

FR 780144H

CEA-R-4999

CEA-R-4999

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

E.20

**VECTEURS DEFAUTS, COUPLES DEFAUTS  
ET INTEGRALES DE CONTOUR  
EN MECANIQUE DE LA RUPTURE**

par  
M. Sini  
Industrie

par

~~XXXXXXXXXX~~  
~~XXXXXXXXXX~~

*Roland Louis ROCHE*

DIVISION D'ETUDE ET DE  
DEVELOPPEMENT DES REACTEURS

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

**Rapport CEA-R-4999**

**1979**

Da

**SERVICE DE DOCUMENTATION**

C.E.N. - SACLAY B.P. n° 2, 91 190 - GIF-sur-YVETTE - France

**PLAN DE CLASSIFICATION DES RAPPORTS ET BIBLIOGRAPHIES CEA**  
(Classification du système international de documentation nucléaire SIDON/INIS)

A 11	Physique théorique	C 30	Utilisation des traceurs dans les sciences de la vie
A 12	Physique atomique et moléculaire	C 40	Sciences de la vie : autres études
A 13	Physique de l'état condensé	C 50	Radioprotection et environnement
A 14	Physique des plasmas et réactions thermonucléaires		
A 15	Astrophysique, cosmologie et rayonnements cosmiques	D 10	Isotopes et sources de rayonnements
A 16	Conversion directe d'énergie	D 20	Applications des isotopes et des rayonnements
A 17	Physique des basses températures		
A 20	Physique des hautes énergies	E 11	Thermodynamique et mécanique des fluides
A 30	Physique neutronique et physique nucléaire	E 12	Cryogénie
		E 13	Installations pilotes et laboratoires
B 11	Analyse chimique et isotopique	E 14	Explosions nucléaires
B 12	Chimie minérale, chimie organique et physico-chimie	E 15	Installations pour manipulation de matériaux radioactifs
B 13	Radiochimie et chimie nucléaire	E 16	Accélérateurs
B 14	Chimie sous rayonnement	E 17	Essais des matériaux
B 15	Corrosion	E 20	Réacteurs nucléaires (en général)
B 16	Traitement du combustible	E 30	Réacteurs nucléaires (types)
B 21	Métaux et alliages (production et fabrication)	E 40	Instrumentation
B 22	Métaux et alliages (structure et propriétés physiques)	E 50	Effluents et déchets radioactifs
B 23	Céramiques et cermets	F 10	Economie
B 24	Matières plastiques et autres matériaux	F 20	Législation nucléaire
B 25	Effets des rayonnements sur les propriétés physiques des matériaux	F 30	Documentation nucléaire
B 30	Sciences de la terre	F 40	Sauvegarde et contrôle
C 10	Action de l'irradiation externe en biologie	F 50	Méthodes mathématiques et codes de calcul
C 20	Action des radioisotopes et leur cinétique	F 60	Divers

Rapport CEA-R-4999

*Cote-matière de ce rapport : E.20*

DESCRIPTION-MATIERE (mots clefs extraits du thesaurus SIDON/INIS)

*en français*

COMPOSANTS DE REACTEUR  
STRUCTURES MECANIKUES  
PROPRIETES CONCERNANT LA RUPTURE  
ELASTICITE  
PLASTICITE  
FISSURES  
DEFAUTS  
EQUATIONS INTEGRALES  
MECANIQUE

*en anglais*

REACTOR COMPONENTS  
MECHANICAL STRUCTURES  
FRACTURE PROPERTIES  
ELASTICITY  
PLASTICITY  
CRACKS  
DEFECTS  
INTEGRAL EQUATIONS  
MECHANICS

- Rapport CEA-R-4999 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay  
Division d'Etude et de Développement des Réacteurs  
Département des Etudes Mécaniques et Thermiques

VECTEURS DEFAUTS, COUPLES DEFAUTS  
ET INTEGRALES DE CONTOUR EN MECANIQUE DE LA RUPTURE

par

Roland Louis ROCHE

- Juillet 1979 -

CEA-R-4999 - Roland Louis ROCHE  
VECTEURS DÉFAUTS, COUPLES DÉFAUTS ET INTÉGRALES DE CONTOUR EN  
MECANIQUE DE LA RUPTURE

*Summary.* - Des intégrales de contour, telles que l'intégrale  $J$ , ont été proposées en mécanique de la rupture élasto-plastique, mais ces intégrales sont introduites en considérant un matériau élastique, quoique non linéaire. Dans ce travail, il est montré que les intégrales de contour peuvent être introduites sans référence à l'élasticité du matériau. La méthode est basée sur la définition, dans un milieu continu, de vecteurs et de couples ayant la dimension d'une force ou d'un moment. Plus précisément, sont données les définitions des "vecteurs défauts de volume  $j$ " des "vecteurs défauts de surface  $J$ ", des "couples défauts de volume  $l$ ", des "couples défauts de surface  $L$ ". Ceci est fait en considérant la variation de travail reçu par une particule qui se déplace à travers le continu. Le résultat le plus important est : la résultante de tous les vecteurs défauts compris dans un volume  $V$  est l'intégrale  $J$  sur la surface entourant le volume  $V$ , et le moment résultant est l'intégrale  $L$ . Ainsi, ces intégrales sont bien définies sans hypothèse sur l'équation constitutive du matériau. Un autre résultat est la forme matérielle du principe des travaux virtuels où les vecteurs défauts jouent le rôle des forces habituelles dans la forme traditionnelle (spatiale).

..f..

CEA-R-4999 - Roland Louis ROCHE  
DEFECT FORCES, DEFECT COUPLES AND PATH INTEGRALS IN FRACTURE  
MECHANICS

*Summary.* - Path integrals -  $J$  integral for instance - have been proposed as criteria in Elastic Plastic Fracture, but these integrals are introduced on an elastic - but no linear - basis. In this work, it is shown that these path integrals can be introduced without any reference to the material behavior. The method is based on the definition in a continuous medium of a set of vectors and couples having the dimension of a force or a moment. More precisely, definitions are given of "volume defect forces  $j$ ", "surface defect forces  $J$ ", "volume defect couples  $l$ " and "surface defect couples  $L$ ". This is done with the help of the stress working variation of a particule moving through the solid. The most important result is : the resultant of all the defect forces included in a volume  $V$  is the  $J$  integral on the surface surrounding  $V$  and the moment resultant is the  $L$  integral. So these integrals are defined without any assumption on the material constitutive equation. Another result is the material form of the virtual work principle - defect forces are acting like conventional forces in the conventional principle of virtual work. This lead to the introduction of the energy momentum tensor and of the associated couple stress. In that way generalization of the path

..f..

principe des travaux virtuels. Est ainsi introduit le tenseur d'énergie-impulsion et le tenseur couple associé des milieux de COSSERAT. De cette façon, il est possible de généraliser les intégrales de contour puisqu'il suffit d'utiliser les vecteurs et couples défauts en tout lieu et place. Il est montré que, lors d'un déplacement virtuel généralisé (spatial et matériel), la somme des variations des travaux des forces et des défauts est nulle. La méthode est appliquée à la mécanique de la rupture en étudiant la distribution des défauts autour de la fissure. Il est ainsi possible d'étendre l'usage des intégrales de contour aux cas où existent des contraintes thermiques.

1979

47 p.

Commissariat à l'Énergie Atomique - France

---

integral is made, it is to say that defect forces and defect couples can be used instead of path integrals. It can be shown that when a virtual displacement (spatial and material) occurs, the sum of work variations of the conventional and defect forces is zero. Application of this method is made to fracture mechanics in studying the defect forces distribution around a crack. On this basis, extension of path integral criteria is made in case of thermal stresses.

1979

47 p.

Commissariat à l'Énergie Atomique - France

## I. INTRODUCTION

Les rigoureuses conditions de sûreté imposées aux installations nucléaires imposent aux constructeurs de sérieuses études des conditions de rupture des structures mécaniques de ces installations. Aussi la mécanique de rupture est-elle largement utilisée lors de la conception [1] ou de la vérification [2] des composants de réacteurs.

A quelques corrections près les méthodes utilisées sont celles de la Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture (LEMF), ce qui signifie que dans ces méthodes le matériau est supposé présenter un comportement élastique linéaire. Développée à partir des travaux de GRIFFITH [3] par G. IRWIN [4] [5] la LEMF est aujourd'hui une discipline bien au point si l'on ne considère que le mode I. Il faut souligner toutefois que les cas où se présentent des modes mixtes ne sont pas encore très bien résolus et font l'objet de théories divergentes [6, 7, 8, 9].

Les matériaux utilisés dans les installations nucléaires sont en général ductiles et présentent de notables déformations plastiques au voisinage du fond de fissure (dans les conditions de températures prévues en fonctionnement). Il en résulte que la LEMF ne correspond pas exactement aux phénomènes réellement rencontrés. Lorsque les déformations plastiques sont très localisées dans le voisinage du front de fissure, la correction de zone plastique proposée par IRWIN permet d'étendre les méthodes de la LEMF. Par contre, si la zone plastique est étendue, cela n'est plus possible et d'autres méthodes et d'autres critères que ceux de la LEMF seraient nécessaires [39].

Différents critères ont été proposés pour la mécanique de la rupture élasto-plastique : Crack Opening Displacement Approach [10]

et ses différentes variantes (Crack Opening Angle, Crack Tip Opening Angle), la Méthode de l'Energie Equivalente [11], celle du Module Tangent [12], Two Criteria Approach [13, 14, 15] et celle de l'intégrale J, qui sera plus particulièrement examinée ici.

## II - LE CRITERE DE L'INTEGRALE DE CONTOUR $J_1$

La méthode de l'intégrale J a été proposée par RICE [16] en 1968 et un procédé de détermination expérimentale de sa valeur critique a été imaginé par BEGLEY et LANDES [17]. Depuis, l'application pratique de ce critère a reçu une attention considérable. Quoique plusieurs évaluations critiques de ce critère aient été faites dans le passé, en particulier par NEALE et TOWNLEY [14], par TURNER et BURDEKIN [18] et par BILBY [19] de nombreux points paraissent peu clairs et le champ d'application de ce critère paraît assez limité.

En fait, des notions de ce genre avaient déjà été introduites dans la théorie du champ électromagnétique au cours du XIX<sup>ème</sup> siècle. Elles ont été étendues à la mécanique des solides élastiques par ESHELBY [20]. L'originalité de la proposition de RICE a été d'utiliser pour le calcul de  $J_1$ , non pas la densité d'énergie élastique, mais la densité de travail reçu (stress working density). Cependant les travaux justificatifs sont fondés sur l'hypothèse d'un comportement élastique, quoique non linéaire du matériau, et la plasticité est simulée par l'élasticité non linéaire, ce qui est souligné dans [21] de façon très nette : "It is important to remember that the above results on energy variation are strictly true for elastic behaviour only. Our main applications will, however, be to elastic plastic problems".

De façon plus générale, les études sur les intégrales de contour utilisables en mécanique de la rupture [22, 23, 24, 25] n'introduisent ces intégrales que sur la base d'un comportement élastique du matériau.

Leur utilisation étant toujours relative à des matériaux élasto plastiques, il serait extrêmement intéressant de les définir sans faire d'autres hypothèses sur le comportement du matériau que

celle de continuité, et de n'introduire d'autres hypothèses que le plus tard possible. Or, il apparaît possible d'introduire les intégrales de contour sans référence au comportement du milieu continu [26, 27, 28] et sans admettre que ce milieu est élastique, ainsi qu'il est habituellement fait. Le premier objet de ce papier est d'exposer la méthode correspondante qui est un développement de la tentative faite par l'auteur en 1975 [26].

### III - EXPOSE SCHEMATIQUE DE LA METHODE

La méthode est une généralisation du développement fait par ESHELBY sur l'utilisation du "Energy Momentum Tensor" à la mécanique des continus élastiques [19, 20, 22, 23], mais comportant des modifications notables pour éviter toute hypothèse sur le comportement du matériau, autre que la continuité [29, 30].

Préalablement à un exposé plus détaillé, et de présentation mathématique, il est utile de donner le schéma de la méthode employée. Cette méthode est fondée sur la définition, dans un milieu continu, d'un ensemble de vecteurs ayant la dimension d'une force. Ces vecteurs seront appelés "vecteurs défauts". Pour être plus précis, il sera introduit les densités volumiques et surfaciques de ces vecteurs ou défauts de volume  $j$  et défauts de surface  $\bar{j}$  de la même façon que l'on définit les forces de volume  $X$  et les forces de surface  $\bar{X}$  appliquées sur un solide. Ces vecteurs ne fournissant pas une description complète de défauts, il sera de plus introduit des couples défauts ayant la dimension d'un moment de force, ou plus précisément leurs densités,  $l$  et  $\bar{l}$  analogues à des moments magnétiques exercés sur un solide.

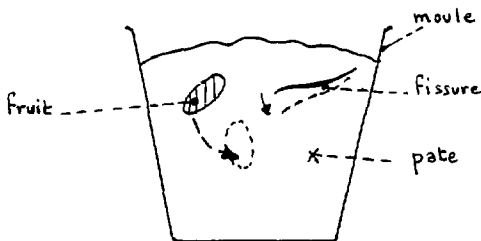
S'il est souvent question d'intégrales de contour en mécanique de la rupture, c'est uniquement parce que l'on considère des cas plans. Réellement, il s'agit, en milieu tridimensionnel, d'intégrales de surface portant non sur un scalaire, mais sur un vecteur. Ainsi l'intégrale bien connue  $J_1$  n'est que la composante suivant l'axe  $x$  d'un vecteur  $\bar{J}$  donné par une intégrale de surface, intégrale de surface qui dans un cas plan se réduit à une intégrale de contour. Ceci étant bien précisé, un des plus importants résultats de la méthode est que les intégrales les plus connues sont les résultantes de l'ensemble des vecteurs défauts situés



dans le volume entouré par la surface d'intégration. Ce résultat, où les intégrales invoquées comme critères d'initiation de propagation de fissure ne sont que l'addition d'un ensemble de "défauts" permet d'analyser plus finement le sens de ces critères et en particulier d'extirper de la valeur des intégrales des parasites tels que l'effet des contraintes thermiques.

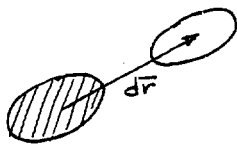
La méthode se développe également en situant le rôle du tenseur "energy moment", ainsi qu'en présentant une autre forme du principe des travaux virtuels.

La base de la méthode est l'introduction des vecteurs défauts et des couples défauts. Cette introduction se fait très naturellement par l'étude des conséquences énergétiques du déplacement d'une particule matérielle par rapport à ses voisines. Par déplacement d'une particule, il faut entendre à la fois un déplacement dans l'espace, et un déplacement (ou écoulement) du matériau dans le solide étudié, le chargement sur ce dernier ne variant pas au cours de cette transformation. A titre d'illustration, on peut imaginer le déplacement d'un fruit confit dans la pâte d'un gâteau avant cuisson, il y a non seulement déplacement géométrique du fruit confit, c'est-à-dire déplacement par rapport au référentiel constitué par le moule à gâteau, mais aussi "déplacement matériel", c'est-à-dire changement des propriétés du gâteau à l'endroit où arrive le fruit puisqu'il va y remplacer la pâte. Dans cette pâte fraîche peuvent se déplacer aussi des vides (bulles d'air) ou des fissures (mauvaise liaison de la pâte).

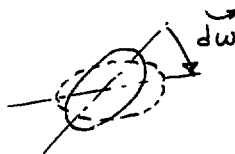


Au cours d'une telle transformation, les forces extérieures à la particule fournissent un certain travail au solide. Une partie de ce travail est stockée ou dissipée par la particule elle-même, mais le solde est disponible pour le reste du solide. Bien entendu, il faut en déduire ce qui est rendu disponible du fait du simple déplacement géométrique pour déterminer le travail  $Rdv$  dû au seul déplacement matériel (c'est-à-dire des propriétés du matériau) d'une particule de volume  $dv$

Pour une translation  $d\vec{r}$ , ce travail est égal à  $dR = \vec{j} \cdot d\vec{r}$ , pour une rotation  $d\vec{\omega}$ , il est égal à  $dR = \vec{\ell} \cdot d\vec{\omega}$ .



$$dR = \vec{j} \cdot d\vec{r}$$



$$dR = \vec{\ell} \cdot d\vec{\omega}$$

#### IV - INTRODUCTION DES VECTEURS DEFAUTS

Par la suite, le repère sera un système cartésien de coordonnées  $x_i$  lié au matériau (lagrangien) dans un état initial déchargé. Sous l'action de forces extérieures de volume  $X_i$  et de surface  $\bar{X}_i$ , un point du matériau se déplace de  $u_i$  (vient donc en  $x_i + u_i$ ) et présente un état de déformation  $\epsilon_{ij}$  et un état de contrainte  $\sigma_{ij}$ . Bien entendu, les forces intérieures (contraintes) ont travaillé et la densité de travail reçu (en un point) est  $W$ , il en est de même des forces extérieures qui ont fourni au matériau une densité de travail  $U$ .

La définition précise de  $X_i$ ,  $\bar{X}_i$ ,  $\epsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$  n'est pas nécessaire pour le moment mais il sera montré plus tard que seule une stricte définition lagrangienne peut fournir des résultats corrects. Il suffit que lors d'un déplacement (géométrique) virtuel,  $\delta\epsilon_{ij}$ , le travail des forces extérieures soit donné par

$$\delta U = X_i \delta u_i$$

et celui des forces intérieures par

$$-\delta W = - \overset{\curvearrowright}{G}_{ij} \delta \epsilon_{ij}$$

c'est-à-dire que la variation de la densité de travail reçu est  
est donnée par  $\delta W = \overset{\curvearrowright}{G}_{ij} \delta \epsilon_{ij}$ .

Il va être considéré une translation (virtuelle)  $dx_k$   
d'une particule, qui viendra de ce fait prendre la place (et l'état de déformation) de la particule voisine.

Le déplacement géométrique\* de la particule est  
 $dx_k + u_{i,k} dx_k$  et le travail des forces extérieures (la densité volumique en fait) est égale à  $X_k dx_k + X_i u_{i,k} dx_k$ .

L'accroissement de densité de travail stocké (ou dissipé) par la particule est

$$\overset{\curvearrowright}{G}_{ij} \epsilon_{ij,k} dx_k$$

puisque la déformation\* a varié de  $\epsilon_{ij,k} dx_k$

Le travail disponible (par unité de volume de particule)  
est donc

$$X_k dx_k + X_i u_{i,k} dx_k - \overset{\curvearrowright}{G}_{ij} \epsilon_{ij,k} dx_k$$

Ce qui est dû au simple déplacement géométrique est aisé  
à apprécier, c'est simplement

$$(U_{,k} - W_{,k}) dx_k$$

La différence est donc

$$(X_k - U_{,k} + X_i u_{i,k} + W_{,k} - \overset{\curvearrowright}{G}_{ij} \epsilon_{ij,k}) dx_k$$

---

\* On utilisera l'indice après la virgule pour la dérivation partielle par rapport aux coordonnées, ainsi

$$u_{i,k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad \text{et} \quad \epsilon_{ij,k} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_k}$$

et si l'on se limite aux forces de volume dépendant d'un potentiel  $X_k = U_{,k}$ , on obtient

$$dR = j_k dx_k \quad (1)$$

$$j_k = W_{,k} - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k} + X_i u_{i,k} \quad (2)$$

Cette relation (1) est incomplète car une particule au cours d'une migration peut être amenée à traverser une surface de discontinuité. Par surface de discontinuité, il faut entendre une surface où se présentent :

- un saut de travail des contraintes  $\Delta W$
- un saut de déplacement  $\Delta u_i$
- des forces extérieures (de surface)  $\overline{\Delta X_i}$

Le travail de ces dernières au moment du franchissement de la surface est  $\overline{\Delta X_i} u_{i,k}$  (limite de  $X_i u_{i,k}$ ). Le travail des forces intérieures peut être calculé en utilisant les forces superficielles  $T_i$  exercées par la partie amont sur la partie aval à travers la surface. En les traitant comme des forces extérieures (en équilibre) appliquées à chaque partie, le travail reçu est la différence entre les valeurs de  $T_i u_{i,k}$  en aval et en amont soit  $T_i \Delta u_{i,k}$ .

Enfin, la différence des valeurs de  $W$  est égale à  $\Delta W n_k$  où  $n_k$  est la normale à la surface de discontinuité.

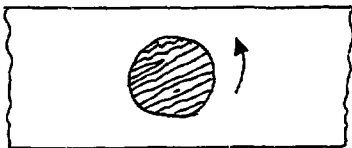
En conséquence, sur une surface de discontinuité, il existe une densité superficielle de défaut égale à :

$$\Delta j_k = \Delta W n_k - T_i \Delta u_{i,k} + \Delta X_i u_{i,k} \quad (3)$$

où  $T_i$  est la résultante des forces de contraintes sur la surface de discontinuité.

V - INTRODUCTION DES COUPLES DEFAUTS

Avec les mêmes notations, il va être considéré une rotation (virtuelle)  $d\omega$  d'une particule sur elle-même. Au cours de cette rotation, la particule adopte le champ de déformation du voisinage, c'est-à-dire que le champ de déformation de la particule tourne par rapport à un référentiel lié à la particule, il en résulte une variation de la densité de travail reçu  $W$ . Un exemple simple de ce fait est celui de matériaux anisotropes tels que le bois, si l'on fait tourner un cylindre de bois logé dans un mandrin métallique, il y a variation de travail.



Cette variation s'apprécie facilement, puisqu'une rotation entraîne une variation de déformation donnée par

$$\epsilon_{ij} + d\epsilon_{ij} = (\delta_{mi} + d\omega_{mi}) (\delta_{nj} + d\omega_{nj}) \epsilon_{mn}$$

$$d\epsilon_{ij} = \epsilon_{in} d\omega_{nj} + \epsilon_{mj} d\omega_{mi}$$

à laquelle correspond la variation de  $W$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ij} d\epsilon_{ij} &= \mathcal{G}_{ij} \epsilon_{in} d\omega_{nj} + \mathcal{G}_{ij} \epsilon_{mj} d\omega_{mi} \\ &= (\mathcal{G}_{ij} \epsilon_{mj} + \mathcal{G}_{ji} \epsilon_{jm}) d\omega_{mi} \\ &= e_{kmi} (\mathcal{G}_{ij} \epsilon_{mj} + \mathcal{G}_{ji} \epsilon_{jm}) d\omega_k \end{aligned}$$

où  $e_{kmi}$  est le tenseur complètement antisymétrique. Il faut noter que le calcul a été fait dans un référentiel lié à la particule, il faut donc changer le signe de la rotation, donc de ce résultat.

Ceci ne suffit pas à exprimer notre moment, car les forces extérieures travaillent dans cette rotation, du fait que la

---

\*  $\delta_{mi}$  est le tenseur de KRONECKER tel que  $\delta_{mi} = 0_{ni}$   $m \neq i$  &  $\delta_{ii} = 1$

particule se déplace également par translation. En effet, la rotation a lieu dans le repère initial  $x_i$ , mais comme elle a lieu en charge, la particule s'est éloignée de l'axe de rotation d'une distance  $u_i$  d'où un déplacement  $e_{kij} u_i d\omega_k$  et un travail  $e_{kij} u_i x_j d\omega_k$ .

Comme il n'y a pas d'effet géométrique, on a ainsi la variation de travail du déplacement matériel

$$dR = l_k d\omega_k \quad (4)$$

$$l_k = -e_{kmi} (\varphi_{ij} \epsilon_{mj} + \varphi_{ji} \epsilon_{jm} - u_m x_i) \quad (5)$$

$l_k$  étant une densité volumique de moment défaut (ou couple défaut de volume).

Il peut également exister des couples défauts de surface dans le cas en particulier de l'existence de forces de surface  $\overline{\Delta X}_i$  sur une surface interne on a une variation d'énergie  $e_{kmi} u_m \overline{\Delta X}_i d\omega_k$ . En traitant les forces de contraintes de la même façon que précédemment on trouve  $e_{kmi} \Delta u_m T_i d\omega_k$  d'où

$$\overline{\Delta l}_k = -e_{kmi} (u_m \overline{\Delta X}_i + \Delta u_m T_i) \quad (6)$$

$T_i$  étant la force de contrainte sur la surface de discontinuité.

#### VI - RESULTANTES DES DEFAUTS - INTEGRALES L et J

Les densités de vecteur défauts étant connues, il est possible de calculer la résultante de l'ensemble des vecteurs défauts contenus dans un volume V limité par une surface S.

Pour ce calcul, il est utile de définir plus précisément la contrainte et la déformation. Pratiquement deux solutions peuvent être considérées. Si les grandes déformations doivent être prises en compte, la bonne voie [20, 22, 26, 28, 30] est de définir la déformation par le gradient  $u_{i,j}$  du déplacement et la contrainte par le tenseur  $\varphi_{ij}$  de BOUSSINESQ ou des contraintes nominales qui, s'il présente l'inconvénient de n'être pas symétrique

permet une écriture remarquablement simple du principe des travaux virtuels et des équations d'équilibre [31]. A l'inverse, si seules les petites déformations sont considérées, il suffit d'adopter la définition traditionnelle  $2 \varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$

Les calculs proprement dits sont développés en annexe et conduisent aux résultats suivants :

1. La résultante de l'ensemble des vecteurs défauts contenus dans un volume V limité par une surface S s'exprime par une intégrale sur cette surface S.

$$\begin{aligned} J_k &= \int_V j_k \, dv + \int_{\Sigma} \overline{\Delta j_k} \, ds \\ J_k &= \int_S [W n_k - T_i u_{i,k}] \, ds \end{aligned} \quad (7)$$

où  $\Sigma$  est l'ensemble des surfaces de discontinuités incluses dans V, sur lesquelles s'exercent des défauts de volume  $\Delta j_k$ ,  $n_k$  est la normale extérieure à S  
 $T_i = \overset{\circ}{G}_{i,j} n_j$

2. Le moment résultant de l'ensemble des vecteurs défauts et des moments défauts contenus dans un volume V limité par une surface S s'exprime par une intégrale de surface sur cette surface S.

$$\begin{aligned} L_k &= \int_V (e_{kmi} x_m j_i + l_k) \, dv \\ L_k &= e_{kmi} \int_S [x_m (W n_i - T_p u_{p,i}) + T_m u_i] \, ds \end{aligned} \quad (8)$$

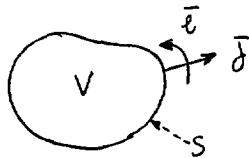
Ces deux résultats répondent au premier but de cette note puisqu'ils permettent de définir les intégrales  $J_i$  et  $L_i$  sans faire l'hypothèse d'un comportement élastique du matériau [32,33]. Par conséquent, il sera licite de les considérer pour des matériaux à comportement complexe tels que le béton, le bois, ou présentant des défauts tels que des inclusions ou des fissures.

D'autre part, ces deux intégrales sont la somme (la résultante) d'éléments (vecteurs et couples défauts) situés dans le volume considéré. Si la prise en compte de ces intégrales dans les critères de rupture peut être envisagée, il va de soi que leurs éléments constitutifs, en particulier ceux situés dans le voisinage du front de fissure, sont à considérer d'abord.

VII - EQUILIBRE DES DEFAUTS - TENSEUR ENERGIE - IMPULSION

Les densités de surface  $\Delta j_k$  et  $\Delta l_k$  ont été introduites sur des surfaces de discontinuité. Or, si l'on considère un élément de volume  $V$ , isolé du reste du solide, ou limité comme ce dernier, la surface  $S$  qui le limite peut être considérée comme une surface de discontinuité où  $W$  varie de  $W$  à zéro et où s'exerce des forces  $\Delta X_i = T_i$ . Le fait d'isoler conduit en effet à prendre en compte l'action des défauts situés à l'extérieur comme l'action de défauts de surface placés sur la surface de séparation. En utilisant (3) et (6), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \bar{j}_k &= -W n_k + T_i u_{i,k} \\ \bar{l}_k &= -e_{kij} T_i u_j \end{aligned} \quad (9)$$



Avec ces définitions, les relations 7 et 8 peuvent s'écrire :

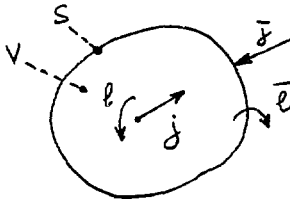


$$\mathbf{J}_k = - \int_S \bar{\mathbf{J}}_k ds \quad (7')$$

$$\mathbf{L}_k = - \int_S (\bar{\mathbf{I}}_k + \mathbf{e}_{kmi} x_m \bar{\mathbf{J}}_i) ds \quad (8')$$

ce qui signifie que l'ensemble des vecteurs et moments défauts  $\mathbf{j}_k, \Delta \mathbf{j}_k, \mathbf{l}_k, \bar{\mathbf{J}}_k, \bar{\mathbf{I}}_k$  appliqués sur le volume  $V$  et sa surface  $S$  a une résultante nulle. C'est en quelque sorte une équation d'équilibre qui peut s'énoncer ainsi.

Le solide limité par la surface  $S$  est en équilibre sous l'action des vecteurs et défauts qui lui sont appliqués, dans son volume et sur cette surface.



$$\int_V \mathbf{j} dv + \int_S \bar{\mathbf{J}} ds = 0$$

$$\int_V (\mathbf{l} + \mathbf{O} \mathbf{M} \mathbf{j}) dv + \int_S (\bar{\mathbf{I}} + \mathbf{O} \mathbf{M} \bar{\mathbf{J}}) ds = 0$$

Le rôle des défauts est analogue à celui des forces mais de forces qui traduirait la tendance pour une particule à se déplacer, non par rapport à un référentiel spatial comme les forces classiques, mais par rapport au matériau, c'est-à-dire à un référentiel matériel.

Cette analogie peut s'étendre en introduisant l'analogie de la contrainte. Comme pour le tenseur de contrainte classique, il y a une infinité de champs de contrainte correspondant à un chargement donné (statiquement admissible). Parmi ceux-ci un choix peut

être fait à la lumière des calculs contenus dans l'annexe, c'est celui du tenseur  $\ominus_{kj}$  défini par l'équation A2

$$\boxed{\ominus_{kj} = W\delta_{kj} - \mathcal{G}_{ij} u_{i,k}} \quad (11)$$

qui vérifie

$$\boxed{\begin{aligned} \ominus_{kj,j} &= j_k \\ \ominus_{kj} n_j + \bar{j}_k &= 0 \end{aligned}} \quad (12)$$

la première de ces équations est la reproduction de l'équation (A1) de l'annexe et la seconde est évidente.

Ces équations sont les équations classiques d'équilibre pour le champ de contrainte  $\ominus_{kj}$

Le tenseur  $\ominus_{kj}$  est très célèbre dans la théorie du champ électromagnétique [34]. Il lui a été reproché de ne pas être symétrique (tout comme le tenseur nominal de contrainte de BOUS-SINESQ) et des efforts ont été consacrés à sa symétrisation. Ainsi il a été proposé de lui ajouter un tenseur  $\psi_{jkl,l}$  satisfaisant à la condition  $\psi_{kjl} = -\psi_{ljk}$ . Dans le cas présent, cela n'est pas nécessaire, car la non symétrie de  $\ominus_{kj}$  correspond à l'équilibre des moments dans lequel interviennent  $l_k$  et  $\bar{I}_k$ .

La partie non symétrique de  $\ominus_{kj}$  est caractérisée par  $e_{ijk} \ominus_{kj}$ , et l'équation (A3) de l'annexe s'écrit :

$$e_{ijk} \ominus_{kj} = l_i - e_{ijk} (\mathcal{G}_{jp} u_k), p$$

qui peut être intégrée sur un volume V limitée par une surface S.

$$\int_V e_{ijk} \ominus_{kj} dv = \int_V l_i dv - \int_S e_{ijk} \mathcal{G}_{jp} n_p u_k ds$$

ou

$$e_{ijk} \ominus_{kj} dv = \int_V l_i dv + \int_S \bar{I}_i ds \quad (13)$$

montrant bien la nécessité de la non symétrie pour l'équilibre des moments défauts.

Au niveau local, il faut introduire, outre le tenseur  $\ominus_{kj}$ , un (pseudo tenseur)  $\Lambda_{pi}$  défini\* par

$$\Lambda_{pi} = e_{ijk} \zeta_{jp} u_k \quad (14)$$

qui intervient dans les équations

$$\Lambda_{pi,p} = -i - e_{ijk} \ominus_{kj} \quad (15)$$

$$\Lambda_{pi} n_p + \bar{I}_i = 0$$

qui jointes à (12) constituent les équations d'équilibre des milieux de Cosserat [35].

#### VIII - FORME MATERIELLE DU PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

Il existe donc une analogie formelle entre les forces extérieures (au sens traditionnel du terme) appliquées à un continu et les défauts (qui ont également la dimension d'une force).

$j_k$	correspond aux forces de volume	$x_k$
$\bar{j}_k$	"	surface $\bar{x}_k$
$l_k$	"	aux couples de volume <sup>+</sup>
$\bar{l}_k$	"	aux couples de surface
$\ominus_{kj}$	"	au tenseur de contrainte $-\bar{c}_{kj}$

Les équations d'équilibre sont satisfaites par les grandeurs "défauts", (équations (12) et (13)) de la même façon que pour les grandeurs "forces". En conséquence ces équations doivent dériver d'un principe correspondant à celui des travaux virtuels.

Dans le classique principe des travaux virtuels, les déplacements virtuels à considérer sont les déplacements  $\delta u_i$  dans

\* Couple-contrainte  
+ dûs par exemple à un champ magnétique

l'espace puisque le travail de la force  $X_i$  est  $X_i \delta u_i$ . Dans le principe correspondant, le déplacement virtuel considéré sera probablement un déplacement  $\delta x_i$  dans le matériau, puisque la variation de travail s'exprime par  $j_i \delta x_i$ . Ceci mérite d'être vérifié.

Le travail des vecteurs défauts est

$$\int_V j_k \delta x_k \, dv + \int_S \bar{j}_k \delta x_j \, ds$$

que les équations (11) permettent d'écrire

$$-\int_V \ominus_{kj,j} \delta x_k \, dv + \int_S \ominus_{kj} n_j \delta x_k \, ds$$

qu'une intégration par partie de l'intégrale de volume suivie de l'application du théorème de la divergence transforme en

$$\int_V \ominus_{kj} \delta x_{k,j} \, dv$$

en résumé, cela s'écrit

$$\int_V (j_k \delta x_k - \ominus_{kj} \delta x_{k,j}) \, dv + \int_S \bar{j}_k \delta x_k \, ds = 0 \quad (16)$$

qui est bien formellement analogue au principe des travaux virtuels exprimé à l'aide du tenseur de contrainte nominale de BOUSSINESQ [31]

$$\int_V (X_k \delta u_k + \vartheta_{kj} \delta u_{k,j}) \, dv + \int_S \bar{X}_k \delta x_k \, ds = 0$$

Comme il est connu, cette dernière forme, quoique commode est un peu trompeuse car si les termes contenant les  $X$  et  $\bar{X}_k$  sont des travaux virtuels de forces extérieures, le terme en  $\ominus_{kj}$  ne représente pas que le travail des forces intérieures, il contient également le travail des couples extérieurs qui pourraient être appliqués (d'où la relation :

$\vartheta_{jk} - \vartheta_{kj} = \vartheta_{ki} u_{j,i} - \vartheta_{ji} u_{k,i}$  que doit respecter le tenseur de BOUSSINESQ s'il n'y a pas de couples extérieurs sur les éléments du solide).

Pour séparer le travail des défauts (vecteurs et moments) de celui des éléments intérieurs (  $\ominus_{kj}$  et  $\Lambda_{kj}$  ), il est convenable de décomposer le déplacement matériel virtuel  $\delta x_{k,j}$ , supposé infiniment petit\*, en sa partie symétrique (déformation) et en sa partie asymétrique (rotation)

$$\begin{aligned} \delta x_{k,j} &= \delta E_{kj} + \delta \Omega_{jk} \\ \left\{ \begin{aligned} \delta E_{kj} &= \frac{1}{2} (\delta x_{k,j} + \delta x_{j,k}) \\ \delta \Omega_{jk} &= \frac{1}{2} (\delta x_{k,j} - \delta x_{j,k}) \\ \delta \Omega_i &= e_{ijk} \delta \Omega_{kj} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

avec cette séparation, dans (16) le terme  $\ominus_{kj} \delta x_{k,j}$  se sépare en  $\ominus_{kj} \delta E_{kj}$  et  $\ominus_{kj} \delta \Omega_{kj}$ , ce dernier égal à

$$\begin{aligned} \ominus_{kj} \delta \Omega_{kj} &= e_{ijk} \ominus_{kj} \delta \Omega_i \\ &= (l_i - \Lambda_{pi,p}) \delta \Omega_i \end{aligned}$$

d'où en intégrant par parties et en utilisant le théorème de la divergence

$$\begin{aligned} \int_V \ominus_{kj} \delta x_{k,j} dv &= \int_V ( \ominus_{kj} dE_{kj} + \Lambda_{pi} \delta \Omega_{i,p} + l_i \delta \Omega_i ) dv \\ &\quad + \int_S \bar{I}_i \delta \Omega_i ds \end{aligned}$$

soit finalement

$$\boxed{ \int_V (j_k \delta x_k + l_k \delta \Omega_k) dv + \int_S (\bar{j}_k \delta x_k + \bar{I}_k \delta \Omega_k) ds = \int_V ( \ominus_{kj} \delta E_{kj} + \Lambda_{pi} \delta \Omega_{i,p} ) dv } \quad (17)$$

ce qui sépare bien le travail de ce qu'on pourrait nommer le travail des défauts extérieurs ( $j_k, \bar{j}_k, l_k, \bar{I}_k$ ), placé dans le premier membre, de celui de ce qu'on pourrait nommer les défauts intérieurs ( $\ominus_{kj}$ , et  $\Lambda_{pi}$ ).

---

\* Ceci implique non seulement que la "déformation"  $\delta E_{kj}$  soit petite, mais que la "rotation"  $\delta \Omega$  le soit également.

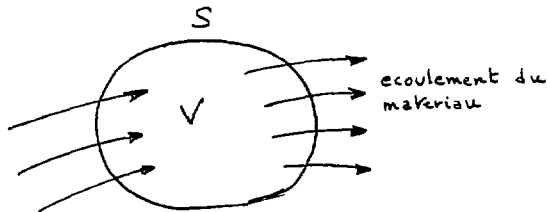
Il faut remarquer que le premier membre de (17), quoique déjà long, n'est pas complet puisqu'il peut être nécessaire d'y ajouter le travail de défauts liés à des surfaces de discontinuité

$$\int_{\Sigma} (\Delta^j_k \delta x_k + \Delta^l_k \delta \Omega_k) ds$$

et même ceux qui peuvent être liés à des lignes singulières telles celles qui bornent une surface de discontinuité.

Cette relation (17) exprime en quelque sorte une autre forme du principe des travaux virtuels qui a particulièrement été mise en évidence par CASAL [36]. Cette forme est bien différente de la forme classique car  $\delta x_i$ , déplacement d'une particule par rapport au matériau est bien différent de  $\delta u_i$ , déplacement d'une particule par rapport à l'espace. Ainsi, par exemple, si  $\delta x_i$  est uniforme (constant dans toute la partie considérée du continu) il ne s'agit pas d'une translation (ce qui serait le cas pour un  $\delta u_i$  uniforme) mais de l'écoulement du matériau dans le volume considéré.

Le déplacement matériel (virtuel)  $\delta x_i$ , représente un écoulement (déplacement des caractéristiques) du matériau dans le volume considéré. Se déplacent donc l'équation constitutive locale, la densité de travail reçu ... et par suite les vecteurs défauts (et les couples défauts).



Se déplaceront donc les vides et fissures (en se déformant).

A côté de la classique forme spatiale du principe des travaux virtuels, il existe une forme matérielle [36] où les déplacements virtuels sont ceux des particules par rapport aux autres.

Dans ce principe, les défauts (vecteurs ou couples) jouent le rôle de forces (ou couple) extérieurs, le tenseur énergie impulsion celui d tenseur des contraintes. Il a été proposé d'appeler ces vecteurs défauts des forces de succion car elles tendent à déplacer une particule par rapport aux autres.

#### IX - SIGNIFICATION ENERGETIQUE DES INTEGRALES

Le travail des défauts  $j$  et  $l$  a bien la dimension d'un travail mais sa liaison avec le travail (au sens classique du terme) doit être précisé.

Le déplacement  $(\delta x_k, \delta \Omega_k)$  des vecteurs  $j_k$  et  $l_k$  se traduit par une modification de la configuration des déplacements et des déformations dans le volume étudié, autrement dit par des variations  $\delta u_i$  et  $\delta \epsilon_{ij}$  des déplacements et des déformations<sup>x</sup>. En tenant compte de ce fait, le remplacement de  $j_k$  et  $l_k$  par leurs expressions (2) et (5) permet de transformer la première intégrale de l'équation (17) en

$$- \int_V (\delta W - \mathcal{C}_{ij} \delta \epsilon_{ij} + X_i \delta u_i) dv$$

qui grâce au principe des travaux virtuels

$$\int_V \mathcal{C}_{ij} \delta \epsilon_{ij} dv = \int_V X_i \delta u_i dv + \int_S \bar{X}_i \delta u_i ds$$

devient

$$- \int_V \delta W dv + \int_S \bar{X}_i \delta u_i ds$$

---

x Ceci correspond à l'installation en un point des déplacements et déformations existant au point de coordonnées  $-\delta x_k$ , ce qui, compte tenu de la rotation  $-\delta \Omega_k$  entraînant un déplacement réel, conduit par exemple à

$$\delta u_i = - u_{i,k} \delta x_k - e_{kmi} u_m \delta \Omega_k$$

Posons maintenant :

$$\delta P = \int_S \bar{X}_i \delta u_i \, ds - \int_V \delta W \, dv \quad (18)$$

qui est la variation du travail des forces intérieures et des forces extérieures de surface

on a donc,

$$\delta P = \int_V (j_k \delta x_k + l_k \delta \Omega_k) \, dv \quad (19)$$

que l'équation (17) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \delta P = & - \int_S (\bar{J}_k \delta x_k + \bar{I}_k \delta \Omega_k) \, ds \\ & + \int_V \left( \ominus_{kj} \delta E_{kj} + \Lambda_{pi} \delta \Omega_{i,p} \right) \, v \end{aligned}$$

expressions qui relient le travail des forces intérieures et des forces extérieures de surface (au cours d'un déplacement matériel virtuel  $\delta x_k$ ) au "travail" des défauts.

Au cours d'un déplacement matériel virtuel  $\delta x_k$ , le travail des forces intérieures, des forces extérieures de surface est égal au travail des défauts situés dans le volume considéré.

Notons que (18) et (19) peuvent s'écrire :

$$\delta \int_V W \, dv = \int_S \bar{X}_i \delta u_i \, ds - \int_V (j_k \delta x_k + l_k \delta \Omega_k) \, dv \quad (20)$$

montrant le caractère de forces de volume généralisées que l'on peut attribuer à  $j_k$  et  $l_k$  (ainsi qu'aux défauts des surfaces de discontinuité).

#### Cas particulier - Les intégrales $\ominus$ et $\Lambda$

Parmi les déplacements matériels virtuels, il est intéressant de considérer ceux pour lesquels le travail de  $\ominus$  et  $\Lambda$  est nul, ou de façon moins restrictive, susceptible d'être exprimé par



une intégrale de surface. Le cas d'un mouvement "solide" des défauts dans le volume V étudié est le plus utile. Ce mouvement solide peut être caractérisé par une translation  $d\omega_k$  et une rotation  $\delta\Omega_k$  autour de l'origine.

La dernière relation donne

$$- \delta P = \delta\omega_k \int \bar{J}_k ds + \delta\Omega_k \int (\bar{I}_k + e_{jkm} x_m \bar{J}_j) ds$$

c'est-à-dire

$$\delta P = J_k \delta\omega_k + L_k \delta\Omega_k \quad (21)$$

Ce qui donne la signification énergétique des intégrales  $J_k$  et  $L_k$  en terme du travail virtuel  $\delta P$  (pour une translation d'ensemble  $\delta\omega_k$  ou une rotation d'ensemble  $\delta\Omega_k$  des défauts) des forces intérieures et des forces extérieures de surface.

Une fissure, ou portion de fissure est un défaut, ce point sera d'ailleurs précisé par la suite. Par suite l'expression (21) s'applique à la translation ou rotation d'une fissure ou portion de fissure contenue dans le volume V limité par la surface S sur laquelle porte l'intégration.

Il convient peut-être de répondre par avance à des objections qui pourraient être faites à l'équation (21). Toutes les études conduisent à des formules analogues, mais faites en admettant que le matériau est élastique, soulignent qu'une telle équation n'est valable que si le matériau est homogène (pour la translation) et isotrope (pour la rotation). De telles restrictions ne sont pas ici nécessaires car les inhomogénéités et les anisotropies sont représentées par les vecteurs défauts et les couples défauts.

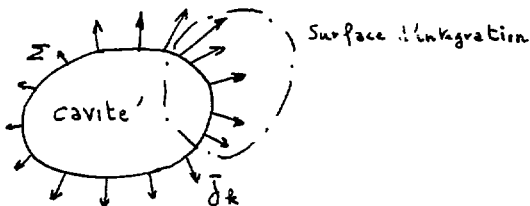
De même les forces extérieures de volume  $X_i$  sont également prises en compte dans  $J_k$  et  $L_k$ . Il en résulte que leur travail disparaît de l'expression de P.

X - SUR L'INDEPENDANCE VIS A VIS DE LA SURFACE D'INTEGRATION

Les intégrales telles que J et L sont souvent considérées dans la littérature comme indépendantes du contour d'intégration. Lorsque, comme c'est le cas ici, le cas tridimensionnel est considéré, c'est leurs propriétés de dépendance ou d'indépendance vis-à-vis de la surface d'intégration qui est à examiner.

Cet examen doit comprendre deux parties différentes, l'une concernant le milieu continu lui-même qui fait l'objet principal de ce paragraphe, et l'autre concernant les surfaces de discontinuité en général et les fissures ou cavités qui sera reprise plus loin, mais qui mérite quelques indications préliminaires.

A titre de surface de discontinuité, on peut considérer une cavité limitée par une surface  $\Sigma$ . Cette surface est une surface de discontinuité sur laquelle s'appliquent des défauts de surface  $\bar{j}_k$  et  $\bar{l}_k$ .



De ce fait les intégrales  $J_k$  et  $L_k$  sur la surface S sont non seulement les résultantes des défauts de volume dans le matériau situé à l'intérieur de S, mais aussi des défauts de surface (changés de signe) sur la partie de  $\Sigma$  située à l'intérieur de cette surface S.

Une autre façon de considérer cela est de noter qu'il n'y a pas de défauts dans le vide (la cavité) et de remplacer S par une surface S' où la partie dans la cavité est remplacée par la fraction  $\Sigma' \delta\epsilon\Sigma$  contenue dans S.

$$\begin{aligned}
 J_k \text{ sur } S' &= \int_V j_k \, dv \\
 &= \int_{\Sigma'} \bar{j}_k \, dv + \int_S \bar{j}_k \, dv
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{J_k = \int_V j_k \, dv + \int_\Sigma \bar{j}_k \, ds} \quad (22)$$

Si toute la cavité  $\Sigma$  était à l'intérieur de la surface d'intégration  $S$ , on aurait

$$J_k = \int_V j_k \, dv + \int_\Sigma \bar{j}_k \, ds$$

Passons maintenant à l'aspect continu de l'examen. L'indépendance exige que les intégrales  $J$  et  $L$  sur une surface quelconque ne contenant pas de singularités soit nul. Cette considération conduit à

$$\begin{cases} j_k = 0 \\ l_k = 0 \end{cases}$$

Pour que l'intégrale  $J_k$  soit indépendante de la surface d'intégration, il faut que dans le domaine considéré les défauts de volume  $j_k$  soient nuls. Pour que  $L_k$  soit indépendante de la surface considérée, il faut de plus que les couples défaut de volume  $l_k$  soient nuls.

Ceci s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = j_k = W_{,k} - \zeta_{ij} \epsilon_{ij,k} + X_i u_{i,k} \\ 0 = l_k = -e_{kmi} (\zeta_{ij} \epsilon_{mj} + \zeta_{ji} \epsilon_{jm} - u_m X_i) \end{cases}$$

En se limitant pour la suite de ce paragraphe au cas où les forces de volume sont nulles, ceci conduit à

$$dW = \zeta_{ij} \, d\epsilon_{ij}$$

c'est-à-dire que  $\zeta_{ij} \, d\epsilon_{ij}$  soit une différentielle totale dans l'espace, à l'instant  $t$  considéré.

Si l'on note qu'en un point, au cours du chargement, on a par définition

$$\delta W = G_{ij} \epsilon_{ij,t} \delta t$$

il est possible de généraliser dans un espace temps la relation

$$dW = G_{ij} d\epsilon_{ij}$$

et d'énoncer qu'il faut que  $G_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}$  soit une différentielle totale dans l'espace temps  $x_1, x_2, x_3, t$ .

Les différentes variantes de cette expression ont été largement développées dans [25], ce qui autorise à s'arrêter ici.

Une écriture utile de cette condition est qu'il faut que  $G_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}}$  où W ne dépend explicitement ni du temps t, ni du point (ou<sup>4</sup> particule)  $x_k$  considéré. Ceci impose que le solide soit élastique, homogène avec des propriétés ne dépendant pas du temps. La condition de nullité de  $l_k$  entraîne de plus l'isotropie.

Ceci explique pourquoi seule l'élasticité non linéaire a jusqu'ici été considérée puisqu'elle était nécessaire à la fameuse indépendance du contour, et pourquoi la plasticité a été assimilée à de l'élasticité. Cependant, cette assimilation entraîne certaines difficultés. Tout d'abord, se rencontrent les difficultés liées aux déchargements pour lesquels cette assimilation n'est plus admissible (c'est le cas lorsque la fissure se propage). Ensuite se présentent les cas où les déformations, ou plutôt les rotations sont notables (c'est le cas au voisinage d'un front de fissure). Ces dernières difficultés méritent quelque attention.

Sauf cas où les déformations et rotations sont faibles, ce qui a été écrit n'est valable que si  $\epsilon_{ij} = u_{i,j}$  et  $G_{ij} = \theta_{ij}$  tenseur de BOUSSINESQ. Or il ne semble pas que, du fait de la rotation on puisse exprimer les équations habituelles de la plasticité (PRANDTL-REUSS) par des équations d'élasticité dans le système présent [31]. Il en résulte donc dans la zone du front de fissure où les rotations et déformations sont grandes, l'apparition

de défauts de volume [37].

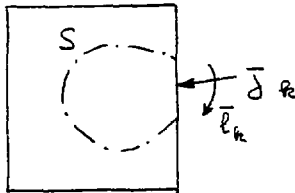
XI - ASPECT LOCAL DES CRITERES FONDES SUR LES INTEGRALES (DE CONTOUR) DE SURFACE

Les considérations précédentes sont exclusivement fondées sur la géométrie et sur les lois de la statique. Elles sont très insuffisantes pour définir un critère de rupture qui ne peut être fondé que sur la réalité expérimentale et non sur l'imagination.

Cependant, elles peuvent servir à clarifier la signification de certains des critères proposés, tel que celui utilisant l'intégrale J. Les intégrales de ce genre s'étant révélées être la somme de défauts  $j_k, \bar{j}_k, l_k, \bar{l}_k$ , il est indéniable que le rôle des défauts et de leur répartition doit être examiné dans le cadre du critère de l'intégrale J. En allant plus loin, il peut être envisagé d'écrire le critère en utilisant les défauts et notamment ceux qui sont situés près du front de fissure.

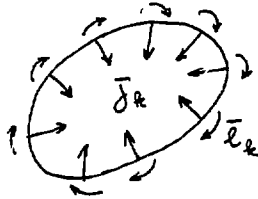
Comme il a été vu précédemment, une surface libre est une surface de discontinuité sur laquelle s'exerce des défauts de surface  $\bar{l}_k$  et  $\bar{j}_k$ . Ceci peut s'entendre de deux façons différentes. D'une part, il y a bien discontinuité entre le matériau et le vide avec un saut W du travail reçu et  $u_i$  du déplacement. D'une autre façon, l'équilibre des défauts dans un volume de matériau partiellement limité par la paroi de la pièce exige que celle-ci soit le siège d'une répartition de défauts

$$\begin{cases} \bar{j}_k = - W n_k + T_i u_{i,k} \\ \bar{l}_k = - e_{kij} T_i u_j \end{cases}$$



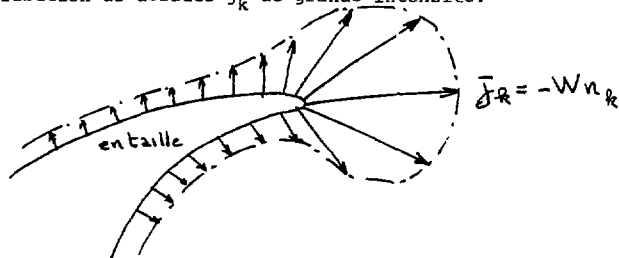
Il peut donc être affirmé que sur la surface d'un corps matériel s'exerce des défauts de surface  $\vec{j}_k$  (vecteurs) et  $\vec{l}_k$  (couples) dont l'ensemble est en équilibre avec les défauts de volume (ce qui veut simplement dire que ce qui s'applique à une fraction du solide, s'applique à sa totalité). Si  $n_k$  est la normale extérieure et  $\vec{x}_i$  la force de surface appliquée, on a sur la surface du corps

$$\begin{aligned} \vec{j}_k &= -W n_k + \vec{x}_i u_{i,k} \\ \vec{l}_k &= -e_{kij} \vec{x}_i u_j \end{aligned} \quad (23)$$



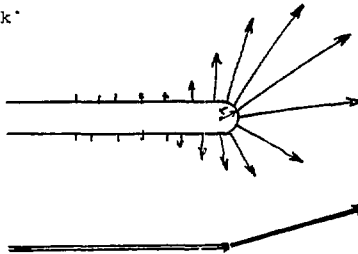
Dans les parties de la surface où il n'y a pas de forces extérieures appliquées, et dans celles où le déplacement est nul, il ne reste qu'un vecteur défaut de surface, proportionnel à la densité et dirigé suivant la normale intérieure. Par la suite, sauf indication spéciale, il ne sera considéré que les surfaces libres.

Lorsque le corps présente une entaille, il est bien connu qu'au fond de cette entaille il existe des concentrations de déformations qui entraînent des concentrations de densité de travail reçu  $W$ . En conséquence, le fond de cette entaille est le siège d'une distribution de défauts  $\vec{j}_k$  de grande intensité.



L'intégrale  $J_k$  autour de ce fond de fissure est constituée en grande partie par cette distribution de défaut. Si la valeur de cette intégrale peut être considérée dans l'énoncé d'un critère de rupture, il est indéniable que la distribution des défauts  $\bar{j}_k$  au fond de l'entaille doit jouer le rôle essentiel dans ce critère, puisqu'ils représentent la part de  $J_k$  concernant la zone critique de fond d'entaille. Il s'en suit qu'il est très probablement préférable d'énoncer le critère sur la base de cette distribution locale des défauts au voisinage du fond d'entaille. Bien entendu, cela implique les défauts de surface  $\bar{j}_k$  à ce fond d'entaille, mais peut aussi impliquer une distribution de défauts de volume  $j_k$  dans une zone de dégradation (process zone) située au voisinage de ce fond d'entaille.

Le cas d'une fissure peut être considéré comme la limite du cas précédent où le fond de l'entaille devient si vif que la densité de travail reçu  $W$  y devient infini. La répartition des défauts de surface  $\bar{j}_k$  tend alors vers une distribution linéaire de défauts  $\bar{j}_k$  le long de la fissure, ce qui introduit la notion de défaut de ligne  $\bar{j}_k$ .

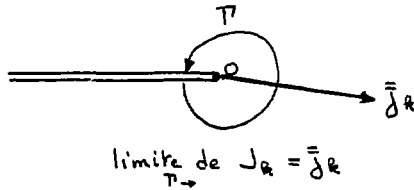


$$\bar{j}_k = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\#} \bar{j}_k d\delta$$

Il est sans doute inutile de faire remarquer que le cas de la fissure, c'est-à-dire d'une entaille dont le fond est vif (rayon nul) n'est pas un cas physique réel, mais plutôt une simplification. Le rayon n'est jamais nul, mais seulement très faible, et le défaut de ligne  $\bar{j}_k$  n'est que la représentation simple d'une pointe dans la distribution des défauts de surface  $\bar{j}_k$ . Ceci est très analogue à l'utilisation de forces ponctuelles (ou linéaires) en résistance des matériaux, chacun sait que la charge ponctuelle

sur une poutre est la représentation simple de forces réparties sur une très faible surface.

Une autre remarque concerne l'intégrale  $J_k$  elle-même ; il est évident que pour une surface d'intégration contenant le front de fissure et très voisine (infiniment voisine pour être plus rigoureux), l'intégrale  $J_k$  est précisément  $\bar{j}_k$ .



Toutes ces indications montrent clairement que les critères basés sur l'intégrale  $J_k$  doivent être démontés en critères fondés sur les éléments  $j_k$ ,  $\bar{j}_k$ , et  $\bar{j}_k$  de  $J_k$  où seuls ceux de ces éléments voisins du front de fissure seront à considérer.

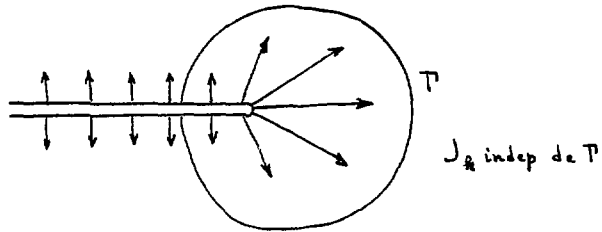
#### XII - DEFECTS DE SURFACE PARASITES - EFFET SUR L'INDEPENDANCE DE LA SURFACE D'INTEGRATION

Au paragraphe X, il a été montré (équation (22)) que l'intégrale  $J_k$  était la somme non seulement des défauts de volume situés dans le volume  $V$  limité par la surface d'intégration, mais aussi des défauts sur la surface de fissure contenue dans ce volume. Il avait été examiné l'effet des défauts de volume sur la dépendance de  $J_k$  vis à vis de  $S$  (surface, ou contour d'intégration), et il en avait été conclu que ces défauts de volume devaient être nuls pour que  $J_k$  ne dépende pas de la surface d'intégration (si l'on n'était intéressé qu'à l'une des composantes de  $J_k$ ,  $J_1$  par exemple, il aurait suffi que la composante correspondante des défauts de volume,  $j_1$  par exemple soit nulle).

Il a été établi que sur les surfaces libres les défauts de surface sont normaux à la surface, ce qui permet d'examiner maintenant leur effet sur la dépendance de  $J_k$ .

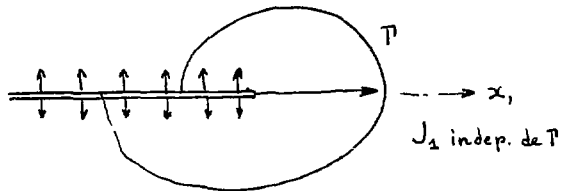


Le cas particulier presque toujours considéré en mécanique de la rupture, est celui d'une fissure plane soumise à un chargement symétrique vis à vis du plan de la fissure (cas dit de mode I) ou antisymétrique par rapport à ce plan (cas dit de mode II). En ce cas, la valeur de  $W$  est la même en des points correspondants des deux lèvres de la fissure, par conséquent les vecteurs défauts sur ces deux lèvres sont égaux en valeur absolue, mais de signe opposé. Leur effet sera nul sur la valeur de  $J_k$  si la surface  $S$  coupe franchement le front de fissure, c'est à dire n'a pas d'élément commun d'aire finie avec la surface des lèvres. Par conséquent



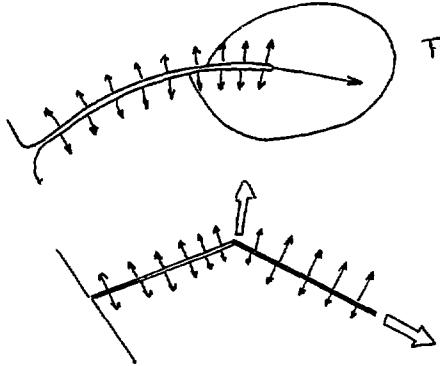
sous cette restriction  $J_k$  ne sera pas dépendant de la surface d'intégration (ou du contour) du fait de ces défauts de surface.

Par contre, si l'on supprime cette restriction concernant la surface d'intégration, seules les composantes de  $J_k$  situées dans le plan de la fissure (c'est-à-dire  $J_1$  et  $J_3$  si le plan de la fissure est perpendiculaire à  $x_2$ ) peuvent ne pas dépendre de la surface d'intégration

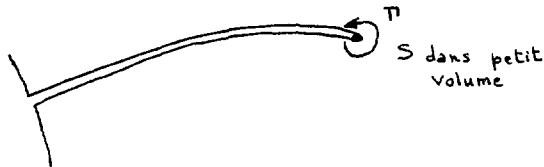


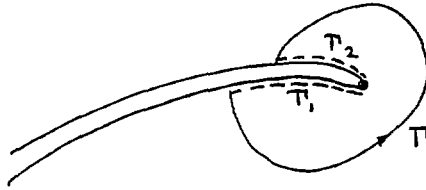
ce résultat est dû à la normalité des  $\vec{j}_k$  et ne dépend donc pas du chargement.

Si la surface de fissure n'est pas plane, aucune de ces conclusions ne reste valable et les défauts sur les lèvres de la fissure entraîneront une dépendance de  $J_k$  vis à vis de la surface d'intégration.



Compte tenu de ce qui a été exposé précédemment, comme seuls sont à prendre en compte les défauts au front de fissure, ou au voisinage du fond d'entaille, il convient d'éliminer les défauts situés sur les parties courantes de lèvres de fissure, puisqu'ils n'ont pas de signification pour la rupture. La déduction de ces défauts parasites conduit soit à ne considérer que des surfaces d'intégration très voisines du fond de fissure, soit à déduire directement la valeur de  $\bar{J}_k = -Wn_k$  le long des lèvres de la fissure.





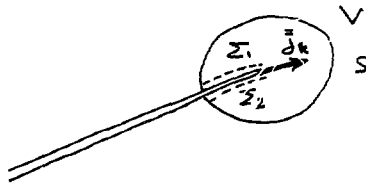
$$J_{\text{utile}} = \bar{j}_k = J_{\text{sur } \Gamma} - \int_{\Gamma_1} \bar{j}_k ds - \int_{\Gamma_2} \bar{j}_k ds$$

### XIII - DEFAUTS DE VOLUME PARASITES

Des intégrales comme  $J_k$ , seuls les défauts situés près du fond de fissure peuvent avoir une signification en tant que critère, et les autres ne sont que des parasites. Dans le chapitre précédent, il a été indiqué qu'il fallait éliminer les défauts parasites de surface. Il existe également des défauts parasites de volume qu'il convient de retirer.

De principe, il faut déduire de  $J_k$  la résultante des défauts de volume contenus dans le volume limité par la surface d'intégration

$$J_k(\text{utile}) = \bar{j}_k = J_k(\text{sur } S) - \int_V j_k dv - \int_{\Sigma_1 \Sigma_2} \bar{j}_k ds \quad (24)$$



il est utile de donner quelques expressions des défauts parasites de volume à déduire, pour différents cas pratiques.

### Forces de volume

Leur effet sur la valeur de  $J_k$  est d'après (2) égal à

$$X_i u_{i,k}$$

Il suffit donc de déduire la quantité correspondante

$$J_k(\text{utile}) = J_k(\text{sur } S) - \int_V X_i u_{i,k} dv$$

### Déformations initiales

Il s'agit de ce qui est désigné fréquemment sous le nom de contraintes résiduelles (autocontraintes, etc...) et qui correspond en fait à ce que, avant mise en charge, il existe déjà un champ de déformation  $\varphi_{ij}$  qui par conséquent n'aura d'effet direct sur la valeur de  $W$ .

Ces déformations provoquent un défaut volumique égal à  $-\int_V \varphi_{ij,k} dv$  correspondant au terme de déformation dans l'équation (2). Par suite,

$$J_k(\text{utile}) = J_k(\text{sur } S) + \int_V \varphi_{ij,k} dv$$

### Cas particulier de dilatations thermiques

Ces dilatations ont l'effet de déformations initiales  $\varphi_{ij}$  et sont à traiter de même. Si le matériau est homogène et isotrope et présente un coefficient  $\alpha$  de dilatation constant

$$\varphi_{ij} = \alpha \delta_{ij} t$$

$$\varphi_{ij,k} = \alpha \delta_{ij} t_{,k}$$

et il faut ajouter à la valeur de  $J_k$  calculée sur  $S$  l'intégrale de volume

$$\alpha \int_V \delta_{ii} t_{,k} dv$$

Cette méthode a déjà été suggérée pour des matériaux élastiques [29, 30, 38].

Inhomogénéité d'un solide élastique

Par solide élastique, il faut entendre un matériau possédant une fonction  $W$  dépendant de la déformation telle que

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}}$$

Si le matériau n'est pas homogène, la densité d'énergie dépend directement des coordonnées.

$$W(\epsilon_{ij}, x_k)$$

lors de la dérivation par rapport à  $x_k$ , deux éléments seront à considérer, la variation directe et la variation due à celle de  $\epsilon_{ij}$ . En effet,  $W_{,k}$  est analogue à la dérivée particulière

$$W_{,k} = \frac{DW}{Dx_k} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \epsilon_{ij,k} + \frac{\partial W}{\partial x_k}$$

Il s'ensuit donc que

$$j_k = W_{,k} - \sigma_{ij} \epsilon_{ij,k} = \frac{\partial W}{\partial x_k}$$

Une application directe peut être la variation de  $W$  avec la température, provoquée par exemple par la variation du module d'élasticité  $E$

$$W = E \text{ fonction de } \epsilon_{ij}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_k} = \frac{dE}{dt} t_{,k} \text{ fonction de } \epsilon_{ij}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_k} = \frac{W}{E} \frac{dE}{dt} t_{,k}$$

d'où

$$j_k = \frac{W}{E} \frac{dE}{dt} t_{,k}$$

XIV - CONCLUSIONS

- ① Les intégrales de surface  $J_k$  et  $L_k$  (intégrales de contour dans le plan) peuvent être définies sans référence à l'élasticité du matériau.
- ② Elles sont les résultantes d'une répartition de vecteurs défauts  $j_k$  et  $\bar{j}_k$  et de couples défauts  $l_k$  et  $\bar{l}_k$  définis sans référence à l'élasticité du matériau.
- ③ Comme seul le métal au voisinage du front de fissure est concerné par la rupture, les critères utilisant les intégrales comme  $J$  doivent être basés sur les vecteurs et couples défauts au voisinage du front de fissure. Cela conduit à éliminer les défauts parasites qui peuvent être inclus dans l'intégrale  $J_1$  (exemple des contraintes thermiques).
- ④ Lors d'une translation  $\delta w_k$  et d'une rotation  $\delta \omega_k$  (infinitement petites) d'un front de fissure, le travail des forces intérieures (contraintes) et des forces extérieures de surface est égal à  $\delta P = J_k \delta w_k + L_k \delta \omega_k$
- ⑤ Ceci peut être généralisé (équation 20), lors d'un déplacement virtuel à la fois spacial et matériel, la somme de travail des forces intérieures, des forces extérieures et du travail (matériel) des vecteurs défauts et couples défauts est nulle. Vecteurs défauts et couples défauts peuvent être considérés comme des "forces généralisées".

A N N E X ERESULTANTES DES DEFAUTS

Les défauts de volume sont exprimés par

$$j_k = w_{,k} - \overset{\curvearrowright}{G}_{ij} \varepsilon_{ij,k} + X_i u_{i,k}$$

Les moments défauts de volume par

$$l_k = - e_{kmi} [\overset{\curvearrowright}{G}_{ij} \varepsilon_{mj} + \overset{\curvearrowright}{G}_{ji} \varepsilon_{jm} - u_m X_i]$$

Les calculs seront effectués en double, chaque volet correspondant à une définition différente de la déformation :

- pour les petites déformations, la définition classique sera  $2 \varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$ , tenseur symétrique auquel correspond un tenseur symétrique de contrainte  $\overset{\curvearrowright}{G}_{ij}$  tel que la variation de densité d'énergie soit donnée par  $\delta W = \overset{\curvearrowright}{G}_{ij} \delta \varepsilon_{ij}$ ,

- pour les grandes déformations, il sera adopté le gradient du déplacement  $\varepsilon_{ij} = u_{i,j}$  auquel correspond le tenseur de BOUSSINESQ (ou des contraintes nominales)  $\overset{\curvearrowright}{G}_{ij}$  qui satisfait lui aussi à  $\delta W = \overset{\curvearrowright}{G}_{ij} d\varepsilon_{ij}$

Dans les deux cas les équations d'équilibre s'écrivent

$$\begin{cases} \overset{\curvearrowright}{G}_{ij,j} + X_i = 0 \\ \overset{\curvearrowright}{G}_{ij} n_j = \bar{X}_i \end{cases}$$

Préalablement au calcul des réactions, il est utile d'établir un lemme concernant le défaut de volume  $j_k$ , ainsi qu'un lemme concernant les moments défauts.

# 1. LE DEFAUT DE VOLUME EST LA DIVERGENCE D'UN TENSEUR

## 1.1. Grandes déformations

$$j_k = W_{,k} - \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} u_{i,jk} + X_i u_{i,k}$$

en utilisant la relation usuelle,

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{ij} u_{i,jk} = (\overset{\circ}{\epsilon}_{ij} u_{i,k})_{,j} - \overset{\circ}{\epsilon}_{ij,j} u_{i,k}$$

on obtient

$$j_k = W_{,k} - (\overset{\circ}{\epsilon}_{ij} u_{i,k})_{,j} + (\overset{\circ}{\epsilon}_{ij,j} + X_i) u_{i,k}$$

qui, en tenant compte de l'équation d'équilibre peut s'écrire

$$j_k = \ominus_{kj,j} \quad (A1)$$

$$\ominus_{kj} = W \delta_{kj} - \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} u_{i,k} \quad (A2)$$

## 1.2. Faibles déformations

$$j_k = W_{,k} - \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} \epsilon_{ij,k} + X_i u_{i,k}$$

si l'on note que par définition

$$\epsilon_{ij} = u_{i,j} - \frac{u_{i,j} - u_{j,i}}{2}$$

le second terme du second membre s'écrit

$$\overset{\circ}{\epsilon}_{ij} \epsilon_{ij,k} = \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} u_{ij,k} - \overset{\circ}{\epsilon}_{ij} \frac{u_{i,j} - u_{j,i}}{2} ,k$$

dont le dernier terme, produit d'un tenseur symétrique  $\overset{\circ}{\epsilon}_{ij}$  par un tenseur antisymétrique est nul, ce qui ramène au cas précédent.



2. LE MOMENT DE VOLUME2.1. Grandes déformations

$$l_i = - e_{ijk} (\sigma_{jp}^{\sim} u_{k,p} + \sigma_{pj}^{\sim} u_{p,k} - u_k X_j)$$

Le premier terme du second membre peut s'écrire

$$\sigma_{jp}^{\sim} u_{k,p} = (\sigma_{jp}^{\sim} u_k)_{,p} - \sigma_{jp,p}^{\sim} u_k$$

ce qui permet d'écrire

$$l_i = - e_{ijk} [(\sigma_{pj}^{\sim} u_{p,k} - u_k (X_j + \sigma_{jp,p}^{\sim})) + (\sigma_{jp}^{\sim} u_k)_{,p}]$$

qui, compte tenu de l'équation d'équilibre et de la symétrie de  $\delta_{ij}$ , devient :

$$l_i = e_{ijk} [+\delta_{jk} - \sigma_{pj}^{\sim} u_{p,k} - (\sigma_{jp}^{\sim} u_k)_{,p}]$$

$$l_i = + e_{ijk} \left( \ominus k_j + (e_{ijk} \sigma_{jp}^{\sim} u_k)_{,p} \right) \quad (A3)$$

2.2. Petites déformations

$$l_i = - e_{ijk} (\sigma_{jp}^{\sim} \varepsilon_{kp} + \sigma_{pj}^{\sim} \varepsilon_{pk} - u_k X_j)$$

la symétrie de  $\sigma_{ij}^{\sim}$  et  $\varepsilon_{ij}$  permet d'écrire

$$\begin{aligned} \sigma_{jp}^{\sim} \varepsilon_{kp} + \sigma_{pj}^{\sim} \varepsilon_{pk} &= 2 \sigma_{jp}^{\sim} \varepsilon_{kp} = \sigma_{jp}^{\sim} (u_{k,p} + u_{p,k}) \\ &= \sigma_{jp}^{\sim} u_{k,p} + \sigma_{pj}^{\sim} u_{p,k} \end{aligned}$$

ce qui ramène au cas précédent

3. RESULTANTE DES  $j_k$ 

Dans un volume sans surface de discontinuité, où il n'y a que des défauts de volume, le calcul de la résultante dérive directement de

$$j_k = \ominus_{kj,j}$$

$$\int_V j_k \, dv = \int_V \ominus_{kj,j} \, dv = \int_S \ominus_{kj} n_j \, dv$$

d'après le théorème de la divergence

$$\ominus_{kj} n_j = (W\delta_{kj}) n_j = \mathcal{G}_{ij} n_j u_{i,k}$$

$$\ominus_{kj} n_j = Wn_k - T_i u_{i,k}$$

$$\boxed{J_k = \int_V j_k \, dv = \int_S (Wn_k - T_i u_{i,k}) \, ds} \quad (A4)$$

$$T_i = \mathcal{G}_{ij} n_j$$

S'il y a des surfaces de discontinuité, sièges de défauts surfacique  $\Delta j_k$ , le calcul doit être fait dans chaque partie de volume limitée soit par ces surfaces, soit par les frontières du volume étudié. Lors de l'addition des valeurs correspondantes, la différence des termes  $\int (Wn_k - T_i u_{i,k}) \, ds$  sur les surfaces de discontinuité introduira directement les défauts de surface de discontinuité.

$$\boxed{J_k = \int_V j_k \, dv + \int_\Sigma \Delta j_k \, ds} \quad (A5)$$

4. MOMENT RESULTANT DES  $j_k$  ET DES  $l_k$ 

Le moment résultant des défauts autour de l'origine est la somme de deux parties :

- La résultante des couples défauts

$$\int_V l_k \, dv$$

- La résultante des moments des vecteurs défauts

$$\int_V e_{kim} x_i j_m \, dv$$

La première partie, compte tenu de l'expression du paragraphe 2 s'écrit :

$$\int_V [e_{kim} \textcircled{-} m_i - (e_{kim} \textcircled{-} \epsilon_{ip}^2 u_m)_{,p}] \, dv$$

que le théorème de divergence ramène à

$$\int_V [e_{kim} \textcircled{-} m_i] \, dv - \int e_{kim} T_i u_m \, ds$$

$$T_i = \textcircled{-} \epsilon_{ij}^2 n_j$$

La seconde partie, compte tenu du paragraphe 1 s'écrit

$$\int_V e_{kim} x_i \textcircled{-} m_{j,j} \, dv$$

or

$$x_i \textcircled{-} m_{j,j} = (x_i \textcircled{-} m_j)_{,j} - x_{i,j} \textcircled{-} m_j$$

$$= (x_i \textcircled{-} m_j)_{,j} - \textcircled{-} m_i$$

permet d'écrire

$$\int_V [e_{kim} (x_i \textcircled{-} m_j)_{,j} - e_{kim} \textcircled{-} m_i] \, dv$$

que le théorème de la divergence amène à :

$$\int_S (e_{kim} x_i \textcircled{-} m_j n_n) \, ds - \int_V e_{kim} \textcircled{-} m_i \, dv$$

si l'on note que

$$e_{kim} x_i \textcircled{-} m_j n_j = e_{kim} x_i (W_n - T_j u_{j,m})$$

la somme des deux parties donne

$$\begin{aligned} L_k &= \int_V (l_k + e_{kim} x_{ijm}) dv \\ L_k &= \int_S (e_{kim} x_i (Wn_m - T_j u_{j,m}) + e_{kim} T_i u_m) ds \end{aligned} \quad (A6)$$

$$T_i = \mathcal{C}_{ij} n_j$$

Ceci pour un volume sans surfaces de discontinuité. Si ces derniers existent, le procédé du paragraphe précédent permet d'introduire les moments des défauts aux discontinuités.

REFERENCES

- [1] ASME - "Boiler and Pressure Vessel Code - Section III - Nuclear Components - Appendix G - Protection Against Non Ductile Failure" ASME 1977
- [2] ASME "Boiler and Pressure Vessel Code - Section XI - Rules for inservice inspection of nuclear power plant components - Appendix A - Analyse of Flow Indications" ASME 1977
- [3] GRIFFITH A.A., " The phenomenon of Rupture and Flow in Solids" Phil. Trans. Roy. Soc. (London) Ser. A 221 - 1920
- [4] IRWIN G. R., "Fracture Dynamics" in "Fracturing of Metals" Amer. Soc. of Metals, Cleveland 1948
- [5] IRWIN G. R., "Analysis of Stresses and Strains near the end of a crack traversing a plate " J. of Appl. Mech. Sept. 1957
- [6] SIH G. C., LIEBOWITZ J. , "Mathematical Theories of Brittle Fracture" in "Fracture" (Ed. LIEBOWITZ) Academic Press - New York 1968.
- [7] GUPTA G.D. , "Strain Energy Release Rate for Mixed Mode Crack Problem" paper 76-WA/PVP-7 ASME 1977
- [8] SIH G. C. "Methods of Analysis and Solutions of Cracks Problems" Noordhoff Int. Pub. Leyden 1973
- [9] WU C.H., "Fracture Under Combined Loads by Maximum-Energy Release-Rate Criterion" Jour. Of Appl. Mech. Vol 45, p 553 Sept. 1978
- [10] BURDEKIN F. M., and STONE D.E. "The Crack Opening Displacement Approach to Fracture Mechanics in Yielding Materials" Journ. Strain Analysis 1(2) 1966.
- [11] WITT F. J., "Equivalent Energy Procedures for Predicting Gross Plastic Fracture" USAEC Report ORNL-TM-3172, 1970.

- [12] MERKLE, J.G., "Development of the Tangent Modulus Method of Elastic-Plastic Fracture Analysis" in "Fracture Mechanics Applications : Implications of Detected F law" doc. IAEA-189 - Int Atom. Energy Ag. Vienna 1976.
- [13] DOWLING A.R. and TOWNLEY C.H.A., "The effect of Defects on Structural Failure : A Two Criteria Approach" Int. Journ. of Pressure Vessels and Piping. Vol 3 n° 2 - April 1975.
- [14] NEALE B.K. and TOWNLEY C.H.A., " Comparaison of Elastic Plastic Fracture Mechanics Criteria" Int. Journ. of Pressure Vessels and Piping Vol 5 n° 3 July 1977.
- [15] HARISSON R.P. and MILNE I., " A Unified Approach to Failure Assessment of Engineering Structures" in "Fracture Mechanics in Engineering Practice" (Ed. P. STANLAY) pp 69-82 - Applied Science Pub. LONDON 1977.
- [16] RICE J. R.; "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks" J. of Appl. Mech., June 1968.
- [17] BEGLEY J.A. and LANDES J.D. "In Fracture Toughness ASTM STP 514" American Society of Testing of Materials, 1972.
- [18] TURNER C.E. and BURDEKIN FM. "Review of current status of yielding fracture mechanics" Atomic Energy Review 1974, 12, n° 8
- [19] BILBY B.A., "Fracture" in "Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials" ed DMR TAPLIN Vol. 4. Pergamon Press - New York, 1977, page 1 (Conference Edition University of Waterloo Press).
- [20] ESHELBY J.D. "The energy momentum tensor in continuum mechanics" in Inelastic Behaviour of Solids (Kanninen Ed.) Mc Graw Hill, New York, 1970.
- [21] RICE J. R. " in "FRACTURE" (ed. H. LIEBOWITZ) Academic Press (1968) p 191-311

- [22] ESCHELBY J.D., "The elastic momentum tensor"  
J. of Elasticity Vol 5 n° 3 - 4 Nov. 1975
- [23] BILBY B.A. "Energy Balance Concept in Fracture Mechanics  
and their Formulation by Integrals" Advanced Seminar on Frac-  
ture Mechanics - October 1975 - CCE - ISPRA
- [24] ROCHE R.L., "Analyse de Mécanique de la rupture par éléments  
finis. Sur la signification des intégrales J et analogues"  
Note CEA N 1807 - Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay -  
Juillet 1975.
- [25] BUI H.D., "Approximate path independant integrals in the  
plane problems of crack and associated antiplane shear  
problems" Archives of Mechanics - 28 - pp 649-659  
Warszawa 1976
- [26] ROCHE R., "Dépendance vis-à-vis de la surface d'intégration  
des intégrales caractéristiques de la mécanique de la rup-  
ture". Note CEA N 1829 - Centre d'Etudes Nucléaires de  
Saclay, Novembre 1975.
- [27] ROCHE R., "Quelques commentaires sur l'utilisation de l'in-  
tégrale J" (with English translation) Note CEA N 1933 -  
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay 1976.
- [28] ROCHE R.L., "Some comments about the  $J_1$  integral criterion in  
Post Yield Fracture Mechanics" G3/2 "Structural Mechanics  
in Reactor Technology - Transactions of the 4 Int. Conf.  
SMIRT. San Francisco August 1977" (Edit. T.A. JEAGER and  
B.A. BOGLEY) North Holland Publ. Cy Amsterdam. 1977
- [29] ROCHE R.L., "Some comment on the use of J criterion in elasto-  
plastic fracture mechanics" Specialist Meeting in Elastic  
Plastic Mechanics - Daresbury (U.K.) May 1978 - OECD - NEA  
CSNI
- [30] ROCHE R.L., "Analysis of structures Containing Cracks - Some  
comments on the  $J_1$  Integral Criterion"  
Intern. Journ. of Pressure Vessels and Piping Vol 7 (jan.1979)  
n° 1.

- [31] HILL R. "Some basic principles in the mechanics of solids without natural time". J. Mech Phys. Solids 7. 1959
- [32] KNOWLES J.K. and STERBERG E. "On a class of conservation laws in linearized and finite elasto-statics"  
Archive for rational mechanics and analysis, vol. 44, n° 3  
1972.
- [33] BUDIANSKY E. and RICE J.R. "Conservation laws and energy release rates" J. of Appl. Mech., March 1973
- [34] LICHNEROWICZ "Elements de calcul tensoriel" pp 202-204  
Armand Colin - Paris 1950
- [35] COSSERAT E. et F. "Théorie des corps déformables"  
Hermann - PARIS 1909
- [36] CASAL P. "Interpretation of the RICE Integral in continuum mechanics" Int. Journ. of Engineering Science - Vol. 16,  
nb 5, pp 335 - 347
- [37] MAC MEEKING R. M., "Path dependance of the J integral and the Role of J as a parameter Characterizing the Near Tip Field" in "Fracture Growth and Fracture" ASTM-STP 631 (ASTM 1977)
- [38] AINSWORTH R.A., NEALE B.K., PRICE R.H., "Fracture behaviour in the presence of thermal strains" Conf.on Tolerance of Flows in Pressurized Components. The Inst. of Mech.Eng. London. May 1978
- [39] REICH, M., ESTERGAR E. P., "Application of Fracture Mechanics Methods in Safety Analysis of Piping Components in Subcreep and Creep Behaviour" - Nucl. Engineering and Design 51  
(1979) pp 177-231



*Achevé d'imprimer*  
par  
le CEA, Service de Documentation, Saclay  
Juillet 1979

**DEPOT LEGAL**  
3ème trimestre 1979

*La diffusion des rapports et bibliographies du Commissariat à l'Energie Atomique  
est assurée par le Service de Documentation, CEN-Saclay, B.P. n° 2,  
91190 Gif-sur-Yvette (France)*

*Reports and bibliographies of the Commissariat à l'Energie Atomique are available  
from the Service de Documentation, CEN-Saclay, B.P. n° 2,  
91190 Gif-sur-Yvette (France)*

*Edité par  
le Service de Documentation  
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay  
Boîte Postale n° 2  
91190 - Gif-sur-YVETTE (France)*