \in G \Rightarrow ($ " $) \Rightarrow (\exists 1)((1,u) \in G$ et $(1,v) \in G) \Leftrightarrow (u,v) \in \overset{-1}{G} \circ G$
$(u,v) \in G \Rightarrow ((u,v) \in G$ et $(v,v) \in G) \Rightarrow (\exists 1)((u,1) \in G$ et $(v,1) \in G) \Leftrightarrow (u,v) \in G \circ \overset{-1}{G}$

Il en résulte les trois inclusions $G \subset G \circ G$, $G \subset \overset{-1}{G} \circ G$, $G \subset G \circ \overset{-1}{G}$;
puis, selon EII.13 ligne 3 et l'égalité b), les suivantes
$G \circ G \subset G \circ \overset{-1}{G} \circ G = G \subset G \circ G$, d'où $G = G \circ G$.
Enfin, par répétitions de EII.13 et selon EII.12 P3, on a
$G \subset \overset{-1}{G} \circ G \subset \overset{-1}{G} \circ G \circ \overset{-1}{G} = \overset{-1}{G} \subset G \circ \overset{-1}{G} \subset G \circ \overset{-1}{G} \circ G = G$, d'où $G = \overset{-1}{G}$. C.Q.F.D.

2) Si $G = G \circ \overset{-1}{G} \circ G$, alors $G \circ \overset{-1}{G}$, $\overset{-1}{G} \circ G$ sont des graphes d'équivalence dans $pr_1 G$, $pr_2 G$ respectivement.

En effet, $F = G \circ \overset{-1}{G}$ vérifie les trois conditions en EII.41 P1 :
De $F = G \circ \overset{-1}{G}$, on a $pr_1 F \subset pr_1 G$, et de $G = F \circ G$, on a $pr_1 G \subset pr_1 F$, d'où a).
De $F = G \circ \overset{-1}{G}$, on a $\overset{-1}{F} = G \circ \overset{-1}{G} = F$, soit b).
Enfin, $F \circ F = G \circ \overset{-1}{G} \circ G \circ \overset{-1}{G} = G \circ \overset{-1}{G} = F$, soit c)
De même, $\overset{-1}{G} \circ G$ est un graphe d'équivalence dans $pr_2 G$. C.Q.F.D.

3) Soient deux ensembles E, A, et R la relation d'équivalence associée à l'application $X \mapsto X \cap A$ de $\mathbb{P}(E)$ dans $\mathbb{P}(E)$. Il existe une bijection canonique de $\mathbb{P}(E \cap A)$ sur l'ensemble quotient $\mathbb{P}(E)/R$.

On a $R\{X,Y\} \equiv (X \in \mathbb{P}(E)$ et $Y \in \mathbb{P}(E)$ et $X \cap A = Y \cap A)$.
La classe d'équivalence de X est $\{X\}:G = \{Y | R\{X,Y\}\}$. Or, pour tout $X \in \mathbb{P}(E)$, en vérité, $(Y \in \mathbb{P}(E)$ et $X \cap A = Y \cap A) \Leftrightarrow (\exists \delta)(\delta \in \mathbb{P}(E-A)$ et $Y = (X \cap A) \cup \delta)$,
d'où $\{X\}:G = \{Y | (\exists \delta)(\delta \in \mathbb{P}(E-A)$ et $Y = (X \cap A) \cup \delta)\}$,
et $\mathbb{P}(E)/R = \{z | (\exists X)(X \in \mathbb{P}(E)$ et $z = \{X\}:G)\}$.
Soit p l'application canonique de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(E)/R$; alors, la bijection de $\mathbb{P}(E \cap A)$ sur $\mathbb{P}(E)/R$ est la restriction $p | E \cap A$ (EII.15).
Il est clair que si A est une partie de E, on peut changer $E \cap A$ en A.

4) Soit G le graphe d'une équivalence dans un ensemble E. Si $A \subset G$ et $pr_1 A = E$, on a $A \circ G = G$. Alors, si B est un graphe, $A \circ (G \cap B) = G \cap (A \circ B)$.

En effet, selon EII.41 P1, $A \circ G \subset G \circ G = G$. Comme d'autre part $pr_1 G = E$, on a $(x,y) \in G \Rightarrow x \in pr_1 G \Leftrightarrow x \in E \Leftrightarrow x \in pr_1 A \Leftrightarrow (\exists u)((x,u) \in A)$;
or $(x,u) \in A \Rightarrow (x,u) \in G \Leftrightarrow (u,x) \in G$ puisque G est symétrique, d'où
$(x,y) \in G \Rightarrow (\exists u)((x,u) \in A$ et $(u,x) \in G$ et $(x,y) \in G)$
$\Rightarrow (\exists u)((x,u) \in A$ et $(u,y) \in G) \Leftrightarrow (x,y) \in A \circ G$, soit $G \subset A \circ G$.
Il en résulte donc $G = A \circ G$. En outre, si B est un graphe, on a
$(x,y) \in A \circ (G \cap B) \Leftrightarrow (\exists u)((x,u) \in A$ et $(u,y) \in G$ et $(u,y) \in B) \Rightarrow$
$((x,y) \in A \circ G$ et $(x,y) \in A \circ B) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \circ G) \cap (A \circ B) = G \cap (A \circ B)$ puisque $(A \circ G) = G$.
ce qui prouve l'inclusion $A \circ (G \cap B) \subset G \cap (A \circ B)$. Inversement, on a aussi
$(x,y) \in G \cap (A \circ B) \Leftrightarrow ((x,y) \in G$ et $(\exists u)((x,u) \in A$ et $(u,y) \in B)) \Rightarrow$
$(\exists u)((x,u) \in A$ et $(u,x) \in G$ et $(x,y) \in G$ et $(u,y) \in B) \Rightarrow$
$(\exists u)((x,u) \in A$ et $(u,y) \in G$ et $(u,y) \in B) \Rightarrow (\exists u)((x,u) \in A$ et $(u,y) \in G \cap B) \Leftrightarrow$
$(x,y) \in A \circ (G \cap B)$, d'où $G \cap (A \circ B) \subset A \circ (G \cap B)$. C.Q.F.D.

5) L'intersection de deux graphes F, G d'équivalence dans un ensemble E est un graphe d'équivalence dans E car les propriétés de symétrie, transitivité et réflexivité des relations $(x,y) \in F$, $(x,y) \in G$ se transmettent à la relation $(x,y) \in F \cap G \equiv ((x,y) \in F$ et $(x,y) \in G)$.
De même la symétrie et la réflexivité se transmettent à la relation $(x,y) \in F \cup G \equiv ((x,y) \in F$ ou $(x,y) \in G)$ alors que la transitivité se compromet car $\big(((x,y) \in F$ ou $(x,y) \in G)$ et $((y,z) \in F$ ou $(y,z) \in G)\big) \Rightarrow$
$((x,z) \in F \cup G$ ou $((x,y) \in F$ et $(y,z) \in G)$ ou $((y,z) \in F$ et $(x,y) \in G))$.

Par exemple, pour $E = \{a,b,c\}$, avec $a \neq b \neq c \neq a$, les deux correspondances $\Gamma = (E,G,E)$, $\Gamma' = (E,G',E)$ ayant pour graphes
$G = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$, $G' = \{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c),(b,b)\}$
sont deux équivalences dans E telles que la réunion de leurs graphes
$G \cup G' = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(a,c),(c,a),(c,c)\}$ n'est pas le graphe d'une équivalence dans E. Précisément, le plus petit graphe d'une équivalence dans E ayant les éléments de $G \cup G'$ a aussi pour éléments les couples (b,c) et (c,b).

6) Soient G et H les graphes de deux équivalences dans un ensemble E. Pour que $G \circ H$ soit le graphe d'une équivalence dans E, il faut et il suffit que $G \circ H = H \circ G$; alors $G \circ H$ est l'intersection des graphes d'équivalence dans E qui contiennent G et H.

En effet, selon EII.41 P1, si G et H sont des graphes d'équivalence dans E, on prouve d'abord
la réflexivité de la relation $(x,y) \in G \circ H$ dans E par les équivalences
$x \in E \Leftrightarrow ((x,x) \in G \text{ et } (x,x) \in H) \Leftrightarrow (\exists 1)((x,1) \in G \text{ et } (1,x) \in H) \Leftrightarrow (x,x) \in G \circ H$;
et que E est l'ensemble de définition de $G \circ H$ car, d'une part, de ce qui précède $x \in E \Rightarrow x \in pr_1 G \circ H$, soit $E \subset pr_1 G \circ H$, et d'autre part $pr_1 G \circ H \subset pr_1 G = E$; puis, moyennant l'égalité (nécessaire et suffisante) $G \circ H = H \circ G$, on prouve ensuite la symétrie $G \circ H = (G \circ H)^{-1}$ par les équivalences
$(x,y) \in G \circ H \Leftrightarrow (\exists 1)((x,1) \in G \text{ et } (1,y) \in H) \Leftrightarrow (\exists 1)((1,x) \in G \text{ et } (y,1) \in H) \Leftrightarrow$
$(y,x) \in H \circ G \Leftrightarrow (x,y) \in (H \circ G)^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in (G \circ H)^{-1}$ puisque $G \circ H = H \circ G$
et l'égalité $(G \circ H) \circ (G \circ H) = G \circ H$ comme suit
$(G \circ H) \circ (G \circ H) = G \circ (H \circ G) \circ H = G \circ (G \circ H) \circ H = (G \circ G) \circ (H \circ H) = G \circ H$.

Tout graphe d'équivalence dans E qui contient G et H se met sous la forme $G \cup H \cup K$ et vérifie l'égalité $G \cup H \cup K = (G \cup H \cup K) \circ (G \cup H \cup K)$. Or, selon l'exercice EII.50 §4,5), la composition des graphes est distributive par rapport à l'union, d'où $G \cup H \cup K = G \cup H \cup G \circ H \cup (G \circ K \cup K \circ G \cup H \circ K \cup K \circ H \cup K \circ K)$. Cette dernière égalité montre qu'il contient aussi $G \circ H$.

Or G et H sont inclus dans $G \circ H$ comme on le vérifie à présent :
Compte tenu des équivalences $(y,y) \in G \Leftrightarrow y \in E \Leftrightarrow (y,y) \in H$, on a
$(x,y) \in G \Rightarrow ((x,y) \in G \text{ et } (y,y) \in G) \Leftrightarrow ((x,y) \in G \text{ et } (y,y) \in H) \Rightarrow$
$(\exists 1)((x,1) \in G \text{ et } (1,y) \in H) \Leftrightarrow (x,y) \in G \circ H$, d'où $G \subset G \circ H$; de même $H \subset G \circ H$.

Comme $G \circ H$ est un graphe d'équivalence dans E, $G \circ H$ est donc le plus petit graphe d'équivalence dans E qui contient G et H ; et compte tenu de l'exercice précédent 5), il est égal à l'intersection des graphes d'équivalence dans E qui contiennent G et H.

7) Soient E et F deux ensembles, f une application de E dans F, $A = E:f$, et R une relation d'équivalence dans F. Si S est la relation d'équivalence image réciproque de R par f, définir une bijection canonique de E/S sur A/R_A.

Soient ($u \in F$ et $v \in F$ et $R\{u,v\}$) la relation d'équivalence dans F, et k la surjection déduite de f par passage aux sous-ensembles E et A (E.II.15) La relation d'équivalence image réciproque de R par f est

$$S\{x,y\} \equiv (x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } R\{x:f,y:f\}).$$

La relation d'équivalence induite par R dans A est

$$R_A \equiv (R\{u,v\} \text{et } u \in A \text{ et } v \in A) \quad \text{avec } A \subset F.$$

Soient p et q les applications canoniques de E sur E/S et de A sur A/R_A respectivement.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "k\circ q"] & A \arrow[d, "q"] \\ E/S \arrow[r, "h"] & A/R_A \end{tikzcd}$$

Selon EII.19 Th1 b), l'application $k \circ q$ de E dans A/R_A est surjective. Dès lors, selon le théorème 15 p.9, pour qu'il existe une application h telle que $k \circ q = p \circ h$, il faut et il suffit que la relation d'équivalence dans E associée à p implique celle qui est associée à $k \circ q$. Or ces deux relations d'équivalence dans E associées à p et $k \circ q$ sont respectivement :

$$(x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } x:p = y:p) \quad \text{et} \quad (x \in E \text{ et } y \in E \text{ et } x:k\circ q = y:k\circ q)$$

chacune étant équivalente à ($x \in E$ et $y \in E$ et $R\{x:f,y:f\}$).

Il en résulte que h est unique, car p est surjective ; et injective, car p est surjective et que ces deux relations d'équivalence dans E associées à p et $k \circ q$ sont équivalentes. Enfin, h est surjective avec $k \circ q$ selon EII.19 Th1 d). Par conséquent, l'application h de E/S dans A/R_A est bijective.

8) Soient F, G deux ensembles, R une relation d'équivalence dans F, p l'application canonique de F sur F/R, et f une surjection de G sur F/R. Montrer qu'il existe un ensemble E et deux surjections g, h de E sur F et de E sur G respectivement tels que $g \circ p = h \circ f$.

Cet exercice est un cas particulier du suivant où $H \equiv F/R$. Soient F, G, H trois ensembles, p, f deux surjections de F sur H et de G sur H respectivement. Montrer qu'il existe un ensemble E et deux surjections g, h de E sur F et de E sur G respectivement tels que $g \circ p = h \circ f$.

Désignons par u, v les éléments des ensembles F, G respectivement. Les couples (u,v) qui suivent la relation $u{:}p = v{:}f$ forment un ensemble $E = \{z \mid (\exists u)(\exists v)(z = (u,v) \text{ et } u \in F \text{ et } v \in G \text{ et } u{:}p = v{:}f)\}$ inclus dans $F \times G$. Dès lors, pour tout élément de E, les applications g, h identiques à la première et la seconde fonction coordonnée sur E (EII.16) donnent lieu à la relation $(u,v){:}g \circ p = pr_1(u,v){:}p = u{:}p = v{:}f = pr_2(u,v){:}f = (u,v){:}h \circ f$.

Il reste donc à établir que g et h sont deux surjections. Or étant donné que p et f sont deux surjections de F et G sur H, selon le corollaire du lemme 3 dans COR p.10, on a $u \in F \Rightarrow u{:}p \in H$, et $x \in H \Leftrightarrow (\exists v)(v \in G \text{ et } x = v{:}f)$
Il en résulte $(\forall u)(u \in F \Rightarrow (\exists v)(v \in G \text{ et } u{:}p = v{:}f))$
et de même $(\forall v)(v \in G \Rightarrow (\exists u)(u \in F \text{ et } u{:}p = v{:}f))$.
Ceci étant observé, on vérifie l'égalité $E{:}g = F$ comme suit :

$$\begin{aligned}
E{:}g &= \{\lambda \mid (\exists z)(z \in E \text{ et } \lambda = pr_1 z)\} \\
&= \{\lambda \mid (\exists z)(\exists u)(\exists v)(z = (u,v) \text{ et } \lambda = u \text{ et } u \in F \text{ et } v \in G \text{ et } u{:}p = v{:}f)\} \\
&= \{\lambda \mid (\exists z)(\exists u)(\exists v)(z = (\lambda,v) \text{ et } \lambda = u \text{ et } \lambda \in F \text{ et } v \in G \text{ et } \lambda{:}p = v{:}f)\} \\
&= \{\lambda \mid \lambda \in F \text{ et } (\exists v)((\exists z)(z = (\lambda,v)) \text{ et } v \in G \text{ et } \lambda{:}p = v{:}f \text{ et } (\exists u)(\lambda = u)))\} \\
&= \{\lambda \mid \lambda \in F \text{ et } (\exists v)(v \in G \text{ et } \lambda{:}p = v{:}f)\} = \{\lambda \mid \lambda \in F\} = F
\end{aligned}$$

compte tenu de la première implication observée ; de même $E{:}h = G$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & F \arrow[d, "p"] \\
G \arrow[r, "f"] & H
\end{tikzcd}$$

B I B L I O G R A P H I E

/1/ G.M.Bouligand : Lire le formalisme de Nicolas Bourbaki
Rapport EUR-CEA-FC-825 DPh-PFC-STGI Octobre 1976.

/2/ N.Bourbaki : *Eléments de mathématique. Théorie des ensembles*
Hermann Paris 1970.

/3/ P.Dubreil, M.L.Dubreil-Jacotin : Leçons d'algèbre moderne.
Dunod Paris 1954.