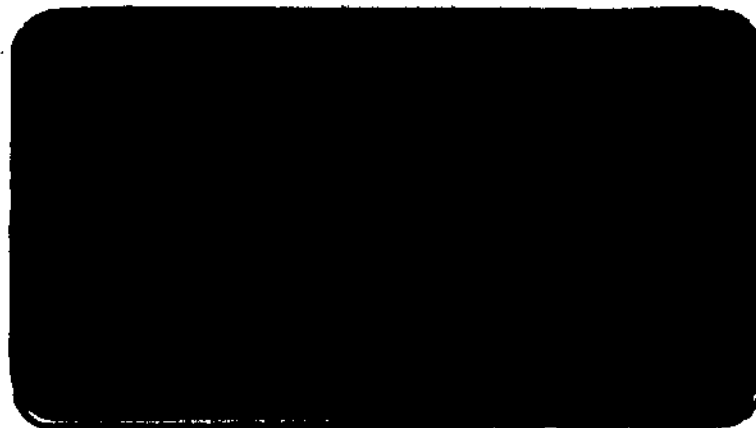




100

Relatório de Pesquisa e Desenvolvimento



Nº012/80
DEZEMBRO

**ANALISIS DE TENSIONES Y DEFORMACIONES
EN PROBLEMAS DE CREEP NO ESTACIONARIO**

REV. 0. 1. 2. 3

**ANALISIS DE TENSIONES Y DEFORMACIONES EN PROBLEMAS
DE CREEP NO ESTACIONARIO**

R.A. Feijóo

E. Taroco

J.N.C.Guerreiro

**Laboratório de Computação Científica - CNPq
Departamento de Pesquisa e Desenvolvimento
Rio de Janeiro - RJ**

RESUMEN

Se presentan en este trabajo un principio variacional y el algoritmo numérico correspondiente que permiten el análisis de tensiones y deformaciones en problemas de creep no estacionario.

Este algoritmo es empleado en un ejemplo de un cilindro infinito sometido a presión interna, comparando la solución obtenida con la solución del problema de creep estacionario.

1. Introducción

Es por todos conocido que el análisis estructural depende fundamentalmente del grado de conocimiento que se tenga del material a ser utilizado.

Por esta razón, es fundamental realizar un gran esfuerzo en esta dirección para que, a partir de los resultados experimentales, puedan plantearse ecuaciones constitutivas capaces de representar el comportamiento de los diversos materiales empleados en la actualidad.

Dentro de este aspecto, si bien en el área de la elasto-mecánica se ha logrado un gran desarrollo, lo mismo no puede decirse con respecto al comportamiento inelástico. Para estos materiales, variables tales como tiempo, temperatura, estado de tensiones y deformaciones, acumulación de deformaciones inelásticas, etc., deben formar parte de toda ley constitutiva que trate de definir el comportamiento inelástico.

El problema del diseño de componentes mecánicos, de geometría generalmente compleja, sometidos a elevadas temperaturas, condiciones e historia de cargas numerosas veces evaluadas con un cierto margen de imprecisión, etc., sumado al problema de la falta de conocimiento o datos sobre el comportamiento de los materiales inelásticos, es realmente un problema sumamente complejo. Afortunadamente no todo problema de diseño precisa llevar en cuenta todos los efectos, surgiendo así reglas empíricas que dan lugar, en general, a cálculos conservativos. Por otra parte, toda vez que se desee proyectar de manera de llevar en cuenta efectos térmicos, tiempo, acumulación de deformaciones, etc., resulta forzoso considerar comportamientos inelásticos capaces de atender a tales acciones.

Mucho del ímpetu en esta dirección se debe a la necesidad de analizar estructuras cada vez más sofisticadas, tales como las empleadas en reactores nucleares, turbinas, intercambiadores de calor, refinerías de petróleo, etc. En estas estructuras los componentes en general deben estar proyectados para largos períodos de utilización del orden de 20 a 30 años durante los cuales estarán sometidos a severas condiciones de temperatura, cargas, radiación, etc.

El surgimiento del computador conjuntamente con algoritmos numéricos, como el proporcionado por el Método de Elementos Finitos, permiten en la actualidad desenvolver programas de cálculo automático ca

paces de atender análisis estructurales por complejos que ellos sean. Cuéntase así con herramientas de cálculo poderosísimas pero, en contrapartida, dispónese de poca información en lo que se refiere al comportamiento inelástico de los materiales. Esta situación es bastante diferente de la existente dos décadas atrás donde, además del desconocimiento sobre el comportamiento inelástico de los materiales, no se disponía de adecuadas técnicas de cálculo. Esta fue una de las razones por las cuales los códigos introdujeron criterios y fórmulas de cálculo simplificados que actualmente tienden a ser modificados para dar lugar a criterios y fórmulas de cálculo "rigurosas" para atender el análisis inelástico.

En general, puede decirse que el análisis estructural inelástico de componentes mecánicos sometidos a severas condiciones de servicio, requiere considerar simultáneamente leyes de comportamiento elasto-plástico (independientes del tiempo) y leyes dependientes del tiempo para atender los efectos de creep. Las técnicas de análisis corriente suponen, a cada instante de tiempo t , que la deformación puede decomponerse en tres partes: una elástica, otra plástica y otra de creep, cada una de ellas independientes de las otras pero que en el algoritmo de cálculo son calculadas simultáneamente.

De lo anterior se sigue que para definir un comportamiento inelástico, además de la ley constitutiva elástica es necesario definir una ley elasto-plástica, para lo cual se precisa:

1. Un criterio inicial de plasticidad que establezca cuales son los estados de tensiones que dan origen a la iniciación de la fluencia plástica. Entre los criterios mas conocidos podemos citar el de Tresca y el de von Mises.
2. Una ley constitutiva plástica que relacione incrementos de deformación plástica con el estado de tensiones y el incremento de tensiones. Se tienen así leyes plásticas asociativas (el tensor de incremento de deformación plástica proviene de una función potencial de las tensiones) y leyes no asociativas.
3. Una ley de endurecimiento que establece la manera en que el criterio de plasticidad se modifica durante el proceso de deformación plástica. Se tiene así endurecimientos de tipo cinemático, isotrópico, etc.

El análisis elasto-plástico usando el M.E.F. está basado en ge-

neral en dos técnicas [1] que en última instancia consisten en una sucesión de soluciones elásticas. La primera técnica trata a la deformación plástica como una deformación inicial en un proceso incremental y la segunda define en cada incremento una nueva matriz de rigidez.

En cuanto al análisis de creep, son necesarias ecuaciones constitutivas dependientes del tiempo mas generales que las utilizadas para creep estacionario [1-6]. El creep primario debe incluirse toda vez que represente una parcela importante de la deformación total por creep.

Actualmente las ecuaciones constitutivas para creep mas utilizadas son del tipo ecuaciones de estado donde el tensor velocidad de deformación de creep depende del estado de tensiones, deformación, temperatura y tiempo [3]. Existen ecuaciones del tipo integral que permiten incluir la influencia de la historia del proceso en la respuesta del material. Sin embargo, débese notar que no existe información experimental suficiente para definir las.

Las ecuaciones para creep, dentro del tipo ecuaciones de estado, requieren elementos similares a los que permiten definir las ecuaciones elasto-plásticas. Así, se tiene:

1. Una ecuación de creep uniaxial describiendo el comportamiento uni-axial a tensión y temperatura constante.
2. Una ecuación de creep permitiendo generalizar el comportamiento anterior a estados múltiples de tensión.
3. Una ley de endurecimiento para permitir aplicar la ley anterior al caso de variaciones en el estado de tensiones y temperatura.

Diferentes expresiones para el item 1 han sido propuestas (véase [3]), lo mismo para el item 2 (véase [5]). Aquí debe resaltarse que las hipótesis para establecer la generalización del comportamiento uniaxial son enteramente idénticas a las de plasticidad (las deformaciones ocurren a volumen constante, la presión hidrostática no modifica las deformaciones inelásticas, etc.).

Para la solución de problemas de creep, distintos algoritmos numéricos basados en el Método de Elementos Finitos han sido propuestos [4-8] siendo el pionero en esta área el trabajo de Greenbaum y Rubinstein [8] realizado en 1968. Todos ellos se reducen a conside-

rar un análisis elástico incremental con deformación inicial dada por el incremento de deformación de creep. Este incremento es calculado a partir del estado inicial en cada paso.

Resumiendo podemos decir, que todo proyecto estructural dentro del rango inelástico requiere para un análisis riguroso de:

- i) Información experimental del comportamiento plástico y de creep;
- ii) Definición de las ecuaciones constitutivas elasto-plásticas y de creep ya mencionadas;
- iii) Un programa de cálculo automático capaz de permitir un análisis elasto-visco-plástico.

El presente trabajo cae dentro del contexto de ítem iii) anterior, ya que se muestra un algoritmo numérico que permite el análisis de creep y que cuenta con la ventaja de su fácil implementación computacional.

2. Problema de Valor de Contorno en Elasto-Creep

Según puede apreciarse en [3] las ecuaciones uniaxiales para creep toman la forma general:

$$\dot{\epsilon}^c = f_1(\sigma) f_2(\theta) f_3(t)$$

donde:

$\dot{\epsilon}^c$: es la velocidad de deformación de creep

θ : temperatura absoluta

t : tiempo

La ecuación constitutiva uniaxial anterior es común a la teoría conocida con el nombre de "time hardening theory", en virtud de la forma explícita en que el parámetro de tiempo t aparece en la expresión.

Existe una otra teoría ("strain-hardening theory) en la que la respuesta depende de la deformación inelástica acumulada, es decir:

$$\dot{\epsilon}^c = g_1(\sigma) g_2(\theta) g_3(\epsilon^c)$$

su generalización a estados múltiples de tensión en general, toma la forma:

$$\dot{\mathbf{E}}^C = g(\sigma_e, \theta, \epsilon_e^C) \mathbf{S}$$

mientras que para el endurecimiento por tiempo (time hardening) resulta en general:

$$\dot{\mathbf{E}}^C = f(\sigma_e, \theta, t) \mathbf{S}$$

donde:

$\dot{\mathbf{E}}^C$: tensor velocidad de deformación

σ_e : tensión equivalente

$\dot{\epsilon}_e^C$: velocidad de deformación equivalente

\mathbf{S} : tensor desviador de tensiones

A continuación y a efectos de formular el problema de elasto-creep introducimos la siguiente notación.

u	desplazamiento
v	velocidad
$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) = (\nabla u)^S$	tensor de deformación
\mathbf{E}^e	deformación elástica
\mathbf{E}^C	deformación por creep
\mathbf{T}	tensor de tensiones
$\mathbf{S} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I}$	tensor desviador
\mathbf{I}	tensor identidad
n	vector unitario normal al contorno Γ
\mathbf{D}	tensor de elasticidad de cuarta orden
$\nabla(\cdot)$	operador gradiente
(\cdot)	operador derivada respecto al tiempo

Teniendo presente lo anterior y dentro del contexto de la teoría de endurecimiento por tiempo (time hardening theory), el análisis del fenómeno de elasto-creep puede plantearse como sigue.

Sea un cuerpo que ocupa la región Ω de contorno Γ sometido a la acción de cargas de cuerpo $b = b(x, t)$ y de superficie $\bar{a} = \bar{a}(x, t)$, ac tuante esta última en la parte Γ_T de Γ y teniendo prescripto en la parte Γ_D del contorno Γ el desplazamiento $\bar{u} = \bar{u}(x, t)$. Luego, el pro-

blema de elasto-creep consiste en determinar los campos $u = u(x,t)$, $E = E(x,t)$, $E^C = E^C(x,t)$, $T = T(x,t)$ tales que satisfagan en cada instante de tiempo t las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \dot{T} + \dot{b} &= 0 \\ \dot{E} &= (\nabla \dot{u})^S \\ \dot{E} &= \dot{E}^e + \dot{E}^c \\ \dot{E}^e &= D^{-1} \dot{T} \\ \dot{E}^c &= f(\sigma_e, \theta, t) S \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega$$

con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \dot{T} n &= \dot{\bar{a}} & \text{ en } \Gamma_T \\ \dot{u} &= \dot{\bar{u}} & \text{ en } \Gamma_V \end{aligned}$$

siendo las condiciones iniciales definidas por los campos $u_0 = u(x,0)$, $E_0 = E(x,0)$, $E_0^C = E^C(x,0)$, $T_0 = T(x,0)$ que satisfacen las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} T_0 + b(x,0) &= 0 \\ E_0 &= (\nabla u_0)^S \\ E_0^C &= 0 \\ T_0 &= D E_0 \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega$$

con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} T_0 n &= \bar{a}(x,0) & \text{ en } \Gamma_T \\ u_0 &= \bar{u}(x,0) & \text{ en } \Gamma_V \end{aligned}$$

3. Formulación Variacional del Problema de Elasto-Creep

El problema de valor inicial y de contorno enunciado en la sección anterior puede plantearse a través de una formulación variacional equivalente.

Para ello defínanse los siguientes conjuntos:

$Kin_{\dot{u}} = \{\dot{u}; \dot{u} = \dot{u}(x, t) \text{ sea regular en } \Omega, \dot{u}|_{\Gamma_v} = \dot{\bar{u}}\}$, campo de velocidades cinemáticamente admisibles

$Var_{\dot{u}} = \{\hat{v}; \hat{v} = \hat{v}(x) \text{ sea regular en } \Omega, \hat{v}|_{\Gamma_v} = 0\}$, campo de variaciones cinemáticamente admisibles en la velocidad

Con estos campos definidos, el problema variacional equivalente al problema de elasto-creep consiste en:

"Determinar $\dot{u} \in Kin_{\dot{u}}$ tal que para cada instante de tiempo t se verifique:

$$\int_{\Omega} D(\dot{E} - \dot{E}^c) \cdot \dot{E} \, d\Omega = \int_{\Omega} \dot{b} \cdot \hat{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \dot{a} \cdot \hat{v} \, d\Gamma$$

para todo $\hat{v} \in Var_{\dot{u}}$ y donde las condiciones iniciales u_0, E_0, T_0 satisfacen:

$$\int_{\Omega} DE_0 \cdot \hat{E} \, d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot \hat{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_T} \bar{a} \cdot \hat{v} \, d\Gamma$$

para todo $\hat{v} \in Var_{\dot{u}}$, donde $\hat{E} = (\nabla \hat{v})^s$

4. Algoritmo Numérico y su Implementación via Elementos Finitos para el Problema de Elasto-Creep

La aplicación del Método de Elementos Finitos en la formulación variacional, definida en la sección anterior, conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$K \dot{d} - \dot{f}^c = \dot{f}$$

con las condiciones iniciales

$$K d_0 = f_0$$

donde:

K : matriz de rigidez global del sistema

\dot{f} : vector término independiente asociado al sistema de fuerzas actuante en el cuerpo

- \dot{f}^C : vector asociado a las deformaciones de creep
 \dot{d} : vector de velocidades nodales generalizadas
 d : vector de desplazamientos.

El algoritmo numérico para la resolución del sistema anterior puede realizarse a través de técnicas bien conocidas como son el Método de Euler, Runge-Kutta, etc. Por ejemplo si se utiliza el Método de Euler el algoritmo consiste en:

1. Calcúlase d_0 a partir del sistema $K d_0 = f_0$, es decir $d_0 = K^{-1} f_0$.
2. Conocido d_0 es inmediato el cálculo del estado de tensiones y deformaciones T_0, E_0 respectivamente.
3. Conocido el estado del cuerpo es posible calcular \dot{f}^C .
4. Calcúlase \dot{d} a partir de $K \dot{d} = \dot{f} + \dot{f}^C$, es decir $\dot{d} = K^{-1}(\dot{f} + \dot{f}^C)$.
5. Conocido \dot{d} es posible calcular \dot{T} y \dot{E} , tasas respecto al tiempo del estado de tensiones y deformaciones respectivamente.
6. El Método de Euler consiste en suponer que las tasas respecto al tiempo son constante en cada paso de integración Δt . Con esta hipótesis los desplazamientos, deformaciones y tensiones para $t_1 = \Delta t$ resultan iguales a:

$$d_1 = d_0 + \Delta t \dot{d}$$

$$E_1 = E_0 + \Delta t \dot{E}$$

$$T_1 = T_0 + \Delta t \dot{T}$$

siendo que la deformación de creep está dada por:

$$E_1^C = E_0^C + \Delta t \dot{E}^C = 0 + \Delta t \dot{E}^C$$

De esta manera, para el instante t se tiene completamente conocido el estado del cuerpo. Luego, el proceso de cálculo consistirá en retornar al ítem 3 y repetir los pasos 3-6 hasta alcanzar el tiempo de integración que se desea o bien, hasta que la solución corresponda a la solución estacionaria del problema cuando exista [6].

5. Aplicaciones Numéricas

El algoritmo presentado en la sección anterior es aplicado al problema de un cilindro infinito, de relación de radios externo interno igual a $r_e/r_i = 1.2402$, sometido a una presión interna p .

En el ejemplo estudiado se tomó como ecuación constitutiva para creep estacionario, la ecuación de Odqvist [3] con exponente $n=10$:

$$\dot{\epsilon}^c = \frac{3}{2} A \sigma_e^{n-1} S, \quad \sigma_e = \left(\frac{3}{2} S.S\right)^{1/2}$$

y para la ecuación de creep variable con el tiempo se adoptó la ecuación:

$$\dot{\epsilon}^c = \frac{3}{2} A \sigma_e^{n-1} S \dot{f}(t)$$

donde $f(t)$ es la función de endurecimiento por tiempo propuesta por Mc Vetty [3]:

$$f(t) = G(1 - e^{-Qt}) + Ht$$

adoptándose para las constantes los valores:

$$G = Q = H = 1$$

En este problema la tensión circunferencial, σ_θ , es la que más se modifica durante el proceso de deformación por creep. En la Figura 1 se ha graficado σ_θ/p a lo largo de la espesura del cilindro para diferentes valores de t .

Para el instante $t = 0$ el estado de tensiones coincide con la distribución elástica (respuesta elástica instantánea) y, a medida que el tiempo transcurre, la distribución de tensiones converge a la correspondiente al problema de creep estacionario para $n = 10$.

6. Conclusiones

Como conclusión, puede decirse que el cálculo de la respuesta de una estructura sometida al fenómeno de creep no representa por compleja que sea la ecuación constitutiva, un problema desde el punto de vista computacional.

Queda por tanto resaltar la necesidad del estudio, tanto expe-

rimental como teórico, de cuales son las ecuaciones constitutivas para creep propias de cada material. Actualmente, éste es el punto más importante y de nada adelanta disponer de una herramienta de cálculo poderosa si el modelo a utilizar no es capaz de representar el comportamiento real del material.

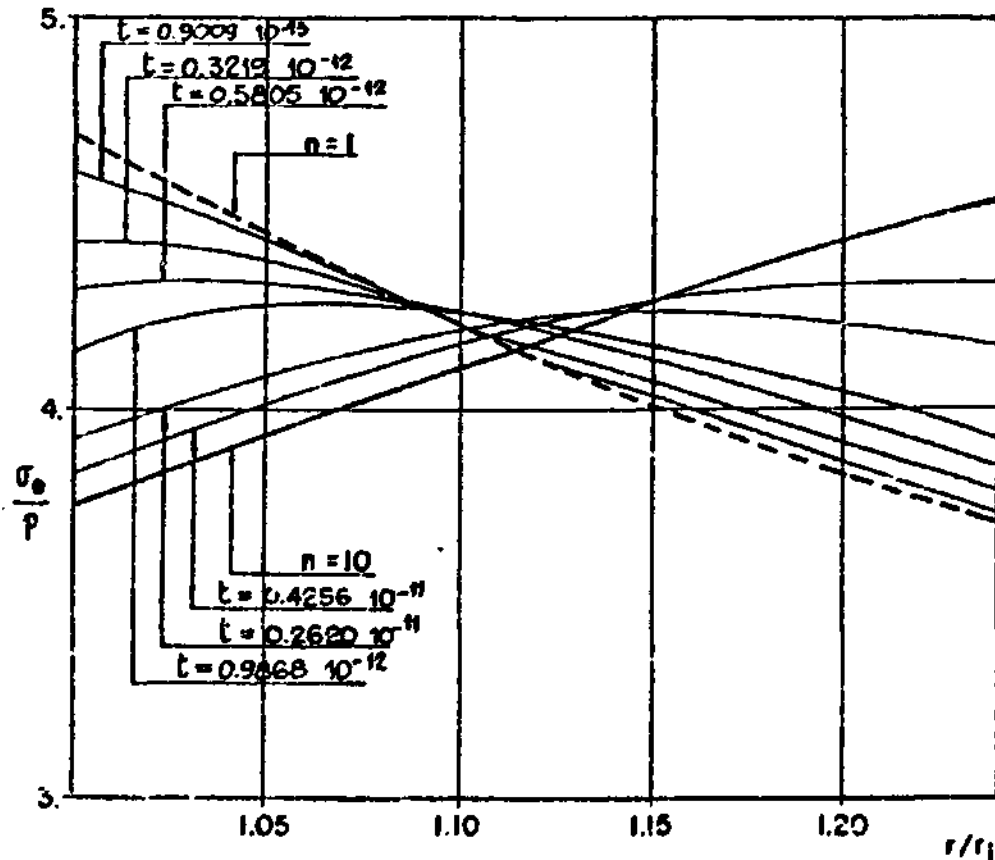


Figura 1. Distribución de tensiones circunferenciales en cilindro infinito de relación de radios $r_e/r_i = 1.2402$.

Agradecimientos

Los autores agradecen a CNEN y FINEP por el apoyo económico para la realización de este trabajo.

Bibliografía

- [1] Feijóo, R.A.; Taroco, E., "Introducción a plasticidad y su formulación variacional", II Escola de Mat. Aplicada, vol. 2,

- pág. 1-156, Laboratório de Computação Científica-CNPq, 1980.
- [2] Odqvist, F.K.G.; "From Stanford 1960 to Gothenburg 1970", IUTAM Symposium on Creep in Structures, Gothenburg 1970, Proceedings, Editor: Jean Hult, Springer-Verlag, N.Y., 1972.
- [3] Comitê da ABCM-RJ sobre Comportamento Inelástico de Materiais. "Influência dos parâmetros da lei de Norton na determinação de tensões e deformações em materiais que experimentam fenômenos de fluência", Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, Salvador 19 a 21 de Nov., 1980.
- [4] Taroco, E.; Feijão, R.A.; "Problema de creep en discos que giran a velocidad constante", Anales del V COBEM, Campinas, 1979.
- [5] Taroco, E.; Feijão, R.A.; "Introducción a viscoplasticidad y su formulación variacional", II Escola de Mat. Aplicada, Laboratório de Computação Científica-CNPq, vol. 2, pág. 157-337, 1980.
- [6] Feijão, R.A.; Taroco, E.; "Algoritmos numéricos en creep secundario", II Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 8 a 10 Dez., Curitiba, 1980.
- [7] Zienkiewicz, O.C.; "Visco-plasticity, plasticity and creep in elastic solids, a unified numerical solution approach", Int.J.Num.Meth.Engng., vol. 8, pág. 821-845, 1974.
- [8] Greenbaum, G.A.; Rubinstein, M.F.; "Creep analysis of a axisymmetric bodies using finite elements", Nuclear Engineering and Design, vol. 7, pág. 379-397, 1968.