

12/3/81

- i -

BR 810500  
V

NOTA TÉCNICA  
CTA - EAV/ NT -010/79  
01 Ago 79

"REACTORES COM MAIS DE UMA REGIÃO"

por

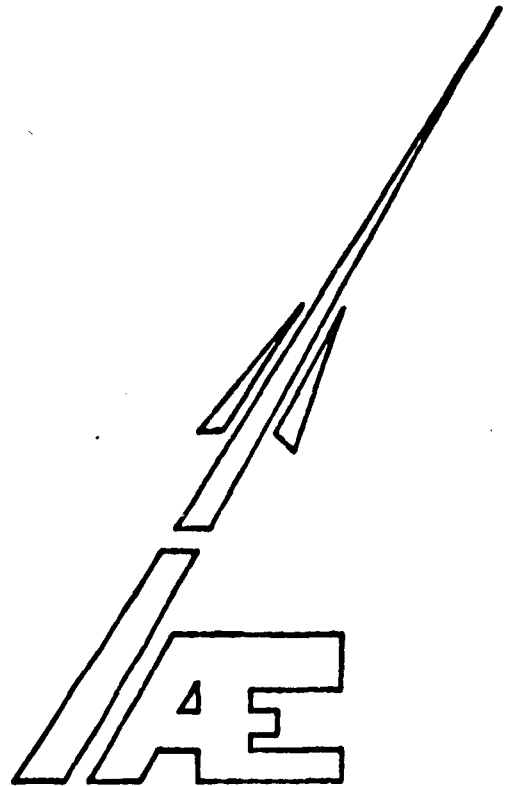
C. Moura Neto

e

R.P. Kesavan Nair

("MULTIREGION REACTORS")

Divisão de Estudos Avançados  
Instituto de Atividades Espaciais  
Centro Técnico Aeroespacial  
12.200-São José dos Campos-SP  
Brasil



REACTORES COM MAIS DE UMA REGIÃO

C. Moura Neto e R.P. Kesavan Nair

RESUMO

- O estudo de reatores refletidos pode ser feito empregando-se o método de difusão em grupos. As equações de conservação de nêutrons dentro dos intervalos podem ser escritas em termos de fluxos e constantes de grupo.
- Neste trabalho estuda-se um reator refletido a um e dois grupos, para uma geometria tipo placa, aplicando-se continuidade de fluxo e de corrente, na interface.
  - São apresentadas, no final, as soluções apropriadas para um reator cilíndrico infinito e um reator esférico.

ABSTRACT

- The study of reflected reactors can be done employing the multigroup diffusion method. The neutron conservation equations, inside the intervals, can be written by fluxes and group constants.
- In this work ~~is studied~~<sup>is studied</sup> a reflected reactor (one and two groups) for a slab geometry, applying the continuity of flux and current in the interface.
  - At the end of the work the appropriated solutions for a infinite cylindrical reactor and for a spherical reactor are presented.

## REATORES COM MAIS DE UMA REGIÃO

### 1. Teoria da difusão em grupos

Nos reatores homogêneos usou-se a teoria da idade de Fermi para a moderação de nêutrons. Entretanto, os reatores possuem refletores para diminuir-se a fração de fuga, além de regiões adicionais de material fértil. Assim, com mais de uma região não se pode empregar a teoria da idade. Neste caso, emprega-se o método de difusão por grupos.

Neste método, as energias da população neutrônica, no reator, são divididas em vários intervalos, definindo-se propriedades nucleares médias de nêutrons que pertencem a cada intervalo, mantendo-se a taxa de interação dentro dos intervalos. Estes parâmetros nucleares médios são chamados constantes de grupo. Os fluxos integrados sobre os intervalos de energia são chamados fluxos de grupo.

As equações de conservação de nêutrons dentro dos intervalos podem ser escritas em termos de fluxos e constantes de grupo. Estas equações são conhecidas como as equações de difusão em grupo.

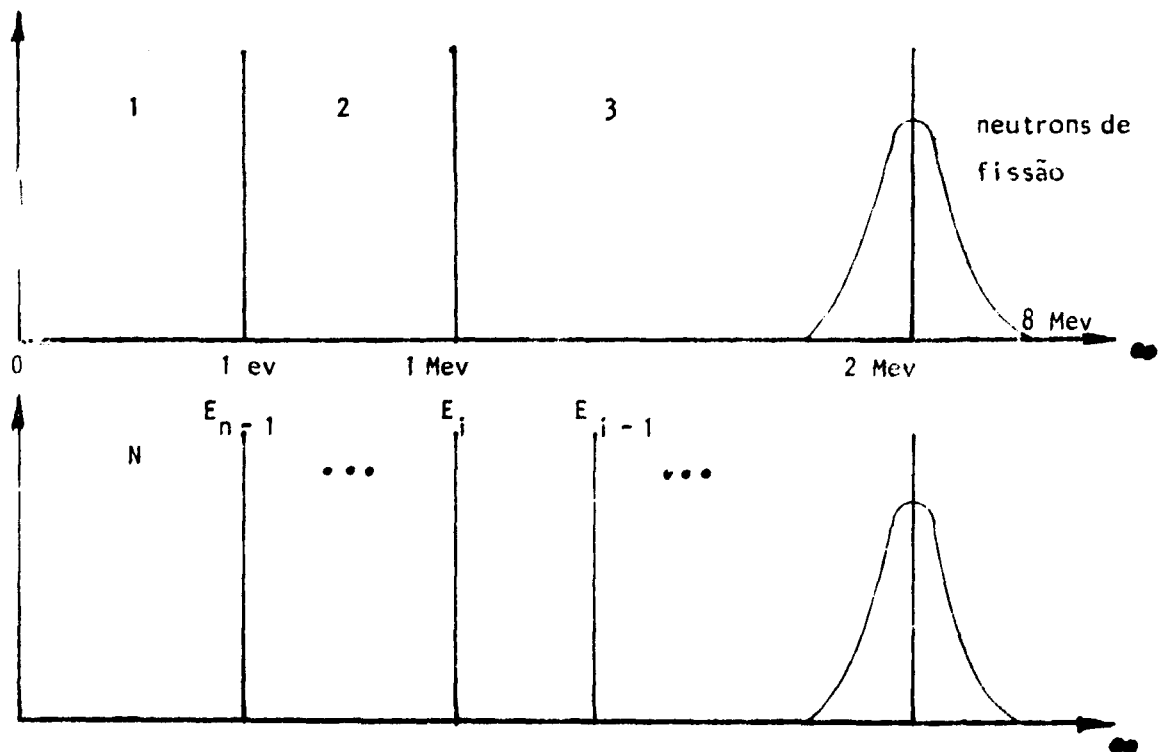


Figura 1

## 2. Fluxos e constantes de grupo

Seja a energia dos nêutrons no reator dividida em  $N$  intervalos (grupos). O grupo  $i$  alcança a energia entre  $E_i$  e  $E_{i-1}$  (ver Figura 2).

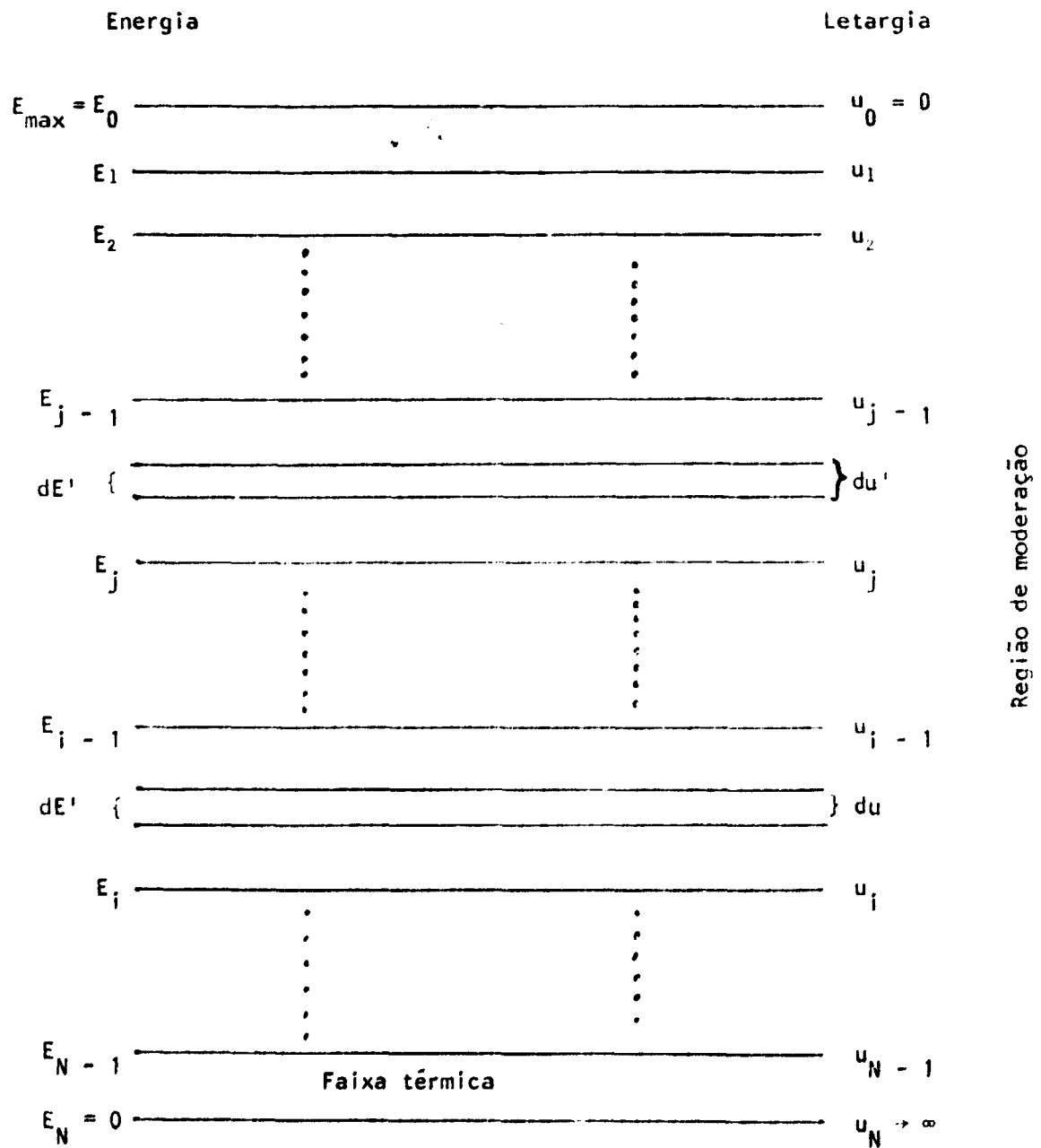


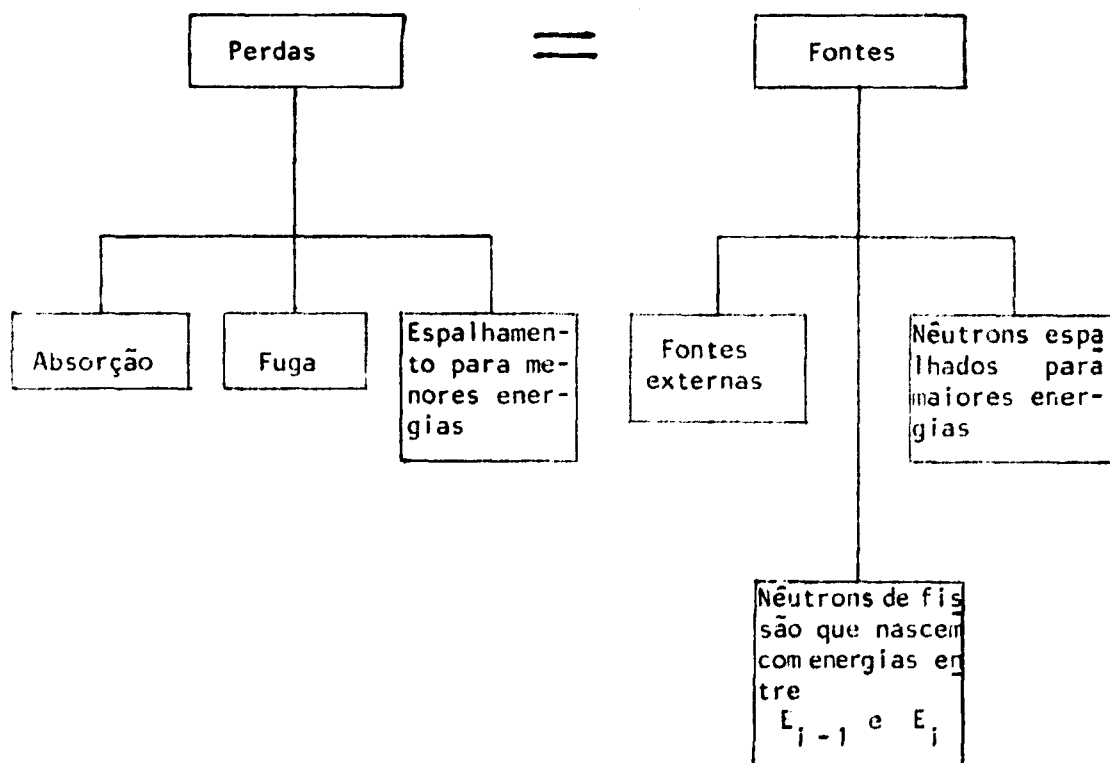
Figura 2: Estrutura dos grupos de energia

O espectro de energia é dividido em intervalos discretos, não necessariamente iguais. A equação de difusão será relativa a um grupo  $i$  definido entre  $E_{i-1} < E < E_i$ .

O fluxo no grupo  $i$  será definido por:

$$\phi_i(r) = \int_{E_i}^{E_{i-1}} \phi(r, E) dE \quad (1)$$

que é igual à definição de fluxo térmico. O último grupo alcança a faixa  $i$ , e no estado estacionário:



Será empregada a seguinte notação:

$$\int_i \equiv \int_{E_i}^{E_{i-1}}$$

A taxa de absorção no intervalo de energia entre  $E_i$  e  $E_{i-1}$  é dada por:

$$F_{ai}(r) = \int_i \phi(r, E) \Sigma_a(E) dE \quad (2)$$

$$F_{ai}(r) = \frac{\int_i \Sigma_a(E) \phi(r, E) dE \int_i \phi(r, E) dE}{\int_i \phi(r, E) dE}$$

Como a seção de choque de absorção média no grupo  $i$  é dada por:

$$\Sigma_{ai} = \frac{\int_i \Sigma_a(E) \phi(r, E) dE}{\int_i \phi(r, E) dE} \quad (3)$$

tem-se

$$F_{ai}(r) = \Sigma_{ai}(r) \phi_i(r) \quad (4)$$

Do mesmo modo pode-se definir a seção de choque das outras reações no grupo  $i$ :

$$\Sigma_{fi} = \frac{1}{\phi_i(r)} \int_i \phi(r, E) \Sigma_f(E) dE \quad (5)$$

$$\Sigma_{si} = \frac{1}{\phi_i(r)} \int_i \phi(r, E) \Sigma_s(E) dE \quad (6)$$

$$(\nu \Sigma_f)_i = \Sigma_{xi} = \frac{1}{\phi_i(r)} \int_i \phi(r, E) \nu \Sigma_f(E) dE \quad (7)$$

A taxa de fuga no grupo  $i$  é dada por:

$$L_i(r) = - \int_i D(E) \nabla^2 \phi(r, E) dE \quad (8)$$

$$L_i(r) = \frac{- \int_i D(E) \nabla^2 \phi(r, E) dE \int_i \nabla^2 \phi(r, E) dE}{\int_i \nabla^2 \phi(r, E) dE}$$

O coeficiente de difusão médio no grupo é definido tal que a taxa de fuga é mantida constante

$$D = \frac{\int_i D(E) \nabla^2 \phi(r, E) dE}{\int_i \nabla^2 \phi(r, E) dE} \quad (9)$$

tem-se:

$$L_i(r) = -D_i \nabla^2 \phi_i(r) \quad (10)$$

Como o coeficiente de difusão médio é considerado com peso do laplaciano do fluxo e admitindo-se separabilidade de energia e espaço no fluxo:

$$\phi(r, E) = f(r) \psi(E) \quad (11)$$

$$D_i = \frac{\int_i D(E) \nabla^2 \phi(r, E) dE}{\int_i \nabla^2 \phi(r, E) dE} = \frac{\int_i D(E) \psi(E) dE \nabla^2 f(r)}{\int_i \psi(E) dE \nabla^2 f(r)}$$

$$D_i = \frac{\int D(E) \psi(E) dE}{\int \psi(E) dE} \quad (12)$$

O erro introduzido não é apreciável, e a aproximação é bastante válida<sup>(1)</sup>.

A seção de choque de espalhamento de nêutrons entre grupos é um novo parâmetro que se encontra na teoria da difusão em grupos.

Considerando-se o grupo  $\underline{i}$ , pode-se perder nêutrons para os grupos  $\underline{i+1}$ ,  $\underline{i+2}$ , etc. A taxa de transferência de nêutrons do grupo  $\underline{j}$  para o grupo  $\underline{i}$  (Fig. 2) é dada por:

$$T_{j \rightarrow i}(r) = \int_i dE \int_j dE' \phi(r, E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) \quad (13)$$

onde  $\Sigma_s(E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E') P(E' \rightarrow E)$

$$T_{j \rightarrow i}(r) = \frac{\int_i dE \int_j dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E) \phi(r, E') \int_j \phi(r, E) dE'}{\int_j \phi(r, E) dE}$$

$$T_{j \rightarrow i}(r) = \Sigma_{j \rightarrow i} \phi_j(r) \quad (14)$$

onde  $\Sigma_{j \rightarrow i}$  é a seção de choque de transferência de nêutrons do grupo  $\underline{j}$  para o grupo  $\underline{i}$ , e  $P(E' \rightarrow E)$  é a probabilidade de transferência de  $E'$  para  $E$ .

Na estrutura de grupo é costume incluir-se toda a faixa térmica (energia 0 a 1 eV) no último grupo N. Neste caso, sabe-se que o espectro de fluxo nesta faixa é aproximadamente uma maxwelliana modificada. Portanto, todas as constantes referentes a este grupo tornam-se idênticas aos parâmetros térmicos já definidos.<sup>(1)</sup> Também, desde que o espalhamento para maiores energias aconteça somente dentro desta faixa, todas as seções de choque de transferência são zero para grupos de maiores energias. Nos outros grupos, o fluxo é aproximadamente proporcional a  $1/E$ , modificado pelas ressonâncias.

Suponha-se uma fonte com distribuição conhecida.

$$\text{Fontes externas} = \int_{\underline{i}} s(\underline{r}, E) dE = S_{\underline{i}}(\underline{r})$$

Fontes de fissão no grupo  $\underline{i}$ .

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} \text{Taxa de produção total} \\ \text{de nêutrons de fissão} \end{array} \right] &= \int_0^{\infty} v \Sigma_f(E) \phi(\underline{r}, E) dE = \\ &= \sum_{k=1}^N \int_k v \Sigma_f(E) \phi(\underline{r}, E) dE = \sum_{k=1}^N \left[ v \Sigma_f \right]_k \phi_k(\underline{r}) \end{aligned}$$

$$\text{onde } \left[ v \Sigma_f \right]_k = \Sigma_{\times k} = \frac{\int_k v \Sigma_f(E) \phi(\underline{r}, E) dE}{\int_k \phi(\underline{r}, E) dE}$$

O interesse é saber qual a fração de nêutrons de fissão que é produzida no intervalo  $dE$ . Esta fração é  $\chi(E) dE$ .

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{l} \text{Fração de nêutrons de} \\ \text{fissão produzida no} \\ \text{grupo } \underline{i} \end{array} \right] &= \chi_{\underline{i}} = \int_{\underline{i}} \chi(E) dE \\ \left[ \begin{array}{l} \text{Nêutrons espalhados} \\ \text{para energias maiores} \end{array} \right] &= \sum_{j < i}^N \Sigma_{j \rightarrow i} \phi_j \end{aligned}$$

A equação de conservação é então escrita como:

$$\begin{aligned} -D_{\underline{i}} \nabla^2 \phi(\underline{r}) + \underbrace{\Sigma_{a\underline{i}} \phi_{\underline{i}}(\underline{r})}_{\text{I}} + \underbrace{\sum_{j > i} \Sigma_{i \rightarrow j} \phi_j(\underline{r})}_{\text{II}} &= S_{\underline{i}}(\underline{r}) + \\ + \chi_{\underline{i}} \sum_{k=1}^N \Sigma_{\times k} \phi_k(\underline{r}) + \sum_{j < i} \Sigma_{j \rightarrow i} \phi_j(\underline{r}) & \quad (15) \\ j = 1, 2, 3, \dots, N & \end{aligned}$$

Ter-se-á, então, N equações diferenciais parciais de 2ª ordem não independentes.

Normalmente os termos I e II do 1º membro são combinados

$$(\Sigma_{a\underline{i}} + \sum_{j > i} \Sigma_{i \rightarrow j}) \phi_{\underline{i}}(\underline{r}) = \Sigma_{\underline{i}} \phi_{\underline{i}}(\underline{r})$$

Ao se empregar as definições dos fluxos definidas acima, chega-se à equação de conservação para o grupo  $\underline{i}$ :

$$\begin{aligned} -D_{\underline{i}} \nabla^2 \phi_{\underline{i}}(\underline{r}) + \Sigma_{\underline{i}} \phi_{\underline{i}}(\underline{r}) &= \\ = S_{o\underline{i}}(\underline{r}) + \chi_{\underline{i}} \sum_{k=1}^N (v \Sigma_f)_k \phi_k(\underline{r}) + \sum_{j < i}^{i+1} \Sigma_{j \rightarrow i} \phi_j(\underline{r}) & \quad (16) \end{aligned}$$



Os termos do lado esquerdo representam as perdas (fuga, absorção e taxa de espalhamento para outros grupos de energias menores  $j > i$ ). Os termos do lado direito são as fontes do grupo  $i$ . Os primeiro termo é devido às fontes externas, se forem presentes; o segundo termo representa os nêutrons de fissão que nascem com energia dentro do grupo  $i$ , sendo  $\sum_k (\nu \Sigma_f)_k \phi_k(r)$  a taxa de produção de nêutrons por fissão em todos os grupos entre os quais a fração  $\chi_i$  surge no grupo  $i$ ; o último termo representa a taxa de espalhamento de nêutrons para o grupo  $i$  dos grupos de maior energia ( $j < i$ ). Observe-se que:

$$S_{0i}(r) = \int_i S_0(r, E) dE \quad (17)$$

$$\chi_i = \int_i \chi(E) dE \quad (18)$$

onde  $S_0(r, E)$  é a distribuição espectral e espacial da fonte externa e  $\chi(E)$  é o espectro de nêutrons de fissão.

São empregados um e dois grupos para a obtenção de soluções analíticas aproximadas. Para cálculos mais precisos, emprega-se métodos multigrupos.

### 3. Teoria do reator refletido a um grupo

A aproximação mais simples da equação de difusão em grupos será aquela com um único grupo, com todas as constantes médias sobre a faixa de energia entre 0 e 12 MeV. No processo de se calcular os valores médios, emprega-se o espectro maxwelliano modificado até 1 eV e o fluxo  $1/E$  para maiores energias, levando-se em consideração as ressonâncias pelas aproximações apropriadas (NR ou NR IM). Então, a equação de difusão em grupos se reduz para uma única equação<sup>(1)</sup>.

O fato que os nêutrons de fissão realmente apareçam nas altas energias será ignorado, i.e. esses nêutrons serão emitidos com energias térmicas.

#### Equação de um grupo

$$- D_1 \nabla^2 \phi_1 + \Sigma_{a1} \phi_1 = \nu \Sigma_{f1} \phi_1 + S_1 \quad (19)$$

$$- D_1 \nabla^2 \phi_1 + \Sigma_{a1} \phi_1 = \Sigma_{x1} \phi_1 + S_1 \quad (20)$$

Em geometria planar escreve-se:

$$- D_1 \nabla^2 \phi_1(x) - (v \Sigma f_1 - \Sigma a_1) \phi_1(x) = S_1 \quad (21)$$

$$- \frac{d^2 \phi_1(x)}{dx^2} - \left[ \frac{v \Sigma f_1 - 1}{\Sigma a_1} \right] \phi_1(x) = \frac{S_1}{D_1}$$

$$- \frac{d^2 \phi_1(x)}{dx^2} - \left[ \frac{k_\infty - 1}{L_1^2} \right] \phi_1(x) = \frac{S_1}{D_1}$$

$$- \frac{d^2 \phi_1(x)}{dx^2} = \frac{S_1}{D_1} + B_M^2 \phi_1(x) \quad (22)$$

onde  $\frac{v \Sigma f_1}{\Sigma a_1} = k_\infty$

$$\frac{D_1}{\Sigma a_1} = L_1^2$$

$$\frac{k_\infty - 1}{L_1^2} = B_M^2 \quad (\text{"buckling" material})$$

Considerando-se a ausência de fonte

$$\frac{d^2 \phi_1(x)}{dx^2} = - B_M^2 \phi_1(x) \quad (23)$$

obter-se-ã as soluções  $\phi_1(x) = \begin{cases} \text{sen } B x \\ \text{cos } B x \end{cases}$

A solução sen B x não é permitida pois  $\phi(\bar{a}) = 0$ . Logo  $\phi(x) = \text{cos } B_n x$  onde  $B_n = \frac{n\pi}{2}$ .

O valor n = 1 será a única solução possível pois para valores maiores che-gar-se a um valor negativo para o fluxo. Assim  $B_n = \frac{\pi}{2a}$ .

$$B_n^2 = B_g^2 = \left[ \frac{\pi}{2a} \right]^2 \quad \text{"buckling" geométrico}$$

Condição de criticalidade  $B_M = B_g$  ("buckling" material = "buckling" geométrico).

$$\frac{k_{\infty} - 1}{L_1^2} = \left( \frac{\pi}{2a} \right)^2 \quad (24)$$

ou

$$\frac{k_{\infty}}{1 + \left( \frac{\pi}{2a} \right)^2 L_1^2} = 1 \quad (25)$$

O caso mais simples é o do reator tipo placa infinito, com um núcleo de espessura  $2a$  e com um refletor de espessura  $b$  de ambos os lados (Figura 3).

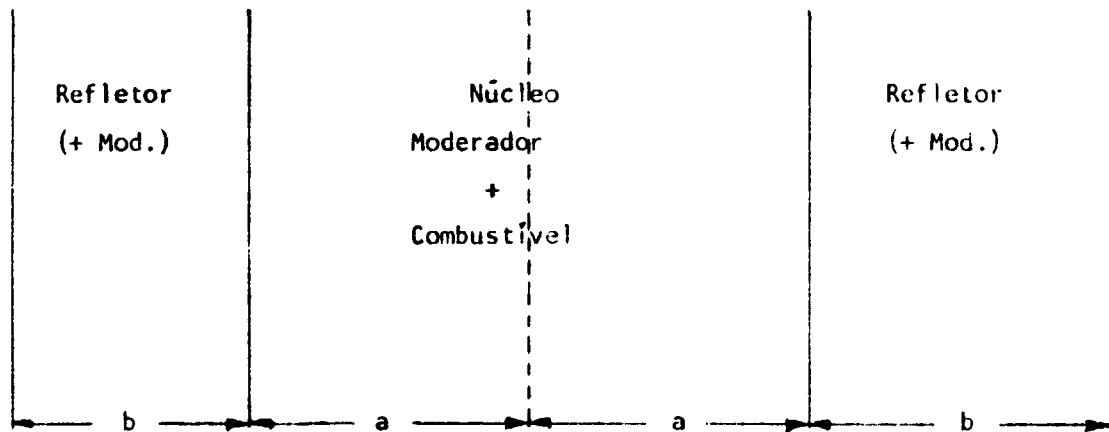


Figura 3: Reator refletido tipo placa

A equação de difusão num grupo toma as seguintes formas no núcleo (c) e no refletor (R); para o caso mostrado na Figura 3:

$$\text{Núcleo: } -D_c \frac{d^2 \phi_c(x)}{dx^2} + \Sigma_{ac} \phi_c(x) = \nu \Sigma_{fc} \phi_c(x) \quad (26)$$

$$\text{Refletor: } -D_R \frac{d^2 \phi_R(x)}{dx^2} + \Sigma_{aR} \phi_R(x) = 0 \quad (27)$$

A equação (26) é mais convenientemente escrita como:

$$\frac{d^2 \phi_c(x)}{dx^2} + B_c^2 \phi_c(x) = 0 \quad (28)$$

$$\text{onde } B_c^2 = \frac{k_{\infty} - 1}{L^2} = \frac{\frac{\nu \Sigma_{fc}}{\Sigma_{ac}} - 1}{\frac{D_c}{\Sigma_{ac}}} \quad (29)$$

('buckling' material do núcleo)

A equação (20) admite duas soluções:

$$\phi_C(x) = \begin{cases} A \operatorname{sen} B_C x & 0 < |x| < a \\ C \cos B_C x & \end{cases} \quad (30)$$

mas, devido à simetria não se admite a solução em seno. Logo

$$\phi_C(x) = A \cos B_C x \quad 0 < |x| < a \quad (31)$$

Reescrevendo-se agora a equação (27) para o refletor:

$$\frac{d^2 \phi_R(x)}{dx^2} - K_R^2 \phi_R(x) = 0 \quad (32)$$

onde  $K_R^2 = \frac{1}{L_1^2} = -B_R^2$  é o "buckling" material para o refletor.

A equação (32) admite as soluções

$$\phi_R(x) = \begin{cases} A' \operatorname{sen} h K_R x \\ C' \cos h K_R x \end{cases} \quad (33)$$

Considere-se que o fluxo seja zero em  $a+b$ , ou  $\phi_R(a+b) = 0$ . Logo, a solução em  $\cos h$  não é aceitável.

$$\phi_R(x) = A' \operatorname{sen} h K_R (a+b-x) \quad 0 < x < a+b \quad (34)$$

As constantes A e A' devem ser determinadas das condições de contorno na interface  $x = a$ , isto é, as continuidades de fluxo e de corrente.

1º) Continuidade de fluxo (em  $x=a$ )

$$\phi_C(a) = \phi_R(a)$$

$$A \cos B_C a = A' \operatorname{sen} h K_R b \quad (35)$$

2º) Continuidade de corrente (em  $x=a$ )

$$J_C(a) = J_R(a)$$

$$-D_C \frac{d\phi_C}{dx} = -D_R \frac{d\phi_R}{dx}$$

$$D_C A B_C (\operatorname{sen} B_C a) = D_R A' K_R (\cos h K_R b) \quad (36)$$

Dividindo-se as equações (35) e (36) obtém-se:

$$\frac{A \cos B_c a}{A D_c B_c \sin B_c a} = \frac{A' \operatorname{sen} h K_R b}{A' D_R K_R \cos h K_R b}$$

$$B_c D_c \operatorname{tg} B_c a = D_R K_R \operatorname{ctg} h K_R b \quad (37)$$

A equação (37) fornece uma relação entre o "buckling" e a espessura da placa, que deve ser satisfeita para que o reator seja crítico.

Suponha-se, por exemplo, que as propriedades e a espessura do refletor são especificadas. Se as propriedades do núcleo são fornecidas,  $B_c^2$  é dado pela equação (29) e a espessura crítica do núcleo pode ser resolvida pela solução da equação (37), diretamente para  $a$ . Por outro lado, se  $a$  é fornecido,  $B_c^2$  pode ser encontrado da equação (37), numericamente ou graficamente.

Assim:

a) reator não refletido com  $B_c^2$  conhecido.

$$\text{Condição de criticalidade: } B_g^2 = B_M^2 = \left[ \frac{\pi}{2a} \right]^2$$

$$(a)_{\text{crit}} = \frac{\pi}{2B_M} \quad (38)$$

b) reator refletido com composição e  $b$  fixos.

Acha-se o valor de  $a$  pela equação (37)

$$\operatorname{tg} B_c a = \frac{D_R K_R}{D_c B_c} \operatorname{ctg} h K_R b$$

$$a = \frac{\pi}{2B_c} (1 - \epsilon) \quad (39)$$

Comparando-se a equação (39) com a espessura crítica da placa não refletida, observa-se que o refletor diminui a espessura necessária para a criticalidade por um fator  $\frac{\epsilon}{B_c}$ . Esta economia de tamanho do núcleo causada pelo refletor é denominada "reflector savings" (economia por refletor), ou seja:

$$\delta_{\infty} = \left[ \begin{array}{c} a_{\text{crit do reator}} \\ \text{não refletido} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} a_{\text{crit do reator}} \\ \text{com refletor infinito} \end{array} \right]$$

$$\delta_{\infty} = \left[ \begin{array}{l} a_{\text{crit}} \text{ do reator} \\ \text{n\~{a}o refletido} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{l} a_{\text{crit}} \text{ do reator com re-} \\ \text{fletor de espessura } \underline{b} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{"reflector"} \\ \text{"savings"} \end{array} \right]$$

$$\text{tg} B_c a = \frac{D_R K_R}{D_c B_c} \text{ctg} K_R b$$

$$\text{Quando } b \rightarrow \infty \quad \text{tg} B_c a = - \frac{D_R K_R}{D_c B_c} \quad (40)$$

$$B_c a = \frac{\pi}{2} - \epsilon \quad (41)$$

$$a = \frac{\pi}{2B_c} - \frac{\epsilon}{B_c}$$

$$\delta_{\infty} = \frac{\pi}{2B_c} - \frac{\pi}{2B_c} - \frac{\epsilon}{B_c} = - \frac{\epsilon}{B_c} \quad (42)$$

A forma do "reflector savings" quando o refletor é muito grande ou muito pequeno pode ser expressa das maneiras abaixo:

a) quando  $b \rightarrow \infty$

$$B_c \text{atg} B_c a = \frac{D_R K_R}{D_c} \text{ctgh} K_R b \quad (43)$$

$$\text{tg} B_c a = \frac{D_R K_R}{D_c}$$

$$a = \frac{1}{B_c} \text{tg}^{-1} \frac{D_R K_R}{D_c B_c} \quad (\text{sem refletor}) \quad (44)$$

$$\text{Logo: } \delta(b \rightarrow \infty) = \frac{\pi}{2B_c} - \frac{1}{B_c} \text{tg}^{-1} \frac{D_R K_R}{D_c B_c}$$

$$\delta(b \rightarrow \infty) = \frac{1}{2B_c} \left[ 1 - \frac{\text{tg}^{-1} \frac{D_R K_R / D_c B_c}{\pi/2}}{\pi/2} \right] \quad (45)$$

b) quando  $b \rightarrow 0$

$$\text{ctgh} K_R b \rightarrow \frac{1}{K_R b}$$

$$\text{tg} B_c a = \frac{D_R K_R}{D_c} \cdot \frac{1}{K_R B_c}$$

$$a = \frac{1}{B_c} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{D_R K_R}{(b K_R) D_c \beta_c} \right) \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \text{Logo: } \delta(b \rightarrow 0) &= \frac{\pi}{2B_c} - \frac{1}{B_c} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{bB_c} \\ \delta(b \rightarrow 0) &= \frac{\pi}{2B_c} \left[ 1 - \frac{\operatorname{tg}^{-1} 1/bB_c}{\pi/2} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

Voltando-se agora à equação (37), pode-se rearranjá-la na forma:

$$B_c a \operatorname{tg} B_c a = \frac{D_R a}{D_c b} K_R b \operatorname{ctg} h K_R b \quad (48)$$

que é uma equação transcendental e cuja solução pode ser conseguida por método dos gráficos ou iterativos. O lado direito (LD) é independente da espessura do núcleo. A Figura 4 mostra a variação do lado esquerdo (LE) da equação (39) contra  $B_c a$ , bem como o lado direito. O número infinito das soluções possíveis é dado pelas intersecções das duas curvas (auto valores).

Tomando-se novamente as equações

$$\varphi_c(x) = A \cos B_c x \quad 0 < |x| < a$$

$$\varphi_R(x) = C \operatorname{senh} K_R (a + b - x)$$

pode-se obter uma relação para A e C:

$$A \cos B_c a = C \operatorname{senh} K_R b \quad (a = x) \quad (49)$$

$$C = \frac{A \cos B_c a}{\operatorname{senh} K_R b} \quad (50)$$

e o fluxo fica:

$$\varphi_R(x) = A \left[ \frac{\cos B_c x}{\operatorname{senh} K_R b} \right] \operatorname{senh} K_R (a + b - x) \quad (51)$$

$$a < |x| < a + b$$

A constante A pode tomar qualquer valor, indicando que, no estado estacionário, pode-se manter qualquer nível de fluxo. Assim, A pode ser relacionado ao nível de potência do reator.

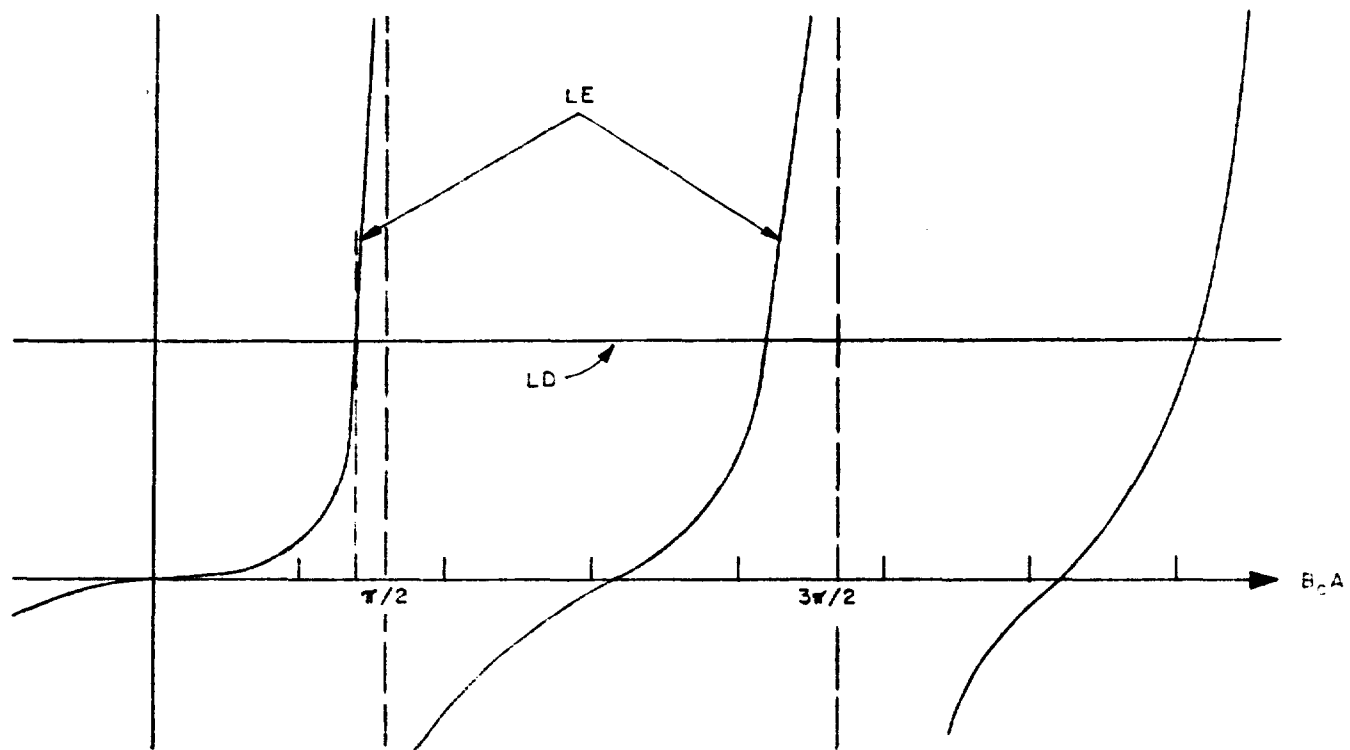


Fig. 4 : O lado direito (LD) e o lado esquerdo (LE) da equação crítica a um grupo para um reator refletido tipo placa (Equação 39).



### Teoria de difusão em dois grupos

A inclusão dos nêutrons rápidos e térmicos em um único grupo, o emprego de valores médios de constantes para todos os nêutrons prejudica a importância do processo de moderação. Portanto, nos reatores térmicos, é mais desejável considerar os nêutrons em dois grupos separados: um varrendo a faixa térmica (energias abaixo de  $5 \text{ kT} \approx 1 \text{ eV}$ ) e outro cobrindo as energias maiores (até  $12 \text{ MeV}$ ). Neste caso, as equações de difusão de nêutrons em dois grupos ficam:

$$-D_1 \nabla^2 \phi_1(r) + (\Sigma_{a1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2}) \phi_1(r) = \chi_1 F(r) \quad (52)$$

$$-D_2 \nabla^2 \phi_2(r) + \Sigma_{a2} \phi_2(r) = \Sigma_{1 \rightarrow 2} \phi_1(r) + \chi_2 F_f(r) \quad (53)$$

onde  $F_f(r) = \nu \Sigma_f \phi_1(r) + \nu \Sigma_f \phi_2(r)$

Todos os nêutrons de fissão nascem com energias bem maiores que as energias do grupo térmico (2) e, portanto,  $\chi_1 = 1$  e  $\chi_2 = 0$ . Também, o número de fissões rápidas é bem maior que o de fissões térmicas.

Fazendo-se

$$\Sigma_1 = \Sigma_{a1} + \Sigma_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{seção de choque de remoção do grupo 1})$$

$$\Sigma_2 = \Sigma_{a2}$$

tem-se:

$$-D_1 \nabla^2 \phi_1(r) + \Sigma_1 \phi_1(r) = \nu \Sigma_2 \phi_2(r) \quad (54)$$

$$-D_2 \nabla^2 \phi_2(r) + \Sigma_{a2} \phi_2(r) = \Sigma_{1 \rightarrow 2} \phi_1(r) \quad (55)$$

### Observações:

$$1) F_f(r) = \nu \Sigma_{f1} \phi_1(r) + \nu \Sigma_{f1} \phi_1(r) \quad (0-1)$$

onde  $\nu \Sigma_{f2} \phi_2(r) \gg \nu \Sigma_{f1} \phi_1(r)$

$$F_f(r) = \nu \Sigma_{f2} \phi_2(r) \left[ 1 + \frac{\nu \Sigma_{f1} \phi_1(r)}{\nu \Sigma_{f2} \phi_2(r)} \right] = \epsilon \nu \Sigma_{f2} \phi_2(r) \quad (0-2)$$

Como  $\epsilon \approx 1$  (fator de fissão rápida)

$$F_f(r) \approx v \Sigma_f \phi(r) \quad (0-3)$$

2) A equação (54) sem fonte de nêutrons de fissão fica:

$$D_1 \nabla^2 \phi_1(r) - \Sigma_1 \phi_1(r) = 0 \quad (0-4)$$

Comparando-se com a equação de um grupo  $\frac{D_1}{\Sigma_1} = L_1^2$ , valor análogo à área de difusão.

$$\text{Assim} \quad \nabla^2 \phi_1(r) - \frac{\Sigma_1}{D_1} \phi_1(r) = \frac{S(r)}{D_1}$$

$$\nabla^2 \phi_1(r) - K_1^2 \phi_1(r) = \frac{S(r)}{D_1} \quad (0-5)$$

que é exatamente a equação de difusão que sempre foi tratada.

$$3) \quad -D_{th} \nabla^2 \phi_{th}(r) + \Sigma_a^{th} \phi_{th}(r) = S_{th}(r) \quad (0-6)$$

$$-\nabla^2 \phi_{th}(r) + \frac{\Sigma_a^{th}}{D_{th}} \phi_{th}(r) = \frac{S_{th}(r)}{D_{th}} \quad (0-7)$$

Sabe-se que:

$$L_{th}^2 = \frac{D_{th}}{\Sigma_a^{th}} = \frac{1}{6} \bar{r}_{th}^2$$

que é a distância média quadrada que os nêutrons térmicos percorrem antes de serem absorvidos ou saírem do grupo, ou:

$$L_1^2 = \frac{1}{6} \bar{r}_1^2 \quad (0-8)$$

sendo  $\bar{r}_1^2$  a distância média quadrada percorrida pelos nêutrons do grupo 1, antes de serem removidos do grupo 1 por absorção, ou transferência para o grupo 2.

Assim, o conceito físico é  $L_1^2 \approx \tau_{th}$ , embora não sejam numericamente iguais.

4) Considerando-se as equações (54) e (55) em um meio infinito

$$- D_1 \nabla^2 \phi_1(r) = 0 \quad (0-9)$$

$$- D_2 \nabla^2 \phi_2(r) = 0 \quad (0-10)$$

Logo:  $\Sigma_1 \phi_1(r) = \nu \Sigma_{f2} \phi_2(r) \quad (0-11)$

$$\Sigma_1 \phi_1(r) = \Sigma_{12} \phi_1(r) \quad (0-12)$$

$\Sigma_1 \phi_1(r)$  = taxa de remoção de nêutrons do grupo 1 por absorção mais transferência para o grupo 2.

$\Sigma_{12} \phi_2(r)$  = taxa de transferência.

$$p = \frac{\Sigma_{12} \phi_1(r)}{\Sigma_1 \phi_1(r)} = \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_1} = \text{probabilidade do nêutron ser transferido para o grupo 2 na colisão.}$$

Em outras palavras:  $p$  = probabilidade de escape de ressonância na teoria da idade de Fermi.

Voltando-se às equações (54) e (55)

$$- D_1 \nabla^2 \phi_1(r) + \Sigma_1 \phi_1(r) = \nu \Sigma_{f2} \phi_2(r)$$

$$- D_2 \nabla^2 \phi_2(r) + \Sigma_2 \phi_2(r) = \Sigma_{12} \phi_1(r)$$

Dividindo-se por  $D$  e sabendo-se que  $\frac{\Sigma}{D} = K$ , chega-se a duas equações diferenciais parciais de 2ª ordem acopladas:

$$- \nabla^2 \phi_1(r) + K_1^2 \phi_1(r) = \frac{\nu \Sigma_{f2} \phi_2(r)}{D_1} \quad (56)$$

$$- \nabla^2 \phi_2(r) + K_2^2 \phi_2(r) = \frac{\Sigma_{12} \phi_1(r)}{D_2} \quad (57)$$

Vai-se agora estudar estas duas equações para uma geometria tipo placa, em um reator de espessura  $2a$  e refletor com espessura  $b$ .

Operando-se a equação (57) por  $\nabla^2$ :

$$\begin{aligned}
 -\nabla^4 \phi_2(r) + \frac{1}{L_2^2} \nabla^2 \phi_2(r) &= \frac{\Sigma_{12}}{D_2} \nabla^2 \phi_1(r) \\
 -\nabla^4 \phi_2(r) + \frac{1}{L_2^2} \nabla^2 \phi_2(r) &= \frac{\Sigma_{12}}{D_2} \left[ \frac{1}{L_2^2} \phi_1(r) - \frac{v\Sigma_{f2}}{D_1} \phi_2(r) \right] \\
 -\nabla^4 \phi_2(r) + \frac{1}{L_2^2} \nabla^2 \phi_2(r) &= - \left[ \frac{\Sigma_{12}}{D_2} \frac{v\Sigma_{f2}}{D_1} \right] \phi_2(r) + \left[ \frac{\Sigma_{12}}{D_2 L_2^2} \right] \phi_1(r) \quad (58)
 \end{aligned}$$

Como:  $\frac{\Sigma_{12}}{D_2} \phi_1(r) = -\nabla^2 \phi_2(r) + \frac{1}{L_2^2} \phi_2(r)$

$$-\nabla^4 \phi_2(r) + \frac{1}{L_2^2} \nabla^2 \phi_2(r) = - \left[ \frac{\Sigma_{12}}{D_2} \frac{v\Sigma_{f2}}{D_1} \right] \phi_2(r) - \left[ \nabla^2 \phi_2(r) + \frac{1}{L_2^2} \phi_2(r) \right] \frac{1}{L_1^2}$$

$$\nabla^4 \phi_2(r) - \nabla^2 \phi_2(r) \left[ \frac{1}{L_2^2} + \frac{1}{L_1^2} \right] - \left[ \frac{v\Sigma_{f2}}{D_2} \frac{\Sigma_{12}}{D_1} - \frac{1}{L_1^2 L_2^2} \right] \phi_2(r) = 0$$

$$\nabla^4 \phi_2(r) - \nabla^2 \phi_2(r) \left[ \frac{L_1^2 + L_2^2}{L_1^2 L_2^2} \right] - \left[ \frac{v\Sigma_{f2}/\Sigma_{a2}}{D_2/\Sigma_a} \frac{\rho\Sigma_1}{D_1} - \frac{1}{L_1^2 L_2^2} \right] \phi_2(r) = 0$$

Como:  $\Sigma_{a2} = \Sigma_2$

$$\Sigma_{12} = \rho\Sigma_1$$

$$\frac{v\Sigma_{f2}}{\Sigma_{a2}} \rho = k_{\infty}$$

tem-se

$$\nabla^4 \phi_2(r) - \left[ \frac{L_1^2 + L_2^2}{L_1^2 L_2^2} \right] \nabla^2 \phi_2(r) - \left[ \frac{k_{\infty} - 1}{L_2^2 L_1^2} \right] \phi_2(r) = 0 \quad (59)$$

Comparando-se a equação (59) com:

$$(\nabla^2 + \mu^2) (\nabla^2 - \lambda^2) \phi \equiv \left[ \nabla^4 - (\lambda^2 + \mu^2) \nabla^2 + \lambda^2 \mu^2 \right] \phi = 0 \quad (60)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são reais, pode-se definir:

$$\lambda^2 - \mu^2 = \frac{L_1^2 + L_2^2}{L_1^2 L_2^2} \quad \text{com } k_\infty > 1 \quad (61)$$

$$\mu^2 > 0$$

$$\lambda^2 > 0$$

$$\mu^2 = \frac{k_\infty - 1}{L_1^2 L_2^2} \cdot \frac{1}{\mu^2} \quad (62)$$

Assim:

$$\frac{k_\infty - 1}{L_1^2 L_2^2} \cdot \frac{1}{\mu^2} - \mu^2 - \frac{L_1^2 + L_2^2}{L_1^2 L_2^2} = 0 \quad (63)$$

$$\mu^4 + \frac{L_1^2 + L_2^2}{L_1^2 L_2^2} \mu^2 - \frac{k_\infty - 1}{L_1^2 L_2^2} = 0$$

$$\mu^2 = -\frac{(L_1^2 + L_2^2)}{2L_1^2 L_2^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(L_1^2 + L_2^2)^2}{L_1^2 L_2^2} + 4 \frac{k_\infty - 1}{L_1^2 L_2^2}}$$

$$\mu^2 = \frac{-(L_1^2 + L_2^2) \pm \sqrt{(L_1^2 + L_2^2)^2 + 4(k_\infty - 1)L_1^2 L_2^2}}{2L_1^2 L_2^2} \quad (64)$$

Da mesma forma:

$$\lambda^2 = \frac{-(L_1^2 + L_2^2) \mp \sqrt{(L_1^2 + L_2^2)^2 + 4(k_\infty - 1)L_1^2 L_2^2}}{2L_1^2 L_2^2} \quad (65)$$

Sabe-se que:

$$(\nabla^2 + \mu^2) (\nabla^2 - \lambda^2) \phi = 0 \quad (66)$$

Já se encontrou os valores de  $\mu^2$  e  $\lambda^2$ , constantes do material.

Supondo-se agora

$$\phi = AX + CY \quad (\text{sendo } X \text{ e } Y \text{ respectivamente as soluções para núcleo e refletor}) \quad (67)$$

$$\text{com soluções} \quad (\nabla^2 + \mu^2)X = 0 \quad (68)$$

$$(\nabla^2 + \lambda^2)Y = 0$$

$$(\nabla^2 + \mu^2)(\nabla^2 - \lambda^2) \left[ AX + CY \right] = 0$$

$$A(\nabla^2 + \mu^2)(\nabla^2 - \lambda^2)X + C(\nabla^2 + \mu^2)(\nabla^2 - \lambda^2)Y = 0$$

$$A(\nabla^2 - \lambda^2) \underbrace{\left[ (\nabla^2 + \mu^2)X \right]}_0 + C(\nabla^2 + \mu^2) \underbrace{\left[ (\nabla^2 - \lambda^2)Y \right]}_0 = 0$$

Assim, o problema de se resolver uma equação diferencial parcial de 4ª ordem fica reduzido à resolução de duas diferenciais parciais de 2ª ordem:

$$(\nabla^2 + \mu^2)X = 0 \quad (69)$$

$$(\nabla^2 - \lambda^2)Y = 0 \quad (70)$$

havendo, então, necessidade de se saber se  $\lambda^2$  e  $\mu^2$  são positivos ou negativos.

Restringindo-se à geometria de placa, deve-se primeiro resolver para o núcleo e depois para o refletor. Em seguida, aplica-se condições de interface.

#### 1ª) RESOLUÇÃO PARA O NÚCLEO (c)

$$\frac{k_{\infty} - 1}{L_1^2 L_2^2} = \lambda^2 \mu^2 \quad (71)$$

$$\frac{L_1^2 + L_2^2}{L_1^2 L_2^2} = \lambda^2 - \mu^2 \quad (72)$$

$$\text{No núcleo } k_{\infty} > 1 \quad \lambda_c^2 - \mu_c^2 > 0 \quad (\text{sempre}) \quad (73)$$

$$\lambda_c^2 \mu_c^2 > 0 \quad (74)$$

A única maneira de se obter estas condições é considerar-se as equações separadamente.

$$\lambda_c^2 > 0$$

$$\mu_c^2 > 0$$

Assim, resolvendo-se a equação para o núcleo

$$\chi(x) = \begin{cases} A_1 \cos \mu x \\ A_2 \operatorname{sen} \mu x \end{cases} \quad (75)$$

$$\chi(x) = \begin{cases} C_2 \operatorname{sen} h \lambda x \\ C_1 \operatorname{cos} h \mu x \end{cases} \quad (76)$$

não aceitáveis em função da simetria do problema.

Logo

$$\phi_2(x) = A_c \cos \mu_c x + C_c \operatorname{cos} h \lambda_c x \quad 0 < |x| < a \quad (77)$$

Tomando-se a equação do 2º grupo:

$$-D_2 \nabla^2 \phi_2(x) + \Sigma_2 \phi_2(x) = \Sigma_{12} \phi_1(x) \quad (55)$$

$$\phi_1(x) = \left[ -\frac{D_2}{\Sigma_{12}} \nabla^2 + \frac{\Sigma_2}{\Sigma_{12}} \right] \phi_2(x)$$

$$\phi_1(x) = \left[ -\frac{D_2}{\Sigma_{12}} \nabla^2 + \frac{\Sigma_2}{\Sigma_{12}} \right] \left[ A_{1c} \cos \mu_c x + C_{1c} \operatorname{cos} h \lambda_c x \right] \quad (78)$$

$$\nabla^2 \cos \mu_c x = -\mu_c^2 \cos \mu_c x$$

$$\nabla^2 \operatorname{cos} h \lambda_c x = -\lambda_c^2 \operatorname{cosh} \lambda_c x$$

$$\phi_1(x) = \left[ \frac{\Sigma_2}{\Sigma_{12}} + \frac{D_2 \mu_c^2}{\Sigma_{12}} \right] A_{1c} \cos \mu_c x + \left[ \frac{\Sigma_2}{\Sigma_{12}} - \frac{D_2 \lambda_c^2}{\Sigma_{12}} \right] C_{1c} \operatorname{cosh} \lambda_c x \quad (79)$$

$$\phi_1(x) = S_{1c} A_{1c} \cos \mu_c x + S_{2c} C_{1c} \operatorname{cosh} \lambda_c x \quad (80)$$

onde

$$\left. \begin{aligned} S_{1c} &= \frac{\Sigma_2}{\Sigma_{12}} + \frac{D_2 \mu_c^2}{\Sigma_{12}} \\ S_{2c} &= \frac{\Sigma_2}{\Sigma_{12}} - \frac{D_2 \lambda_c^2}{\Sigma_{12}} \end{aligned} \right\}$$

fatores de acoplamento entre os grupos rápido e térmico.

Observe-se que as equações (77) e (80) apresentam a mesma forma funcional.

2º) RESOLUÇÃO PARA O REFLETOR ( $k_\infty = 0$ )

$$\lambda_R^2 \mu_R^2 = \frac{k_\infty - 1}{L_1^2 L_2^2} = - \frac{1}{L_1^2 L_2^2} = - K_1^2 K_2^2 \quad (81)$$

$$\lambda_R^2 - \mu_R^2 = \frac{L_1^2 + L_2^2}{L_1^2 L_2^2} = K_1^2 + K_2^2 \quad (82)$$

Resolvendo-se para a determinação de  $\lambda_R$  e  $\mu_R$

$$\lambda_R^2 = - \frac{K_1^2 K_2^2}{\mu_R^2} \quad (83)$$

$$- \frac{K_1^2 K_2^2}{\mu_R^2} - \mu_R^2 - (K_1^2 + K_2^2) = 0$$

$$\mu_R^4 + (K_1^2 + K_2^2) \mu_R^2 + K_1^2 K_2^2 = 0$$

$$\mu_R^2 = \frac{-(K_1^2 + K_2^2) \pm \sqrt{(K_1^2 + K_2^2)^2 - 4K_1^2 K_2^2}}{2} = \frac{-(K_1^2 + K_2^2) \pm (K_1^2 - K_2^2)}{2}$$

$$\mu_R^2 = \begin{cases} -K_2^2 = -\frac{1}{L_2^2} \\ -K_1^2 = -\frac{1}{L_1^2} \end{cases} \quad (84)$$

Para o valor de  $\lambda_R^2$

$$\lambda_R^2 = - \frac{K_1^2 K_2^2}{(-K_1^2)} = K_2^2 \quad \text{ou} \quad \lambda_R^2 = - \frac{K_1^2 K_2^2}{(-K_2^2)} = K_1^2$$

Pode-se, então, colocar:

$$\begin{aligned} \mu_R^2 = -K_2^2 & & \lambda_R^2 \mu_R^2 < 0 \\ \lambda_R^2 = K_1^2 & & \lambda_R^2 \mu^2 > 0 \end{aligned} \quad (85)$$



Tomando-se as equações (69) e (70)

$$(\nabla^2 + \mu^2)X = 0 \quad (\nabla^2 - K_2^2)X = 0 \quad (86)$$

$$(\nabla^2 - \lambda^2)Y = 0 \quad (\nabla^2 - K_1^2)Y = 0 \quad (87)$$

pode-se obter a solução do refletor como:

$$\phi_2(x) = A_{1R} \sinh K_1(a + b - x) + C_{1R} \sinh K_2(a + b - x) \quad (88)$$

$$a < |x| < a + b$$

$$\phi_1(x) = - \left[ \frac{D_2}{\Sigma_{12}} \nabla^2 + \frac{\Sigma_2}{\Sigma_{12}} \right] \phi_2(x)$$

$$\nabla^2 \sinh K_1(a + b - x) = K_1^2 \sinh K_1(a + b - x)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) = & A_{1R} \left[ - \frac{D_2}{\Sigma_{12}} K_1^2 + \frac{\Sigma_2}{\Sigma_{12}} \right] \sinh K_1(a + b - x) + \\ & + C_{1R} \left[ - \frac{D_2}{\Sigma_{12}} K_2^2 + \frac{\Sigma_2}{\Sigma_{12}} \right] \sinh K_2(a + b - x) \end{aligned} \quad (89)$$

Observação  $-\frac{D_2}{\Sigma_{12}} K_2^2 + \frac{\Sigma_2}{\Sigma_{12}} = 0$

porque  $\frac{\Sigma_2}{\Sigma_{12}} - \frac{D_2}{\Sigma_2} K_2^2 \frac{\Sigma_2}{\Sigma_{12}} = 0$  e  $\frac{D_2}{\Sigma_2} = K_2^2$

Assim, o fluxo rápido apresenta somente um único termo, que é representado pelo primeiro termo de equação (89)

$$\phi_1(x) = A_{1R} S_{1R} \sinh K_1(a + b - x) \quad (90)$$

onde  $S_{1R} = - \frac{D_2}{\Sigma_{12}} K_1^2 + \frac{\Sigma_2}{\Sigma_{12}}$

Fica com as equações (80) e (90)

$$\phi_1(x) = A_{1c} S_{1c} \cos \mu_c x + C_{1c} S_{2c} \cosh \lambda_c x \quad (71)$$

$$\phi_1(x) = A_{1R} S_{1R} \sinh K_1(a + b - x) \quad (90)$$

que apresentam quatro constantes:  $A_{1c}$ ,  $A_{1R}$ ,  $C_{1c}$  e  $C_{1R}$ , determinadas a partir de condições de contorno.

$$\left. \begin{aligned} \phi_{2c}(x) &= A_{1c} \cos \mu_c x + C_{1c} \cosh \lambda_c x \\ \phi_{1c}(x) &= A_{1c} S_{1c} \cos \mu_c x + C_{1c} S_{2c} \cosh \lambda_c x \end{aligned} \right\} \text{núcleo} \quad (91)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{2R}(x) &= A_{1R} \sinh K_1(a + b - x) + C_{1R} \sinh K_2(a + b - x) \\ \phi_{1R}(x) &= A_{1R} S_{1R} \sinh K_1(a + b - x) \end{aligned} \right\} \text{refletor} \quad (92)$$

Condições de contorno a) fluxos contínuos em  $x = a$   
b) correntes contínuas em  $x = a$

### Continuidade de fluxos

$$\left. \begin{aligned} \phi_{2c}(a) &= A_{1c} \cos \mu_c a + C_{1c} \cosh \lambda_c a \\ \phi_{2R}(a) &= A_{1R} \sinh K_1 b + C_{1R} \sinh K_2 b \end{aligned} \right\} \phi_{2c}(a) = \phi_{2R}(a)$$

$$A_{1c} \cos \mu_c a + C_{1c} \cosh \lambda_c a = A_{1R} \sinh K_1 b + C_{1R} \sinh K_2 b \quad (93)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1c}(a) &= A_{1c} S_{1c} \cos \mu_c a + C_{1c} S_{2c} \cosh \lambda_c a \\ \phi_{1R}(a) &= A_{1R} S_{1R} \sinh K_1 b \end{aligned} \right\} \phi_{1c}(a) = \phi_{1R}(a)$$

$$A_{1c} S_{1c} \cos \mu_c a + C_{1c} S_{2c} \cosh \lambda_c a = A_{1R} S_{1R} \sinh K_1 b \quad (94)$$

Continuidade de correntes

$$\left. \begin{aligned} - D_{2c} \frac{d\phi}{dx} \Big|_c &= D_{2c} A_{1c} \mu_c \sin \mu_c a - D_{2c} C_{1c} \lambda_c \sinh \lambda_c a \\ - D_{2R} \frac{d\phi}{dx} \Big|_R &= D_{2R} A_{1R} K_1 \sinh K_1 b + D_{2R} K_1 C_{1R} \sinh K_2 b \end{aligned} \right\} J_{2c} = J_{2R} \quad (95)$$

$$\left. \begin{aligned} - D_{1c} \frac{d\phi}{dx} \Big|_c &= D_{1c} A_{1c} \mu_c \sin \mu_c a - D_{1c} C_{1c} \lambda_c \sinh \lambda_c a \\ - D_{1R} \frac{d\phi}{dx} \Big|_R &= - D_{1R} A_{1R} S_{1R} K_1 \cosh K_1 b \end{aligned} \right\} J_{1c} = J_{1R} \quad (96)$$

Escrevendo-se de uma outra forma:

para os fluxos

$$A_{1c} X(a) + C_{1c} Y(a) = A_{1R} W(a) + C_{1R} Z(a) \quad (93a)$$

$$A_{1c} S_{1c} X(a) + C_{1c} S_{2c} Y(a) = A_{1R} S_{1R} W(a) \quad (94a)$$

para as correntes

$$- D_{2c} A_{1c} X'(a) + D_{2c} Y'(a) = - D_{2R} A_{1R} W'(a) + D_{2R} C_{1R} Z'(a) \quad (95a)$$

$$- D_{1c} A_{1c} S_{1c} X'(a) + C_{1c} S_{2c} Y'(a) = - D_{1R} S_{1R} W'(a) \quad (96a)$$

$$\text{onde } X(x) = \cos \mu_c x$$

$$Y(x) = \cosh \lambda_c x$$

$$W(x) = \sinh K_1(a + b - x)$$

$$Z(x) = \sinh K_2(a + b - x)$$

Escrevendo-se em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} S_{1c} X(a) & S_{2c} Y(a) & -S_{1R} W(a) & 0 \\ X(a) & Y(a) & -W(a) & -Z(a) \\ D_{1c} S_{1c} X'(a) & D_{1c} S_{2c} Y'(a) & -D_{1R} S_{1R} W'(a) & 0 \\ D_{2c} X'(a) & D_{2c} Y'(a) & -D_{2R} W'(a) & -D_{2R} Z'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1c} \\ C_{1c} \\ A_{1R} \\ C_{1R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para se ter a condição de criticalidade, o determinante deve ser igual a zero, ou:

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_{1c} & S_{2c} & S_{1R} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{D_{1c} S_{1c} X'(a)}{X(a)} & \frac{D_{1c} S_{2c} Y'(a)}{Y(a)} & \frac{D_{1R} S_{1R} W'(a)}{W(a)} & 0 \\ \frac{D_{2c} X'(a)}{X(a)} & \frac{D_{2c} Y'(a)}{Y(a)} & \frac{D_{2R} W'(a)}{W(a)} & \frac{D_{2R} Z'(a)}{Z(a)} \end{vmatrix} = 0$$

Esta é a relação entre tamanho e composição. Não se sabe o valor de a. Faz-se por tentativa e erro, verificando-se qual o valor de a que anula o determinante. O mesmo é feito para b ou composição.

Uma vez que o determinante é anulado, e o tamanho crítico é determinado, as três constantes podem ser encontradas, em função de uma quarta. Esta última é determinada pelo nível de fluxo.

No caso de um reator cilíndrico infinito, as equações (65) e (70) tornam-se, respectivamente

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dx}{dr} + \mu^2 x = 0 \quad (97)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dY}{dr} - \lambda^2 Y = 0 \quad (98)$$

As duas soluções para a equação (97) são  $J_0(\mu r)$  e  $Y_0(\mu r)$ , enquanto que as soluções da equação (98) são  $I_0(\lambda r)$  e  $K_0(\lambda r)$ . Entretanto, tanto as funções  $Y_0(\mu r)$  e  $K_0(\lambda r)$  são singulares em  $r = 0$  e não podem ser usadas. Por este problema, o fluxo rápido no núcleo é:

$$\phi_c = A_{1c} J_0(\mu r) + C_{1c} I_0(\lambda r) \quad (99)$$

As Tabelas 1 e 2 apresentam soluções apropriadas para o núcleo e refletor respectivamente <sup>(1)</sup>:

Geometria	X	Y
Placa infinita	$\cos \mu x$	$\cosh \lambda x$
Cilindro infinito	$J_0(\mu r)$	$I_0(\lambda r)$
Esfera	$\frac{\sin \mu r}{r}$	$\frac{\sinh \lambda r}{r}$

Tabela 1: Funções para o núcleo (dois grupos de nêutrons).

Geometria	Refletor com espessura b	Refletor com espessura infinita
Placa infinita	$\sinh K(a + b - x)$	$e^{-Kx}$
Cilindro infinito	$I_0(Kr) K_0 K(R + b) - K(R+b) K_0(K_r)$	$K_0(Kr)$
Esfera	$\frac{\sinh(K R + b - x)}{r}$	$\frac{e^{-Kr}}{r}$

Tabela 2: Funções para o refletor (dois grupos de nêutrons).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 - Lamarsh, J. R., "Nuclear Reactor Theory", Addison Wesley, 1966.
- 2 - Weinberg, A. M. e Wigner, E. P., "The Physical Theory of Neutron Chain Reactors", University of Chicago Press, Chicago, 1958.
- 3 - Duderstadt, J. J. e Hamilton, L. J., "Nuclear Reactor Analysis", John Wiley, 1976.