PPGM-L 161-77

PERSAMAAN GELOMBANG ATOM HIDROGEN

Suwito

BADAN TENAGA ATOM NASIONAL
PUSAT PENELITIAN TENAGA ATOM GAMA
YOGYAKARTA — INDONESIA

We regret that some of the pages in the microfiche copy of this report may not be up to the proper legibility standards, even though the best possible copy was used for preparing the master fiche.

Fisika

Fisika Atom dan Molekul

PPGM - L 161 - 77

PERSAMAAN GELOMBANG ATOM HIDROGEN

Suwito

1977

BADAN TENAGA ATOM NASIONAL
Pusat Penelitian Tenaga Atom Gama
Jl. Babarsari Kotakpos 8, Telepon 3661
YOGYAKARTA - INDONESIA

A B S T R A K

Penghitungan tingkat-tingkat tenaga atom hidrogen dengan menggunakan teori-teori Bohr, Schroedinger dan Dirac ditinjau kembali. Hasilnya dibandingkan dengan hasil dari teori persamaan gelombang berkomponen tak-berhingga yang dikembangkan akhir-akhir ini. Kesimpulannya dapat dinyatakan bahwa teori yang terakhir ini lebih sempurna dibandingkan teori yang pertama untuk dikenakan pada sistim komposit.

A B S T R A C T

The calculation of the energy levels of the hydrogen atom using Bohr, Schroedinger and Dirac theories is reviewed. The result is compared with that obtained from infinite component wave equations theory which developed recently. The conclusion can be stated that the latter theory is better to describe the composit system than the former.

D A F T A R   I S I

	A B S T R A K	ii
	D A F T A R I S I	iii
I.	PENDAHULUAN	1
II.	TEORI ATOM BOHR	4
III.	TEORI SCHROEDINGER DAN TEORI DIRAC	10
	Teori Schroedinger	10
	Teori Dirac	15
IV.	PERSAMAAN GELOMBANG BERKOMPONEN TAK-BERHINGGA	25
V.	KESIMPULAN	39
	DAFTAR PUSTAKA	41
	APPENDIX	42

PENDAHULUAN

Atom yang paling sederhana diantara atom-atom yang ada di alam adalah atom hidrogen. Ia hanya terdiri dari dua komponen saja yaitu sebuah proton sebagai inti atom dan sebuah elektron yang berada di sekitar inti tersebut. Secara klasik elektron dibayangkan bergerak mengelilingi proton pada lintasan-lintasan tertentu.

Karena gas hidrogen relatif mudah dihasilkan, maka experimen-experimen dengan zat tersebut telah banyak dikerjakan bahkan sebelum 1900. Spektroskopi sinar-sinar yang dipancarkan atom hidrogen bila ia ditempatkan dalam tabung lucutan *discharge* sudah banyak dikerjakan orang. Balmer (1885) mengukur dengan teliti angka gelombang *(wave number)* Spektrum sinar yang dipancarkan oleh atom hidrogen. Ia mendapatkan relasi sebagi berikut :

$$\frac{1}{\lambda} = \sigma = \frac{\nu}{c} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{m^2}\right),\ m > 2,\ 3, \qquad (1)$$

dimana R suatu konstanta yang dinamakan konstanta Rydberg, c kecepatan sinar dalam ruang vakum, dan ν frekwensinya. Rytz yang juga bekerja dalam bidang spektroskopi sinar yang dipancarkan oleh atom, menemukan bahwa sesuatu angka gelombang $\frac{1}{\lambda}$ dapat diperoleh dari selisih dua suku deret $\frac{R}{n^2}$, di mana bilangan bulat positif. Jadi secara umum sesuatu angka gelombang dapat dirumuskan sebagi berikut :

$$\sigma_{mn} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),\ m > n \qquad (2)$$

Untuk n = 2 kita peroleh kembali rumus Balmer di atas.

Dengan berdasar data-data experimentil ini (lihat rumus 2) kita dapat membayangkan bahwa atom-atom mempunyai tingkat-tingkat te-

tenaga. Bila atom pindah dari tingkat yang lebih tinggi ke tingkat yang lebih rendah, ia akan memancarkan radiasi kuantum yang berupa foton sinar yang bertenaga sesuai dengan selisih tenaga kedua tingkat tersebut. Hal ini sesuai dengan prinsip kuantum Planck & Einstein mengenai sinar (foton). Selisih tenaga yang dipancarkan sebagai sinar adalah sebesar :

$$h\,\nu_{mn} = E_m - E_n = Rhc\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),\ m > n \tag{3}$$

Dari persamaan ini jelaslah bahwa suatu tingkat tenaga atom hidrogen dapat dinyatakan dengan rumus di bawah ini :

$$E_n = -Rhc/n^2,\ n = 1,\ 2, \tag{4}$$

Di dalam tulisan ini akan diuraikan lagi usaha para ahli fisika untuk menghitung tingkat-tingkat tenaga (spektrum massa) atom hidrogen beserta koreksi-koreksinya. Pertama-tama akan diterangkan teori Bohr, kemudian teori Sommerfeld yang melengkapi teori Bohr dengan koreksi relativistik. Teori Schroedinger (persamaan gelombang non-relativistik) dan teori Dirac (persamaan gelombang relativistik) juga akan dijelaskan. Tetapi berhubung teori-teori itu sudah jadi (*established*), maka akan kita bicarakan secara singkat, tanpa mengabaikan penjabaran metematis dari apa yang kita tuju yaitu spektrum tenaga atom hidrogen. Persamaan gelombang berkomponen tak berhingga yang merupakan teori baru yang non-perturbative akan dipakai untuk mencari spektrum massa atom hidrogen. Inilah yang menjadi tujuan pembicaraan kita. Teori baru ini sebenarnya disusun untuk dikenakan pada partikel-partikel yang berinteraksi kuat (*hadron*) seperti meson, proton, netron dan lain-lain. Tetapi sebelum dipakai ia harus dicoba dahulu. Dalam hal ini ia dipakai untuk mencari spektrum massa atom hidrogen. Kalau teori tersebut baik, ia harus memberikan hasil yang dapat dibandingkan dengan hasil dari teori yang sudah ada, artinya hasil dari teori baru itu harus lebih atau paling tidak sama baik atau sekurang-kurangnya mendekati hasil teori yang sudah jadi.

II. TEORI ATOM BOHR

Ide teori kuantum dilahirkan oleh Planck pada permulaan abad ini.

Pokok-pokok teorinya ada dua yaitu

a. Suatu osilator hanya dapat berada diantara salah satu dari keadaan-keadaan kuantum yang diskrit. Setiap keadaan sesuai dengan tenaga tertentu yang dapat dimiliki.

b. Selama osilator berada dalam suatu keadaan, ia tidak memancarkan radiasi. Tetapi bila ia pindah dari keadaan yang satu ke keadaan yang lain dengan tenaga yang lebih rendah, maka tenaga yang hilang karena perpindahan itu akan dipancarkan dalam bentuk pulsa radiasi kuantum.

Ide kuantum ini dipakai oleh Bohr untuk mempelajari atom hidrogen dengan menggunakan model atom Rutherford. Bohr menganggap bahwa elektron yang bergerak dalam medan inti hanya dapat lintasan-lintasan tertentu saja, jadi tidak sembarang. Dalam lintasannya ini elektron tidak memancarkan radiasi (bertentangan dengan teori elektromagnetik klasik), jadi tenaganya konstan. Oleh karena itu dikatakan bahwa atom berada dalam keadaan stasioner. Tetapi ia menganggap bahwa bila elektron meloncat dari lintasan yang satu ke lintasan yang lain dengan tenaga yang lebih rendah maka akan dipancarkan radiasi yang mengandung tenaga sebesar selisih tenaga kedua lintasan tersebut. Radiasi ini berupa gelombang elektromagnetik (sinar) yang frekuensinya :

$$\nu = \frac{E_1 - E_2}{h} \qquad (5)$$

Dalam keadaan stasioner Bohr mensyaratkan bahwa impuls putar elektron P_ϕ merupakan kelipatan bulat dari $h/2\pi$, jadi kita dapat menulisnya sebagai berikut :

$$P_\phi = nh/2\pi \qquad n \text{ bilangan bulat positif} \tag{6}$$

Atau karena dalam keadaan stasioner lintasan elektron merupakan kurva yang tertutup kita dapat menyatakannya dalam bentuk integral seperti di bawah ini

$$\oint p_\phi \, d_\phi = nh \tag{7}$$

Berdasarkan anggapan di atas tingkat-tingkat tenaga atom hidrogen dapat dijabarkan dengan mudah. Hal ini juga berlaku bagi atom-atom yang hanya memiliki satu elektron saja, misal atom helium yang terionisir, atom lithium yang terionisir dua kali dan lain-lain.

Lintasan elektron mengelilingi inti dianggap lingkaran sehingga elektron mempunyai impuls putar

$$p_\phi = m\, r^2 \omega \tag{8}$$

Untuk menjamin kesetabilan elektron dalam lintasannya, maka haruslah gaya sentrifugal pada elektron akibat gerak lingkarnya sama dengan gaya tarik inti (gaya tarik elektrostatis).

$$m\, r\omega^2 = \frac{Z\, e^2}{r^2} \tag{10}$$

Eliminasi ω dari kedua persamaan (9) dan (10) memberikan rumus jarak lintasan elektron dari inti.

$$r = \frac{n^2\, h^2}{4\,\pi^2\, m\, e^2\, z} \tag{11}$$

Dari rumus (11) nyatalah bahwa elektron hanya dapat bergerak dalam lintasan-lintasan tertentu saja. Lintasan yang paling kecil berhubungan dengan n yang paling rendah yaitu n = 1.

Tenaga total elektron terdiri dari dua bagian yaitu tenaga gerak (kinetis) dan tenaga potensial (listrik). Bila kita perjanjikan tenaga potensial sama dengan nol untuk elektron berada di tak berhingga jauh, maka tenaga potensial elektron dalam medan inti diberikan oleh rumus

$$V = -\frac{Z e^2}{r} \tag{12}$$

Tenaga kinetisnya

$$T = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{Z e^2}{r} \tag{13}$$

di sini kita telah menggunakan persamaan (10). Dengan demikian kita peroleh tenaga total elektron

$$E = T + V = -\frac{Z e^2}{r} \tag{14}$$

atau

$$E_n = -\frac{2n^2 m e^4 Z^2}{n^2 h^2} \tag{15}$$

Untuk atom hidrogen Z = 1 sehingga tingkat-tingkat tenaga atom hidrogen :

$$E_n \quad -\frac{m e^4}{2 n^2 \hbar^2}, \qquad \hbar = h/2 \tag{16}$$

n disebut bilangan kuantum utama.

Persamaan (16) adalah rumus tingkat-tingkat tenaga atom hidrogen yang terkenal dengan nama rumus Bohr.

Dalam menjabarkan persamaan (15) atu (16), kita menganggap inti atom diam di dalam ruang. Sesungguhnya, walaupun inti atom jauh lebih berat dari pada elektron, ia juga bergerak bersama-sama elektron mengelilingi pusat massa dari sistim elektron inti atom tersebut. Oleh karena itu persamaan di atas perlu dikoreksi.

Bila r adalah jarak antara elektron dan proton sedangkan r_e dan r_p masing-masing jarak elektron dan proton ke pusat masa, maka

$$r_e = \frac{M\,r}{M + m} \quad \text{dan} \quad r_p = \frac{m\,r}{M + m} \tag{17}$$

Impuls putar total terhadap pusat massa yang merupakan jumlahan impuls putar elektron dan impuls putar inti besarnya sama dengan

$$m\,r_e^2\omega + M r_p^2\omega \left[\frac{m\,M^2}{(m + M)^2} + \frac{M\,m^2}{(m + M)^2}\right] r^2\omega$$

$$= \frac{m\,M}{m + M}\; r^2\omega \tag{18}$$

Besaran $\frac{m\,M}{m + M}$ yang mempunyai demensi massa disebut massa tereduksi elektron yang biasa ditulis dengan simbul μ. Sehingga impuls putar total dapat ditulis sebagai $\mu r^2\omega$. Kalau impuls putar ini kita bandingkan dengan impuls putar elektron (pers.8) ternyata keduanya mirip. Cuma saja untuk impuls putar total kita harus mengganti m dalam persamaan (8) dengan massa tereduksi elektron μ. Jadi untuk mengoreksi tingkat-tingkat tenaga atom hidrogen dalam rumus (16) kita cukup mengganti m dengan μ.

$$E_n = -\frac{\mu\ e^4}{2\ n^2\ \hbar^2} \tag{19}$$

Koreksi karena gerakan inti biasanya disebut koreksi gerak pental inti, dalam hal ini non-relativistik. Untuk koreksi pental yang relativistik sangat sulit menghitungnya, dan perlu digunakan teori yang lebih baik yaitu teori *gangguan* relativistik.

Spektrum tenaga atom hidrogen yang dinyatakan dengan rumus (16) atau (19) tidak menunjukkan adanya splitting tenaga, karena ia hanya ditentukan oleh satu bilangan kuantum n. Tetapi kenyataan spektroskopi menunjukkan bahwa tiap tingkat terdapat *splitting* (pemisahan) yang disebut pemisahan struktur halus. Sommerfeld berusaha menerangkan adanya pemisahan itu. Ia menduga bahwa hal ini disebabkan karena elektron dalam gerakannya mengelilingi inti, yang lintasannya dapat berupa elips atau lingkaran, bergerak dengan kecepatan relativistik. Dengan berpangkal pada dugaan ini ia menghitung tingkat-tingkat tenaga sebagai berikut [1] :

Tenaga total relativistik dari elektron diberikan oleh rumus

$$E = m\ c^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right)}_{\text{tenaga kinetis relativistik}} - \underbrace{\frac{e^2}{r}}_{\text{tenaga pot.}} \tag{20}$$

Impuls putar

$$p_\phi = \frac{m\ r^2 \omega}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{21}$$

seperti tenaga total besaran ini juga merupakan konstanta gerak. Dari syarat kuantisasi impuls putar kita dapat menuliskan :

$$\frac{m\, r^2 \dot{\phi}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{n_\phi\, h}{2\pi}, \qquad n_\phi = 1,\ 2, \tag{22}$$

atau

$$m\, r^2 \dot{\phi} = n_\phi\, \hbar \sqrt{1 - (v/c)^2} \tag{23}$$

Impuls putar radial dari elektron diberikan oleh rumus

$$p_r = \frac{m\, \dot{r}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \tag{24}$$

Impuls putar ini juga harus memenuhi syarat kuantisasi. Jadi

$$\oint p_r\, dr = n_r\, h \qquad n_r = 0,\ 1, \tag{25}$$

Persamaan-persamaan (20), (22), (24) dan (27) bersama-sama memberikan tenaga total elektron :

$$E = m\, c^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2/(n_r + (n_\phi^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}} \right) \tag{26}$$

di mana $\alpha = \dfrac{e^2}{\hbar\, c}$ yang disebut konstanta struktur halus. Dengan meng-

expansikan persamaan (26) dalam deret α dan menulis $n_r + n_\phi = n$, $n_\phi = k$ yang masing-masing disebut bilangan kuantum utama dan bilangan bilangan kuantum azimut, maka kita dapatkan tingkat-tingkat tenaga elektron :

$$E_{nk} = m\, c^2 - \frac{m\, e^4}{2\, n^2\, \hbar^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) + \ldots \right\} \tag{27}$$

Suku $m\, c^2$ adalah tenaga diam elektron, suku yang lain merupakan tingkat-tingkat tenaga elektron dalam atom.

III. TEORI SCHROEDINGER DAN TEORI DIRAC

Teori Schroedinger.

Tenaga total atom hidrogen yang terdiri dari proton dan elektron dapat kita tuliskan sebagai berikut :

$$H = E = \frac{p_e^2}{2\,m_e} + \frac{p_p^2}{2\,m_p} - \frac{e^2}{|\bar{r}_e - \bar{r}_p|} \qquad (28)$$

di mana p_e = impuls elektron, p_p = impuls proton, m_e = massa elektron m_p = massa proton, dan $|\bar{r}_e - \bar{r}_p|$ jarak proton-elektron. Dengan substitusi $E = +\, i\,\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ dan $p = -\, i\,\hbar\nabla$ kita peroleh persamaan Schroedinger yang tergantung pada waktu :

$$i\,\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2\,\nabla_e^2\psi}{2\,m_e} - \frac{\hbar^2\,\nabla_p^2\psi}{2\,m_p} - \frac{e^2\psi}{|\bar{r}_e - \bar{r}_p|} \qquad (29)$$

Kita hanya berkepentingan dengan keadaan stasioner atom hidrogen, sehingga persamaan Schroedingernya berbentuk :

$$E\Phi = -\frac{\hbar^2\,\nabla_e^2\Phi}{2\,m_e} - \frac{\hbar^2\,\nabla_p^2\Phi}{2\,m_p} - \frac{e^2\Phi}{|\bar{r}_e - \bar{r}_p|} \qquad (30)$$

Untuk memudahkan penyelesaian persamaan ini diintroduksikan koordinat pusat massa

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{m_e\,\bar{r}_e + m_p\,\bar{r}_p}{m_e + m_p} \qquad (31)$$

dan karena gaya Coulomb hanya bergantung pada jarak antara elektron dan proton maka kita tulis $\bar{r} = \bar{r}_e - \bar{r}_p = (x,\ y,\ z)$. Kita dapat menjabarkan hubungan-hubungan sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_e} &= \frac{m_e}{m_e + m_p} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x} \\
\frac{\partial}{\partial x_p} &= \frac{m_e}{m_e + m_p} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned}
\qquad (32)
$$

$\frac{\partial}{\partial y_e}$, $\frac{\partial}{\partial y_p}$, $\frac{\partial}{\partial z_e}$, $\frac{\partial}{\partial z_p}$ dapat dicari pula. Kalau didefinisikan massa tereduksi atom hidrogen $\mu = \frac{m_e\, m_p}{m_e + m_p}$, maka dari persamaan (32) kita dapat menulis :

$$
\begin{aligned}
\nabla_e &= \frac{\mu}{m_p} \nabla_R + \nabla_r \\
\nabla_p &= \frac{\mu}{m_e} \nabla_R - \nabla_r
\end{aligned}
\qquad (33)
$$

Sehingga hamiltonian atau tenaga total atom hidrogen menjadi

$$
\begin{aligned}
H &= -\frac{\hbar^2}{2 m_e} \left(\frac{\mu}{m_p} \nabla_R + \nabla_r \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2 m_p} \left(\frac{\mu}{m_e} \nabla_R - \nabla_r \right)^2 - \frac{e^2}{r} \\
&= \underbrace{\frac{\hbar^2}{2(m_e + m_p)} \nabla_R^2}_{\mathrm{I}} \underbrace{- \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 - \frac{e^2}{r}}_{\mathrm{II}}
\end{aligned}
\qquad (34)
$$

Bagian pertama melukiskan gerakan external sistim (atom hidrogen) secara keseluruhan sedang bagian kedua melukiskan gerakan internal (elektron terhadap proton atau sebaliknya). Persamaan di atas dapat dipisah dengan substitusi sebagai berikut :

$$\psi(r, R) = \Phi(R)\, u(r) \tag{35}$$

menjadi

$$\frac{-\hbar^2}{2\,(m_e \; m_p)\Phi}\; \nabla_R^2 \Phi = E_c = \frac{\hbar^2}{2\,\mu U}\; \nabla_r^2\, u + \frac{e^2}{r} + E_t$$

Sehingga kita peroleh

$$\frac{\hbar^2}{2\,(m_e + m_p)}\; \nabla_R^2\, \Phi = E_c \Phi \tag{36}$$

dan

$$\frac{-\hbar^2}{2\,\mu}\; \nabla^2 u - \frac{e^2}{r}\; u = E\, u \tag{37}$$

di mana $E = E_t - E_c$. Penyelesaian persamaan (36) adalah gelombang datar yang melukiskan gerakan pusat massa dengan tenaga kinetis E_c. Persamaan (37) melukiskan gerakan partikel dalam potensial listrik $-\frac{e}{r}$ (gerakan elektron dalam medan inti cuma saja m_e diganti dengan massa tereduksi). E merupakan tenaga ikat elektron dalam atom hidrogen Untuk mencari tingkat-tingkat tenaga atom hidrogen kita harus menyelesaikan persamaan (37) di atas. Untuk itu kita pergunakan koordinat bola (r, θ, ϕ).

Dalam koordinat bola operator Laplace ∇^2 berbentuk :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \quad (38)$$

Sehingga persamaan Schroedinger (37) menjadi

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{r} + E\right) \quad (39)$$

Kemudian kita adakan separasi variabel dengan mensubstitusikan

$$u(r) = \chi(r)\, Y(\theta, \phi) \quad (40)$$

Hasilnya adalah dua buah persamaan sebagai berikut :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial\chi}{\partial r}\right) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{r} + E\right)\chi = A\chi \quad (41)$$

dan

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} Y = -AY \quad (42)$$

Penyelesaian dari persamaan (42) yang merupakan persamaan bagian sudut dengan $A = l(l+1)$ adalah fungsi harmonis bola :

$$Y_{lm} = N_{lm}\, e^{\pm im\phi}\, P_l^m(\theta) \quad (43)$$

di mana $m = -l, \ldots, +l$

Tingkat-tingkat tenaga atom dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan Schroedinger bagian radial [2] . Dengan substitusi $\eta(r) = r\ \chi\ (r)$ ke dalam persamaan (41) serta mengingat

$$\frac{d\chi}{r} = \frac{1}{r}\,\frac{d\,\eta}{d\,r} - \frac{\chi}{r} = \frac{1}{r}\,\frac{d\,\eta}{d\,r} - \frac{\eta}{r^2}$$

diperoleh

$$\frac{d^2\eta}{d\,r^2} + \frac{2\,m}{\hbar^2}\left(\frac{e^2}{r} + E \right)\eta = l\,(\,l + 1\,)\,\frac{\eta}{r^2} \qquad (44)$$

Kemudian disubstitusikan lagi $\eta\ (r) = \xi(r)\ e^{-\alpha r}$ ke dalam persamaan (44) dan menghasilkan

$$\frac{d^2\xi}{d\,r^2} - 2\,\alpha\,\frac{d\,\xi}{d\,r} + \left| \frac{2\,m\,e^2}{\hbar^2\,r} + \frac{2\,m\,E}{\hbar^2} + \alpha^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right| \xi = 0$$

$$(45)$$

dapat diambil yang memenuhi $\alpha^2 = -\frac{2\,m\,E}{\hbar^2}$ sehingga persamaan di atas menjadi :

$$\frac{d^2\,\xi}{d\,r^2} - 2\sqrt{\frac{-2\,m\,E}{\hbar^2}}\;\frac{d\xi}{d\,r} + \left(\frac{2\,m\,e^2}{\hbar^2\,r} - \frac{l\,(l+1)}{r^2} \right)\xi = 0 \qquad (46)$$

Akhirnya, apabila ke dalam persamaan (46) disubstitusikan $\xi = \sum\limits_{0} C_n\, r^n$ kita peroleh persamaan rekurensi sebagai berikut

$$C_{n+1} = \frac{2\left(n\sqrt{\frac{-2\,m\,E}{\hbar^2}} - \frac{m\,e^2}{\hbar^2} \right)}{n\,(n+1) - l\,(\,l+1\,)}\,C_n \qquad (47)$$

Agar penyelesaian dalam bentuk deret ini mempunyai arti fisis, maka deret tersebut harus putus pada suku tertentu sehingga menjadi polinomium. Hal ini dipenuhi bila

$$n\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} = \frac{m e^2}{\hbar^2}$$

atau

$$E_n = -\frac{m e^4}{2 n^2 \hbar^2} \qquad (48)$$

Inilah tingkat-tingkat tenaga yang kita cari.

Jadi dengan menggunakan teori Schroedinger kita juga dapat memperoleh rumus Bohr. Bahkan di sini kita mendapat bilangan yang lebih banyak atau lengkap yaitu n, l, m. Harga-harga yang dapat diambil oleh bilangan kuantum tersebut adalah $n = 1, 2, ..; l = 0, 1, ..., (n-1)$ $m = -l, ..., +l$. Dengan demikian menurut teori Schroedinger setiap tingkat tenaga E_n terdapat $\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2$ buah fungsi gelombang yang melukiskan keadaan dengan tenaga tersebut. Oleh karenanya, dikatakan bahwa tingkat E_n terdegenerasi lipat n^2.

Pada pokoknya teori Schroedinger lebih sempurna dari pada teori Bohr, karena merupakan teori kuantum murni, penjabarannya lebih teliti, memberikan hasil yang lebih lengkap dan lain-lain.

Teori Dirac.

Teori Schroedinger adalah teori yang non-relativistik. Oleh sebab itu teori tersebut harus disempurnakan agar juga mencakup teori relativistik yang telah diyakini kebenarannya. Para ahli berusaha menyusun persamaan gelombang yang relativistik. Salah sat. di antara mereka itu adalah Dirac. Ia berhasil menyusun persamaan gelombang relativistik yang kovarian bentuknya kovarian. Penurunan persamaan Dirac tidak kami jabarkan di sini, demi untuk menyingkat pembicaraan. kita langsung saja memakainya untuk mencari tingkat-tingkat tenaga atom hidrogen.

Persamaan Dirac untuk hidrogen berbentuk [3] :

$$H\psi = \left(c\,\bar{\alpha}\cdot\bar{p} + \beta m c^2 - \frac{e^2}{r} \right)\psi = E\psi \tag{49}$$

Dalam persamaan ini $\bar{\alpha}$, β adalah matrix-matrix Dirac, $\bar{p}$ adalah impuls elektron. Bentuk explisit $\bar{\alpha}$ dan β adalah sebagai berikut :

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \sigma = \text{matrix Pauli} \tag{50}$$

Jadi persamaan Dirac adalah persamaan gelombang berkomponen empat. Dalam teori relativistik ini operator impuls putar pertikel yang bergerak dalam medan sentral :

$$\bar{J} = \bar{L} + \frac{\hbar}{2}\,\bar{\Sigma} \quad \text{dengan } \bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix} \tag{51}$$

komutatif dengan hamiltonian H (lihat persamaan 49). Selain itu operator yang kita definisikan sebagai berikut

$$\bar{K} = \beta\,(\bar{\Sigma}\cdot\bar{L} + \hbar) \tag{52}$$

juga komutatif dengan H. Dengan demikian kita dapat menyusun fungsi pribadi simultan dari operator-operator H, K, J, dan J_3 dengan harga pribadi masing-masing E, $-\kappa$, $j(j + 1)\hbar^2$ dan $j_3\hbar$. Antara j dan κ ada hubungan, untuk mencarinya kita lihat dulu $\bar{K}^2$. Dengan mengingat definisi K kita dapat menjabarkan relasi di bawah ini

$$K^2 = L^2 + \hbar\,\bar{\Sigma}\,.\,\bar{L} + \hbar^2 \tag{53}$$

Operator J^2 juga bisa kita cari

$$J^2 = L^2 + \hbar\,\bar{\Sigma}\,.\,\bar{L} + \frac{3\hbar^2}{4} \tag{54}$$

Dari kedua persamaan di atas yaitu (53) dan (54) didapatkan

$$K^2 = J^2 + \frac{1}{4}\hbar^2 \tag{55}$$

Ini berarti bahwa harga-harga pribadi K^2 dan J^2 berhubungan satu sama lain :

$$\kappa^2 = j(j+1)\hbar^2 + \frac{1}{4}\hbar^2 = (j+\frac{1}{2})\hbar^2$$

atau

$$\kappa = \pm\,(j+\frac{1}{2}) \tag{56}$$

Jadi κ adalah integer bukan nol yang dapat positif atau negatif. Tanda κ menentukan apakah spin anti-pararel atau pararel dengan impuls putar total dalam limit non-relativistik. Untuk $\kappa>0$ anti pararel sedang untuk $\kappa<0$ pararel.

Bentuk explisit operator K adalah

$$K = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}\,.\,\bar{L} + \hbar & 0 \\ 0 & -\bar{\sigma}\,.\,\bar{L} + \hbar \end{pmatrix} \tag{57}$$

Sehingga apabila $\psi = (\psi_A, \psi_B)$ adalah fungsi gelombang yang berkomponen empat yang merupakan fungsi pribadi operator-operator K, J^2, dan J_3 maka

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma}\,.\,\bar{L} + \hbar)\,\psi_A &= -\,\kappa\hbar_A \\ (\bar{\sigma}\,.\,\bar{L} + \hbar)\,\psi_B &= \kappa\hbar_B \end{aligned} \tag{58}$$

dan $$J^2\ \psi_{AB} = (\ L + \hbar\bar{\sigma}/2\ )^2\ \psi_{AB} = j(j+1)\ \hbar^2\ \psi_{AB}$$

(59)

$$J_3\ \psi_{AB} = (\ L_3 + \hbar\,\sigma_3/2\ )\ \psi_{AB} = j_3\ \hbar\ \psi_{AB}$$

Operator L^2 sama dengan $J^2 - \hbar\bar{\sigma}.\bar{L} - \frac{3}{4}\hbar^2$ bila ia bekerja pada fungsi gelombang berkomponen dua ψ_A dan ψ_B. Ini berarti bahwa setiap fungsi gelombang dua komponen yang merupakan fungsi pribadi dari operator $(\bar{\sigma}\cdot\bar{L} + \hbar)$ dan J^2 secara otomatis juga merupakan fungsi pribadi L^2. Jadi walaupun fungsi gelombang empat komponen ψ bukan fungsi pribadi L^2 (karena L^2 tidak komutatif dengan $H = c\bar{\alpha}\cdot\bar{p} + \beta m\,c^2 + V(r)$ tetapi ψ_A dan ψ_B adalah fungsi pribadi L^2 dengan harga pribadi masing-masing $l_A\ (l_A + 1)\ \hbar^2$ dan $l_B\ (l_B + 1)\ \hbar^2$. Dengan demikian kita memperoleh hubungan antara κ, l dan j sebagai berikut :

$$-\kappa = j\ (j+1) - l_A\ (l_A + 1) + \tfrac{1}{4}$$

(60)

$$\kappa = j\ (j+1) - l_B\ (l_B + 1) + \tfrac{1}{4}$$

Untuk suatu harga κ kita dapat menentukan harga l (l_A dan l_B)

$$\kappa = (j + \tfrac{1}{2}) \longrightarrow l_A = j + \tfrac{1}{2}\ ,\ l_B = j - \tfrac{1}{2}$$

(61)

$$\kappa = -\ (j + \tfrac{1}{2}) \longrightarrow l_A = j - \tfrac{1}{2}\ ,\ l_B = j + \tfrac{1}{2}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (49) kita perlu memisahkan bagian sudut dan bagian radial dari persamaan tersebut, untuk kita tulis :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(r)\,y_{jl_A}^{j_3} \\ i\ f\ (r)\,y_{jl_B}^{j_3} \end{pmatrix} \qquad (62)$$

di mana $\mathcal{J}_{j}^{j_3}$ fungsi pribadi yang tidak tergantung pada r dari operator-operator J^2, J_3 dan L^2. Ia dibentuk dari kombinasi spinor Pauli dengan fungsi harmonis bola orde l :

$$\mathcal{J}_{jl}^{j_3} = \sqrt{\frac{l + j_3 + \frac{1}{2}}{2l+1}}\; \mathcal{J}_{l}^{j_3 - \frac{1}{2}} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l - j_3 + \frac{1}{2}}{2l+1}}\; \mathcal{J}_{l}^{j_3 + \frac{1}{2}} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{J}_{jl}^{j_3} = -\sqrt{\frac{l - j_3 + \frac{1}{2}}{2l+1}}\; Y_{l}^{j_3 - \frac{1}{2}} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \sqrt{\frac{l + j_3 + \frac{1}{2}}{2l+1}}\; \mathcal{J}_{l}^{j_3 + \frac{1}{2}} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad (63)$$

masing-masing untuk $j = l + \frac{1}{2}$ dan $j = l - \frac{1}{2}$.
Bagian radial f dan g sudah tentu tergantung pada κ. Faktor i di dalam komponen yang kedua dari ψ dimasukkan untuk membuat f dan g riil untuk penyelesaian keadaan terikat (*bound-state*).

Dengan substitusi tersebut (pers. 62) persamaan Dirac untuk atom hidrogen dapat ditulis menjadi dua buah persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} c(\bar{\sigma} \cdot \bar{p})\ \psi_B &= (E - V(r) - m c^2)\ \psi_A \\ c(\bar{\sigma} \cdot \bar{p})\ \psi_A &= (E - V(r) + m c^2)\ \psi_B \end{aligned} \qquad (64)$$

dengan $V(r) = \frac{-e^2}{r}$. Sebelum menyelesaikan persamaan ini kita cari dulu $c(\bar{\sigma} \cdot \bar{p})\ \psi_B$ dan $c(\bar{\sigma} \cdot \bar{p})\ \psi_A$. Operator $c(\bar{\sigma} \cdot p)$ dapat ditulis menjadi

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{p} = \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{x}}{r^2} (\bar{\sigma} \cdot \bar{x}) (\bar{\sigma} \cdot \bar{p})$$

$$= \frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{x}}{r^2} \left(- i \hbar r \frac{\partial}{\partial r} + i \bar{\sigma} \cdot \bar{L} \right) \tag{65}$$

Dalam persamaan ini operator $\frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{x}}{r}$ adalah operator pseudoskalar, jadi bila dikenakan pada $y_{jl_A}^{j_3}$ harus memberikan fungsi pribadi dari operator J^2, J_3 dan L^2 dengan j dan j_3 sama tetapi dengan paritas yang berlawanan, yaitu $y_{jl_B}^{j_3}$ dengan suatu faktor fasa. Demikian pula bila $\frac{\bar{\sigma} \cdot \bar{x}}{r}$ bekerja pada $y_{jl_B}^{j_3}$ menghasilkan $y_{jl_A}^{j_3}$ dengan faktor fasa yang sama. Faktor fasa tersebut adalah -1. Harga ini diperoleh dengan mengingat konvensi fasa yang kita gunakan dalam menulis fungsi $y_1^{j_3}$ dalam persamaan (63). Dengan mengingat itu semua kita dapat menulis persamaan (64) menjadi

$$\begin{aligned} - c \hbar \frac{df}{dr} - \frac{(1 - \kappa) \hbar}{r} f &= (E - V - m c^2) g \\ c \hbar \frac{dg}{dr} + \frac{(1 + \kappa) \hbar}{r} g &= (E - V - m c^2) f \end{aligned} \tag{66}$$

Apabila ditulis $F(r) = r f(r)$, $G(r) = r g(r)$, maka persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned} c \hbar \left(\frac{dF}{dr} - \frac{\kappa}{r} F\right) &= - (E - V - m c^2) G \\ c \hbar \left(\frac{dG}{dr} + \frac{\kappa}{r} G\right) &= (E - V + m c^2) f \end{aligned} \tag{67}$$

Kita definisikan konstanta-konstanta

$$\alpha_1 = (m c^2 + E)/ \hbar c, \quad \alpha_2 = (m c^2 - E)/ \hbar c$$
$$\gamma = (Z e^2 / 4\pi \hbar c) = Z\alpha = \frac{Z}{137} \tag{68}$$

dan variabel baru $\rho = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}\, r$, maka dari persamaan (67) kita per oleh persamaan-persamaan sebagai berikut :

$$\left(\frac{d}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho}\right) F - \left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} - \frac{\gamma}{\rho} \right) G = 0$$
$$\left(\frac{d}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho}\right) G - \left(\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} + \frac{\gamma}{\rho} \right) F = 0 \tag{69}$$

Persamaan deferensial ini kita selesaikan dengan cara penderetan. Diambil F dan G :

$$F = e^{\rho} \rho^s \sum_{m = 0} a_m \rho^m, \quad G = e^{-\rho} \rho^s \sum_{m\, 0} b_m \rho^m \tag{70}$$

Substitusi deret ini ke dalam persamaan deferensial (69) dan setelah menyamakan koefisien-koefisien dari $e^{-\rho} \rho^s \rho^{q-1}$ diperoleh persamaan rekurensi :

$$(s + q - \kappa) a_q - a_{q-1} + \gamma b_q - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\, b_{q-1} = 0$$
$$(s + q + \kappa) b_q - b_{q-1} - \gamma \cdot a_q - \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\, a_{q-1} = 0 \tag{71}$$

Untuk q = 0,

$$(s - \kappa) a_0 + \gamma b_0 = 0, \quad (s + \kappa) b_0 - \gamma a_0 = 0 \tag{72}$$

Karena a_0 dan b_0 tidak sama dengan nol maka determinan koefisien-koefisiennya harus sama dengan nol. jadi

$$(s^2 - \kappa^2) = - \gamma^2 \quad \text{atau}$$

$$s = \pm \sqrt{\kappa^2 - \gamma^2} \tag{73}$$

Agar penyelesaiannya mempunyai arti fisis kita syaratkan $\int \psi^{\dagger}\psi d^3x$ berhingga. Ini berarti F dan G harus memenuhi syarat di bawah :

$$\int |F|^2 d\rho < \infty \qquad \int |G|^2 d\rho < \infty \tag{74}$$

Jadi F dan G harus berkelakuan lebih baik dari pada $\rho^{-\frac{1}{2}}$ di pusat koordinat yang berati bahwa $s > -\frac{1}{2}$. Oleh karena $\kappa^2 - \gamma^2 \geq \min (\kappa^2) - \gamma^2 \approx 1 - (Z/137)^2$ syarat di atas tak dapat dipenuhi bila kita mengambil bentuk yang neganif dari persamaan (73). Jadi yang diambil cuma yang positif.

Mudah menunjukkan bahwa F dan G akan naik secara exponensiel untuk $\rho \to \infty$ bila deret dalam persamaan (70) tidak putus pada sesuatu suku. Dengan menganggap kedua deret putus pada suku yang mempunyai pangkat sama, maka harus ada bilangan n' dengan sifat

$$a_{n'+1} = b_{n'+1} = 0, \quad a_{n'} \neq 0, \quad b_{n'} \neq 0 \tag{75}$$

Dengan mengambil $q = n' + 1$ dalam persamaan rekurensi dan dengan menggunakan persamaan (75) kita memperoleh

$$a_{n'} = -\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\, b_{n'} \tag{76}$$

Untuk menuliskan persamaan yang hanya melibatkan $a_{n'}$ dan $b_{n'}$ yang perbandingannya sudah kita ketahui tadi, kita kalikan persamaan rekurensi yang pertama dengan α_1 dan yang kedua dengan $\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ serta kita tulis $q = n'$, kemudian kita kurangkan :

$$\left[\alpha_1 (s + n' - \kappa) + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}\gamma\right] a_{n'} - \left[\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}(s + n' - \kappa) - \alpha_1\gamma\right] b_{n'} = 0 \tag{77}$$

Dengan menggunakan relasi antara $a_{n'}$ dan $b_{n'}$ didapat persamaan

$$2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}(s + n') = \gamma(\alpha_1 - \alpha_2) \quad \text{atau}$$

$$\sqrt{(m c^2)^2 - E^2}\,(s + n') = E\gamma \tag{78}$$

Bila persamaan ini kita kwadratkan dan E kita pisahkan maka kita peroleh harga pribadi tenaga :

$$E = m c^2/(1 + \frac{\gamma^2}{(s + n')^2})^{\frac{1}{2}} =$$

$$m c^2 / \left\{1 + \frac{z^2 \alpha^2}{\left(n' + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - z^2 \alpha^2}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{79}$$

Untuk membandingkan dengan hasil yang diperoleh dari teori Schroedinger, kita definisikan $n = n' + (j + \frac{1}{2}) = n' + |\kappa|$. Oleh karena harga minimum dari n' adalah nol maka $n \geq (j + \frac{1}{2}) = |\kappa|$ .Harga n yang paling kecil adalah satu. Bila persamaan E di atas diexpansikan dalam deret $z\alpha$, kita dapatkan :

$$E = n\ 1\ c^2 \left[1 - \tfrac{1}{2} \frac{(z\alpha)^2}{n^2} - \tfrac{1}{2} \frac{(z\alpha)^4}{n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4\ n} \right) - \cdots \right] \qquad (80)$$

Rumus ini sesuai dengan hasil yang diperoleh dari teori Bohr yang disempurnakan dengan teori relativistik oleh Sommerfeld.

Walaupun teori Dirac bisa menerangkan adanya struktur halus pada spektrum tenaga atom hidrogen dengan cara yang teliti, tidak seperti teori relativistiknya Sommerfeld, ia toh tak dapat menerangkan adanya pergeseran tingkat 2 $s_{1/2}$ dengan $2p_{1/2}$. Menurut teori Dirac kedua tingkat tersebut sama tingginya, karena j dan n nya sama yang berarti tenaganya sama. Padahal Lamb dan Retherford dengan menggunakan tehnik microwave pada tahun 1947 mengamati pergeseran tersebut sebesar $\approx$ 1000 Mc [4]. Pergeseran ini biasa disebut dengan nama pergeseran Lamb (Lamb Shift).

Pergeseran Lamb dapat diterangkan dengan teori yang lebih lanjut dari pada teori Dirac yaitu teori gangguan kovarian Menurut teori itu tingkat-tingkat atom hidrogen juga bergantung pada l, pergeseran karena ketergantungan pada l ini sebesar 3 :

$$\Delta E_{l \neq 0} = \frac{\alpha^3}{2\pi\ n^3} R_{y\infty} \begin{cases} \dfrac{-1}{l\,(l + \frac{1}{2})}, & j = l - \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{(l + \frac{1}{2})\,(l + 1)}, & j = l + \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (81)$$

di mana $R_{y\infty} = \dfrac{\alpha^2 m_e}{2} = 13{,}6$ eV.

IV. PERSAMAAN GELOMBANG BERKOMPONEN TAK-BERHINGGA

Dalam bab-bab yang lalu kita telah menggunakan teori Bohr, Sommerfeld, Schroedinger dan Dirac untuk mencari spektrum tenaga atom hidrogen. Teori-teori tersebut telah lama jadi. Teori Dirac sebelum 1930 sedang teori Bohr-Sommerfeld sebelum 1920. Teori Schroedinger telah jadi sekitar tahun dua puluh lima/enam. Kita sebut saja teori-teori ini teori lama.

Di dalam bab ini kita akan mencari spektrum tenaga atom hidrogen dengan menggunakan teori persamaan gelombang berkomponen tak berhingga. Teori ini sebenarnya sudah diusulkan (dilahirkan) pada tahun 1932 oleh Mayorana [5]. Tetapi sejak dilahirkan tidak mendapat perhatian dari para ahli, mungkin kalah saingan dengan teori Dirac yang sudah banyak pengikutnya, juga mungkin disebabkan para ahli fisika saat itu tidak biasa menggunakan teoti grup. Baru sekitar tahun 1965 teori digali kembali a.l. oleh Nambu[6], Fronsdal [7], Barut[8], dan lain-lain. Untuk dicalonkan sebagai persamaan gelombang yang bisa dikenakan pada partikel-partikel yang berinteraksi kuat (hadron). Sebab teori persamaan gelombang berkomponen tak berhingga adalah teori yang non-perturbatif, padahal untuk mempelajari partikel - partikel yang berinteraksi kuat kita perlu teori yang demikian itu. Sebelum teori ini dikenakan pada hadron, ia dicobakan dahulu pada atom hidrogen untuk mencari spektrum tenaganya.

Teori yang akan kita bicarakan ini kita sebut teori baru. Ia berdasar pada salah satu cabang ilmu matematika yaitu teori grup Lie (grup kontinu).

Untuk setiap grup Lie terdapat aljabar Lie yang elemen-elemennya merupakan generator dari grup tersebut. Secara umum elemen suatu grup Lie dapat ditulis sebagai $\Lambda(\theta) = e^{i\theta_k J_k}$ dengan θ parameter dan J_k generator grup. Contoh dari grup Lie misalnya

1) SO (3) : grup rotasi dalam ruang tiga demensi. Aljabarnya diberi simbul so (3) yang elemen-elemennya merupakan operator impuls putar dan memenuhi relasi komutasi. Grup SO (3) termasuk kelompok grup kompak.

2) SO (2,1) : grup ini biasa disebut grup Lorentz dalam tiga demensi. Aljabarnya diberi simbol so (2,1). Grup ini termasuk kelompok grup non-kompak. Grup inilah yang penting bagi kita dalam pembicaraan ini.

Elemen-elemen aljabar so (2,1) yaitu $\Gamma_o = L_{56}$, $\Gamma_4 = S = L_{46}$ dan $T = L_{45}$ mempunyai relasi komutasi sebagai berikut :

$$[\Gamma_o,\Gamma_4] = iT, \; [\Gamma_4,T] = -i\Gamma_o, \; [T,\Gamma_o] = i\Gamma_4 \qquad (82)$$

Karena grup SO (2,1) termasuk kelompok non-kompak, maka menurut teori representasi ia mempunyai *representasi unitar irredusibel* yang berdemensi tak berhingga. Semuanya ada empat macam representasi unitar aljabar so (2,1) 9

1) $D^+(\phi)$; $m = -\phi, -\phi+1, -\phi+2, ..,$ ϕ riil dan $\phi < 0$

2) $D^-(\phi)$; $m = \phi, \phi-1, \phi-2, ...,$ ϕ riil dan $\phi < 0$

Dalam $D^+(\phi)$ spektrum generator Γ_o terbatas-bawah pada dan dalam $D^-(\phi)$ terbatas-atas pada $m = \phi$

3) $D_s\ (\phi, E)$; dengan $-1 + |E_o| < \phi < |E_o|$; $-\frac{1}{2} < |E_o| < \frac{1}{2}$;

$m = E_o,\ E_o \pm 1,\ E_o \pm 2, \ldots$ Deret ini disebut deret tambahan.

4) $D_p\ (\phi, E)$; $\phi = -\frac{1}{2} + i\sigma$, σ riil, $\phi(\phi + 1) = -\frac{1}{4} - \sigma^2$

Deret ini disebut deret utama.

Catatan : m harga pribadi gererator kompak Γ_0 sedangkan $\phi(\phi + 1)$ harga pribadi operator Casimir $Q^2 = \Gamma_0^2 \quad \Gamma_4^2 - T^2$.

Elemen-elemen aljabar so (2,1) dapat direalisir dalam bentuk operator r dan $\bar{p} = -i\hbar\nabla$ dengan mendefinisikannya sebagai berikut : [10] :

$$\Gamma_o = \tfrac{1}{2}\,(r\,p^2 + r)$$

$$\Gamma_4 = \tfrac{1}{2}\,(r\,p^2 - r) \qquad (83)$$

$$T = \bar{r} \cdot \bar{p} - i$$

Relasi komutasi (82) dapat diverifikasi secara langsung meskipun dengan perhitungan yang panjang.

Sekarang kita tinjau hamiltonian atom hidrogen non-relativistik.

$$H = E = \frac{p^2}{2\,m} - \frac{Z\,e^2}{r} \qquad (84)$$

Persamaan Schroedinger dapat diperoleh dengan menggunakan hamiltonian kepada fungsi gelombang ψ. Untuk teori persamaan gelombang berkomponen tak-berhingga didefinisikan operator

$$r\,E = \frac{r\,p^2}{2\,m} - Z\,e^2 \qquad (85)$$

Kemudian dengan menggunakan $r = \Gamma_o - \Gamma_4$ dan $r\,p^2 = \Gamma'_o + \Gamma_4$, operator di atas dapat diubah menjadi persamaan yang linier dalam generator-generator grup SO (2,1)

$$\left(E - \frac{1}{2\,m}\right)\ \Gamma_o - \left(E + \frac{1}{2\,m}\right)\ \Gamma_4 - Z\,e^2 = 0 \qquad (86)$$

Bila operator ini dikenakan pada fungsi golombang ψ, maka kita peroleh persamaan gelombang berkomponen tak-berhingga non-relativistik.

$$\left(E - \frac{1}{2\,m}\right)\ \Gamma_o\psi - \left(E + \frac{1}{2\,m}\right)\ \Gamma_4\psi - Z\,e^2\psi = 0 \qquad (87)$$

Persamaan di atas berkomponen tak-berhingga karena generator-generator SO (2,1) dapat direalisir dalam bentuk matrix-matrix berdimensi tak-berhingga. Persamaan (87) setara dengan persamaan Schroedinger tak gayut waktu.

Agar kita dapat mencari spektrum tenaga E, maka persamaan (87) kita bawa ke bentuk persamaan harga pribadi dari salah satu generator saja. Untuk itu persamaan kita putar dengan mengenakan operator tilt $1^{-i\theta T}$:

$$e^{-i\theta T}\{\ (E - 1/2\,m)\ \Gamma_o - (E + 1/2\,m)\ \Gamma_4 +$$

$$Z\,e^2\ \}\ e^{i\theta T}\ \tilde{\psi} = 0 \qquad (88)$$

di mana $\psi = e^{-i\theta T}\ \psi$ fungsi gelombang yang terputar. Dengan menggunakan relasi komutasi operator-operator Γ_0, Γ_4 dan T kita dapat menjabarkan persamaan di bawah ini :

$$\left.\begin{aligned} e^{-i\theta T}\ \Gamma_0\ e^{i\theta T}\ \tilde{\psi} &= \Gamma_0 \cosh\theta + \Gamma_4 \sinh\theta \\ e^{-i\theta T}\ \Gamma_4\ e^{i\theta T}\ \tilde{\psi} &= \Gamma_4 \cosh\theta + \Gamma_0 \sinh\theta \end{aligned}\right\} \qquad (89)$$

Substitusi kedua persamaan ini ke dalam persamaan (88) kita peroleh

$$\Big[\{(E - 1/2\,m)\cosh\theta - (E + 1/2\,m)\sinh\theta\}\Gamma_0 + \qquad (90)$$
$$\{(E - 1/2\,m)\sinh\theta - (E + 1/2\,m)\cosh\theta\}\,\Gamma_4 + Z\,e^2\Big]\tilde{\psi} = 0$$

Kemudian, kalau kita pilih sudut tilt θ sedemikian hingga memenuhi persamaan ini

$$\operatorname{tgh}\,\theta = \frac{E + 1/2\,m}{E - 1/2\,m} \qquad (91)$$

maka kita peroleh persamaan harga pribadi dalam generator Γ_0 saja :

$$\Big[\{(E - 1/2\,m)\cosh\theta - (E + 1/2\,m)\sinh\theta\}\,\Gamma_0 + Z\,e^2\Big]\tilde{\psi} = 0 \qquad (92)$$

Dari persamaan (91) kita dapat memperoleh sinh θ dan cosh θ :

$$\sinh\theta = \frac{(E + 1/2\,m)}{\{(E - 1/2\,m)^2 - (E + 1/2\,m)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$(93)$$

$$\cosh\theta = \frac{(E - 1/2\,m)}{\{(E - 1/2\,m)^2 - (E + 1/2\,m)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

Sehingga persamaan (92) dapat ditulis menjadi

$$\sqrt{\frac{-2E}{m}}\;\Gamma_0\,\tilde{\psi} = -Z\,e^2\tilde{\psi} \qquad (94)$$

Dalam persamaan ini, bila di ambil $\tilde{\psi}$ fungsi pribadi operator Γ_0 yang membentang ruang representasi $D^+(\phi)$ dengan harga pribadi $n\,\hbar$, maka kita peroleh spektrum tenaga :

$$E_n = \frac{-m\,Z^2\,e^4}{2\,n^2\,\hbar^2} \qquad (95)$$

Rumus ini mirip dengan rumus Bohr. Tetapi kita tak dapat mengatakannya langsung bahwa rumus ini memang rumus Bohr. Perlu diketahi dulu apakah n adalah bilangan kuantum utama (n 1, 2, 3, ...). Untuk itu kita tinjau operator Casimir SO (2,1) yaitu

$$Q^2 = \Gamma_0^2 - \Gamma_4^2 - T^2 \tag{96}$$

Operator Casimir mempunyai harga pribadi ϕ (ϕ + 1). dengan perhitungan yang panjang tetapi langsung ternyata $Q^2 = J^2$ yaitu operator impuls putar kuadrat atau operator Casimir dari grup SO (3). Dalam representasi yang sama, J^2 mempunyai harga pribadi $j(j + 1)$. Jadi

$$j\,(j + 1) = \phi(\phi + 1) \tag{97}$$

Persamaan ini mempunyai dua penyelesaian $\phi = j$ dan $\phi = - j - 1$. Karena dalam representasi $D^+ (\phi)$ negatif, maka yang berlaku adalah penyelesaian yang kedua : $D^+(\phi) \equiv D^+(- j - 1)$, dan $n = j + 1, j + 2, \ldots$. Sampai di sini masih belum jelas apakah n bilangan kuantum utama atau bukan. Dan kita belum juga tahu harga-harga dari j. Jadi penyelesaian belum lengkap.

Untuk mendapat penyelesaian yang lengkap, aljabar so (2,1) perlu diperluas menjadi so (4,2). Operator-operator Γ_0, Γ_4, dan T bersama-sama dengan operator di bawah ini :

$$L_{ij} = \bar{J} = \bar{r} \times \bar{p} \equiv \text{operator impuls putar}$$
$$L_{i4} = \bar{A} = \tfrac{1}{2}\,\bar{r}\,\bar{p}^2 - \bar{p}\,(\bar{r}\cdot\bar{p}) - \tfrac{1}{2}\,\bar{r} \equiv \text{vektor Runge-Lenz}$$
$$L_{i5} = \bar{M} = \tfrac{1}{2}\,\bar{r}\,p^2 - \bar{p}\,(\bar{r}\cdot\bar{p}) + \tfrac{1}{2}\,\bar{r} \equiv \text{boster Lorentz}$$
$$L_{i6} = \bar{\Gamma} = r\,\bar{p} \equiv \text{vektor arus}$$

membentuk aljabar so $(4,2)$, karena mereka bersama-sama mempunyai relasi komutasi :

$$
\begin{aligned}
[L_{\mu\nu}\ ,\ L_{\mu\lambda}] &= -\, i\, g_{\mu\mu}\ L_{\nu\lambda} \\
\mu,\ \nu &= 1,\ 2,\ \ldots,\ 6 \\
g_{\mu\mu} &= (\,-,\ -,\ -,\ -,\ +,\ +\,)
\end{aligned}
\tag{98}
$$

yang merupakan ciri dari aljabar so $(4,2)$. Operator-operator J dan A membentuk subgrup SO $(4) \sim$ SO (3) yang komutatif dengan Γ_0. Bilangan kuantum j keluar dari representasi subgrup SO (4). Dalam suatu representasi irredusibel SO $(4,2)$ untuk tiap $j = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ kita mempunyai $n = j + 1,\ j + 2, \ldots$ Atau untuk tiap $n = 1,\ 2, \ldots$ kita mempunyai $j = 0,\ 1, \ldots,\ n - 1$. Dari sini jelaslah bahwa n yang merupakan harga pribadi Γ_0 adalah bilangan kuantum utama dan rumus (95) adalah memang rumus Bohr.

Untuk selanjutnya persamaan gelombang berkomponen tak - berhingga kita sebut persamaan gelombang saja, kecuali kalau ada keterangan tersendiri.

Dengan diperluasnya grup SO $(2,1)$ menjadi grup $(4,2)$ yang di dalamnya mengandung sub grup Lorentz SO $(3,1)$, kita dapat memperoleh persamaan gelombang yang kovarian relativistik dari persamaan gelombang non-relativistik. Secara umum persamaan non-relativistik dapat dituliskan sebagai berikut :

$$
(a\, \Gamma_0 + b\, \Gamma_4 + c\,)\ \tilde{\psi}\,(0) \;=\; 0 \tag{99}
$$

di mana $\tilde{\psi}(0) = e^{i\,\theta\, L_{45}}\ \psi\ (0)$. Cara memperoleh persamaan relativistik dari persamaan (99) adalah sebagai berikut : Operator boster Lorentz $e^{i\xi \cdot \bar{M}}$ dikenakan pada persamaan itu dari kiri, kemudian antara operator yang di kurung dan (0) disisipkan operator $e^{-i\xi \cdot \bar{M}} \cdot e^{i\xi \cdot \bar{M}}$ sehingga kita peroleh persamaan di bawah ini :

$$e^{i\bar{\xi} \cdot \bar{M}} (a\,\Gamma_0 + b\,\Gamma_4 + c)\, e^{-i\bar{\xi} \cdot \bar{M}}\, e^{i\bar{\xi} \cdot \bar{M}}\, \tilde{\psi}(0) = 0 \qquad (100)$$

di mana $\xi_i = \mathrm{tgh}^{-1} \frac{v_i}{c}$ yang disebut parameter rapiditas.

Dengan menggunakan relasi komutasi aljabar SO (4,2) kita dapat menjabarkan persamaan-persamaan di bawah ini

$$\begin{aligned} e^{i\bar{\xi} \cdot \bar{M}}\, L_{46}\, e^{-i\bar{\xi} \cdot \bar{M}} &= L_{46} \\ e^{i\bar{\xi} \cdot \bar{M}}\, L_{56}\, e^{-i\bar{\xi} \cdot \bar{M}} &= \frac{\Gamma_\mu p^\mu}{m} \end{aligned} \qquad (101)$$

di mana p^μ impuls dari sistim (atom hidrogen) dan m massa dari sistim. Substitusi persamaan (101) ke dalam persamaan (100) dan dengan menulis $e^{i\xi \cdot \bar{M}}\, \tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(p)$ yang melukiskan fungsi gelombang sistim yang bergerak dengan impuls p, kita mendapat persamaan gelombang relativistik :

$$(a'\Gamma_\mu p^\mu + b\, L_{46} + c)\; \tilde{\psi}(p) = 0 \qquad (102)$$

dengan a' = a/m. Kalau kita mempergunakan representasi SO (4,2) yang unitar, maka generator-generator dalam persamaan itu dapat direalisir dalam matrix-matrix dimensi tak-berhingga, sehingga kita memperoleh persamaan gelombang berkomponen tak-berhingga. Sedangkan, bila kita memakai representasi yang non-unitar, maka kita memperoleh persamaan gelombang berkomponen berhingga, seperti persamaan Dirac.

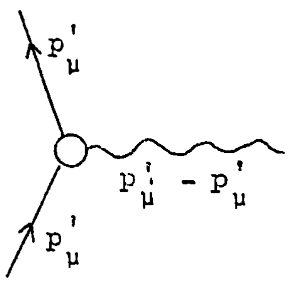
Persamaan gelombang berkomponen tak-berhingga dapat ditulis sebagai

$$(J_{\mu} P^{\mu} - \beta L_{46} - \gamma) \tilde{\psi} (\bar{p}) = 0 \qquad (103)$$

di mana $J_{\mu} = a' \Gamma_{\mu}$. J_{μ} kita interpretasikan sebagai arus elektro magnet. Di dalam grup SO (4,2) terdapat arus yang lebih umum yaitu :

$$J_{\mu} = \alpha_1 \Gamma_{\mu} + \alpha_2 P_{\mu} + \alpha_3 P_{\mu} L_{46} + \alpha_4 L_{\mu\nu} q^{\nu} \qquad (104)$$

di mana $P_{\mu} = p_{\mu} + p'_{\mu}$, $q_{\mu} = p'_{\mu} - p_{\mu}$ dan p'_{μ} masing-masing impuls masuk dan impuls keluar pada vertex interaksi elektromagnetik (lihat gambar)



Gambar Interaksi vertex untuk interaksi elektromagnetik.

Suku dari arus J_{μ} yang sebanding dengan impuls p disebut arus konvektif, sedangkan yang sebanding dengan Γ disebut arus aljabar (karena ia merupakan generator dari aljabar).

Dengan menggunakan arus umum di atas kita dapat menulis persamaan gelombang relativistik sebagai berikut :

$$(J_{\mu} P^{\mu} - \beta L_{46} - \gamma) \tilde{\psi} (\bar{p}) = 0 \qquad (105)$$

di mana $J_{\mu} = \alpha_1 \Gamma_{\mu} + \alpha_2 P_{\mu} + \alpha_3 P_{\mu} L_{46}$. Suku terakhir dari arus yaitu $L_{\mu\nu} q^{\nu}$ kekal secara terpisah sehingga ia tidak muncul dalam persamaan gelombang.

Perlu diingat bahwa di sini kita memakai representasi unitar dari grup SO (4,2), sehingga generator grup dapat direalisir sebagai matrix-matrix berdimensi tak-terhingga

Untuk mancari spektrum massa (tenaga) atom hidrogen, kita perlu menyelesaikan persamaan di atas. Pertama-tama, dengan transformasi Lorentz persamaan tersebut kita bawa ke kerangka diam sistim. Persamaan yang terjadi berbentuk seperti ini :

$$(J_0 P^0 - \beta L_{46} - \gamma) \tilde{\psi} (0) = 0 \qquad (106)$$

dengan $J_0 = \alpha_1 \Gamma_0 + \alpha_2 P_0 + \alpha_3 L_{46} P_0$. Perlu diingat bahwa $\tilde{\psi}$ (0) adalah fungsi gelombang yang terputar yaitu $\tilde{\psi}(0) = e^{i\theta T} \psi$. Oleh karenanya setelah operator tilt dikeluarkan dari persamaan (106) kita peroleh

$$\left[\{\alpha_1 m ch\theta + (\alpha_3 m^2+\beta) ch\theta\}\Gamma_0\right] + \{\alpha_1 m ch\theta + (\alpha_3 m^2 + \beta) ch\theta\} L_{46} + (\alpha_2 m^2 + \gamma)\psi(0) = 0 \qquad (107)$$

Seperti persamaan non-relativistik, persamaan relativistik mempunyai dua macam penyelesaian yaitu penyelesaian diskrit dan kontinu. Tapi untuk mencari spektrum massa (tenaga) kita cukup mencari penyelesaian diskrit saja.

Apabila sudut tilt θ kita pilih yang memenuhi relasi

$$tgh\ \theta = \frac{-(\alpha_3 m^2 + \beta)}{\alpha_1 m} \qquad (108)$$

maka persamaan (107) dapat diubah menjadi

$$\{(\alpha_1 m^2)^2 - (\alpha_3 m^2 + \beta)^2\}^{\frac{1}{2}} L_{56}\ \psi(0) = -(\alpha_2 m^2 + \gamma)\ \psi\ (0) \qquad (109)$$

ψ (0) dapat kita ambil fungsi pribadi operator L_{56} dalam ruang representasi berdimensi tak berhingga dengan harga pribadi n (bilangan kuantum utama), sehingga kita peroleh persamaan

$$\{ (\alpha_1 m)^2 - (\alpha_3 m^2 + \beta)^2 \}^{\frac{1}{2}} \; n = - (\alpha_2 m^2 + \gamma)$$

atau

$$n^2 = \frac{(\alpha_2 m^2 + \gamma)^2}{(\alpha_1 m)^2 - (\alpha_3 m^2 + \beta)^2} \tag{110}$$

Untuk atom hidrogen parameter-parameter α_1, β, dan γ kita pilih

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{1}{2\, m_p}, \quad \beta = \frac{m_p^2 - m_e^2}{2\, m_p} \tag{111}$$

$$\gamma = - m_e \alpha$$

di mana m_p = massa proton, m_e = massa elektron dan α konstanta struktur halus. Dengan pemilihan ini spektrum massa atom hidrogen diperoleh dari persamaan (110) setelah persamaan (111) dimasukkan ke dalamnya.

$$m_n^2 = m_p^2 + m_e^2 \pm 2\, m_p\, m_e \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}} \tag{112}$$

Dari rumus ini terlihat bahwa spektrum massa diskrit atom hidrogen terdiri dari dua macam deret; yang pertama konvergen ke $(m_p + m_e)^2$ dan yang kedua konvergen ke $(m_p - m_e)^2$. Kita hanya meninjau yang pertama saja, sebab hanya dialah yang sesuai dengan rumus Bohr seperti yang akan kita tunjukkan di bawah ini.

Kalau kita tulis $m_n = m_p + m_e + B_n$ di mana B_n tenaga ikat atom, maka rumus massa di atas dapat ditulis sebagai :

$$1 + \frac{B_n}{\mu} + \frac{B_n^2}{2\, m_p\, m_e} = + \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{113}$$

dengan $\mu = \dfrac{m_p\, m_e}{m_p + m_e}$ yang disebut massa tereduksi dari elektron. Apa bila diambil limit $m_p \to \infty$ yang berarti $\mu \to m_e$ persamaan di atas dapat didekati dengan rumus :

$$E_n = m_e + B_n \approx m_e \left(1 + \alpha^2/n^2\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{114}$$

Suku dalam kurung dapat kita expansikan menjadi deret α, sehingga kita peroleh rumus

$$E_n = m_e \left(1 - \frac{2}{2\, n^2} - \dots\dots\dots \right) \tag{115}$$

Kita telah mengabaikan suku-suku yang pangkat α nya lebih dari dua. Rumus (115) sesuai dengan rumus Bohr cuma saja dalam rumus itu tenaga ikat B_n masih ditambah dengan massa diam elektron.

Koreksi pental inti juga dapat diperoleh dari persamaan (114), demikian juga koreksi struktur halus. Besarnya koreksi pental sangat dekat dengan yang diperoleh dari teori gangguan [12] :

$$-\frac{1}{8}\ \frac{m_e}{m_p} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^4 \tag{116}$$

Untuk mencari spektrum massa (tenaga) atau tingkat-tingkat tenaga atom hidrogen yang sesuai dengan rumus yang diperoleh dari teori Dirac dan juga yang memberikan koreksi Lamb, kita harus memakai representasi produk-langsung dari representasi berdimensi tak berhingga $SO_H(4,2)$ dengan representasi berdimensi empat $SO_D(4,2)$. Yang terakhir ini adalah representasi non-unitar ; matrix-matrix representasinya menggunakan matrix-matrix Dirac (lihat Appendix).

Persamaan gelombang yang memberikan hasil yang dimaksudkan di atas telah disusun oleh Baiquni [13]. Spektrum massa yang diperoleh dari persamaan tersebut adalah

$$m_n^2 = m_p^2 + m_e^2 \pm 2\, m_p\, m_e \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n - |\kappa| + \sqrt{\kappa^2 - \alpha^2\left\{1 - \frac{\alpha}{4\pi}/(\kappa - \frac{1}{2})\right\}^2}}} \tag{117}$$

Seperti di muka kita dapat menulis massa total atom hidrogen sebagai jumlahan massa proton dan elektron ditambah tenaga ikat atom $m_n = m_p + m_e + B_n$. Kalau diambil limit $m_p \to \infty$ dan suku di bawah tanda akar diexpansikan dalam deret α akan kita peroleh tingkat-tingkat tenaga atom hidrogen sebagai berikut :

$$E_n = m_e + B_n = m_e\left[1 - \frac{\alpha^2}{2\,n^2} - \frac{\alpha^4}{8\,n^4}\left(\frac{4\,n}{|\kappa|} - 3\right) - \frac{\alpha^5}{4\pi\, n^3 |\kappa|(\kappa - \frac{1}{2})}\right] \tag{118}$$

Suku dengan pangkat α lebih dari lima kita abaikan. Terlihat bahwa suku pertama adalah massa diam elektron, suku kedua sesuai dengan rumus Bohr, suku ketiga merupakan koreksi struktur halus seperti yang diberikan oleh Dirac. Jadi sampai suku ke empat rumus tersebut sesuai dengan rumus Dirac (persamaan 80). Suku kelima adalah koreksi Lamb karena ia dapat dituliskan sebagai :

$$\Delta E = - \frac{\alpha^5 \; m_e}{4 \; \pi \; n^3} \begin{cases} - \dfrac{1}{(l + \frac{1}{2}) \; (l + 1)} & , \; j = l + \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{(l + \frac{1}{2}) \; l} & , \; j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (119)$$

di mana kita telah menuliskan harga $\kappa = \pm (j + \frac{1}{2})$ untuk $j = l \pm \frac{1}{2}$.

Rumus ini adalah sama dengan rumus (81) yang merupakan koreksi Lamb untuk $l \neq 0$

V. KESIMPULAN

Dalam tulisan ini kami telah menguraikan penghitungan tingkat-tingkat tenaga atom hidrogen dengan berbagai teori. Mulai dari teori semi klassik Bohr, teori persamaan gelombang non-relativistik Schroedinger, teori relativistik Dirac dan akhirnya teori persamaan gelombang berkomponen tak berhingga yang menggunakan dasar teori grup Dinamis SO (4,2).

Persamaan gelombang berkomponen tak berhingga sebenarnya dicalonkan untuk partikel yang berinteraksi kuat, misalnya zarrah-zarrah inti : proton, netron, pion, dan lain-lain. Hal ini disebabkan karena ternyata bahwa partikel-partikel tersebut menunjukkan sifat - sifat komposit (berstruktur) dalam experimen-experimen hamburan tenaga tinggi. Sedangkan persamaan gelombang ini dapat dipakai untuk membahas sistim komposit secara global, artinya sistim komposit itu diperlakukan sebagai satu entitas, jadi tidak terpisah-pisah sebagaimana pendekatan teori Schroedinger.

Perlakuan secara global penting dalam membahas positronium, karena dalam sistim ini koreksi pental dominan, sedang perlakuan secara global telah mencakup hal itu, jadi lebih memudahkan perhitungan.

Pemakaian persamaan gelombang berkomponen tak berhingga untuk mencari tingkat-tingkat tenaga sistim komposit (atom hidrogen) ternyata memberikan hasil yang sesuai dengan hasil teori-teori yang lain. Bahkan kita dapat mengatakan hasilnya lebih baik, karena semua koreksi-koreksi yaitu koreksi pental, koreksi struktur halus, dan koreksi Lamb dapat muncul dalam rumus spektrum tenaga. Dengan keberhasilan ini, kita lebih yakin lagi untuk memakai persamaan tersebut pada hadron.

Dalam kesempatan yang lain kami akan mencoba menguraikan pemakaian persamaan gelombang berkomponen tak-berhingga (teori grup dinamis) untuk menghitung berbagai besaran dari partikel-partikel yang berinteraksi kuat (hadron). Besaran-besaran itu misalnya, faktor bentuk, spektrum massa, cepat luruh parsiil dan lain-lain.

DAFTAR PUSTAKA

1 . Donald H. Menzel, "*Fundamental Formulas of Physics*", Dover Publication, Inc. (1960)

2 . Klaus Ziock, "*Basic Quantum Mechanics*", John-Willey, 1966.

3 . Sakurai J.J.,. "*Advanced Quantum Mechanics* ", Addison-Wesley Publishing Company Inc. (1967)

4 . Lamb W.E. , and Rutherford R.C., "*Phys. Rev. Vol.*72, 241", (1947)

5 . Fradkin D.M., "*American Journal of Phys. Vol 34, 314*", (1966).

6 . Nambu Y., "*Phys. Rev., Vol.160, 1171*", (1967).

7 . Fronsdal C., "*Phys. Rev. Vol. 156, 1665*", (1967).

8 . Barut A.O., "*Application of the Dynamical Group Theory to the Structure of Hadron*", Presented at the Theoretical Physics Institute, University of Colorado (1967)

9 . Barut A.O., "*Some Unusual Application of Lie Algebra Representations in Quantum Theory*", IC/72/79.

10. Barut A.O., *Dynamical Groups and Generalized Symmetries in Quantum Theory*, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand.

11. Barut A.O., and Baiquni A., *Theory of Relativistic H-Atom and Positronium*, IC/69/3.(1969).

12. Baiquni A., *Kemungkinan Formulasi Lamb Shift Dalam Rangka Teori Grup Dinamis*, PPGM - L 21 - 71. Puslit Gama BATAN (1971).

APPENDIX

Generator-generator grup SO (4, 2) dalam representasi non unitar berdemensi empat :

$$l_{ij} = \frac{i}{2} \gamma_i \gamma_j = l_k$$

$$l_{i4} = \frac{i}{2} \gamma_5 \gamma_i = a_i$$

$$l_{i5} = \frac{i}{2} \gamma_i \gamma_0 = m_i$$

$$l_{i6} = \frac{1}{2} \gamma_i$$

$$l_{45} = -\frac{i}{2} \gamma_5 \gamma_0 = t$$

$$l_{46} = -\frac{1}{2} \gamma_5 = s$$

$$l_{56} = \frac{1}{2} \gamma_0$$

di mana

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 , \qquad \gamma_i^2 = \gamma_5^2 = -I$$

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu} , \quad g_{\mu\mu} = (-, -, -, -, +, +,)$$