

C.41

**ANGLE SOLIDE SOUS-TENDU  
PAR DEUX DISQUES CIRCULAIRES**

*par*

*Louis GILLY*

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble

**Rapport CEA-R-4920**

**1978**

Fa

**SERVICE DE DOCUMENTATION**

**PLAN DE CLASSIFICATION DES RAPPORTS ET BIBLIOGRAPHIES CEA**  
(Classification du système international de documentation nucléaire SIDON/INIS)

A 11	Physique théorique	C 30	Utilisation des traceurs dans les sciences de la vie
A 12	Physique atomique et moléculaire	C 40	Sciences de la vie : autres études
A 13	Physique de l'état condensé	C 50	Radioprotection et environnement
A 14	Physique des plasmas et réactions thermonucléaires		
A 15	Astrophysique, cosmologie et rayonnements cosmiques	D 10	Isotopes et sources de rayonnements
A 16	Conversion directe d'énergie	D 20	Applications des isotopes et des rayonnements
A 17	Physique des basses températures		
A 20	Physique des hautes énergies	E 11	Thermodynamique et mécanique des fluides
A 30	Physique neutronique et physique nucléaire	E 12	Cryogénie
		E 13	Installations pilotes et laboratoires
B 11	Analyse chimique et isotopique	E 14	Explosions nucléaires
B 12	Chimie minérale, chimie organique et physico-chimie	E 15	Installations pour manipulation de matériaux radioactifs
B 13	Radiochimie et chimie nucléaire	E 16	Accélérateurs
B 14	Chimie sous rayonnement	E 17	Essais des matériaux
B 15	Corrosion	E 20	Réacteurs nucléaires (en général)
B 16	Traitement du combustible	E 30	Réacteurs nucléaires (types)
B 21	Métaux et alliages (production et fabrication)	E 40	Instrumentation
B 22	Métaux et alliages (structure et propriétés physiques)	E 50	Effluents et déchets radioactifs
B 23	Céramiques et ciments		
B 24	Matériaux plastiques et autres matériaux	F 10	Economie
B 25	Effets des rayonnements sur les propriétés physiques des matériaux	F 20	Législation nucléaire
B 30	Sciences de la terre	F 30	Documentation nucléaire
		F 40	Sauvegarde et contrôle
C 10	Action de l'irradiation externe en biologie	F 50	Méthodes mathématiques et codes de calcul
C 20	Action des radioisotopes et leur cinétique	F 60	Divers

Rapport CEA-R-4920

*Cote-matière de ce rapport : C.41*

**DESCRIPTION-MATIERE (mots clefs extraits du thesaurus SIDON/INIS)**

<i>en français</i>	<i>en anglais</i>
DEVELOPPEMENT EN SERIE	SERIES EXPANSION
MATHEMATIQUES	MATHEMATICS
POLYNOMES DE LEGENDRE	LEGENDRE POLYNOMIALS
FONCTIONS DE BESSEL	BESSEL FUNCTIONS
METHODE DE MONTE CARLO	MONTE CARLO METHOD
INTEGRALES	INTEGRALS
TABLES	TABLES
TAUX DE COMPTAGE	COUNTING RATES
DISTRIBUTION ANGULAIRE	ANGULAR DISTRIBUTION
CINEMATIQUE DES PARTICULES	PARTICLE KINEMATICS

- Rapport CEA-R-4920 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble  
Laboratoire d'Etudes d'Environnement et de Mesures Solaires

ANGLE SOLIDE SOUS-TENDU PAR DEUX DISQUES CIRCULAIRES

par

Louis GILLY

- Septembre 1978 -

CEA-R-4920 - GILLY Louis

ANGLE SOLIDE SOUS-TENDU PAR DEUX DISQUES CIRCULAIRES.

Sommaire.- Les méthodes de calcul de l'angle solide sous-tendu par deux disques circulaires sont analysées. Les calculs correspondants sont classés méthodiquement calculs par développements en séries, à l'aide de polynômes de Legendre, à l'aide d'intégrale définie, à l'aide d'intégrales elliptiques, à l'aide d'intégrales de Bessel, à l'aide d'intégrales multiples, par la méthode de Monte Carlo, par analogie électrostatique. Quelques applications dans le domaine de la Physique Nucléaire sont mentionnées. La bibliographie est complétée par une analyse détaillée des tables numériques existantes.

1978

67 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France.

CEA-R-4920 - GILLY Louis.

SOLID ANGLE SUBTENDE BY TWO CIRCULAR DISCS

Summary.- Methods of calculation of solid angles, subtended by two circular discs are analysed. Calculus are methodically classified as follow : series development Legendre polynomes, defined integral, elliptic integrals, Bessel integrals, multiple integrals, Monte Carlo method, electrostatic analogy, Applications in Nuclear Physics are added as examples. List of numeric Tables completes bibliography.

1978

67 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France.

P L A N

1 - INTRODUCTION	5
2 - EXTRAPOLATION DES FORMULES RELATIVES A L'ANGLS SOLIDE SOUS-TENDU EN UN POINT PAR UN DISQUE CIRCULAIRE	5
3 - CALCUL PAR DEVELOPPEMENTS EN SERIES	8
3.1 - Deux disques coaxiaux	
3.2 - Deux disques non coaxiaux	
4 - CALCUL A L'AIDE DE POLYNOMES DE LEGENDRE	9
4.1 - Première méthode	
4.2 - Deuxième méthode	
5 - CALCUL A L'AIDE D'UNE INTEGRALE DEFINIE	14
6 - CALCUL A L'AIDE D'INTEGRALES ELLIPTIQUES	15
6.1 - Première méthode	
6.2 - Deuxième méthode	
7 - CALCUL A L'AIDE D'INTEGRALES DE BESSEL	21
8 - CALCUL A L'AIDE D'INTEGRALES MULTIPLES	25
8.1 - Intégrales doubles	
8.2 - Intégrales multiples	
1 - Introduction	
2 - Source neutronique située à l'infini	
a) - Distribution angulaire isotropique	
b) - Distribution angulaire anisotrope	
3 - Source neutronique à distance finie	
a) - Distribution angulaire isotropique	
b) - Distribution angulaire anisotrope	
4 - Cas de deux disques coaxiaux	

9 - CALCUL PAR LA METHODE DE MONTE CARLO	30
9.1 - Première méthode	
9.2 - Deuxième méthode	
9.3 - Troisième méthode	
10 - CALCUL PAR ANALOGIE ELECTROSTATIQUE	32
10.1 - Deux disques coaxiaux	
10.2 - Deux disques non coaxiaux	
11 - APPLICATIONS	34
11.1 - Efficacité d'un détecteur circulaire	
11.2 - Etude d'un télescope de rayons cosmiques	
1 - Aspects géométriques des performances	
a) - Facteurs géométriques	
b) - Réponse angulaire	
c) - Réponse à une distribution de particules	
d) - Facteur géométrique et facteur correctif	
2 - Facteur géométrique d'un télescope	
12 - TABLES NUMERIQUES	41
13 - CONCLUSION	45

## ANGLE SOLIDE SOUS-TENDU PAR DEUX DISQUES CIRCULAIRES

### 1 - INTRODUCTION

L'ensemble de deux portions de surface, dont l'une émet un rayonnement, et l'autre le reçoit, fait intervenir l'efficacité géométrique du système ainsi constitué. Le seul cas étudié dans ce rapport est celui d'une surface circulaire, située parallèlement à une portion de surface plane, limitée par une circonférence.

Il fait presque toujours intervenir initialement le calcul d'un angle solide sous-tendu par un disque circulaire en un point de l'espace. L'étude de ce dernier cas a fait l'objet d'un précédent rapport [26].

### 2 - EXTRAPOLATION DES FORMULES RELATIVES A L'ANGLE SOLIDE SOUS-TENDU EN UN POINT PAR UN DISQUE CIRCULAIRE

[1] Dans la table ronde, consacrée à la Spectrométrie de Masse et au comptage  $\alpha$ , qui est ici évoquée, on s'est intéressé aux problèmes d'angle solide, aussi bien issus d'une source ponctuelle, que ceux issus d'une source étendue.

Les formules relatives au cas ponctuel, peuvent souvent s'intégrer, afin d'obtenir celles relatives à deux disques. C'est ainsi que A. JAFFEY [2] donne cinq formules résolvant le problème ponctuel, et qui, intégrées conduisent à cinq autres.

Nous donnons ici les expressions correspondantes référencées sous la forme (J-i), le symbole i étant celui utilisé dans [2], qui emploie les notations de la figure 1.

#### 2.1 - Cas ponctuel : pour $\rho < D$

$$G_p = G_p, - \frac{3}{8} \rho^2 \frac{a^2 z}{D^5} + \frac{15}{32} \rho^4 \frac{a^2 z}{D^9} (z^2 - \frac{3}{4} a^2) + \dots \quad (J.4)$$

Dans le cas de deux disques, (J.4) conduit par intégration à :

$$G_S = G_p, - \frac{3}{16} b^2 \frac{a^2 z}{D^5} + \frac{5}{32} b^4 \frac{a^2 z}{D^9} (z^2 - \frac{3}{4} a^2) + \dots \quad (J.10)$$

On obtient de même, les couples suivants d'équations :

$$G_P = G_P' + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{2n+1}{2n} \left( \frac{z}{D} \right) P_{2n} - P_{2n+1} P_{2n}(0) \cdot \left( \frac{D^2}{D} \right)^n \quad (J.5a)$$

avec

$$\begin{cases} P_k = P_k \left( \frac{z}{D} \right) \\ P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \end{cases}$$

L'équation ci-dessus (J.5a) valable dans le cas ponctuel et pour  $a < D$ , devient dans le cas de deux disques, et pour  $\frac{a}{L} < 1$ , l'équation (J.12a) :

$$G_S = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{z}{a} + \frac{1}{5} \frac{P_3 - XP_4}{(1-X^2)} W^3 - \frac{1}{28} \frac{P_5 - XP_6}{(1-X^2)} W^5 + \dots \right\}$$

$$G_S = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{z}{(1-X^2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P_{2n-2}(0)}{2n+1} (P_{2n-1} - XP_{2n}) W^{2n-1} \right\} \quad (J.12a)$$

Cette dernière équation, est obtenue en posant  $(1-X^2) = \frac{b^2}{L^2}$ .

### 2.2 - Cas ponctuel : pour $z \ll D$

$$G_P = G_P' + \frac{1}{2} \frac{a^2}{D^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} P_{2n}(0) \cdot (P_{2n}') \left( \frac{D^2}{D} \right)^n \quad (J.5b)$$

(J.5b) devient dans le cas de deux disques, et pour  $\frac{b}{L}$  petit :

$$G_S = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{z}{a} + \frac{1}{28} P_4 W^3 - \frac{1}{56} P_6 W^5 + \dots \right\} \quad (J.12b)$$

$$G_S = \frac{1}{2} \left\{ 1 - z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P_{2n-2}(0)}{2n(2n+1)} P_{2n}' W^{2n-1} \right\}$$

### 2.3 - Cas ponctuel : pour $w < 1$

$$G_P = \frac{1}{2} \left[ 1 - w P_1 + \frac{w^3}{2} P_3 - \frac{5}{8} w^5 P_5 + \dots \right] \quad (J.7a)$$

$$G_P = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P_{2n}(0) \cdot P_{2n+1} w^{2n+1} \right]$$

(J.7a) devient pour deux disques, - pour  $\frac{a}{L} < 1$  :

$$G_S = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \left\{ (1-X) - \frac{1}{4} Y^2 (P_1 - XP_2) + \frac{1}{8} Y^4 (P_3 - XP_4) + \dots \right\}$$



$$G_S = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \left\{ (1-X) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P_{2n+2}(0)}{2n+1} Y^{2n} (P_{2n-1} - X P_{2n}) \right\}$$

(J.11a)

avec  $P_k = P_k(X)$ .

Pour  $\frac{b}{L}$  petit, les valeurs des polynômes de cette formule, consistent en de faibles différences entre de grands nombres.

2.4 - Cas ponctuel : pour  $y < 1$

$$G_P = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} Y^2 P_1 - \frac{3}{8} Y^4 P_3 + \frac{5}{16} Y^6 P_5 - \dots \right]$$

(J.7b)

$$G_P = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} P_{2n}(0) \cdot P_{2n-1} Y^{2n}$$

avec  $P_k = P_k(x)$ .

Cette dernière formule, devient dans le cas de deux disques :

$$G_S = \frac{1}{2} Y^2 \left\{ \frac{1}{1+X} - \frac{1}{8} Y^2 P_2' + \frac{1}{32} Y^4 P_4' - \frac{5}{384} Y^6 P_6' + \dots \right\}$$

$$G_S = \frac{1}{2} Y^2 \left\{ \frac{1}{1+X} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P_{2n+2}(0)}{2n(2n+1)} Y^{2n} \cdot P_{2n}' \right\}$$

(J.11b)

avec  $P_k' = \frac{dP_k(X)}{dx}$ .

Le désavantage de cette formule, est d'utiliser les dérivées des polynômes de Legendre, dont les tables ne sont pas très répandues.

La convergence de ces formules est la même que dans le cas ponctuel. A. JAFFEY procure également, dans le même article [2], des approximations de l'expression de  $G_S$  en fonction de l'angle solide ponctuel  $G_P$ , centré.

Ainsi, pour de faibles valeurs de  $\frac{D}{b}$  ou de  $\frac{b}{D}$ , on a la formule approchée :

$$G_S = G_P \cdot \left\{ 1 - \frac{3}{8} b^2 \left[ \frac{z(z+D)}{D^4} \right] \right\}$$

(J.13b)

Si  $\frac{z}{a}$  ou  $\frac{1}{a}$  sont petits, nous avons approximativement :

$$G_S = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{z}{a} \right]$$

Ceci montre que, proche du disque supérieur de la figure 1, la géométrie ne varie pas d'une manière appréciable, en fonction d'un déplacement de l'axe.

Une autre approximation, parfois utilisée pour de faibles valeurs de  $\frac{b}{z}$  et de  $\frac{b}{z}$ , consiste à utiliser l'expression suivante de (J.18) :

$$\frac{1}{G_S} = \left( 4 \frac{z^2}{a^2} + 3 + 3 \frac{b^2}{a^2} + 9 \frac{b^2 - a^2}{4z^2} - \frac{1}{4} \frac{b^4}{a^2 z^2} + \frac{3}{16} \frac{b^4 + a^2 b^2}{z^4} \right)$$

Le terme le plus important est le premier, les autres nécessitent par conséquent, seulement d'être calculés avec une approximation limitée.

En comparant les résultats obtenus en utilisant (J.18), à ceux issus des développements en série, on constate que l'erreur d'approximation est inférieure à 0,1 % pour :

$$\frac{b}{z} < 0,15 \quad \text{avec} \quad \frac{a}{z} < 0,19$$

$$\frac{b}{z} < 0,20 \quad \text{avec} \quad \frac{a}{z} < 0,14$$

$$\frac{b}{z} < 0,50 \quad \text{avec} \quad \frac{a}{z} < 0,07$$

Ces formules d'approximation, mettent en évidence, un maximum de sensibilité de la géométrie à de faibles variations de  $z$  ou de  $\rho$ , pour les valeurs de  $a$  voisines de  $z$ .

### 3 - CALCUL PAR DEVELOPPEMENTS EN SERIES

#### 3.1 - Deux disques coaxiaux (R.P. BURTT)

[5] Figure 2 - En utilisant les notations de la figure citée en référence R.P. BURTT propose le développement en série suivant, donnant la valeur de la géométrie G :

$$G = 0,5 \left[ 1 - \frac{1}{(1+\beta)^{1/2}} - \frac{3}{8} \frac{\beta\gamma}{(1+\beta)^{5/2}} - \gamma^2 \left[ -\frac{5}{16} \frac{\beta}{(1+\beta)^{7/2}} + \frac{35}{64} \frac{\beta^2}{(1+\beta)^{9/2}} \right] \right. \\ \left. - \gamma^3 \left[ \frac{35}{128} \frac{\beta}{(1+\beta)^{9/2}} - \frac{315}{256} \frac{\beta^2}{(1+\beta)^{11/2}} + \frac{1155}{1024} \frac{\beta^3}{(1+\beta)^{13/2}} \right] \right] \quad (1)$$

avec les notations suivantes :

- a distance des deux disques
- b rayon du plus grand disque
- c rayon du plus petit disque

$$\beta = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\gamma = \frac{c^2}{a^2}$$

Il est intéressant de comparer ce développement avec celui proposé par M.W. GARRETT dans l'article [5] et qui fait intervenir les polynômes de Legendre :

$$G = \frac{1}{2} \left[ i \frac{z}{D} \frac{2a^2}{D^2} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{+\infty} \frac{P_n(0)}{n(n+2)} P'_n \left( \frac{z}{D} \right) \left( \frac{b}{D} \right)^n \right] \quad (2)$$

Les notations utilisées dans cette dernière formule, sont celles de la figure 1. En remarquant que :

$$P'_n \left( \frac{z}{D} \right) = \frac{dP_n \left( \frac{z}{D} \right)}{d \left( \frac{z}{D} \right)}$$

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

on trouve bien, les mêmes expressions pour les deux formules considérées.

### 3.2 - Deux disques parallèles non coaxiaux

(M.L. CURTIS, J.W. HEYD, R.G. OLT, J.F. EICHELBERGER)

[4] On considère deux disques circulaires situés dans des plans parallèles, de rayons respectifs  $a_1$  et  $a_2$ , et dont les axes sont distants de  $a_3$ . En supposant que leurs plans soient éloignés de  $x$ , l'angle solide  $\Omega$  sous lequel est vu le disque de rayon  $a_2$ , depuis le disque de rayon  $a_1$ , peut se calculer par le développement suivant :

$$\Omega = \frac{\pi a_2^2}{x^2} \left[ i - \left( \frac{3}{4x^2} \right) (a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2) + \left( \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3 \cdot x^4} \right) (a_2^4 + a_1^4 + 3a_3^4 + 6a_2^2 a_3^2 + 6a_1^2 a_3^2 + 3a_2^2 a_3^2) - \left( \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2^3 \cdot 4! x^6} \right) (a_2^6 + a_1^6 + 4a_3^6 + 6a_2^4 a_3^2 + 12a_2^2 a_3^4 + 6a_1^4 a_3^2 + 12a_1^2 a_3^4 + 18a_3^4 a_1^2 + 36a_1^2 a_3^2 a_2^2) + \dots \right] \quad (3)$$

## 4 - CALCUL A L'AIDE DE POLYNOMES DE LEGENDRE

### 4.1 - Première méthode (A.H. JAFFEY)

[2] (Figure 1) - Une source de rayonnement qui présente une certaine étendue, ne peut plus être considérée comme ponctuelle. L'efficacité géométrique  $G_S$  du système constitué par cette source et son détecteur supposés parallèles, se calcule par intégration de l'angle solide  $G_p$  sous-tendu par la fenêtre circulaire du détecteur, au point P.

$$G_S = \frac{1}{I_S} \iint G_p \cdot I_p \cdot dS \quad (4)$$

$G_S$  efficacité géométrique du système constitué par deux disques circulaires parallèles.

$G_P$  efficacité géométrique du système constitué par un disque circulaire et le point P.

$I_P$  contribution du point P à l'intensité totale de la source étendue.

$I_S$  intensité totale de la source étendue.

$\Omega_P$  angle solide sous-tendu au point P par le disque circulaire considéré.

$$G_P = \frac{\Omega_P}{4\pi}$$

L'intégrale (4) ne peut se calculer dans le cas général, que par intégration numérique à partir de l'une des expressions de l'efficacité géométrique  $G_P$ .

Pour une source circulaire parallèle et coaxiale à la fenêtre d'un détecteur limitée par une circonférence, et en supposant la contribution d'intensité  $I_P$  simple, l'intégration de (4) est possible explicitement. En supposant la source uniformément répartie sur toute l'étendue d'un disque circulaire de rayon b, on a la relation supplémentaire :

$$I_P = \text{constante}$$

qui a pour conséquence :

$$I_S = \pi b^2 I_P$$

Il en résulte immédiatement, que l'intégrale (4) prend la forme :

$$G_S = \frac{z}{b^2} \int_0^b G_P \cdot \rho \, d\rho \quad (5)$$

En utilisant les notations de la figure 3, pour des valeurs de  $\rho$  et D vérifiant l'inégalité  $\frac{\rho}{D} < 1$ , l'angle solide  $G_P$  est donné par les formules suivantes :

$$G_P = G_P - \frac{3}{8} \rho^2 \frac{a^2 z}{D^5} + \frac{15}{32} \rho^4 \frac{a^2 z}{D^7} (z^2 - \frac{3}{4} a^2) + \dots$$

$$G_P = G_P + \frac{1}{2} \frac{z}{D} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{4n} (n!)^2} \left(\frac{\rho^2}{D^2}\right)^n \sum_{k=0}^{k=n} m_k \quad (6)$$

avec 
$$m_k = \frac{(-1)^{k+1} (4n-2k)!}{(2n-k)! (2n-2k+1)! k!} \left(\frac{z}{D}\right)^{2n-k}$$

où  $G_P$ , est pris pour la même valeur de z que  $G_P$ , et a pour expression :

$$G_P = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{D}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{D(D+z)}\right) \quad (7)$$

Les coefficients  $m_k$  peuvent également être exprimés, en fonction des polynômes de Legendre

$$G_P = G_P + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{2n+1}{2n} \left(\frac{z}{D}\right) P_{2n} - P_{2n+1} P_{2n}(0) \left(\frac{\rho^2}{D^2}\right)^n \quad (8)$$

avec  $P_k = P_k\left(\frac{z}{D}\right)$

et  $P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$

Quand  $\frac{z}{D}$  est proche de l'unité,  $G_p$  est alors donné par :

$$G_p = G_p + \frac{1}{2} \frac{a^2}{D^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} P_{2n}(0) (P'_{2n}) \left(\frac{z}{D}\right)^n \quad (9)$$

avec  $P'_k = \frac{dP_k\left(\frac{z}{D}\right)}{d\left(\frac{z}{D}\right)}$

Ces séries ne convergent pas pour  $\rho > D$ , et convergent lentement au voisinage de  $\rho = D$ .

Quand  $G_p$  est défini par les développements (6), (8), (9), le terme général de la série de  $G_s$ , se déduit de celui de la série de  $G_p$ , en y remplaçant  $a^{2n}$  par  $\frac{b^{2n}}{n+1}$ . Le remplacement correspondant effectué à partir de (6), conduit pour  $G_s$ , au développement en série suivant :

$$G_s = G_p - \frac{3}{16} b^2 \frac{a^2 z}{D^5} + \frac{5}{32} b^4 \frac{a^2 z}{D^9} (z^2 - \frac{3}{4} a^2) + \dots \quad (10)$$

Une autre expression de  $G_p$  existe, en fonction des polynômes de Legendre. Elle prend deux formes différentes, suivant les valeurs respectives de  $a$  et de  $z$ .

Pour  $a > z$

$$G_p = \frac{1}{2} \left[ 1 - w P_1 + \frac{w^3}{2} P_3 - \frac{3}{8} w^5 P_5 + \dots \right]$$

$$G_p = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P_{2n}(0) P_{2n+1} w^{2n+1} \right] \quad (11)$$

Pour  $a < z$

$$G_p = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} y^2 P_1 - \frac{3}{8} y^4 P_3 + \frac{5}{16} y^6 P_5 - \dots \right]$$

$$G_p = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} P_{2n}(0) \cdot P_{2n-1} \cdot y^{2n} \quad (12)$$

avec  $\begin{cases} P_k = P_k(x) \\ w = \frac{x}{a} \\ y = \frac{z}{a} \end{cases}$

Ces deux derniers développements (11) et (12), peuvent s'intégrer terme à

terme après avoir substitué  $\frac{x}{L} = x$  dans chaque polynôme de Legendre. Cette méthode a été utilisée par KOVARIK et ADAMS [23] dans le cas où  $a < L$  et  $a = b$ .

Le développement général, valable quel que soit  $\frac{a}{L}$  a été calculé, mais il est d'un emploi moins facile, que ceux réalisés à partir des polynômes de Legendre.

La formule (5) associée aux propriétés des polynômes de Legendre, permet d'écrire dans le cas où  $a < L$  :

$$G_S = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \left\{ (1-X) - \frac{1}{4} Y^2 (P_1 - XP_2) + \frac{1}{8} Y^4 (P_3 - XP_4) + \dots \right\}$$

$$G_S = \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \left\{ (1-X) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P_{2n+2}(0)}{2n+1} Y^{2n} (P_{2n-1} - XP_{2n}) \right\} \quad (13)$$

avec  $P_k = P_k(X)$ .

Dans le cas où  $\frac{b}{L}$  est très petit, on préfère remplacer (13) par la forme :

$$G_S = \frac{1}{2} Y^2 \left\{ \frac{1}{1+X} - \frac{1}{8} Y^2 P_2' + \frac{1}{32} Y^4 P_4' - \frac{5}{384} Y^6 P_6' + \dots \right\}$$

$$G_S = \frac{1}{2} Y^2 \left\{ \frac{1}{1+X} - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P_{2n+2}(0)}{2n(2n+1)} Y^{2n} P_{2n}' \right\} \quad (14)$$

avec  $P_k' = \frac{dP_k(X)}{dx}$ .

De même, pour  $a > L$  :

$$G_S = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{a} \frac{1}{5} \frac{(P_3 - XP_4)}{1-X^2} W^3 - \frac{3}{28} \frac{(P_5 - XP_6)}{1-X^2} W^5 + \dots \right\}$$

$$G_S = \frac{1}{2} \left\{ 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P_{2n-2}(0)}{(1-X^2)(2n+1)} (P_{2n-1} - XP_{2n}) W^{2n-1} \right\} \quad (15)$$

avec  $1 - X^2 = \frac{b^2}{L^2}$

Dans le cas où  $\frac{b}{L}$  est très petit, on remplace (15) par :

$$G_S = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{2}{a} + \frac{1}{20} P_4' W^3 - \frac{1}{56} P_6' W^5 + \dots \right\}$$

$$G_S = \frac{1}{2} \left\{ 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P_{2n-2}(0)}{2n(2n+1)} P_{2n}' W^{2n-1} \right\} \quad (16)$$

Les formules (13), (14), (15), (16) ne sont pas valables dans le cas où le disque S de rayon b, intercepte la sphère centrée en 0 et de rayon  $z^2 = a^2$ . Ceci est dû aux domaines de convergence des séries donnant l'expression de  $G_p$ .

4.2 - Deuxième méthode (M.W. GARRETT)

[5] (Figure 1) - Considérant les problèmes d'efficacité géométrique, l'auteur s'intéresse à l'angle solide sous-tendu par deux disques circulaires coaxiaux situés dans deux plans parallèles.

Les notations utilisées sont celles adoptées par A.H. JAFFEY dans l'article [2] et portées sur la figure 1. L'analyse de cet article montre que, les séries (6), (8), (9) dépendent de  $\rho$ , par le facteur  $\rho^n$  dont la moyenne, étendue à tout le disque de rayon b est :  $2 \frac{b^n}{n+2}$ . La substitution dans (6), de cette dernière valeur conduit à l'équation :

$$G_S = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{z}{D} + 2 \frac{a^2}{D^2} \sum_{n=2,4,\dots}^{n=\infty} \frac{P_n(0)}{n(n+2)} P_n' \left( \frac{z}{b} \right) \left( \frac{b}{D} \right)^n \right] \quad (17)$$

Rappelons que l'angle solide  $\Omega_S$ , sous lequel est vu 1<sup>er</sup> disque de rayon a, depuis le disque parallèle de rayon b, a pour valeur :

$$\Omega_S = 4\pi \cdot G_S$$

$b \leq a$  : l'équation (20) constitue la meilleure série pour le calcul de  $G_S$ .

$b \geq a$  : la meilleure expression est obtenue par intégration de l'équation

$$G_p = -\frac{1}{2} \sum_{n=2,4,\dots}^{n=\infty} P_n(0) \cdot P_{n-1} \left( \frac{z}{b} \right) \left( \frac{a}{b} \right)^n \quad \text{valable pour } a < b$$

On aboutit ainsi à la forme suivante :

$$G_S = \frac{1}{2} Y^2 \left\{ \frac{1}{1+X} - \frac{1}{8} Y^2 P_2' + \frac{1}{32} Y^4 P_4' - \frac{5}{384} Y^6 P_6' + \dots \right\} \quad (18)$$

qui peut encore s'écrire sous la forme condensée :

$$G_S = \frac{1}{2} Y^2 \left\{ \frac{1}{1+X} - 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{P_{2n+2}(0)}{2n(2n+1)} Y^{2n} P_{2n}' \right\} \quad (19)$$

avec :  $X = \frac{z}{L}$  et  $Y = \frac{a}{L}$  (voir figure 1).

Les équations (20) et (22) sont comparables. On passe de l'une à l'autre par échange de a et de b, par remplacement de D par L, et en multipliant la série complète par le facteur  $\frac{a^2}{b^2}$ .

## 5 - CALCUL A L'AIDE D'UNE INTEGRALE DEFINIE

[6] (Figure 3) - Les auteurs étudient l'efficacité géométrique d'un détecteur semi-conducteur à protons de reculs, diffusés par un radiateur circulaire coaxial, placé dans un plan parallèle. La source de neutrons supposée ponctuelle, est située sur l'axe de symétrie commun.

Soit P un point du radiateur, situé à la distance r de son centre et d'où sont issus des protons de recul d'énergie  $E_p$ . Le nombre total de protons de recul, diffusés depuis le radiateur, et d'énergie comprise entre  $E_p$  et  $E_p+dE_p$  qui effectuent un impact avec le détecteur est :

$$n(E_p) dE_p$$

La fonction  $n(E_p)$  est appelée la fonction de réponse du système de détection. La source S ponctuelle est supposée émettre isotropiquement n neutrons d'énergie  $E_n$  par seconde. Le taux de comptage total, est obtenu par intégration du nombre de protons de recul diffusés depuis l'élément dS du radiateur, et interceptés par l'élément dS' du détecteur.

En désignant par N la densité d'atomes d'hydrogène du matériau radiateur d'épaisseur t, et par  $\sigma(E_n)$  la section efficace totale de diffusion des neutrons par l'hydrogène, on obtient :

$$\int_0^{E_n} n(E_p) dE_p = \frac{mNt\sigma(E_n)d}{4\pi^2} \int_0^{r_1} \frac{r dr}{(r^2+s^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r_2} q dq \int_0^{2\pi} \frac{f(s,d,r,q,\varphi,\theta) d\varphi}{[d^2+r^2+q^2-2rq \cos(\varphi-\theta)]^2}$$

avec :

$$f(s,d,r,q,\varphi,\theta) = \begin{cases} sd-r^2+rq \cos(\varphi-\theta) & sd-r^2-rq > 0 \\ 0 & sd-r^2-rq \leq 0 \end{cases} \quad (20)$$

Dans la très grande majorité des cas expérimentaux, l'inégalité suivante est satisfaite :  $sd-r_1^2-r_2 > 0$ .

Sous cette condition, l'intégrale quadruple précédente, se réduit alors à une intégrale définie (21)

$$\int_0^{E_n} n(E_p) dE_p = \frac{1}{4} mNt\sigma(E_n) \int_0^{r_1} \left\{ \frac{s(r_2^2-d^2-r^2)-d(r^2+d^2+r^2)}{[r_2^4+2(d^2-r^2)r_2^2+(d^2+r^2)^2]^{1/2}} + d+s \right\} \frac{r dr}{(s^2+r^2)^{3/2}} \quad (21)$$

Cette formule peut être utilisée même dans le cas où la perte d'énergie des protons de recul n'est pas négligeable.

L'efficacité de détection  $\epsilon(E_n)$  du système considéré a pour expression :

$$\epsilon(E_n) = \frac{1}{m} \int_0^{E_n} n(E_p) dE_p \quad (22)$$

L'angle solide  $\Omega$  limité par le disque détecteur et le disque radiateur, est lié au nombre total de protons de recul comptés par :



$$\int_0^{E_n} n(E_p) dE_p = \frac{1}{4} m N t \sigma (E_n) \frac{v_1^2}{s^2} \frac{\Omega}{2v} \quad (23)$$

## 6 - CALCUL A L'AIDE D'INTEGRALES ELLIPTIQUES

6.1 - Première méthode (M.P. RUFFLE)

[7] - La problème traité ici, est celui de l'efficacité géométrique du système constitué par deux disques circulaires situés dans des plans parallèles et centrés sur le même axe. L'auteur considère d'abord l'angle solide  $\omega(x,h)$  sous-tendu par un disque de rayon unité en un point de coordonnées cylindriques  $(x,h)$ . Le disque est supposé centré à l'origine dans le plan  $z=0$ . En considérant un cône centré en ce même point, et dont l'axe de révolution est parallèle à l'axe des  $z$ , et en faisant intervenir la fraction de la surface de ce cône, qui intercepte le disque unitaire, on obtient les relations :

$$\omega(x,h) = \begin{cases} S(x,h) & x > 1 \\ S(x,h) + 2\pi \left[ 1 - \frac{h}{|h^2 + (x-1)^2|^{1/2}} \right] & x < 1 \end{cases}$$

avec :

$$S(x,h) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sin\phi \cdot \cos^{-1} \left\{ \frac{(x^2 + h^2 \operatorname{tg}^2 \phi - 1)}{2x \operatorname{tg} \phi} \right\} d\phi$$

$$\text{et } \operatorname{tg} \phi_1 = \frac{(x-1)}{h}$$

$$\operatorname{tg} \phi_2 = \frac{x+1}{h}$$

Après avoir posé  $t = h \operatorname{tg} \phi$ , et en intégrant par parties, on trouve :

$$\omega(x,h) = \begin{cases} 2h J(x,h) & x > 1 \\ 2h J(x,h) + \pi & x = 1 \\ 2h J(x,h) + 2\pi & x < 1, \quad x \neq 0 \end{cases}$$

$$\omega(0,h) = 2\pi \left[ 1 - \frac{h}{(h^2+1)^{1/2}} \right]$$

J(x,h) a pour expression :

$$J(x,h) = \int_{-1}^{+1} (ux-1) du / \left\{ (x^2+1 - 2ux) \cdot (1-u^2)^{1/2} (h^2+x^2+1 - 2ux)^{1/2} \right\}$$

avec  $u = (x^2 - t^2 + 1) / 2x$ .

L'intégrale J(x,h) ainsi exprimée, possède la forme générale des

intégrales qui peuvent s'écrire à l'aide d'intégrales elliptiques.

Le problème initial revient à évaluer l'intégrale

$$P(x, h) = (4\pi)^{-1} (\pi x^2)^{-1} \int_0^x \omega(a, h) 2\pi a da$$

excepté pour  $x = 0$ , auquel cas on a :

$$P(0, h) = \frac{\omega(0, h)}{4\pi}$$

$P(x, h)$  est la probabilité de détection qu'a un disque détecteur de rayon unité, parallèle à un disque source de rayon  $x$  et centré sur le même axe, leurs deux plans étant distants de  $h$ .

Afin de calculer  $P(x, h)$ , l'expression de  $\omega(x, h)$  montre la nécessité de simplifier l'intégrale suivante :

$$\int_0^x a \mathcal{J}(a, h) da = \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{-1/2} du \int_0^x a(ua-1) da / \{(a^2+1-2au)(h^2+a^2+1-2u)\}^{1/2}$$

Après une suite de calculs compliqués, on trouve que l'intégrale ci-dessus peut s'exprimer sous la forme suivante faisant intervenir une intégrale elliptique complète de première espèce, une de seconde espèce, et trois de troisième espèce.

$$\int_0^x a \mathcal{J}(a, h) da = \frac{1}{2} DE - ((2x^2+h^2)/2D) K + [(x^4-1) / \{2D(x+1)^2\}] \Pi(n_0, k, \frac{1}{2} \pi) - (1/D) \{(d-x)/(d+1)\} \Pi(n_1, k, \frac{1}{2} \pi) - (1/D) \{(d+x)/(d-1)\} \Pi(n_2, k, \frac{1}{2} \pi)$$

$$+ \begin{cases} 0 & x > 1 \\ \frac{\pi}{2} h & x = 1 \\ \frac{\pi}{h} & x < 1 \end{cases}$$

K intégrale elliptique complète de première espèce

E intégrale elliptique complète de seconde espèce

$\Pi$  intégrale elliptique complète de troisième espèce.

$$\Pi(n, k, \theta) = \int_0^\theta [(1-n \sin^2 \phi)^{-1} (1-k^2 \sin^2 \phi)^{1/2}] d\phi$$

On a de plus, les valeurs suivantes :

$$D = (h^2 + (x+1)^2)^{1/2} \quad ; \quad d = (h^2 + 1)^{1/2} \quad ; \quad k^2 = \frac{4x}{D} \quad (24)$$

$$n_0 = \frac{4x}{(x+1)^2} \quad ; \quad n_1 = \frac{2}{d+1} \quad ; \quad n_2 = -\frac{2}{d-1}$$

Il est commode d'utiliser la fonction auxiliaire :

$$R(k, \theta) = (K-E) F(k', \theta) - KE(k', \theta)$$

avec  $k' = (1-k^2)^{1/2}$

Les paramètres  $k$ ,  $n_0$ ,  $n_1$ ,  $n_2$  des équations (27) vérifient les conditions :

$$k^2 \leq n_0 \leq 1$$

$$k^2 \leq n_1 \leq 1$$

$$n_2 < 0$$

Ces conditions doivent être respectées, quand on décompose les intégrales elliptiques de 3ème espèce en fonctions simples. Après cela, l'expression complète de  $P(x, h)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 P(x, h) = & \left\{ (x^2 + 3 - 2s) / (4x^2) \right\} + \left\{ h / (\pi x^2) \right\} \left\{ \left( \frac{1}{2} K/D \right) \cdot \left[ 2 \left\{ (x-1)(x-d) \right\} / \left\{ (d+1)(d+x) \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. - (x^2+1)(x+3) / (x+1) - h^2 \right] \right\} \quad (25) \\
 & + h^{-1} (R_2 - sR_1) + \frac{1}{2} DE \\
 & + \begin{cases} [(x^2+1) / (2\pi x^2)] R_0 & x \neq 0, 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$P(\sigma, h) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{h}{(h^2+1)^{1/2}} \right\}$$

$$S = \begin{cases} \frac{d-x}{|d-x|} & x \neq d \\ 0 & x = d \end{cases}$$

$$R_i = R(k, \theta_i) \quad ; \quad \sin \theta_0 = \frac{1}{k'} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)$$

$$\sin \theta_1 = \frac{d-1}{hk'}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{D}{d+x}$$

La figure 4 donne quelques valeurs de  $P(x, h)$  pour les valeurs des paramètres ayant le plus d'intérêt pratique.

Aux grandes distances du disque unitaire, une valeur approchée de l'angle solide peut être obtenue en assimilant le disque à une surface infinitésimale, ce qui conduit à :

$$\omega(x, h) \sim \frac{\pi h}{(h^2+x^2)^{3/2}}$$

La même approximation conduit à :

$$P(x, h) = (2x^2)^{-1} \left\{ 1 - \frac{h}{(h^2 + x^2)^{1/2}} \right\}$$

Si  $(h^2 + x^2)^{1/2} > 30$ , cette valeur approchée est à 0,1 % de la valeur exacte.

### 6.2 - Deuxième méthode

(C. BARDIN, Y. DANDEU, NGUYEN TRÔNG THUG, J. RAGUIDEAU)

[8] Les auteurs étudient la résolution numérique de la fonction :

$$U(R, R', h) = h \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^R \rho d\rho \int_0^{R'} \frac{\rho' d\rho'}{[\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta') + h^2]^{3/2}} \quad (26)$$

En remarquant le rôle joué par R et R', ils calculent cette fonction dans le domaine :

$$h \geq 0 \quad ; \quad R \geq R' \geq 0 \quad ; \quad R > 0$$

En posant alors :

$$\varphi = \theta - \theta' \quad ; \quad \rho = R y \quad ; \quad \rho' = R' x \quad ; \quad \lambda = \frac{R'}{R} \quad ; \quad u = \frac{h}{R}$$

L'intégrale initiale U devient

$$U = 4\pi u R^2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 y dy \int_0^\lambda \frac{x dx}{[u^2 + (y \cos \varphi - x)^2 + y^2 \sin^2 \varphi]^{3/2}} \quad (27)$$

Le changement de variable :  $u = x - y \cos \varphi$  conduit à

$$U = 4\pi u R^2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \left[ (u^2 + y^2)^{1/2} - \frac{u^2 + y^2 - \lambda y \cos \varphi}{[u^2 + y^2 + \lambda^2 - 2\lambda y \cos \varphi]^{1/2}} \right] \frac{y}{u^2 + y^2 \sin^2 \varphi} dy$$

Le nouveau changement de variable :

$$u = y \cos \varphi \quad \text{et} \quad v = y \sin \varphi$$

suivi de :  $v = \sin \theta$

donne à U sa nouvelle expression :

$$U = 2\pi u R^2 \int_0^\pi \left[ \sqrt{1 + u^2} - \frac{1 + u^2 + \lambda(\lambda^2 + u^2) \cos \theta - \lambda^2 \cos^2 \theta - \lambda \cos^3 \theta}{[u^2 + \lambda^2 + 1 - 2\lambda \cos \theta]^{1/2}} \right] \frac{d\theta}{u^2 + \sin^2 \theta} \quad (28)$$

En remarquant que :

$$u \sqrt{1 + u^2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{u^2 + \sin^2 \theta} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d \left( \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u} \operatorname{tg} \theta \right)}{1 + \left( \frac{\sqrt{1 + u^2}}{u} \operatorname{tg} \theta \right)^2} = \pi$$

on obtient :

$$U = 2\pi R^2 \int_{\pi-\mu}^{\pi} \int_0^{\pi} \left[ \lambda^2 + \lambda \cos \theta + \frac{\lambda^2 - 1}{2} \left( \frac{\lambda - \sqrt{1+\mu^2}}{\sqrt{1+\mu^2} - \cos \theta} - \frac{\lambda + \sqrt{1+\mu^2}}{\sqrt{1+\mu^2} + \cos \theta} \right) \right] \frac{d\theta}{[ \mu^2 + \lambda^2 + 1 - \lambda \cos \theta ]^{1/2}}$$

En posant :

$$\theta = 2\varphi ; \quad k^2 = \frac{4\lambda}{\mu^2 + (\lambda+1)^2} \quad ; \quad n = \frac{-2}{1 + \sqrt{1+\mu^2}} \quad ; \quad m = \frac{2}{\sqrt{1+\mu^2}-1}$$

et, en effectuant le changement de variable  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$  dans l'expression ainsi obtenue, on trouve finalement la forme :

$$U = -\pi R^2 \left\{ \pi - \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + (\lambda+1)^2}} \left[ 2\lambda(\lambda-1 + \frac{2}{k^2}) K(k) - \frac{4\lambda}{k^2} E(k) \right] - (\lambda^2 - 1) \left[ \frac{\sqrt{1+\mu^2} - \lambda}{\sqrt{1+\mu^2} + 1} \Pi(n, k) + \frac{\sqrt{1+\mu^2} + \lambda}{\sqrt{1+\mu^2} - 1} \Pi(m, k) \right] \right\} \quad (29)$$

dans laquelle K, E,  $\Pi$  désignent respectivement les intégrales elliptiques de première, de seconde, et de troisième espèce :

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$\Pi(v, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1+v \sin^2 \varphi) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

Pour que la formule (32) donnée ci-dessus soit correcte, cela suppose que l'on ait simultanément :

$k^2 < 1$  inégalité toujours vérifiée si l'on a à la fois  $\mu = 0$  et  $\lambda = 1$   
 $n < 1$  toujours vrai, sauf si  $\mu = 0$ .

Aux conditions limites  $\mu \rightarrow \infty$ , ou  $\lambda \rightarrow 0$ , on a  $U \rightarrow 0$ , et on ne peut pas alors utiliser la formule correspondante précédente.

En introduisant dans cette expression de U, l'intégrale elliptique complète :

$$\text{cel } (k_c, p, a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + p \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + k_c^2 \sin^2 \varphi}}$$

nous obtenons :

$$U = 2\pi R^2 \left\{ v - \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + (\lambda+1)^2}} \left[ 2\lambda \operatorname{cel}(k_C, 1, \lambda-1, \lambda+1) + (1-\lambda^2) \left( \frac{\sqrt{1+\mu^2}-\lambda}{\sqrt{1+\mu^2+1}} \operatorname{cel}(k_C, p, 1, 1) + \frac{\sqrt{1+\mu^2}+\lambda}{\sqrt{1+\mu^2-1}} \operatorname{cel}(k_C, \frac{1}{p}, 1, 1) \right) \right] \right\} \quad (30)$$

$$\text{où } k_C^2 = 1 - k^2 = \frac{\mu^2 + (\lambda-1)^2}{\mu^2 + (\lambda+1)^2} \quad \text{et} \quad p = \frac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{\sqrt{1+\mu^2+1}}$$

Un algorithme de calcul de la fonction  $\operatorname{cel}$ , basé sur la transformation de BARTKY, a été mis au point par BULIRSCH [24].

Si les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \mu_{j+1} &= \nu_j + \mu_j & \mu_0 &= 1 \\ \nu_{j+1} &= 2 \sqrt{\mu_j \nu_j} & \nu_0 &= |k_C| \\ p_{j+1} &= \frac{\mu_j \nu_j}{p_j} + p_j & p_0 &= \sqrt{p} \\ a_{j+1} &= \frac{b_j}{p_j} + a_j & a_0 &= a \\ b_{j+1} &= 2 \left( \frac{\mu_j \nu_j}{p_j} a_j + b_j \right) & b_0 &= \frac{b}{\sqrt{p}} \end{aligned}$$

l'intégrale elliptique complète de troisième espèce, peut alors être approchée par :

$$\operatorname{cel}(k_C, p, a, b) \approx \frac{\pi}{2} \frac{a_1 \mu_1 + b_1}{\mu_1 (\mu_1 + p_1)}$$

avec une erreur relative de l'ordre de  $10^{-D}$  (si  $a_1, b_1 \geq 0$ ) dès que  $i$  est un indice tel que :

$$1 - \left| \frac{\nu_i}{\mu_i} \right| \leq 10^{-D}$$

Il en résulte des relations de récurrence pour  $U_0$ .

En supposant :

$$\begin{aligned} \mu_{j+1} &= \nu_j + \mu_j & \mu_0 &= 1 \\ \nu_{j+1} &= 2 \sqrt{\mu_j \nu_j} & \nu_0 &= k_C \\ a_{j+1} &= \frac{b_j}{\mu_j} + a_j & a_0 &= \lambda-1 \\ b_{j+1} &= 2(\nu_j a_j + b_j) & b_0 &= \lambda+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{j+1} &= \frac{\mu_j v_j}{p_j} + p_j & p_0 &= \sqrt{p} \\
 c_{j+1} &= \frac{d_j}{p_j} + c_j & c_0 &= 1 \\
 d_{j+1} &= 2 \left( \frac{\mu_j v_j}{p_j} c_j + d_j \right) & d_0 &= \frac{1}{\sqrt{p}} \\
 q_{j+1} &= \frac{\mu_j v_j}{q_j} + q_j & q_0 &= \frac{1}{\sqrt{p}} \\
 e_{j+1} &= \frac{f_j}{q_j} + e_j & e_0 &= 1 \\
 f_{j+1} &= 2 \left( \frac{\mu_j v_j}{q_j} e_j + f_j \right) & f_0 &= \sqrt{p}
 \end{aligned}$$

La valeur de  $U$  est alors fournie par l'expression approchée (21).

$$U = 2\pi^2 R^2 \left\{ 1 - \frac{\mu}{2\mu_1 \sqrt{\mu^2 + (\lambda+1)^2}} \left[ \lambda a_{\lambda+1} + (1-\lambda^2) \left( \frac{\sqrt{1+\mu^2}-\lambda}{\sqrt{1+\mu^2}+\lambda} \cdot \frac{c_k \mu_k + d_k}{\mu_k + p_k} \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{(\sqrt{1+\mu^2}+\lambda)(\sqrt{1+\mu^2}+1)}{\mu^2} \cdot \frac{e_k \mu_k + b_k}{\mu_k + q_k} \right] \right\}$$

L'erreur relative est de l'ordre de  $10^{-D}$  dès que l'indice  $k$  vérifie

$$1 - \frac{\nu_k}{\mu_k} \leq 10^{-D}$$

## 7 - CALCUL A L'AIDE D'INTEGRALES DE BESSEL

[10] - (figure 5) - Les auteurs décrivent une méthode pas très connue, faisant appel aux fonctions de Bessel.

On considère deux disques coaxiaux et parallèles, situés à la distance  $z$  l'un de l'autre. Le disque de rayon  $R_S$  a pour valeur  $S_1 = \pi R_S^2$  et est supposé représenter une source homogène, émettant isotropiquement un rayonnement.

Celui-ci est détecté par l'autre disque de rayon  $R_D$  et de surface  $S_2 = \pi R_D^2$ . Soit  $R$  la distance séparant deux éléments d'aire  $dS_1$  et  $dS_2$ , appartenant respectivement à chacun des disques, et  $n_2$  le vecteur unitaire de la demi-normale au disque ( $S_2$ ) dirigée vers le disque ( $S_1$ ).

Si  $S_0$  est l'intensité de la source par unité d'aire, l'intensité du rayonnement, émis par l'élément de source  $dS_1$  dans l'angle solide élémentaire, a pour valeur :

$$\frac{S_0 \cdot dS_1}{4\pi}$$

Le nombre N de particules, émises par unité de temps, par la source  $S_1$ , et qui rencontrent le disque détecteur a donc pour expression :

$$N = \frac{S_0}{4\pi} \int dS_2 \int \frac{n_2 \cdot R}{R^3} dS_1 \quad (32)$$

L'angle solide relatif, qui se définit par le quotient du nombre de particules atteignant ( $S_2$ ), au nombre total de particules émises par la source, est donné par :

$$I = \frac{N}{S_0} = \frac{Z}{R_S^2}$$

L'intégrale I peut se transformer de manière à faire apparaître sous le signe somme, des fonctions de Bessel du premier ordre :

$$I = \left( \frac{R_d}{R_S} \right) \int_0^{+\infty} k^{-1} \cdot e^{-kz} J_1(kR_S) \cdot J_1(kR_d) dk \quad (33)$$

Dans le but de simplifier les calculs, on pose :

$$u = kR_S \quad ; \quad z = \frac{z}{R_S} \quad ; \quad F = \frac{R_d}{R_S}$$

ceci conduit à l'expression équivalente :

$$I = F \int_0^{+\infty} u^{-1} \cdot e^{-uZ} \cdot J_1(u) \cdot J_1(uF) du \quad (34)$$

Plusieurs valeurs de I ont été calculées, à l'aide de l'intégrale ci-dessus ainsi que par la méthode de Monte-Carlo décrite par WILLIAMS, CRAIG et THOMPSON. Les résultats numériques correspondants sont rassemblés dans le tableau 3.

Pour la méthode par intégration, l'erreur maximale indiquée par le taux de convergence : l'intégrale, ne dépasse pas 0,1 % en fixant à 15 le nombre maximal d'itérations, et en faisant varier u de 0,001 à  $u = \frac{80}{F}$ . Le temps correspondant de calcul sur un ordinateur CDC 6600 est de 77,8 sec.

Pour la méthode de Monte-Carlo, la principale source d'erreur, dépend du nombre de trajectoires des particules au hasard, fixé initialement. Pour chaque géométrie considérée, ce nombre a été fixé égal à 10 000. L'erreur statistique maximale pour chaque calcul est de 2,8 % et décroît, quand le rapport  $\frac{R_d}{R_S}$  s'accroît. La convergence est particulièrement lente pour les valeurs des rayons vérifiant l'inégalité  $\frac{R_d}{R_S} < 1$ . Le temps de calcul du même ordinateur utilisant cette méthode est de 282 secondes. La méthode d'intégration décrite est donc avantageuse, par rapport à la méthode de Monte-Carlo.



8 - CALCUL A L'AIDE D'INTEGRALES MULTIPLES

8.1 - Intégrales doubles

[9] (Figure 6) - Le calcul d'angle solide considéré est effectué à l'occasion de l'étude de l'efficacité géométrique d'un compteur Geiger-Müller.

Soit M un point distant de r de l'axe géométrique d'un disque de rayon R, qui est distant de a d'un disque parallèle de rayon r<sub>0</sub>. On désigne par ω<sub>a,r<sub>0</sub></sub>(r) l'angle solide, sous lequel du point M est vu le disque de rayon r<sub>0</sub>. Sa valeur est celle de la surface intérieure à une courbe (γ) appartenant à la sphère centrée en M et de rayon unité. Cette courbe est définie comme intersection de cette sphère, avec le cône elliptique de sommet M et admettant la circonférence de rayon r<sub>0</sub> pour section oblique. Son équation s'obtient à partir de celles des deux surfaces considérées.:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (r^2 - r_0^2) \frac{z^2}{a^2} + 2r \frac{yz}{a} &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

En désignant par f(x,y) la projection de la courbe (γ) sur le plan xOy, l'angle solide ω<sub>a,r<sub>0</sub></sub>(r) se calcule à l'aide de la formule :

$$\omega_{a,r_0}(r) = \iint_{f(x,y)} \left[ 1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} dx dy \quad (36)$$

En tenant compte de (35), on peut encore écrire :

$$\omega_{a,r_0}(r) = \iint_{f(x,y)} \frac{dx dy}{[1 - (x^2 + y^2)]^{1/2}} \quad (37)$$

En posant x = ρ cos v et y = ρ sin v, et en appelant g(ρ,v) l'équation polaire de la courbe f(x,y), on obtient :

$$\omega_{a,r_0}(r) = \iint_{g(\rho,v)} \frac{\rho d\rho dv}{[1 - \rho^2]^{1/2}} \quad (38)$$

L'équation polaire g(ρ,v) de la courbe plane (c) a pour expression :

$$g(\rho,v) = \rho^2 + [(r^2 - r_0^2)/a^2] (1 - \rho^2) + 2 \frac{r}{a} \rho (1 - \rho^2)^{1/2} \sin v = 0 \quad (39)$$

On peut en déduire ρ = η(v).

L'équation (38) peut encore s'écrire :

$$\omega_{a,r_0}(r) = 2 \int_{v=-\frac{\pi}{2}}^{v=+\frac{\pi}{2}} dv \int_{\rho=0}^{\rho=\eta(v)} \frac{\rho d\rho}{(1 - \rho^2)^{1/2}} = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [- (1 - \rho^2)^{1/2} ]^{\eta(v)} dv$$

$$\omega_{a,r_0}(r) = z \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [1 - (1 - [\eta(v)]^2)^{1/2}] dv \quad (40)$$

$\eta(v)$  est déterminé par l'équation (39).

Le pseudo-angle solide sous lequel, le disque de rayon  $r_0$  est vu depuis le disque de rayon  $R$  qui lui est parallèle, a alors pour expression  $\Omega(a, r_0)$  qui est donnée par :

$$\Omega(a, r_0) = \frac{z}{R^2} \int_0^R \omega_{a,r_0}(r) \cdot r \, dr \quad (41)$$

L'efficacité géométrique correspondante est égale à  $\frac{\Omega(a, r_0)}{4\pi}$ .

L'intégrale (40) peut se calculer par des méthodes d'approximation. La valeur de  $r_0$  ayant été prise égale à 15 mm, il a été calculé un ensemble de valeurs de  $\omega_a(r)$  pour quelques valeurs attribuées à la distance  $a$ . On peut à partir de ce premier exemple de fonctions, calculer un second ensemble  $\omega_r(a)$ . Ils permettent de calculer la fonction  $\omega_{a,r_0}(r)$  pour tout couple de valeurs des paramètres  $a$  et  $r_0$ , en utilisant la relation :

$$\omega_{a,r_0}(r) = \omega_{a',r_0'}(r')$$

$$\text{avec } r' = r \frac{r_0'}{r_0} \text{ et } a' = a \frac{r_0'}{r_0}$$

Une fois la valeur de  $\omega_{a,r_0}(r)$  obtenue, le calcul de  $\Omega(a, r_0)$  peut s'effectuer à l'aide d'une méthode approchée.

Afin de déterminer  $\omega_{a,r_0}(r)$ , l'équation (39) est écrite sous la forme :

$$\sin v = \beta \left( \frac{1}{x} \right) - \frac{x}{\alpha}$$

en utilisant les notations suivantes :

$$x = \frac{\rho}{(1-\rho^2)^{1/2}} \quad ; \quad \beta = \frac{r_0^2 - r^2}{2ra} \quad ; \quad \alpha = \frac{2r}{a}$$

qui sont conformes aux définitions des coordonnées polaires  $\rho$  et  $v$  :

$$x = \rho \cos v \quad ; \quad y = \rho \sin v$$

Le tableau 1 donne les valeurs de  $x$  et de  $\frac{1}{x}$  en fonction de  $\rho$ , et le tableau 2 fournit  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $a$  et de  $r$ .

Ces deux tables permettent le calcul de  $(1-\rho^2)^{1/2}$  en fonction de  $v$  : les courbes correspondantes sont situées sur la figure 7.

L'expression de  $\omega_{a,r_0}(r)$  donnée par l'équation (40); permet d'interpréter cette quantité comme étant le double de l'aire hachurée sur la figure 8.

Les courbes représentatives des variations de  $\omega_{a,r_0}(r)$  pour  $a = 2,5,10, 20,30,40$  mm ont été tracées sur la figure 9.

Toutes ces fonctions ont été calculées pour  $r_0 = 15$  mm.

La relation  $\omega_{a,r_0}(r) = \omega_{a',r'_0}(r')$  permet le calcul pour d'autres valeurs des paramètres.

## 8.2 - Intégrales multiples

[11] - 1° - Introduction - On étudie ici, le cas de deux disques coaxiaux, situés dans des plans parallèles, orthogonaux à leur axe commun. Ce cas se rencontre, quand une source neutronique ponctuelle, est située sur l'axe d'un radiateur circulaire, lequel est parallèle à un détecteur circulaire qui lui est coaxial. Les neutrons rencontrant le disque radiateur, y créent des particules secondaires, vues par le détecteur.

Plusieurs cas sont envisagés, suivant les positions relatives de la source par rapport aux disques d'une part, et suivant le type de distribution angulaire d'autre part.

### 2° - Source neutronique située à l'infini

#### a) Distribution angulaire isotropique

(Figure 10) - Les particules issues de l'élément d'aire  $dA_1$  du disque radiateur, rencontrent l'élément d'aire  $dA$  du détecteur. L'angle solide correspondant  $\Omega$ , s'obtient par une double intégration sur le radiateur et le détecteur.

$$\Omega = \frac{1}{\pi R_1^2} \iint \frac{dA dA_1}{b^3} = \frac{R^2}{\pi R_1^2} \iint \frac{a}{R^2 b^3} dA dA_1 \quad (42)$$

En posant :

$$p = \frac{R_1}{R} \quad \text{et} \quad q = \frac{a}{R}$$

l'intégrale considérée devient

$$I = \iint \frac{a}{R^2 b^3} dA dA_1 = I(p,q)$$

et l'angle solide  $\Omega$  évalué en stéradians, est donné par la formule :

$$\Omega = \frac{I}{\pi p^2} \quad (43)$$

L'intégrale I ci-dessus, peut s'écrire sous la forme :

$$I = \int_0^{R_1} dr_1 \int_0^R d\rho_1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} \frac{ar_1 \rho_1 d\theta_1}{R^2 [a^2 + r_1^2 + \rho_1^2 - 2r_1\rho_1 \cos(\theta_1 - \varphi)]^{3/2}}$$

En posant successivement :

$$\begin{aligned} \rho_1 &= R\rho & 0 \leq \rho \leq 1 \\ r_1 &= Rr & 0 \leq r \leq \frac{R_1}{R} = p \\ \theta_1 &= \theta + \varphi & -\varphi \leq \theta \leq 2\pi - \varphi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha &= r \cos \theta \\ \beta^2 &= q^2 + r^2 \sin^2 \theta \\ \alpha^2 + \beta^2 &= q^2 + r^2 \\ \beta^2 + (1-\alpha)^2 &= q^2 + r^2 + 1 - 2r \cos \theta \end{aligned}$$

on obtient finalement :

$$I = 4\pi q \int_0^p r dr \int_0^\pi f(r, \theta) d\theta = I(p, q) \quad (44)$$

avec

$$f(r, \theta) = \frac{1}{\beta^2} \left[ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta^2 + \alpha^2 - \alpha}{\sqrt{\beta^2 + (1-\alpha)^2}} \right] \quad (45)$$

La table I de cette publication, donne les valeurs numériques de l'intégrale  $I(p, q)$  pour  $p$  variant de 0,01 à 1,0. Pour les autres valeurs de  $p$ , on utilise la relation :

$$I(p, q) = p^2 I\left(\frac{1}{p}, \frac{q}{p}\right)$$

Dans le cas particulier où  $q = 0$ , les plans des deux disques sont confondus, ce qui conduit aux valeurs :

$$I(p, 0) = \begin{cases} \frac{2\pi}{p^2} & \text{pour } p \geq 1 \\ 2\pi & \text{pour } p \leq 1 \end{cases}$$

#### b) Distribution angulaire non isotrope

A une distribution angulaire anisotrope dans le système de masse, correspond une distribution angulaire en cosinus dans le système laboratoire. L'intégrale  $I$  devient dans ce cas :

$$I = \int_0^p r \, dr \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi-\varphi} \frac{q^2 \, d\theta}{(q^2 + r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos\theta)^2} \quad (46)$$

d'où par intégration :

$$I(p, q) = \frac{\pi^2}{2} \left[ p^2 + q^2 + 1 - \sqrt{(p^2 + q^2 + 1)^2 - 4p^2} \right] \quad (47)$$

La table II de cet article, fournit les valeurs numériques de I(p, q) pour :

$$\begin{cases} p & \text{variant de } 0,01 \text{ à } 1,00 \text{ et} \\ q & \text{variant de } 0,01 \text{ à } 100. \end{cases}$$

5° - Source neutronique à distance finie

a) Distribution angulaire isotropique

Le nombre de particules issues de différents endroits de la cible, est dans ce cas proportionnel à :

$$\frac{S^2}{S^2 + r^2} = \frac{w^2}{w^2 + r^2}$$

avec  $w = \frac{S}{R}$  et  $r = \frac{r_1}{R}$

L'intégrale I de l'équation (44) devient alors :

$$I = 4\pi q w^2 \int_0^p \frac{r \, dr}{w^2 + r^2} \int_0^\pi f(r, \theta) \, d\theta$$

Les auteurs donnent dans la table III, les valeurs numériques de I. Celles-ci correspondent aux valeurs suivantes du paramètre W :

W = 0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,5 ; 3,5 ; 5,0 ; 10,0.

A chacune de ces valeurs de W, correspond un tableau, dans lequel p et q varient de la manière suivante :

$$\begin{cases} p & \text{varie de } 0,15 \text{ à } 1,0 \\ q & \text{varie de } 0,10 \text{ à } 100. \end{cases}$$

On a d'autre part :

$$I_{w \neq \infty} \geq I_{w = \infty} \geq \frac{w^2}{w^2 + p^2} I_{w = \infty}$$

I et I<sub>w=∞</sub> différent donc, d'une quantité qui est approximativement moindre que  $\frac{p^2}{w^2}$ .

L'angle solide  $\Omega$  correspondant, évalué en stéradians a finalement pour expression :

$$\Omega = \frac{1}{\pi p^2} \frac{p^2}{w^2} \text{Log}_n \left[ 1 + \frac{p^2}{w^2} \right] \quad (48)$$

b) Distribution angulaire non isotropique

Deux intégrations conduisent dans ce cas, à l'expression suivante de I :

$$I = 4\pi q w^2 \int_0^p \frac{r \, dr}{[w^2 + r^2]^{3/2}} \int_0^\pi g(r, \theta) \, d\theta$$

où  $g(r, \theta)$  est donné par :

$$g(r, \theta) = \frac{A}{a^3} \text{Arc tg} \left[ \frac{a}{q^2 + r^2 - a} \right] + \left[ \frac{Bx + C}{a^2 (a^2 + x^2)} \right]^{1-n}$$

avec pour expression des paramètres :

$$a = r \cos \theta$$

$$a = \sqrt{q^2 + r^2 - a^2}$$

$$A = a \frac{wq + q^2}{2}$$

$$B = a \left[ a^2 - r^2 + \frac{wq - q^2}{2} \right]$$

$$C = -a^2 \left[ a^2 + \frac{wq - r^2}{2} \right]$$

Les auteurs publient dans la table IV de l'article analysé, les valeurs numériques de I. Celles-ci sont classées en 7 tableaux, chacun d'eux, correspondant à l'une des valeurs suivantes de w :

w = 0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,5 ; 3,5 ; 5,0 ; 10,0.

Pour chacun d'eux, p et q varient comme ci-dessous :

$$\begin{cases} p = 0,15 ; 0,3 ; 0,5 ; 0,7 ; 1,0 \\ q = 0,10 \text{ à } 100. \end{cases}$$

L'angle solide  $\Omega$  évalué en stéradians, est donné dans ces conditions par la formule :

$$\eta = \frac{2I}{\sigma p^2} \frac{\frac{p^2}{w^2}}{\text{Log}_n \left[ 1 + \frac{p^2}{w^2} \right]} \quad (49)$$

4° - Cas de deux disques coaxiaux

[12] (Figure 11) - La configuration géométrique qui est ici étudiée est celle de deux lisques parallèles et coaxiaux.

On désigne respectivement par :

- N le taux d'émission des neutrons de toute la source
- n le nombre de noyaux cibles de tout l'échantillon
- $\sigma$  la section efficace d'activation du matériau de l'échantillon.

Le taux d'activation de l'élément de surface de l'échantillon, par irradiation des neutrons issus de l'élément superficiel de la source, est alors donné par l'expression

$$\frac{N}{\pi r_1^2} \cdot p d\phi \cdot dp \frac{1}{4\pi} \frac{q d\gamma \cdot dq \cdot \cos\theta}{PQ^2} \cdot \frac{n}{\pi r_1^2} \frac{1}{\cos\theta} \sigma \quad (50)$$

Le taux d'activation  $A(h, r_1, r_2, 0, 0)$  de tout l'échantillon, induit par l'émission globale de la source, s'obtient en intégrant (50) à tout le domaine  $\theta, \phi, q, \gamma$  compatible avec les dimensions du dispositif considéré.

$$A(h, r_1, r_2, 0, 0) = \frac{Nn\sigma}{4\pi^3 r_1^2 r_2^2} \int_0^{r_1} p dp \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \int_0^{r_2} q dq \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\gamma}{h^2 + p^2 + q^2 - 2pq\cos\gamma} \quad (51)$$

Cette intégrale quadruple, se réduit finalement à :

$$A(h, r_1, r_2, 0, 0) = \frac{Nn\sigma}{4\pi h^2} f(h, r_1, r_2, 0, 0) \quad (52)$$

avec :

$$f(h, r_1, r_2, 0, 0) = \frac{h^2}{r_2^2} \log \left[ g \left( \frac{r_1}{h}, \frac{r_2}{h} \right) \frac{r_1^2}{h^2} \right] + \frac{h^2}{r_1^2} \log \left[ g \left( \frac{r_1}{h}, \frac{r_2}{h} \right) \frac{r_2^2}{h^2} \right] - \frac{1}{g \left( \frac{r_1}{h}, \frac{r_2}{h} \right)} \quad (53)$$

et

$$g \left( \frac{r_1}{h}, \frac{r_2}{h} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \left[ 1 + \frac{r_1^2}{h^2} + \frac{r_2^2}{h^2} \right]^2 - 4 \frac{r_1^2}{h^2} \cdot \frac{r_2^2}{h^2} \right]^{1/2} + 1 + \frac{r_1^2}{h^2} + \frac{r_2^2}{h^2} \right\}$$

La quantité sans dimension  $f(h, r_1, r_2, 0, 0)$  est caractéristique de la géométrie du dispositif considéré.

Le terme  $\frac{Nn}{4\pi^2 r_1^2 r_2^2}$  représente le taux d'activation d'un échantillon ponctuel, irradié par une source ponctuelle.

En étudiant le cas particulier où les deux disques ont le même rayon :  $r_1 = r_2 = r$ , la formule (53) se simplifie et devient :

$$f(h, r, r, 0, 0) = \frac{2h^2}{r^2} \log \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left(1 + \frac{4r^2}{h^2}\right)^{1/2} + 1 \right] \right\} - 2 \left[ \left(1 + \frac{4r^2}{h^2}\right)^{1/2} + 1 + \frac{2r^2}{h^2} \right]^{-1} \quad (54)$$

## 9 - CALCUL PAR LA METHODE DE MONTE-CARLO

### 9.1 - Première méthode (I.R. WILLIAMS)

[13] (Figure 12) - Deux disques circulaires situés dans des plans parallèles, et dont les centres se trouvent sur une même droite orthogonale à leurs plans déterminent un angle solide qui a pour expression :

$$\Omega = \int_0^{R_D} \frac{2\pi\Omega(r)r}{\pi R_S^2} dr$$

$\Omega(r)$  désigne l'angle solide sous lequel est vu le disque de rayon  $R_D$ , depuis un point de l'autre disque, distant de  $r$  de son centre.

Une méthode de calcul approché a été donnée par BURTT [14]. KONIJN et TOLLANDER [11] ont résolu numériquement les intégrales d'une équation approchée, et ont tabulé leurs résultats en fonction des variations de

$$\frac{R_S}{R_D} \quad \text{et} \quad \frac{D}{R_D}$$

Ces résultats ne sont cependant valables, que si la source est plus petite que le détecteur.

La méthode proposée par I. WILLIAMS fait appel aux calculs de Monte-Carlo, et permet l'obtention de résultats avec toute précision voulue. Un ordinateur simule l'émission isotropique d'une source supposée uniformément distribuée sur un disque. Le programme utilise des nombres au hasard pour le choix d'un point du disque source, et de la direction d'une émission en ligne droite issue de ce même point. Il vérifie que celle-ci rencontre ou non, l'autre disque considéré comme détecteur. Le nombre maximum d'itérations, c'est-à-dire de désintégrations simulées, étant arbitrairement choisi d'avance, cela permet le choix du temps de calcul et de sa précision. Pour augmenter la vitesse de calcul, on simule seulement les rayons intérieurs à un cône d'angle solide  $4\pi\text{ETA}$ , entourant le détecteur. Il faut environ une minute de temps machine pour 1000 itérations. Si la source est plus grande que le détecteur, le nombre maximum d'itérations doit être choisi plus important pour obtenir la même précision. La proportion du nombre d'impacts réussis, au nombre d'essais, multipliée par  $\text{ETA}$ , donne le facteur géométrique (P) dont la valeur maximum est 0,5. Les données d'entrées doivent donc contenir le coefficient de variation minimum désiré, défini comme étant le



quotient de la déviation standard par le facteur géométrique. On doit également fournir les données géométriques du problème : le rayon  $R_S$  de la source, celui  $R_D$  du détecteur, et la distance  $D$  source-détecteur.

La sortie calculée, est la proportion du nombre d'impacts réussis, au nombre d'essais, ainsi que sa variation standard. Le programme est écrit en FORTRAN II. La figure 13 montre des valeurs calculées de la géométrie, pour des sources et des détecteurs circulaires séparés de la distance unité.

### 9.2 - Deuxième méthode (C. BONNET - P. HILLION - G. NURDIN)

[15] (Figure 7) - En utilisant également une méthode de Monte-Carlo, ces auteurs proposent un calcul plus rapide que celui de I.R. WILLIAMS, valable quels que soient  $R_S$ ,  $R_D$ , et donnant une variance meilleure, sauf pour  $R_S/R_D$  inférieur à 0,01.

Considérant toujours, l'angle solide  $\Omega$  sous-tendu par deux disques circulaires, situés dans des plans parallèles, et dont les centres sont situés sur une perpendiculaire commune à leurs plans, on a l'expression :

$$\Omega = \int_0^{R_S} \left[ (2\pi\Omega(r)r) / \pi R_S^2 \right] dr \quad (55)$$

$\Omega(r)$  angle solide sous lequel est vu le disque détecteur de rayon  $R_D$ , depuis un point du disque source de rayon  $R_S$ , distant de  $r$  de son centre.

En désignant par  $\rho$  et  $\varphi$  les coordonnées polaires d'un point du détecteur, et par  $D$  la distance qui sépare les plans des deux disques, on a :

$$\Omega(r) = D \int_0^{2\pi} \int_0^{R_D} \left[ r^2 + \rho^2 + D^2 - 2\rho r \cos \varphi \right]^{-\frac{3}{2}} \rho d\rho d\varphi \quad (56)$$

En effectuant le changement de variable  $r = xD$ ,  $\rho = yD$ , et en posant  $\alpha = \frac{R_S}{D}$  et  $\beta = \frac{R_D}{D}$ , l'équation (55) devient :

$$\Omega = \pi\beta^2 \int_0^\alpha \frac{2x}{\alpha^2} \int_0^\beta \frac{2y}{\beta^2} \int_0^{2\pi} (2\pi)^{-1} \left[ x^2 + y^2 + 1 - 2xy \cos \varphi \right]^{-\frac{3}{2}} dx dy d\varphi \quad (57)$$

Le calcul de  $\Omega$  s'effectue par une méthode de Monte-Carlo. On considère pour cela  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$  comme des variables aléatoires indépendantes. Celles-ci sont supposées réparties sur les intervalles  $(0, \alpha)$  ;  $(0, \beta)$  ;  $(0, 2\pi)$  avec les densités de probabilités :

$$f_1(x) = \frac{2x}{\alpha^2} ; f_2(y) = \frac{2y}{\beta^2} ; f_3(\varphi) = (2\pi)^{-1}$$

Avec ces considérations, on a alors :

$$\Omega = E \{ g(x, y, \varphi) \}$$

avec 
$$g(x, y, \varphi) = \left[ x^2 + y^2 + 1 - 2xy \cos \varphi \right]^{-\frac{3}{2}} \quad (58)$$

Un estimateur de l'équation (58) est :

$$\hat{n}^* = \pi \beta^2 N^{-1} \sum_{i=1}^{i=N} g(x_i, y_i, \varphi_i) \quad \text{et} \quad (59)$$

$$\sigma^{*2} = (\pi \beta^2)^2 N^{-1} \left[ N^{-1} \sum_{i=1}^{i=N} g^2(x_i, y_i, \varphi_i) - \hat{n}^{*2} \right] \quad (60)$$

Un sous-programme FRAHAS (I,J) génère des couples (I,J) de nombres aléatoires répartis uniformément sur l'intervalle (0,1) et permet ainsi d'obtenir les distributions de  $x, y, \cos \varphi$ . Le programme est écrit en FORTRAN IV.

La figure 7 donne les courbes représentatives des variations de  $\Omega$  en fonction de  $R_S$ , en prenant  $R_d$  pour paramètre. La précision est toujours inférieure à  $\frac{1}{3}(R_d + R_S)/\sqrt{N}$ . Les calculs qui correspondent aux courbes tracées ont été effectués avec  $N = 10^4$ , et le temps de calcul est de 38 secondes sur un ordinateur UNIVAC 1108.

### 9.3 - Troisième méthode [I.R. WILLIAMS, A.M. CRAIG, C.L. THOMPSON]

[16] - Une intégration numérique de l'angle solide ponctuel, par la méthode de Monte-Carlo est effectuée sur ordinateur. Elle simule l'émission isotropique de particules chargées, déposées uniformément sur une source circulaire vue par le fenêtrage circulaire d'un détecteur. La méthode demeure valable si les plans des deux disques ne sont pas parallèles. Elle utilise quatre nombres au hasard : deux déterminent les coordonnées du point d'émission, et deux autres la direction du rayonnement issu de la désintégration considérée.

## 10 - CALCUL PAR ANALOGIE ELECTROSTATIQUE

### 10.1 - Deux disques coaxiaux

[17] - On utilise l'analogie entre le calcul de l'angle solide sous-tendu par deux surfaces, et l'évaluation des énergies électrostatiques des mêmes surfaces uniformément chargées.

En désignant par  $G_p$ , la géométrie limitée par une surface circulaire vue en un point  $P(r_2)$ , on a la relation :

$$G_p(r_2) = \frac{\Omega}{4\pi} \quad (61)$$

$\Omega$  : angle solide sous-tendu au point P par la surface circulaire considérée  
 $4\pi$  : angle solide sous-tendu par tout l'espace, au point P

$$G_p(r_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{r_{12} dS_1}{|r_{12}|^3} \quad (62)$$

$r_{12}$  : distance située entre le point P considéré, et l'élément d'aire  $dS_1$  de la surface considérée.

Cette intégrale est étendue à toute la surface  $S_1$ .

Dans le cas de deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , la géométrie  $G_S$  qu'elles limitent, est donnée par :

$$G_S = \frac{1}{4\pi S_2} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{r_{12} \cdot dS_1}{|r_{12}|^3} dS_2 \quad (63)$$

En utilisant l'identité :

$$\text{grad} \left( \frac{1}{|r_{12}|} \right) = \frac{r_{12}}{|r_{12}|^3}$$

l'expression précédente (62) de  $G_p$  qui est valable pour une surface  $S_1$ , peut s'écrire :

$$G_p(r_2) = \frac{1}{4\pi} \left| \frac{d}{dn} \int \frac{dS_1}{|r_{12}|} \right| \quad (64)$$

$n$  désigne la distance du point  $P(r_2)$  à la surface  $S_1$ .

Le terme intégral est égal, à l'énergie électrostatique d'une surface uniformément chargée  $S_1$ , de densité de charge unité, et d'une charge ponctuelle située au point  $P(r_2)$ .  $G_p$  est ainsi proportionnel à la grandeur de la force agissant entre ces distributions de charge.

De la même manière,  $G_S$  peut être donné par :

$$G_S = \frac{1}{4\pi S_2} \frac{d}{dn} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 \cdot dS_2}{|r_{12}|} \quad (65)$$

L'intégrale double est proportionnelle à l'énergie électrostatique des deux surfaces uniformément chargées, et  $G_S$  est ainsi, proportionnelle à l'amplitude de la force existant entre ces deux surfaces.

L'énergie mutuelle  $E_m$  de deux disques coaxiaux parallèles uniformément chargés, chacun ayant une densité de charge unité peut s'exprimer par :

$$E_m = R(r_1, r_2, d)$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont les rayons des disques, et  $d$  la distance qui les sépare,

$$R(r_1, r_2, d) = 2\pi a^2 r_1^3 \left\{ \frac{1}{p} B(\alpha, p^2) - 2\beta \right\} \quad (66)$$

où  $\alpha = \frac{r_2}{r_1}$  et  $\beta = \frac{d}{2r_1}$  et  $p^2 = \frac{1}{1+4\beta^2}$

La fonction  $B(\alpha, p^2)$  a été tabulée par GROVER [18].

Dans le cas particulier de deux disques de même rayon, on a alors :

$$R(r, r, d) = 4\pi r^3 \left[ \frac{4}{3} - \pi B(1-K(\beta)) \right] \quad (67)$$

La tabulation de la fonction  $K(\beta)$  a été réalisée par NAGAOKA et SAKURAI.

## 10.2 - Deux disques non coaxiaux

[17] - Considérons deux disques circulaires parallèles, mais non coaxiaux, leurs axes étant situés à une distance  $t$ .

En supposant ces deux disques uniformément chargés à l'aide d'une densité de charge unité, leur énergie mutuelle  $E_m$  a pour expression :

$$E_m = \pi^2 \alpha r_1^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n F(-n-1, -n, 2, \alpha^2) S^{2n} (2n)! P_{2n}(qS)}{(n+1)! n! 2^{2n}} \quad (68)$$

avec  $s^2 = \frac{r_1^2}{d^2 + t^2}$  et  $q = \frac{d}{r_1}$

$F$  est une fonction hypergéométrique

$P_{2n}$  est un polynôme de Legendre.

Les développements en série correspondants de  $E_m$  conduisent à des expressions très compliquées.

## 11 - APPLICATIONS

### 11.1 - Efficacité d'un détecteur circulaire

#### a) - Définition du problème

[19] - On considère une source ponctuelle isotropique de neutrons, positionnée sur l'axe de symétrie commun à un radiateur et à un détecteur circulaires.

Les neutrons rencontrent le disque radiateur où, par réaction nucléaire ou, par diffusion, ils produisent des particules secondaires qui sont détectées par le second disque. L'hypothèse est faite, que toutes les particules atteignant le détecteur sont détectées, et que l'épaisseur du disque radiateur est négligeable devant le parcours des particules secondaires dans son matériau.

#### b) - Efficacité pour un disque radiateur infiniment mince

Les notations utilisées sont conformes aux figures 14 et 15.

$R_1$  est le rayon du disque radiateur

$R$  est le rayon du disque détecteur

$s$  est la distance de la source de neutrons au radiateur

$a$  est la distance entre les deux disques

$\varphi$  est l'angle fait par la trajectoire d'un neutron incident, avec l'axe de révolution du dispositif.

$P$  est le point d'impact de ce neutron sur le radiateur

$\eta$  est le demi-angle au sommet du cône des particules secondaires émises depuis le point  $P$

$\rho$  est la distance du point  $P$  à l'axe de symétrie.

On introduit de plus, les paramètres suivants qui sont sans dimensions :

$$p = \frac{R_1}{R} ; \quad q = \frac{a}{R} ; \quad w = \frac{s}{R} ; \quad r = \frac{\rho}{R}$$

On considère un neutron dont la trajectoire linéaire fait l'angle  $\varphi$  avec l'axe de symétrie de l'ensemble, et dont l'impact avec le disque radiateur a lieu au point P.

Les particules secondaires créées en ce point, sont distribuées à la surface d'un cône circulaire ayant pour axe le prolongement de la trajectoire du neutron incident, et  $\eta$  pour demi-angle au sommet. Ce cône intercepte le détecteur circulaire, suivant une certaine aire qu'on projette sur la sphère de centre P et de rayon unité. La portion de surface ainsi obtenue, limitée par un arc de cercle, d'angle d'ouverture  $2\varphi$ , divisée par  $2\pi$ , donne la contribution à l'efficacité de détection des particules issues du point P et émises sous l'angle  $\eta$ .

En étendant le calcul réalisé pour le point P, à tous les points du disque radiateur, et en divisant par l'aire de celui-ci, on obtient l'efficacité fractionnaire relative à toutes les particules émises par le disque cible sous l'angle  $\eta$ .

Pour une valeur de  $w$  donnée, les neutrons issus de la source ponctuelle sous un angle  $\varphi$ , sont à l'origine d'un flux de neutrons rencontrant la cible au point P.

Ce flux vaut  $\frac{w^2}{w^2 + r^2}$  fois, celui obtenu pour  $\varphi = 0$ .

Si  $\varphi = \pi$ , la circonférence constituée par l'intersection du cône issu de P, par le plan du détecteur, est entièrement intérieure à celui-ci, et l'efficacité est alors égale à 1.

L'efficacité totale de détection F est finalement donnée par la formule :

$$F = \frac{1+n}{n \text{Log}_n \left(1 + \frac{p^2}{w^2}\right)} \int_0^\pi \sin \eta |\cos^n \eta| d\eta \int_0^p \frac{r \varphi}{w^2 + r^2} dr \quad (69)$$

Le nombre entier  $n$  correspond à la fonction d'émission en  $\cos^n \eta$ , et la valeur absolue, située dans l'élément différentiel en  $\eta$ , s'explique par la positivité évidente de F.

Pour une valeur de  $w$  infinie, l'intégrale se réduit à :

$$F_\infty = \frac{1+n}{\pi p^2} \int_0^\pi \sin \eta |\cos^n \eta| d\eta \int_0^p r \varphi dr \quad (70)$$

dans laquelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = 0 \quad \text{si} \quad r \geq 1+q \operatorname{tg} \eta \\ \varphi = \operatorname{Arc} \cos \left( \frac{1-r^2-q^2 \operatorname{tg}^2 \eta}{-2 r q \operatorname{tg} \eta} \right) \\ \quad \text{si} \quad 1 - q \operatorname{tg} \eta < r < 1+q \operatorname{tg} \eta \\ \varphi = \pi \quad \text{si} \quad r \leq 1-q \operatorname{tg} \eta \end{array} \right.$$

Si les plans de la cible et du détecteur sont confondus ( $q=0$ ), la valeur

de F dépendra des valeurs relatives des rayons R et R<sub>1</sub> des deux disques confondus :

$$\text{Si } p > 1 \quad F = \frac{1}{2p^2}$$

$$\text{Si } p \leq 1 \quad F = \frac{1}{2}$$

Dans le cas d'une diffusion n-p, on obtient l'expression :

$$F = \frac{4}{n \log_n \left(1 + \frac{R^2}{w^2}\right)} \int_0^{\pi/2} \sin \eta \cdot \cos \eta \, d\eta \int_0^p \frac{r \, dr}{w^2 + r^2} \quad (71)$$

La figure 16 donne l'efficacité F en fonction de q, pour les valeurs numériques suivantes des paramètres :

$$0,01 \leq q \leq 100$$

$$0,15 \leq p \leq 1$$

$$0,1 \leq w \leq \infty$$

Les courbes correspondantes supposent une distribution angulaire isotrope des particules émises.

Le même article étudie le cas où le disque radiateur possède une épaisseur donnée non négligeable.

## 11.2 - Etude d'un télescope de rayons cosmiques

### 1° - Aspects géométriques des performances

#### (20) a) Facteurs géométriques

Le facteur géométrique d'un télescope détecteur exposé à un flux isotrope d'intensité I<sub>0</sub> particules/cm<sup>2</sup>/stéradian/seconde est donné par :

$$G = \frac{N}{I_0} \text{ cm}^2 \text{ Sr.} \quad (72)$$

N taux de coïncidence du système en coups/seconde, dû aux particules venant du dessus.

Le flux de particules étant supposé isotrope, le facteur géométrique ainsi défini, est indépendant de la position du télescope dans le rayonnement.

En considérant un télescope constitué par deux disques circulaires coaxiaux de rayons respectifs R<sub>1</sub> et R<sub>2</sub>, situés dans des plans parallèles séparés par la distance S, l'expression de G prend alors la forme :

$$G = \frac{1}{2} w^2 \left\{ (R_1^2 + R_2^2 + S^2) - \left[ (R_1^2 + R_2^2 + S^2)^2 - (2R_1 R_2)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (73)$$

La figure 17 représente les variations de  $\frac{R_2}{R_1}$  en fonction de  $\frac{R_1}{S}$  pour différentes valeurs de  $\frac{R_2}{S}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R_1}{S} \text{ est supposé varier de } 10^{-1} \text{ à } 10^{+1} \\ \frac{R_2}{S} \text{ est supposé varier de } 0,12 \text{ à } 3,0. \end{array} \right.$$

b) Réponse angulaire

Les seules particules comptées sont celles qui rencontrent sur leur trajet, les deux disques détecteurs. Cela conduit à l'étude géométrique des divers cas envisagés sur la figure 18. Dans chacun de ceux-ci, l'aire hachurée correspond à la portion du faisceau parallèle de rayonnement rencontrant toute la surface du disque supérieur, et interceptée par le plan du disque inférieur. Cette étude a amené les auteurs à calculer "l'ombre portée" du disque supérieur de rayon  $R_1$  sur celui de rayon  $R_2$ .

L'efficacité angulaire d'un faisceau parallèle est alors donnée par :

$$\eta(\theta) = \frac{A_S(\theta) \cdot \cos\theta}{A_S(0)}$$

avec  $\eta(\theta) = \frac{\text{Taux de comptage pour } \theta \neq 0}{\text{Taux de comptage pour } \theta = 0}$

$A_S(\theta)$  aire de l'ombre portée correspondant à  $\theta$

$A_S(0)$  aire de l'ombre portée correspondant à 0.

L'expression de  $\eta(\theta)$  a été calculée pour différentes valeurs des paramètres géométriques des détecteurs. Les courbes issues de cette étude sont situées sur les figures 19 et 20 et représentent respectivement, la réponse d'un télescope constitué de disques d'égal diamètre, et de diamètres différents.

c) Réponse à une distribution de particules

Pour un télescope de rayonnement cosmique placé à bord d'un satellite, d'une fusée ou d'un ballon, le taux de comptage dépend des particules incidentes situées dans son angle solide utile.

En considérant une distribution générale  $I(\theta)$ , la contribution d'un détecteur d'aire  $\delta A$ , pour un angle  $\theta$ , et dans un angle solide  $d\Omega$  est donné par :

$$\delta N = I(\theta) \cos\theta \cdot \delta A \cdot \delta\Omega$$

Pour chaque angle  $\theta$  considéré, l'intégration de  $\delta A$  à tout le disque, donne l'ombre portée  $A_S(\theta)$ . Il en résulte que :

$$dN = I(\theta) \cdot A_S(\theta) \cdot \cos\theta \cdot d\Omega$$

On déduit de :

$$d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

l'expression du taux de comptage, en supposant  $I(\theta)$  indépendant de  $\phi$  :

$$N = 2\pi \int_0^{\pi/2} I(\theta) \cdot A_G(\theta) \cos\theta \sin\theta \, d\theta$$

d) Facteur géométrique et facteur correctif d'une distribution de particules

Le facteur géométrique  $G$  tel qu'il a été défini par l'expression (72) est seulement caractéristique de la forme et des dimensions du télescope considéré. Il est essentiellement distinct du facteur de correction  $F$  qui caractérise la réponse d'un télescope donné, dans une distribution particulaire non isotrope. En désignant par  $N_{iso}$  le taux de comptage obtenu pour une distribution isotropique d'intensité  $I_0$  :

$$N_{iso} = GI_0$$

le télescope ayant son axe orienté dans la direction  $\theta = 0$ , donnera dans une distribution non isotrope  $I = I_0(\theta)$ , un taux de comptage  $N$  :

$$N = FG I_0$$

2° - Facteur géométrique d'un télescope

[21] (Figure 21) - On s'intéresse ici au télescope formé par l'ensemble de deux disques circulaires parallèles, ayant même axe de symétrie. Le facteur géométrique  $G$  est donné par :

$$G = \int_{\Omega} \int_{S_2} (d\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}) \, d\omega \quad (74)$$

$d\omega$  est l'angle solide élémentaire sous lequel, d'un point  $M_2$  du disque  $D_2$  est vu l'élément d'aire  $d\sigma_1$  du disque  $D_1$ .

$d\sigma_2$  est l'élément d'aire du disque  $D_2$ , entourant le point  $M_2$ .

$\vec{r}$  est le vecteur joignant les centres des éléments d'aire  $d\sigma_1$  et  $d\sigma_2$ , et ayant  $r$  pour module.

$S_2$  est l'aire du disque  $D_2$

$\Omega$  est l'angle limité par les deux disques.

Avec les hypothèses géométriques faites ici, nous avons :

$$d\omega = \frac{\vec{r} \cdot d\sigma_1}{r^2}$$

d'où encore :

$$G = \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{(\vec{r} \cdot d\sigma_1)(\vec{r} \cdot d\sigma_2)}{r^2}$$

Ce facteur géométrique vérifie l'inégalité :



$$G \ll \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{d\sigma_1 \cdot d\sigma_2}{z^2} = \frac{A_1 \cdot A_2}{z^2} \quad (75)$$

$A_1$  est l'aire du détecteur  $D_1$

$A_2$  est l'aire du détecteur  $D_2$

$z$  est la distance qui les sépare.

Dans le cas de figure considéré, on a l'expression :

$$G = \frac{1}{2} \pi^2 \left[ R_1^2 + R_2^2 + z^2 - \left\{ (R_1^2 + R_2^2 + z^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2 \right\}^{1/2} \right] \quad (76)$$

Pour une estimation rapide, on peut se contenter de l'approximation du premier ordre :

$$G \approx \frac{A_1 \cdot A_2}{R_1^2 + R_2^2 + z^2} \quad (77)$$

### 3° - Taux de comptage d'un télescope cosmique.

[22] (Figure 22) - Dans cette publication, D.J. HERISTCHI étudie le calcul du taux de comptage d'un télescope cosmique composé de deux disques circulaires parallèles, centrés sur le même axe.

#### a) Distribution angulaire de rayonnement, non isotrope

C'est le cas le plus général, dans lequel la distribution angulaire du rayonnement, est régie par une loi de la forme :

$$I = I_0 \cos^p \varphi$$

Le taux de comptage élémentaire relatif aux deux éléments de surface  $ds_1$  et  $ds_2$  considérés, a pour expression :

$$dN_p = \frac{I_0 (ds_1 \cdot ds_2 \cdot \cos^{2+p} \varphi)}{\lambda^2} \quad (78)$$

$ds_1$  élément de surface du disque de rayon  $R_1$

$ds_2$  élément de surface du disque de rayon  $R_2$

$\lambda$  distance des deux éléments de surface  $ds_1$  et  $ds_2$

$I_0$  intensité du rayonnement dans la direction du télescope

$I_\varphi$  intensité du rayonnement selon la direction qui fait l'angle  $\varphi$  avec l'axe du télescope.

En appelant  $L$  la distance verticale des deux disques, et en utilisant les

coordonnées polaires  $\rho_1, \theta_1$  et  $\rho_2, \theta_2$  respectivement pour les disques de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , on a les relations :

$$ds_1 = \rho_1 d\rho_1 d\theta_1$$

$$ds_2 = \rho_2 d\rho_2 d\theta_2$$

$$\cos\varphi = \frac{\lambda}{\lambda^2}$$

$$\lambda^2 = L^2 + \lambda^2$$

$\lambda$  : projection de  $\lambda$  sur l'un des deux disques

$$\lambda^2 = L^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

En remplaçant dans la formule (78), chacun des éléments par sa valeur, on obtient finalement l'expression générale :

$$N_p = \int_0^{R_1} \int_0^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0 \frac{L^{2+p} \rho_1 \rho_2 d\rho_1 d\rho_2 d\theta_1 d\theta_2}{[L^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]^{2+\frac{1}{2}p}} \quad (79)$$

La figure 23 issue de l'article [22] présente les courbes de variation du taux de comptage d'un télescope à deux disques situé dans un flux de distribution angulaire  $\cos^2\varphi$ , en fonction de :

$$\frac{R_1}{L} \quad \text{et de} \quad \frac{R_2}{L}$$

b) Distribution angulaire de rayonnement isotrope

Cette distribution angulaire est caractérisée par :

$$I_0 = I_\varphi$$

c'est-à-dire par la valeur  $p = 0$  de la puissance de  $\cos\varphi$ .

L'expression générale (79) ci-dessus, devient alors :

$$N_0 = \int_0^{R_1} \int_0^{R_2} I_0 \cdot 4\pi^2 \cdot L^2 \frac{(L^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2) \rho_1 \rho_2 d\rho_1 d\rho_2}{[L^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 4\rho_1^2 \rho_2^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (80)$$

ce qui conduit, après intégration à :

$$N_0 = \frac{1}{2} I_0 \pi^2 \left\{ R_1^2 + R_2^2 + L^2 - [(R_1^2 + R_2^2 + L^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (81)$$

La figure 24 empruntée à l'article qui est ici analysé, montre les courbes de variation du télescope considéré, situé dans un flux supposé isotrope, et dont les deux cercles ont même rayon  $R_1$  et  $R_2$ . La courbe pointillée de cette figure correspond au cas  $R_1 = R_2$ .

Les résultats correspondant à quelques cas particuliers, sont donnés dans ce qui suit :

Cas particulier  $L = 0$

Le taux de comptage  $N_0$  est alors celui d'un détecteur circulaire unique de rayon  $R$  situé dans un flux isotrope d'intensité  $I_0$  selon la direction perpendiculaire au disque

$$N_0 = I_0 \pi^2 R^2.$$

Cas particulier  $R_1 = R_2 = R$

$$N_0 = \frac{1}{2} I_0 \pi^2 \left\{ 2R^2 + L^2 - \left[ (2R^2 + L^2)^2 - 4R^4 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

Cas particulier  $L^2 \gg R_1^2$  et  $L^2 = R_2^2$

$$N_0 = I_0 S_1 S_2 / (R^2 + L^2) \quad \text{avec} \quad S_1 = \pi R_1^2 \quad \text{et} \quad S_2 = \pi R_2^2$$

Cas particulier  $L^2 \gg R_1^2$  et  $L^2 \ll R_2^2$

$$N_0 = I_0 \pi S_1 \quad \text{avec} \quad S_1 = \pi R_1^2$$

Cas particulier  $L^2 \gg R_1^2 + R_2^2$

$$N_0 = I_0 (S_1 S_2) / L^2 \quad \text{avec} \quad S_1 = \pi R_1^2 \quad \text{et} \quad S_2 = \pi R_2^2$$

La figure 25 montre les courbes de variation du taux de comptage en fonction de l'ouverture d'un télescope formé de deux cercles égaux de rayon  $R$  dans le cas de deux distributions angulaires particulières. La première, concerne une distribution angulaire isotrope ( $p=0$ ), la seconde une distribution en  $\cos^2 \varphi$ ,  $\varphi$  désigne l'angle zénithal et  $I_0$  l'intensité du flux de rayonnement selon la direction de l'axe du télescope.

12 - TABLES NUMERIQUES

12.1 - A.V.H. MASKET, W.C. RODGERS - Tables of Solids Angles

The Chemical Rubber Cie - Cleveland (1967) : Handbook of Tables for Mathematics 3ème édition.

Ces tables qui procurent la valeur numérique, de l'angle solide sous-tendu par un disque circulaire de rayon unité, permettent également le calcul du rendement géométrique d'un système source-détecteur, tous deux étant supposés circulaires.

L'usage de ces tables, indique le processus de calcul à adopter pour cela. On considère trois cas distincts, suivant les valeurs des 3 paramètres définis comme suit :

- b : est le rayon normalisé de la source, par rapport au compteur
- S : est la distance normalisée entre les axes parallèles
- z : est la distance normalisée séparant les plans parallèles de la source et du détecteur.

1er cas : S = 0

Les disques sont alors coaxiaux.

On divise le disque source en N anneaux concentriques, chacun ayant pour largeur  $\Delta\rho_i$ , i prenant les valeurs 1,2,3,...,N. Tout point  $M_i$  défini par sa distance  $\rho_i$  au centre 0, est caractérisé par la valeur i de cet indice, et appartient à un seul circulaire. Chaque point défini par la même valeur de l'indice i, soutient approximativement le même angle solide  $\Omega(1, \rho_i, z)$  par rapport à la fenêtre circulaire du détecteur. Dans ces conditions, la fraction de rayonnement entrant dans la fenêtre circulaire détecteur et issue de la source circulaire est donnée par l'expression :

$$G_1 = \frac{1}{2\pi b^2} \sum_{i=1}^{i=N} \Omega(1, \rho_i, z) \rho_i \Delta\rho_i \quad (82)$$

2ème cas : S ≥ b

Les disques ne sont pas coaxiaux et leurs projections parallèlement à leurs axes, n'ont aucun point commun.

La distance entre les axes parallèles, est supérieure au rayon de la source. Le disque source, est ici divisé en N zones concentriques, toutes centrées au point où l'axe du détecteur, rencontre le plan de la source. L'aire de chacune de ces zones, appour valeur :  $2\alpha_i \rho_i \Delta\rho_i$  dans laquelle :

$$\alpha_i = \text{Arc cos} \left[ (\rho_i^2 - S^2 - b^2) / 2S\rho_i \right]$$

Le rendement géométrique cherché est donc donné par :

$$G_2 = \frac{1}{2\pi b^2} \sum_{i=1}^{i=N} \Omega(1, \rho_i, z) \alpha_i \rho_i \Delta\rho_i \quad (83)$$

3ème cas : S < b

Les disques ne sont pas coaxiaux, mais leurs projections effectuées parallèlement à leurs axes, ont une intersection.

Ce cas se résout en faisant appel aux deux cas précédents.

Les tables considérées, fournissent la valeur numérique de  $\Omega(1, \rho_i, z)$  avec 6 chiffres significatifs dont 5 décimales. Elles correspondent aux valeurs numériques suivantes des paramètres :

varie de 0,0 à 34,00 valeurs limites comprises, avec un pas variable :

pas de 0,1	pour	0,0 ≤ ρ ≤ 0,9
pas de 0,25	pour	1,00 ≤ ρ ≤ 5,75
pas de 1	pour	6 ≤ ρ ≤ 15
pas de 2	pour	16 ≤ ρ ≤ 34

z varie de 0,20 à 100,00 valeurs limites comprises avec un pas qui varie comme suit :

pas de 0,2 pour  $0,2 \leq z \leq 10$   
pas de 1 pour  $11 \leq z \leq 20$   
pas de 2 pour  $22 \leq z \leq 100$

Ces tables constituent un abrégé de celles publiées par les mêmes auteurs sous le titre : Tables of Solid Angles [TLD-14975] July (1962) et qui contiennent 237500 valeurs, dont 125000 concernent les angles solides sous-tendus par un disque circulaire.

#### 12.2 - J. KONIJN and B. TOLLANDER

Solid angle Computations for a Circular Radiator and a Circular Detector [Aktieholget Atomenergi AE 101 - Stockholm Sweden (1963)]

Etablies pour une source ponctuelle de neutrons, située sur l'axe commun à une cible et un détecteur circulaires, ces tables ne concernent que le cas de deux disques coaxiaux. Les valeurs numériques publiées comportent cinq chiffres significatifs dont quatre décimales.

Les angles solides tabulés sont évalués en stéradians, et présentés en fonction des valeurs numériques des paramètres suivants :

$$p = \frac{R_1}{R}$$

$$q = \frac{a}{R}$$

$$w = \frac{S}{R}$$

où l'on utilise les notations :

S : distance source-cible  
a : distance cible-détecteur  
 $R_1$  : rayon de la cible  
R : rayon du détecteur.

#### 1° - Source neutronique à distance infinie

##### a) Distribution angulaire isotrope

L'angle solide  $\Omega(p,q)$  déterminé par les deux disques constituant respectivement la cible et le détecteur, est alors donné par :

$$\Omega(p,q) = \frac{I(p,q)}{\pi p^2}$$

La table I fournit les valeurs numériques de  $I(p,q)$  :

p varie de 0,01 à 1,0 comme suit :

pas de 0,05 pour  $0,05 \leq p \leq 0,25$   
pas de 0,10 pour  $0,30 \leq p \leq 1,00$

q varie de 0,01 à 100,0.

De plus, l'intégrale  $I(p,q)$  converge pour  $q=0$ , vers des valeurs différentes suivant les valeurs de  $p$ , entraînant ainsi la convergence de  $\Omega(p,q)$  vers :

$$\Omega(p,0) = \begin{cases} \frac{2\pi}{p^2} & \text{pour } p \geq 1 \\ 2\pi & \text{pour } p < 1 \end{cases}$$

b) Distribution angulaire anisotrope

On considère ici, une distribution angulaire en cosinus, dans le système laboratoire.

L'angle solide  $\Omega(p,q)$  s'exprime alors en stéradians par :

$$\Omega(p,q) = \frac{2 I(p,q)}{wp^2}$$

où l'intégrale  $I(p,q)$  a pour expression analytique :

$$I(p,q) = \frac{\pi^2}{2} \left[ p^2 + q^2 + 1 - \sqrt{(p^2 + q^2 + 1)^2 - 4p^2} \right]$$

Les valeurs numériques de  $I(p,q)$  figurent dans la table II de celles que nous analysons ici.

p varie de 0,01 à 1,00 comme suit :

pas de 0,05 pour  $0,05 \leq p < 0,25$

pas de 0,10 pour  $0,30 \leq p < 1,00$

q varie de 0,01 à 100,0.

2° - Source neutronique à distance finie

a) Distribution angulaire isotrope

L'angle solide  $\Omega(p,q)$  est ici exprimé en stéradians, en fonction de l'intégrale  $I = I(p,q)$  sous la forme :

$$\Omega(p,q) = \frac{I}{wp^2} \frac{\left(\frac{p^2}{w^2}\right)}{\text{Log}_n \left[ 1 + \left(\frac{p^2}{w^2}\right) \right]}$$

La table III donne les valeurs numériques de  $I(p,q)$  en fonction des diverses valeurs des paramètres :

w prend les 7 valeurs : 0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,5 ; 3,5 ; 5,0 ; 10,0

A chacune de ces valeurs, correspond une table où p et q varient comme suit :

p est égal à 0,15 ; 0,30 ; 0,50 ; 0,70 ; 1,00

q varie de 0,10 à 100,0.

b) Distribution angulaire anisotrope

L'expression de  $\Omega(p,q)$  en fonction de  $I(p,q)$  est ici exprimée en stéradians par :

$$\Omega(p,q) = \frac{2I(p,q)}{\pi p^2} \cdot \frac{\left(\frac{p^2}{W}\right)}{\text{Log}_n \left[ 1 + \left(\frac{p^2}{W}\right) \right]}$$

La table IV se décompose également, comme la table III, en 7 tables partielles, correspondant chacune à une valeur constante de  $W$  prise parmi les valeurs : 0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,5 ; 3,5 ; 5,0 ; 10,0.

Pour chacune d'elles,  $p$  et  $q$  varient comme suit :

$p$  prend les valeurs : 0,15 ; 0,30 ; 0,50 ; 0,70 ; 1,0

$q$  varie de 0,10 à 100,0.

13 - CONCLUSION

Les diverses méthodes de calcul de l'angle solide, sous lequel est vu un disque circulaire, depuis un autre de même forme, sont analysées. Les conditions d'utilisation de chacune de ces méthodes ont été spécifiées, ainsi que la précision des résultats de calculs, auxquels elles conduisent. Quelques exemples d'applications, notamment dans le domaine de la physique corpusculaire illustrent cette étude.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LERCH O., SPERNOL A.  
Geometry Factors in low and Medium Geometry Solid Angle Counting  
(EANDC - Round Table on High Precision Mass Spectrometry and a Counting  
CBNM, EURATOM, Geel, Belgium - November 29 - December 2 (1965)
- [2] JAFFEY A.H.  
Solid Angle Subtended by a Circular Aperture at Point and Spread Sources :  
Formulas and Somme Tables  
[The Review of Scientific Instruments - Vol. 25, n° 4, April (1954)  
p. 349-354]
- [3] BURTT B.P.  
Absolute Beta Counting  
[Nucleonics - August (1949) p. 28-43]
- [4] CURTIS M.L., HEYD J.W., OLT R.G., EICHELBERGER J.F.  
Absolute Alpha Counting  
[Nucleonics - Vol. 13 n° 5 - Mai (1955)]
- [5] GARRETT M.W.  
Solid Angle Subtended by a Circular Aperture  
[The Review of Scientific Instruments - Vol. 25, n° 12 - December (1954)  
p. 1208-1211]
- [6] GOTOH H., YAGI H.  
The Detection Efficiency and the Response Function of Semiconductor Proton  
Recoil Counters with axial Symmetry to a Point Neutron Source  
[Nuclear Instruments and Method - Vol. 101 (1972) p. 395-396]
- [7] RUFFLE M.P.  
The Geometrical Efficiency of a Parallel-disc source and Detector System  
[Nuclear Instruments and Methods - Vol. 52 (1967) p. 354-356]
- [8] BARDIN C., DANDIEU Y., NGUYEN TRONG THUC, RAGUISEAU J.  
Calcul d'un angle solide  
[Note CEA - N° 1545 - Juillet (1972)]



- [9] BERNE E.  
The Calculation of the Geometrical Efficiency of end-window Geiger-Müller tubes  
[The Review of Scientific Instruments - Vol. 22, n° 7, July (1971)  
p. 509-512]
- [10] RUBY L., RECHEN J.B.  
A Simpler Approach to the Geometrical Efficiency of a Parallel-disk Source and Detector System  
[Nuclear Instruments and Methods - Vol. 95, (1971) p. 5-11]
- [11] KONIJN J., TOLLANDER B.  
[Aktiebolaget Atomenergy - Stockholm - Report AE-101]
- [12] HIROSHI GOTOH and HIDEYUKI YAGI, KATSUHEI KOBAYASHI and ITSURO KIMURA  
Calculation of the Activation rate of a Cylindrical Sample Irradiated by a Cylindrical fast Neutron source  
[Nuclear Instruments and Methods - Vol. 116 (1974) p. 361-364]
- [13] WILLIAMS I.R.  
Monte-Carlo Calculation of Source-to-Detector Geometry  
[Nuclear Instruments and Methods - Vol. 44 (1966) p. 160-162]
- [14] BLACKMAN N.  
Private Communication to B.P. BURTT  
[Nucleonics - Vol. 36 (1949)]
- [15] BONNET C., HILLION P., NURDIN G.  
Calcul de l'angle solide source-détecteur  
[Nuclear Instruments and Methods - Vol. 54 (1967) p. 321-322]
- [16] WILLIAMS I.R., CRAIG A.M., THOMPSON C.L.  
A Fortran Program for Calculating the Solid Angle Subtended by one Circular disc at Another  
[ORNL - 4099 - UC 32 - April (1967)]
- [17] ROWLANDS  
Solid Angle Calculations  
[International Journal of Applied Radiation and Isotopes - Vol. 10 (1961) p. 86-93]
- [18] GROVER F.W.  
Inductance Calculations  
[Van Nostrand - New York (1947)]

- [19] KONIJN J., LAUBER A., TOLLANDER B.  
Efficiency Calculations for a Circular Detector Viewing a Circular Radiator  
[Nuclear Instruments and Methods - Vol. 36 (1965) p. 302-308]
- [20] SANDERSON T.R., PAGE D.E.  
Geometrical Aspects of the Performance of Cosmic ray Detector Telescopes in non-isotropic Particle Distributions  
[Nuclear Instruments and Methods - Vol. 104 (1972) p. 493-504]
- [21] SULLIVAN J.D.  
Geometrical Factor and Directional Response of Single and Multi-element Particle Telescope  
[Nuclear Instruments and Methods - Vol. 95 (1971) p. 5-11]
- [22] HERISTCHI D.J.  
Taux de comptage d'un télescope cosmique composé de deux disques circulaires.  
[Nuclear Instruments and Methods - Vol. 47 (1967) p. 39-44]
- [23] KOVARIK A.K., ADAMS NI  
[Jr. Physical Review - Vol. 40 (1932) p. 718-726]
- [24] BULIRSCH  
An Extension of the Bartky Transformation to Incomplete Elliptic Integrals of the Third Kind  
[Num. Math. Vol. 13 (1969) p. 266-284]
- [25] DELTHEIL R.  
Compléments de Mathématiques Générales, Tome II. p.128-130  
[J.B. Baillièrè et Fils (1954)]
- [26] GILLY L.  
Angle Solide sous-tendu en un point par un disque circulaire  
[Rapport CEA-R-4521 (1974)]

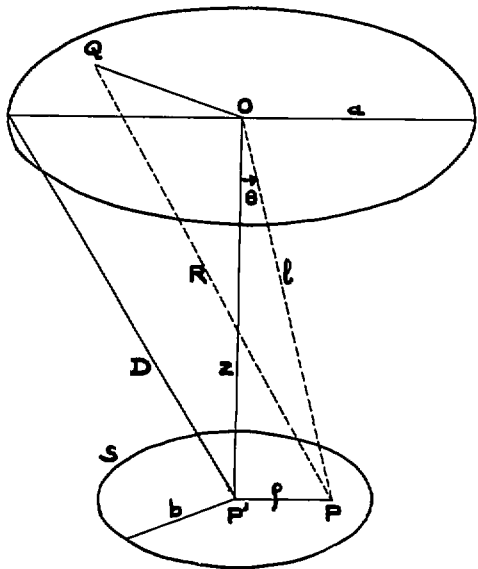


Figure 1

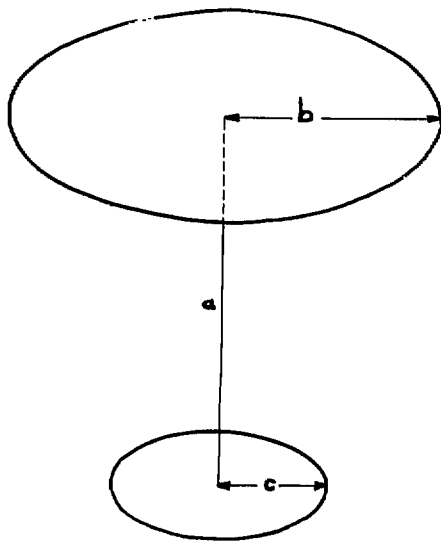


Figure 2

O : origine ; PQ = R ; OP' = z ; PP' = a ;  $\cos \gamma = \frac{z}{R}$

$OP = z = (z^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}$  ;  $\frac{a}{z} = \gamma$  ;  $\frac{z}{R} = \cos \alpha = x$  ;  $\frac{R}{a} = M$  ;  $\frac{z}{a} = v$  ;  $L = (z^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{a}{L} = Y$  ;  $\frac{z}{L} = X$  ;  $\frac{L}{a} = M$  ;  $D = (z^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}$

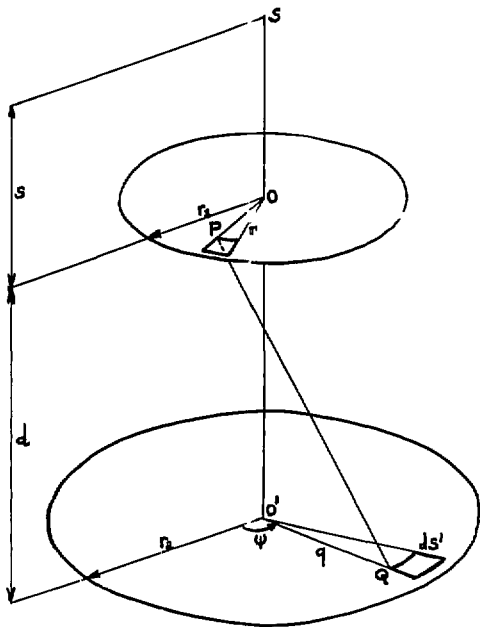


Figure 3

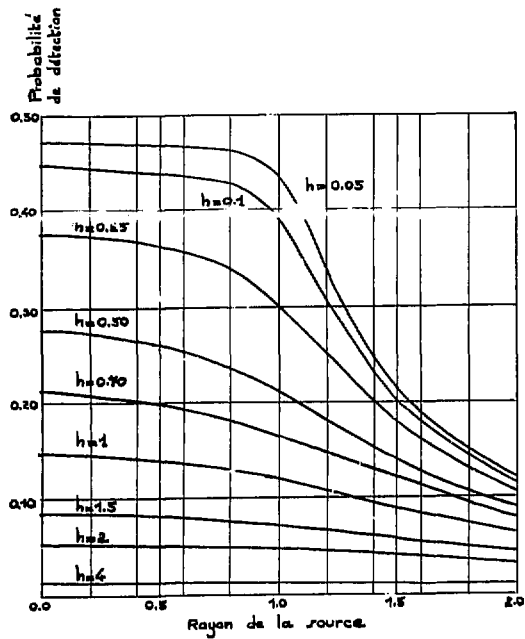


Figure 4 - Détection par un disque unitaire des particules émises depuis un disque source.

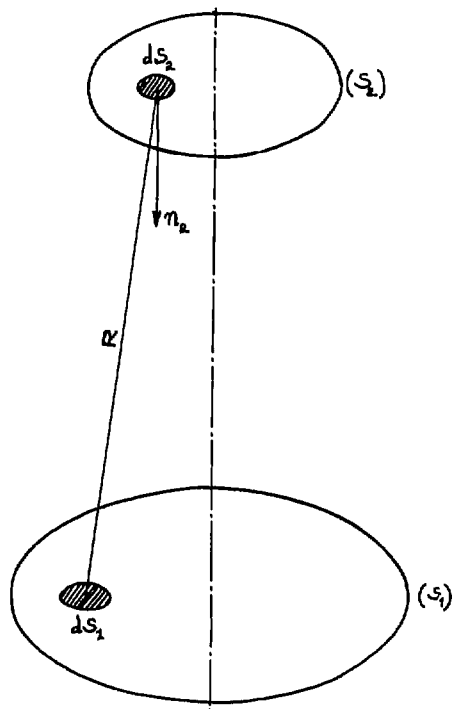


Figure 5

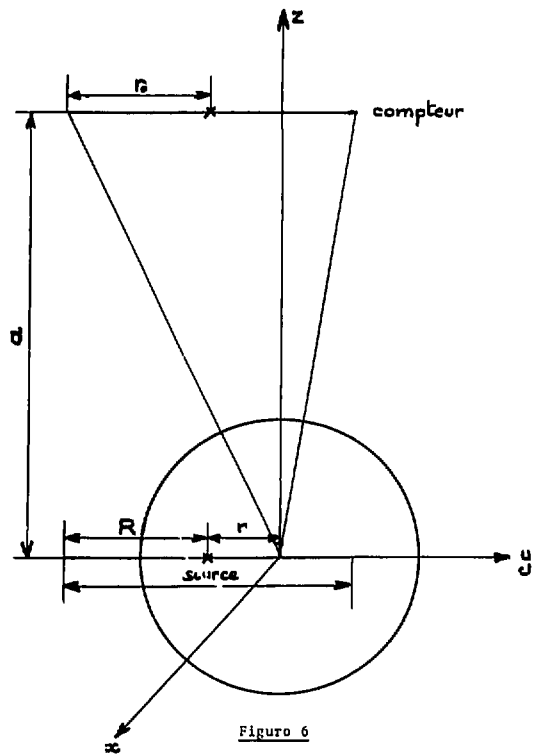


Figure 6

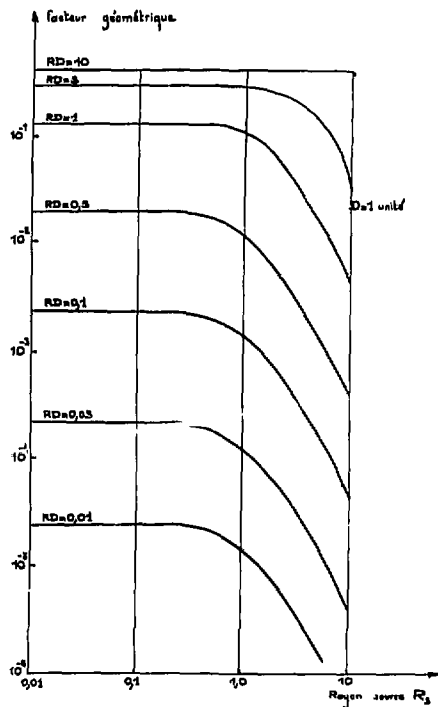


Figure 7

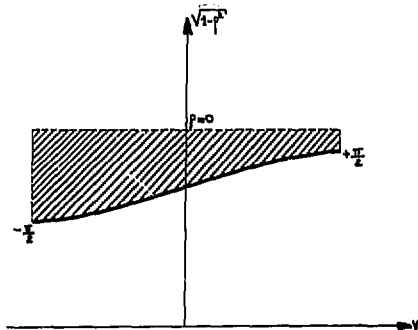
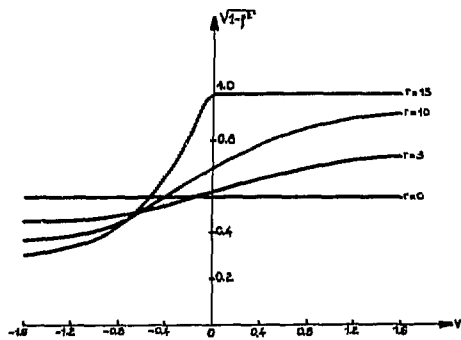


Figure 8

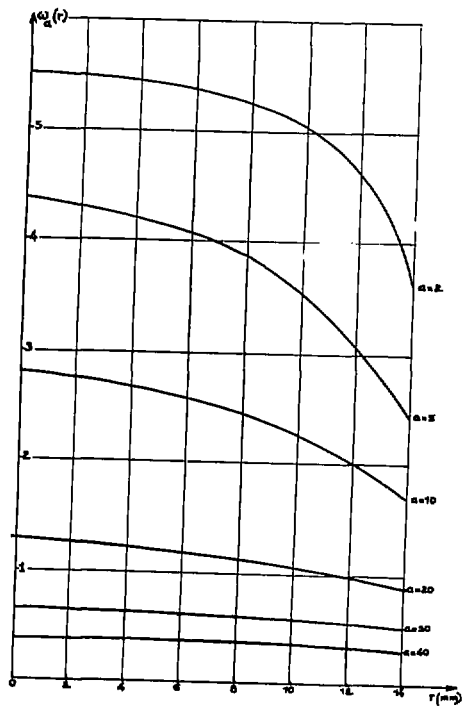


Figure 9

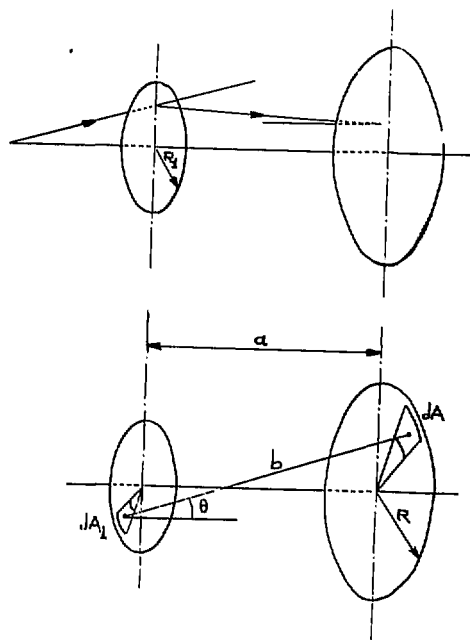


Figure 10

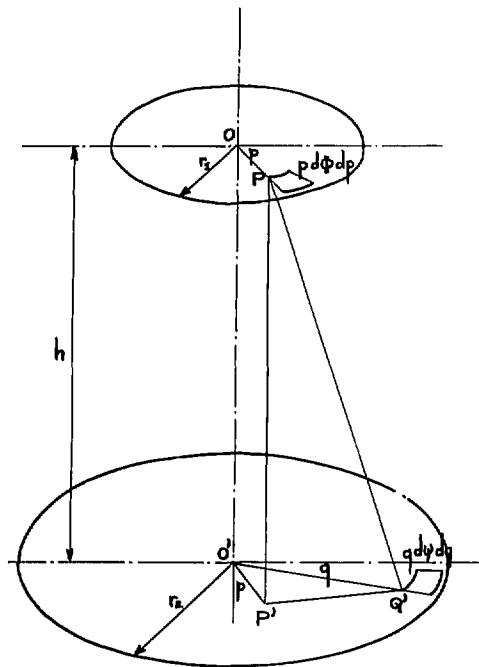


Figure 11

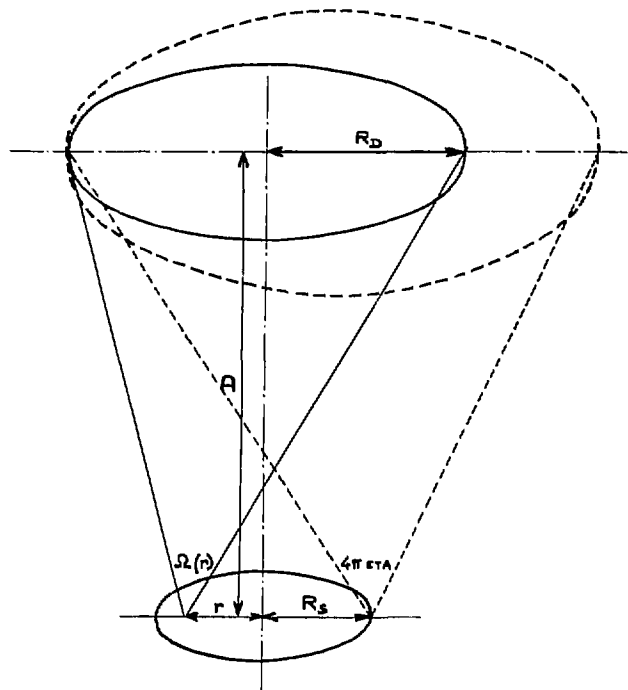


Figure 12



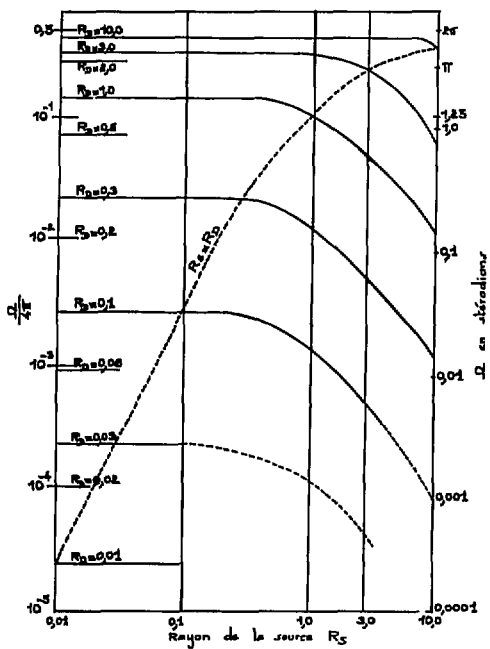


Figure 13

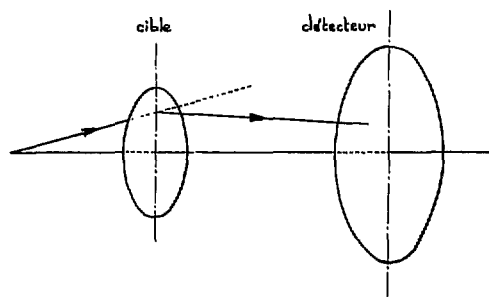


Figure 14

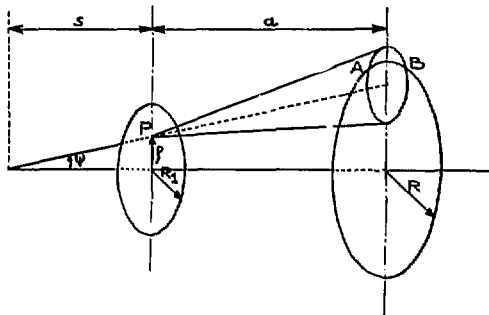


Figure 15

- |             |            |          |         |
|-------------|------------|----------|---------|
| ①: $p=0.15$ | $w=0.5..∞$ | ⑤: $p=3$ | $w=1$   |
| ②: $p=1$    | $w=0.5$    | ⑥: $p=3$ | $w=2.5$ |
| ③: $p=1$    | $w=∞$      | ⑦: $p=3$ | $w=∞$   |
| ④: $p=3$    | $w=0.5$    |          |         |

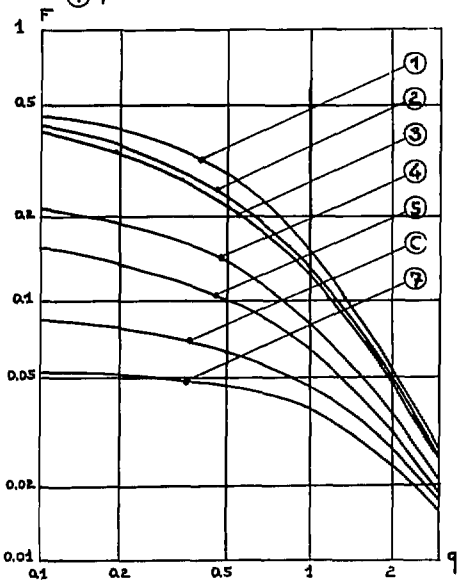


Figure 16 - F on fonction de q dans le cas d'une distribution d'émission angulaire isotrope.

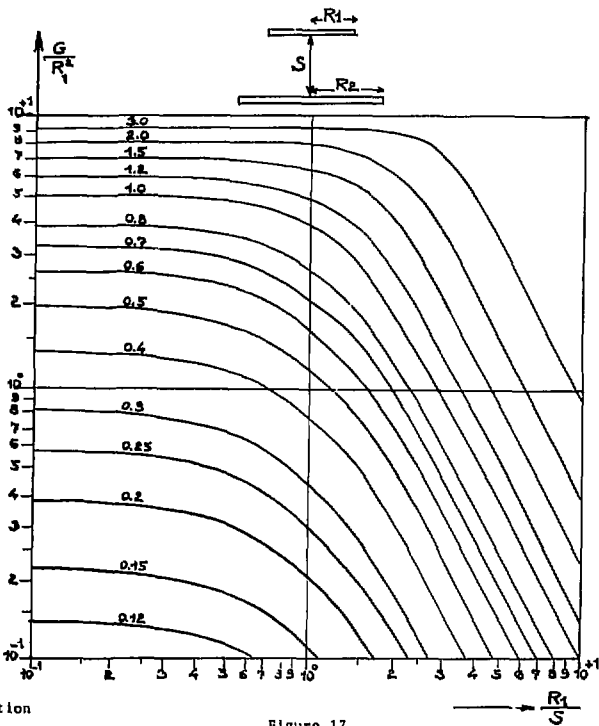


Figure 17



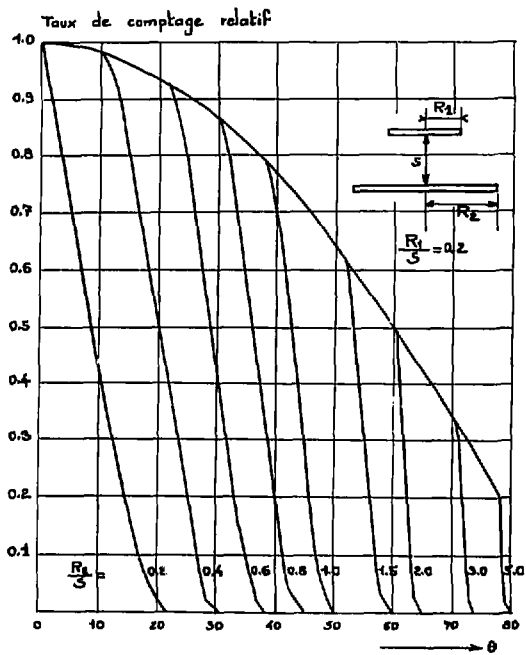


Figure 20

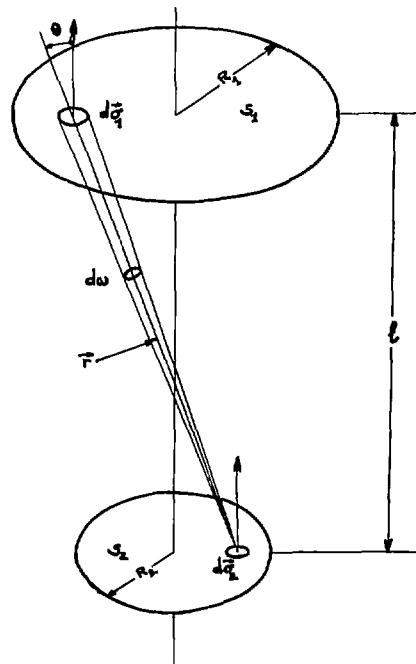


Figure 21

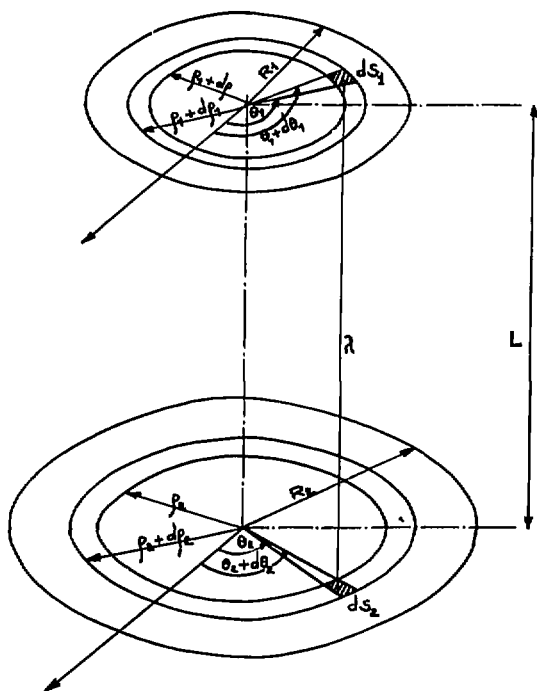


Figure 22

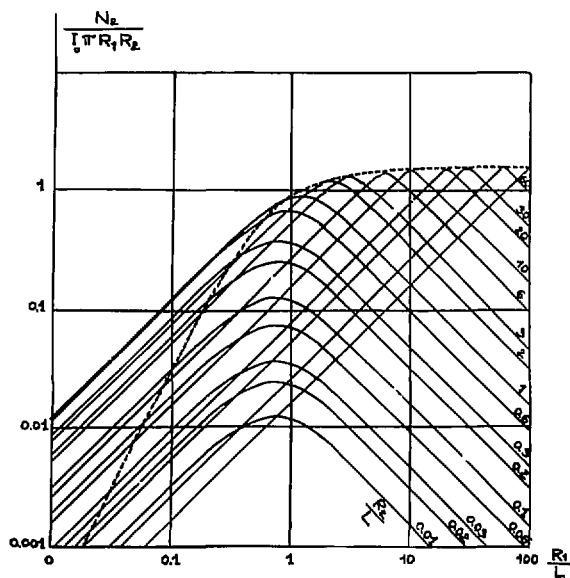
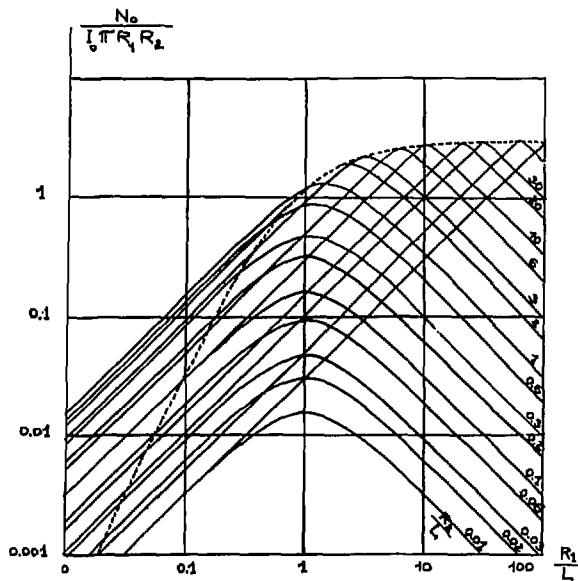


Figure 23 - Variation du taux de comptage d'un télescope à deux disques, dans un flux de distribution angulaire  $\cos^2 \varphi$ . La courbe pointillée correspond au cas  $R_1 = R_2$ .

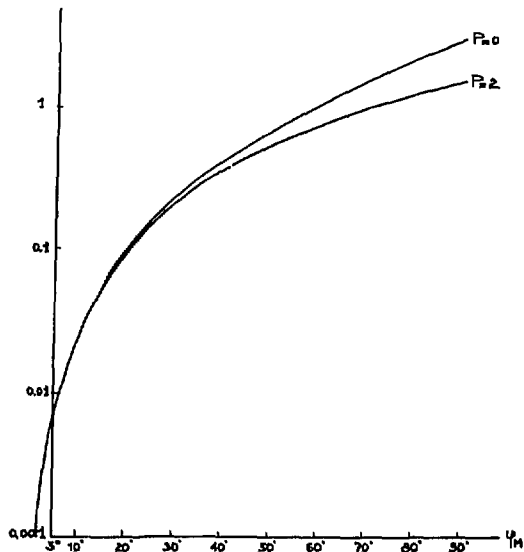
$R_1, R_2$  : rayons de deux disques

$L$  : distance entre les disques

$I_0$  : intensité dans la direction vorticale.



**Figure 24** - Variation du taux de comptage d'un télescope à deux disques, dans un flux de distribution angulaire isotrope. La courbe pointillée correspond au cas  $R_1 = R_2$ .  
 $R_1, R_2$  : rayons des deux disques  
 $L$  : distance entre les disques  
 $I_0$  : intensité dans la direction vorticale.



**Figure 25** - Variation du taux de comptage en fonction de l'ouverture d'un télescope formé de deux cercles égaux de rayon  $R$  dans un flux de distribution angulaire isotrope ( $P=0$ ) et de répartition en  $\cos^2 \varphi$  ( $P=2$ ).  
 $\varphi$  : angle zénithal  
 $I_0$  : intensité dans la direction verticale.

Tableau 1 - Calcul de l'angle solide moyen dans le cas  
d'un disque source de rayon unité.

Z	R <sub>d</sub>	Méthode intégrale	Monte Carlo
0	0,5	0,1250	0,1507
0	1	0,4960	0,5000
0	2	0,5003	0,5000
0	4	0,5002	0,5000
0	8	0,5005	0,5000
1	0,5	0,3457.10 <sup>-1</sup>	0,3449.10 <sup>-1</sup>
1	1	0,1161	0,1117
1	2	0,2621	0,2631
1	4	0,3783	0,3745
1	8	0,4376	0,4370
2	0,5	0,1279.10 <sup>-1</sup>	0,1290.10 <sup>-1</sup>
2	1	0,4675.10 <sup>-1</sup>	0,4650.10 <sup>-1</sup>
2	2	0,1383	0,1377
2	4	0,2730	0,2739
2	8	0,3781	0,3785
3	0,5	0,6305.10 <sup>-2</sup>	0,6197.10 <sup>-2</sup>
3	1	0,2399.10 <sup>-1</sup>	0,2403.10 <sup>-1</sup>
3	2	0,8039.10 <sup>-1</sup>	0,7961.10 <sup>-1</sup>
3	4	0,1971	0,1979
3	8	0,3236	0,3232
4	0,5	0,3695.10 <sup>-2</sup>	0,3524.10 <sup>-2</sup>
4	1	0,1433.10 <sup>-1</sup>	0,1413.10 <sup>-1</sup>
4	2	0,5115.10 <sup>-1</sup>	0,5054.10 <sup>-1</sup>
4	4	0,1444	0,1448
4	8	0,2755	0,2747
5	0,5	0,2411.10 <sup>-2</sup>	0,2406.10 <sup>-2</sup>
5	1	0,9445.10 <sup>-2</sup>	0,9337.10 <sup>-2</sup>
5	2	0,3495.10 <sup>-1</sup>	0,3493.10 <sup>-1</sup>
5	4	0,1082	0,1081
5	8	0,2342	0,2344

Tableau 2

$\rho$	$x$	$\frac{1}{x}$	$\rho$	$x$	$\frac{1}{x}$
0,99	7,018	0,142	0,74	1,101	0,908
0,98	4,925	0,203	0,73	1,068	0,936
0,97	3,990	0,251	0,72	1,037	0,964
0,96	3,429	0,292	0,71	1,008	0,992
0,95	3,042	0,329	0,70	0,980	1,020
0,94	2,756	0,363	0,69	0,953	1,049
0,93	2,531	0,395	0,68	0,927	1,079
0,92	2,345	0,427	0,67	0,903	1,108
0,91	2,194	0,456	0,66	0,879	1,138
0,90	2,065	0,484	0,65	0,855	1,170
0,89	1,952	0,512	0,64	0,833	1,200
0,88	1,851	0,540	0,63	0,811	1,232
0,87	1,765	0,566	0,62	0,790	1,266
0,86	1,687	0,593	0,61	0,770	1,300
0,85	1,618	0,618	0,60	0,750	1,333
0,84	1,549	0,645	0,59	0,731	1,369
0,83	1,489	0,672	0,58	0,712	1,405
0,82	1,432	0,698	0,57	0,694	1,441
0,81	1,381	0,724	0,56	0,676	1,479
0,80	1,333	0,750	0,55	0,658	1,519
0,79	1,288	0,776	0,54	0,642	1,558
0,78	1,246	0,803	0,53	0,625	1,600
0,77	1,207	0,828	0,52	0,608	1,643
0,76	1,170	0,855	0,51	0,593	1,687
0,75	1,133	0,882	0,50	0,577	1,732



Tableau 2 (suite)

$p$	$x$	$\frac{1}{x}$	$p$	$x$	$\frac{1}{x}$
0,49	0,562	1,779	0,24	0,247	4,04
0,48	0,547	1,828	0,23	0,256	4,23
0,47	0,533	1,879	0,22	0,226	4,43
0,46	0,518	1,930	0,21	0,215	4,66
0,45	0,504	1,985	0,20	0,204	4,90
0,44	0,490	2,040	0,19	0,194	5,17
0,43	0,476	2,099	0,18	0,183	5,47
0,42	0,463	2,161	0,17	0,173	5,80
0,41	0,450	2,224	0,16	0,162	6,17
0,40	0,437	2,261	0,15	0,152	6,59
0,39	0,423	2,362	0,14	0,141	7,07
0,38	0,411	2,435	0,13	0,131	7,65
0,37	0,398	2,511	0,12	0,1209	8,27
0,36	0,386	2,521	0,11	0,1107	9,04
0,35	0,374	2,667	0,10	0,1005	9,95
0,34	0,362	2,765	0,09	0,0904	11,07
0,33	0,350	2,860	0,08	0,0802	12,46
0,32	0,338	2,961	0,07	0,0702	14,75
0,31	0,326	3,07	0,06	0,06	16,63
0,30	0,315	3,18	0,05	0,05	19,98
0,29	0,303	3,30	0,04	0,04	25,0
0,28	0,292	3,43	0,03	0,03	33,3
0,27	0,281	3,57	0,02	0,02	50,0
0,26	0,269	3,71	0,01	0,01	100
0,25	0,258	3,87	0	0	$\infty$

Tabloau 3

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	a
$\alpha$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	2
$\beta$	56,0	27,6	18,0	13,5	10,0	7,87	6,29	5,03	4,00	3,13	2,36	1,69	1,08	0,518	0	
$\alpha$	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4,00	4,40	4,80	5,20	5,60	6,00	5
$\beta$	22,4	11,05	7,20	5,23	4,00	3,15	2,51	2,01	1,60	1,25	0,945	0,675	0,430	0,207	0	
$\alpha$	0,20	0,40	0,60	0,80	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	10
$\beta$	11,20	5,53	3,60	2,60	2,00	1,575	1,26	1,005	0,800	0,625	0,472	0,338	0,215	0,1035	0	
$\alpha$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,10	0,11	0,12	0,13	0,14	0,15	20
$\beta$	5,6	2,76	1,80	1,30	1,00	0,787	0,628	0,503	0,400	0,312	0,236	0,169	0,108	0,0518	0	
$\alpha$	0,0667	0,133	0,200	0,267	0,333	0,400	0,467	0,533	0,600	0,667	0,733	0,800	0,867	0,933	1,00	30
$\beta$	3,73	1,84	1,20	0,871	0,667	0,525	0,419	0,336	0,267	0,208	0,158	0,1125	0,0717	0,0345	0	
$\alpha$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	40
$\beta$	2,80	1,38	0,90	0,653	0,500	0,394	0,314	0,251	0,200	0,156	0,118	0,0843	0,0530	0,0256	0	

*Achévé d'imprimer*  
*par*  
*le CEA, Service de Documentation, Saclay*  
*Septembre 1978*

*DEPOT LEGAL*  
*3ème trimestre 1978*

*La diffusion des rapports et bibliographies du Commissariat à l'Energie Atomique  
est assurée par le Service de Documentation, CEN-Saclay, B.P. n° 2,  
91190 Gif-sur-Yvette (France)*

*Reports and bibliographies of the Commissariat à l'Energie Atomique are available  
from the Service de Documentation, CEN-Saclay, B.P. n° 2,  
91190 Gif-sur-Yvette (France)*

*Edité par*

*le Service de Documentation*

*Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay*

*Boîte Postale n° 2*

*91 190 - Gif-sur-YVETTE (France)*