

07 Jul 80

ANÁLISE DA ESTABILIDADE LINEAR E NÃO LINEAR, ASSOCIADA A

REATORES RÁPIDOS EXPERIMENTAIS

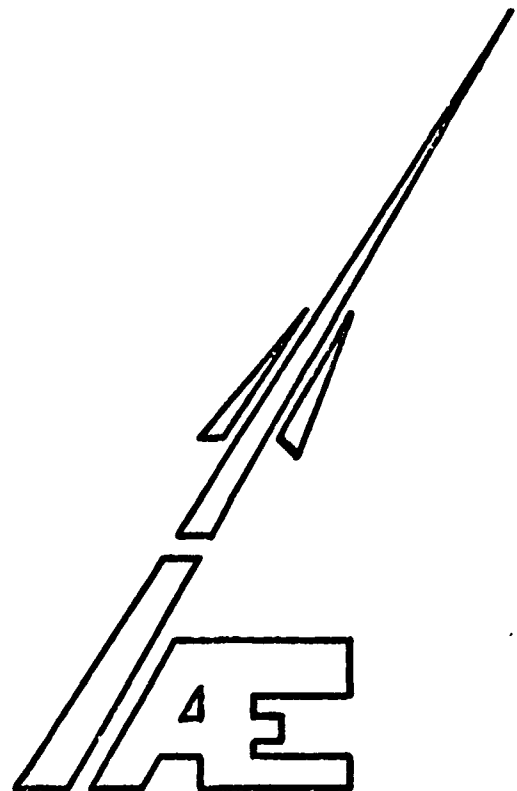
(PARTE I)

Erler S. Amorim

C. Moura Neto

Maurício Antoniazzi Pinheiro Rosa

Divisão de Estudos Avançados
Instituto de Atividades Espaciais
Centro Técnico Aeroespacial
12.200-São José dos Campos-SP
Brasil



ANÁLISE DA ESTABILIDADE LINEAR E NÃO LINEAR, ASSOCIADA A
REATORES RÁPIDOS EXPERIMENTAIS

(PARTE I)

Erler S. Amorim

C. Moura Neto

Maurício Antoniazzi Pinheiro Rosa

RESUMO

Fenômenos associados à física de nêutrons rápidos foram tratados através da cinética linear e não linear, e na presença de retroalimentação. As funções de transferência foram estabelecidas e analisadas. As condições de estabilidade foram tratadas analiticamente e através de programas envolvendo variáveis discretas e/ou simulação analógica.

Os critérios de Lyapunov e as funções de Lurie-Letov, para sistemas não lineares, foram estabelecidos e simulados. Pequenas oscilações foram abordadas através de uma análise de Fourier visando maior conhecimento dos mecanismos de retroalimentação e do desempenho das funções de carga em reatores rápidos à potência zero e/ou no regime de potência normal.

Os resultados obtidos mostraram-se compatíveis com os resultados experimentais existentes na literatura,

ABSTRACT

Associated phenomena to the physics of fast neutrons were analysed by linear and non-linear kinetics with arbitrary feedback. The transfer functions were established and analysed. The stability conditions were analitically proposed and investigated by digital and analogic programs.

The Lyapunov criteria and the Lurie-Letov functions, for non-linear systems, were established and simulated. Small oscillations were studied by a Fourier analysis to clarify particular aspects of feedback and load functions in fast reactor at zero power, or/and in normal power level.

The results were in agreement with the experimental data existing in the literature.

CAPÍTULO I
CINÉTICA LINEAR - POTÊNCIA ZERO

1.1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Estabelecendo-se a teoria da difusão, onde os coeficientes são independentes da posição e desde que seus valores possam ser representados por valores médios em todas as velocidades, pode-se escrever:

$$\bar{D}\nabla^2\phi(\vec{r},t) - \bar{\Sigma}_a(\vec{r},t)\phi(\vec{r},t) + S(\vec{r},t) = \frac{\partial N}{\partial t}(\vec{r},t) \quad (1)$$

onde os símbolos representam o significado usual encontrado na literatura.

O termo fonte compreende a fonte de nêutrons prontos e retardados, oriundos dos precursores existentes, e é dado por:

$$S(\vec{r},t) = (1 - \beta)k_{\infty}\bar{\Sigma}_a vN(\vec{r},t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(\vec{r},t) \quad (2)$$

A concentração de precursores é definida por:

$$\frac{\partial C_i}{\partial t}(\vec{r},t) = \beta_i k_{\infty} \bar{\Sigma}_a v N(\vec{r},t) - \lambda_i C_i(\vec{r},t) \quad (3)$$

As equações (1) e (3) constituem uma aproximação das equações dinâmicas do sistema, onde todos os coeficientes podem depender do tempo, devido a variações ocorridas "in-core" por causas externas ou por razões internas devido a transiitórios introduzidos.

Separando-se as variáveis em espaço e tempo (equivale a considerar uma expansão de uma função própria, somente o valor fundamental desta expansão, ou em outras palavras, não há variações de grande magnitude, no desempenho do sistema, ou perturbações localizadas de grande porte), tem-se:

$$N(\vec{r}, t) = f(\vec{r})n(t) \quad e \quad C_i(\vec{r}, t) = g_i(\vec{r})C_i(t) \quad (4)$$

A equação (3) fica:

$$\frac{\partial C_i(t)}{\partial t} = \beta_i k_{\infty} \bar{\Sigma}_a v \frac{f(\vec{r})}{g_i(\vec{r})} n(t) - \lambda_i C_i(t) \quad (5)$$

Poder-se-ia admitir $\frac{f(\vec{r})}{g_i(\vec{r})} = 1$, visto que num estado estacionário estas

distribuições são semelhantes ou, com outro procedimento, considerar a integral das equações (1) e (3) sobre o volume de todo o reator.

Com a separação das variáveis, proposta acima:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \bar{D}v \frac{\nabla^2 f(\vec{r})}{f(\vec{r})} n(t) - \bar{\Sigma}_a vn(t) + (1 - \beta)k_{\infty} \bar{\Sigma}_a vn(t) + \sum_i \lambda_i C_i(t) \quad (6)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \beta_i k_{\infty} \bar{\Sigma}_a vn(t) - \lambda_i C_i(t) \quad (7)$$

Como citado anteriormente, supondo-se o reator no estado estacionário, obtem-se, para o estado fundamental

$$\nabla^2 f(\vec{r}) + B^2 f(\vec{r}) = 0 \quad (8)$$

Definindo-se o tempo de absorção médio (ou vida média dos nêutrons) e o comprimento de difusão dados respectivamente por:

$$\ell_a = \frac{1}{v \bar{\Sigma}_a} \quad (9)$$

$$L^2 = \frac{\bar{D}}{\Sigma_a} \quad (10)$$

pode-se escrever:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{(1-\beta)k_{\infty} - (1+L^2B^2)}{\ell_a} n(t) + \sum_i \lambda_i C_i(t) \quad (11)$$

Definindo-se:

$$k_{ef} = \frac{k_{\infty}}{1+L^2B^2} \quad (12)$$

$$\ell = \frac{\ell_a}{1+L^2B^2} \quad (13)$$

as equações (7) e (11) são reescritas como:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left[\frac{(1-\beta)k_{ex} - \beta}{\ell} \right] n(t) + \sum_i \lambda_i C_i(t) \quad (14)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\ell} (1+k_{ex})n(t) - C_i(t)\lambda_i \quad (15)$$

onde β = fração dos nêutrons retardados.

β_i = fração dos nêutrons retardados do grupo \underline{i} .

λ_i = constante de decaimento dos precursores existentes no grupo \underline{i} .

k_{ex} = excesso de reatividade (= $k_{ef} - 1$).

Observações gerais

1) Se o reator em questão opera na faixa rápida, e sendo considerado que os nêutrons prontos e retardados são emitidos com espectros semelhantes em energia, ℓ_a teria o significado de vida média dos nêutrons prontos.

- 2) Detalhes sobre a estrutura de um reator rápido fogem ao intuito da cinética puntual. Naturalmente, estes detalhes afetam o comportamento dos parâmetros usados no modelo. Por outro lado, estes parâmetros são propriedades integrais do reator como um todo.
- 3) Na realidade, os nêutrons gerados como prontos ou retardados apresentam espectros de energia diferentes. Portanto, em média, são expostos a diferentes probabilidades de fuga do sistema ou mesmo a captura ressonante. Assim, a fração de nêutrons retardados utilizada por grupo de precursores é escrita como $\gamma\beta_i$, onde o símbolo utilizado neste trabalho deverá ser entendido como um valor efetivo.
- 4) A presença de uma mistura de vários isótopos, cada um tendo seu espectro de emissão de nêutrons retardados, introduz complicações que não serão abordadas, exceto para a fissão do U^{238} que adiciona nêutrons retardados adicionais no sistema, implicando em novas considerações que levam a efeitos de menor importância e que serão negligenciados.
- 5) A limitação do presente modelo advém da incapacidade de se descrever os efeitos dinâmicos ⁽¹⁾ espaciais. Estes efeitos descrevem mudanças no fluxo de nêutrons durante transientes.

Observações sobre as equações (14) e (15)

- 1) Estas equações são diferenciais lineares com coeficientes variáveis, visto que k_{ex} é uma função do tempo. O fluxo (parte espacial) não se modifica durante os transitórios. Considera-se que as equações de cinética são as mesmas para cada ponto tomado ao longo da representação do fluxo, definido no estado estacionário. A separabilidade é dependente da taxa de inserção de reatividade, taxa esta que é proporcional à vida média dos nêutrons ^(?).
- 2) A equação (15) representa a taxa de variação dos precursores como um balanço entre produção e decaimento. Esta equação é válida para reatores térmicos e rápidos, em virtude da mesma independência da velocidade dos nêutrons (condição válida se o reator opera abaixo da criticalidade produzida por nêutrons prontos). A condição máxima é dada por $(1 - \beta)k_{ef} = 1$. Em reatores rápidos, existe uma menor necessidade em termos de reatividade para sobrepor os efeitos de temperatura e dos produtos de fissão acumulados, permitindo-se manter uma reserva de reatividade incapaz de se atingir a prontocriticalidade.

1.2 FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

Considere-se que a variação do fluxo de nêutrons seja pequena, ou seja, $\frac{\delta n(t)}{n_0} \ll 1$ onde n_0 é o valor do fluxo estacionário, logo, considerando-se $n(t) = n_0 + \delta n(t)$ nas equações (14) e (15).

Sejam as equações descritas anteriormente:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left[\frac{(1 - \beta)k_{ex} - \beta}{\ell} \right] n(t) + \sum_i \lambda_i C_i(t) \quad (14)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\ell} (1 + k_{ex}) n(t) - C_i(t) \lambda_i \quad (15)$$

onde k_{ex} é uma função dependente do tempo.

Nas condições de equilíbrio, tem-se:

$$n_0 = \frac{\ell}{\beta} \sum_i \lambda_i C_i^0 \quad (16)$$

$$C_i^0 = \frac{\beta_i}{\ell} \frac{n_0}{\lambda_i} \quad (17)$$

Impondo-se $n = n_0 + \delta n$ em (14) e (15), e negligenciando-se os termos em $\delta n \cdot k_{ex}$, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \delta n = \frac{k_{ex} n}{\ell} - \frac{\beta k_{ex} n_0}{\ell} - \frac{\beta}{\ell} n_0 + \frac{\delta n k_{ex}}{\ell} - \frac{\beta k_{ex} \delta n}{\ell} - \frac{\beta \delta n}{\ell} + \sum_i \lambda_i C_i \quad (18)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i n_0}{\ell} + \frac{\beta_i}{\ell} k_{ex} n_0 + \frac{\beta_i}{\ell} \delta n + \frac{\beta_i}{\ell} k_{ex} \delta n - \lambda_i C_i \quad (19)$$

Com as condicionantes anteriores chega-se a:

$$\frac{d\delta n}{dt} = \frac{k \cdot n_0}{\ell} - \frac{\beta k \cdot n_0}{\ell} - \frac{\beta}{\ell} n_0 - \frac{\beta \delta n}{\ell} + \sum_i \lambda_i C_i \quad (20)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i \cdot n_0}{\ell} + \frac{\beta_i \cdot k \cdot n_0}{\ell} + \frac{\beta_i}{\ell} \delta n - \lambda_i C_i \quad (21)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace ao sistema, e suprimindo-se a sim-bologia corrente, obtêm-se:

$$\ell S \delta N = k n_0 - \beta k n_0 - \frac{\beta n_0}{S} - \beta \delta N + \sum_i \lambda_i \ell C_i \quad (22)$$

$$S C_i - C_i^0 = \frac{\beta_i \cdot n_0}{\ell} \frac{1}{S} + \frac{\beta_i \cdot n_0 \cdot k}{\ell} + \frac{\beta_i}{\ell} \delta N - \lambda_i C_i \quad (23)$$

Pela equação (23) obtêm-se:

$$C_i (S + \lambda_i) = C_i^0 + \frac{\beta_i \cdot n_0}{\ell} \frac{1}{S} + \frac{\beta_i \cdot n_0 \cdot k}{\ell} + \frac{\beta_i}{\ell} \delta N \quad (24)$$

Levando-se o valor de C_i , como dado na expressão (24), em (22) chega-se

a:

$$\ell S \delta N = k n_0 - \beta k n_0 - \frac{\beta}{S} n_0 - \beta \delta N + \sum_i \frac{\lambda_i}{(S + \lambda_i)} \left(C_i^0 \ell + \frac{\beta_i \cdot n_0}{S} + \beta_i \cdot n_0 \cdot k + \beta_i \delta N \right) \quad (25)$$

Grupando-se os termos em δN :

$$\delta N \left[S \ell + \beta - \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i}{S + \lambda_i} \right] = k n_0 - \frac{\beta n_0}{S} - \beta k n_0 + \sum_i \frac{\lambda_i C_i^0 \ell}{S + \lambda_i} + \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i \cdot n_0}{S(S + \lambda_i)} + \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i \cdot n_0 \cdot k}{(S + \lambda_i)} \quad (26)$$

$$\delta N \left[S\ell + \sum_i \frac{\beta_i S + \beta_i \lambda_i - \beta_i \lambda_i}{S + \lambda_i} \right] = kn_0 - \frac{\beta n_0}{S} + \sum_i \frac{\lambda_i C_i^0 \ell}{S + \lambda_i} +$$

$$+ \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i n_0}{S(S + \lambda_i)} - \sum_i \frac{\beta_i kn_0 S}{S + \lambda_i} - \sum_i \frac{\beta_i kn_0 \lambda_i}{S + \lambda_i} + \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i n_0 k}{S + \lambda_i} \quad (27)$$

$$S\delta N \left[\ell + \sum_i \frac{\beta_i}{S + \lambda_i} \right] = kn_0 - \frac{\beta n_0}{S} + \sum_i \frac{\lambda_i C_i^0 \ell}{S + \lambda_i} + \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i n_0}{S(S + \lambda_i)} - \sum_i \frac{\beta_i kn_0 S}{S + \lambda_i} \quad (28)$$

Utilizando-se a equação (17):

$$S\delta N \left[\ell + \sum_i \frac{\beta_i}{S + \lambda_i} \right] = kn_0 - \frac{\beta n_0}{S} + \sum_i \frac{\beta_i n_0}{S + \lambda_i} + \sum_i \frac{\lambda_i \beta_i n_0}{S(S + \lambda_i)} - \sum_i \frac{\beta_i kn_0 S}{S + \lambda_i} \quad (29)$$

Compatibilizando-se o segundo e o quarto termos do lado direito da expressão (29), obtém-se:

$$S\delta N \left[\ell + \sum_i \frac{\beta_i}{S + \lambda_i} \right] = kn_0 - \sum_i \frac{\beta_i n_0}{S + \lambda_i} + \sum_i \frac{\beta_i n_0}{S + \lambda_i} - \sum_i \frac{\beta_i kn_0 S}{S + \lambda_i} \quad (30)$$

ou:

$$\delta N = \frac{kn_0 \left[1 - S \sum_i \frac{\beta_i}{S + \lambda_i} \right]}{S \left[\ell + \sum_i \frac{\beta_i}{S + \lambda_i} \right]}$$

$$ZP(S) = \frac{\delta N}{kn_0} = \frac{1 - S \sum_i \frac{\beta_i}{S + \lambda_i}}{S \left[\ell + \sum_i \frac{\beta_i}{S + \lambda_i} \right]} \quad (31)$$

A equação (31) é chamada de "função de transferência a potência zero" e é denotada por $ZP(S)$. O termo potência zero indica que a realimentação, devido a um acoplamento entre temperatura e reatividade, não é considerada no formalismo proposto. A equação (31) permite conhecer a amplitude e o ângulo de fase das variações do fluxo quando a reatividade varia senoidalmente no tempo.

1.3 DISCUSSÃO DAS FIGURAS (1) E (2)

Os dados fornecidos por Hughes⁽²⁾ e Keepin⁽³⁾ são apresentados no Anexo A, sendo que os valores fornecidos por Keepin foram selecionados dos cálculos realizados com um valor típico de 4×10^{-8} para a vida média dos nêutrons em estudo.

Analisando-se a faixa de frequência (ω) selecionada de 10^{-2} a 10^{+4} rad/s, ter-se-á que adaptar as expressões (14) e (15). Seja $\beta \ll 1$ e $k_{ex} \ll 1$, o que implica $\frac{k_{ex}}{\beta} \ll \frac{1}{\beta} = 134$. Se $k_{ex} = 1$ dólar, o erro é da ordem daquele obtido negligenciando-se β face à unidade. Em condições normais de operação, o excesso de reatividade será sempre menor que um dólar.

Com estas condicionantes, as equações (14) e (15) podem ser escritas como:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \left[\frac{k_{ex} - \beta}{\ell} \right] n(t) + \sum_i C_i(t) \lambda_i \quad (32)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} = \frac{\beta_i}{\ell} n(t) - \lambda_i C_i(t) \quad (33)$$

Considerando-se a função de transferência a potência zero, como definida anteriormente, tem-se:

$$ZP(j\omega) = \frac{1}{j\omega \left[\ell + \sum_i \frac{\beta_i}{j\omega + \lambda_i} \right]} \quad (34)$$

Para $\omega < \lambda_i$, a equação (34) se transforma em:

$$ZP(j\omega) = \frac{1}{j\omega \ell^*} \quad (35)$$

$$\text{onde } \ell^* = \ell + \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \quad (36)$$

Como $\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i} \gg \ell$, $ZP(j\omega)$ não depende de ℓ , conforme indicado na faixa de baixas frequências (Figura 1). A função de transferência a potência zero é proporcional a $\frac{1}{\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}}$, definida apenas pelos nêutrons retardados. Para valores

maiores de ω ou $\omega > \lambda_i$ (isto é, $\{1,6\}$), mas com $\omega < \frac{1}{\ell}$, $ZP(j\omega)$ é aproximada por:

$$ZP(j\omega) = \frac{1}{\beta} \quad (37)$$

Este comportamento é visto na Figura 1, mostrando a existência de um patamar. Observe-se que a extensão deste patamar fornece uma indicação de que, em operações normais, a cinética dos reatores rápidos não será afetada pela vida média dos nêutrons (a semelhança do EBR-I⁽⁴⁾). As constantes de tempo normais se situam na faixa onde os nêutrons retardados são efetivos, isto é, entre 0,01 e 10 rad/s.

Para altas frequências ($\omega > \frac{1}{\ell}$) tem-se:

$$ZP(j\omega) = \frac{1}{j\omega \ell} \quad (38)$$

Note-se que $ZP(j\omega)$ é inteiramente dependente de ℓ nas altas frequências, tendo em vista que as frequências introduzidas limitam-se a aproximadamente

300 rad/s. Informações sobre altas frequências são obtidas por técnicas de correlação, analisando-se as respostas dos ruídos introduzidos em um reator.

1.4 COMPORTAMENTO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA ZP(S)

a) Influência de λ_i

Para baixas frequências (equação 35), observa-se que, se l for desprezado quando comparado com $\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}$, qualquer incremento em λ_i desloca a curva ZP(jw) para maiores valores. Nas regiões de valores moderados e altos de w, as variações de λ_i mostram pequenos efeitos ou praticamente negligenciáveis (Figura 3).

Este incremento de λ sobre o ângulo de fase é perceptível nas zonas de transição, entre frequências baixas e moderadas (Figura 4).

b) Influência de β_i

Para baixas e médias frequências [equações (35) e (37)], observa-se que ZP(jw) é inversamente proporcional a $\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}$ e a $\sum_i \beta_i$. Qualquer incremento nos valores de β_i (isto é, [1,6]) forçosamente deslocará a curva de ZP(jw) para baixo. Nas altas frequências, ZP(jw) não depende de β_i e, portanto, insensível à existência ou não de nêutrons retardados (Figura 3). O ângulo de fase é afetado nas regiões de transição existentes entre as zonas de baixa, moderada e altas frequências (Figura 4).

c) Influência dos grupos de nêutrons retardados

Desde que alguns grupos de nêutrons sejam desprezados, as curvas de amplitude e do ângulo de fase serão deslocadas para cima, conforme indicado nas equações (35) e (37). Para altas frequências, estas duas curvas não dependem de β_i ou $\sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i}$ (Figura 3).

O ângulo de fase é afetado nas zonas de transição (Figura 4).

d) Efeitos dos diferentes valores obtidos de diferentes fontes, sobre a função de transferência, referentes a nêutrons retardados

Os valores de Hughes, Keepin e Keepin modificado foram empregados no cálculo de ZP(jw) e mostrado na Figura 5. Os resultados indicam que a influência dos dados obtidos de diferentes fontes para os nêutrons retardados pouco influem sobre o comportamento dinâmico do reator, ou mesmo sobre a função de transferência.

CAPÍTULO 11

CINÉTICA LINEAR E A ESTABILIDADE DE REATORES RÁPIDOS

11.1 COEFICIENTES DE REATIVIDADE

Define-se a reatividade de um reator como o acréscimo líquido de nêutrons, por nêutron presente no reator, proveniente da fissão dos isótopos fissionáveis. Em média, considera-se a produção de 2,5 nêutrons por fissão do U^{235} , perdendo-se parte por captura radioativa e fugas do sistema considerado. Portanto, a reatividade é dependente da relação $\bar{\sigma}_c / \bar{\sigma}_f$.

Define-se a criticalidade de um sistema pela situação em que a concentração do material fissionável é tal que o acréscimo líquido de nêutrons é zero.

Devido ao calor liberado, existirá expansão do material presente no reator, causando distorções na geometria e variações nos parâmetros nucleares utilizados. No que se refere ao projeto do reator, o balanço de nêutrons deve ser examinado e expresso em termos de $\Delta k/k$, ou do coeficiente de reatividade, indicando a quantidade da reatividade ganha ou perdida pelo sistema, ou parte dele, devido à temperatura.

11.2 EFEITO DOPPLER

O efeito Doppler^(5,6,7) caracteriza-se pela variação na distribuição relativa de velocidades entre os nêutrons e os núcleos existentes. Em geral, as ressonâncias são deformadas, diminuindo-se sua altura e alargando-se pelo aumento da temperatura. Este fato leva a um decréscimo no fluxo de nêutrons, causando, desta forma, uma redução no número de fissões. Esta diminuição efetiva é conhecida como fator de auto blindagem (self-shielding factor). Este fator é definido como a razão entre a seção de choque efetiva para a seção de choque axial. Se as seções de choque possuem ressonâncias estreitas e pronunciadas, o fator de auto-proteção será menor que a unidade.

Em virtude da agitação térmica dos núcleos de urânio, as seções de choque sofrem um efeito semelhante ao acima descrito, e diminuindo, portanto, a autoproteção e aumentando, em consequência, o fator de autoproteção.

No estudo dos reatores rápidos, principalmente o EBR-II⁽⁸⁾, constatou-se que o U^{235} possui um coeficiente de reatividade Doppler positivo. Feshbach⁽¹⁰⁾ permite escrever:

$$\text{CRD}(T) = \text{CRD}(T_0) \left(\frac{T_0}{T} \right)^{3/2} \quad (38)$$

onde $\text{CRD}(T)$ = coeficiente de reatividade devido ao efeito Doppler a temperatura T em $\frac{\Delta k}{k^0C}$.

Considerando-se⁽⁶⁾ que $\text{CRD}(T_0) = 2 \times 10^{-6}$ a 20°C , chega-se a

$$\text{CRD}(T) \approx 4 \times 10^{-7} \frac{\Delta k}{k^0C} .$$

Note-se que a temperatura de entrada do refrigerante no núcleo é estimado em 100°C e ΔT para o U^{235} é da ordem de 112°C .

Cumpre-se salientar que, para misturas de U^{235} e U^{238} , em igual número de átomos, o efeito sobre a reatividade anula-se. Empobrecendo-se a mistura em U^{235} , resulta um coeficiente negativo de reatividade devido ao efeito Doppler.

11.3 DISTORÇÕES GEOMÉTRICAS

Em novembro de 1955 ocorreu a fusão parcial do núcleo do reator EBRI, Mark II. Esta fato indicou que um coeficiente de temperatura (pronto) se fez presente devido a características especiais deste reator (núcleo), e não em função da alta velocidade dos nêutrons. Este núcleo não foi projetado para a realização de testes especiais ligados ao campo da engenharia de reatores e, portanto, sua estrutura não caracterizava a de um reator de potência.

O combustível deste núcleo (EBR-I) consistia de barras de U^{235} fixas no topo e na base. Durante a operação, o lado do combustível, voltado para o centro do núcleo, foi levado a uma temperatura maior que o lado oposto causando, conseqüentemente, flexão nas barras de combustível. Este fato causou um aumento da reatividade pelas oscilações ocasionadas pelo elemento combustível.

Quando o reator operava numa elevação do nível de potência ($T = 60s$), o coeficiente pronto, acima descrito, tornou-se dominante face ao coeficiente negativo devido à expansão térmica de toda a estrutura. Houve, desta maneira, um aumento descontrolado do nível de potência, antes do acionamento ao sistema de controle.

Nas novas versões (Mark III e EBR-II), o combustível apresentou espaçadores e novas fixações ao longo do eixo central. Estas modificações se mostraram eficientes, conforme medidas efetuadas posteriormente. Estas medidas foram:

- EBR-1, Mark II	$8 \times 10^{-3} \frac{\Delta k}{\text{kMW}}$
- EBR-1, Mark III	não encontrado
- EBR-II	$7,4 \times 10^{-5} \frac{\Delta k}{\text{kMW}}$

II.4 REATIVIDADE DEVIDO À EXPANSÃO TÉRMICA DO MATERIAL

O cálculo deste coeficiente ($\frac{\Delta k}{k} / \frac{\Delta \rho}{\rho}$), em reatores rápidos, é feito através de programas baseados na teoria da difusão, com um parâmetro em multigrupo.

Partindo-se de uma reatividade (k), obtida através da geometria e composição das diferentes regiões envolvidas (urânio, sódio, aço inoxidável e zircônio), o cálculo é geralmente feito através de mudanças apreciáveis na densidade destas regiões. Regiões sensíveis são subdivididas em um maior número do que aquelas de menor importância, em relação ao cálculo da reatividade.

Uma descrição do cálculo pode ser descrita, por etapas, da seguinte forma:

- obtendo-se a distribuição do fluxo de nêutrons, função do espaço, consegue-se a geração de calor, por unidade de volume, na parte ativa do núcleo do reator (soma-se parte do calor gerado pelas interações gama com a matéria);
- uma vez que se conhece a geração de calor, poderá ser calculada uma distribuição inicial de temperatura, o qual irá depender das condições do fluxo de refrigerante adotado e de sua temperatura de entrada;
- define-se uma temperatura média em cada região e, por meio de tabelas, obtém-se a variação de volume (ΔV) causada pela variação de 1°C , a qual é a mesma que $\frac{\Delta \rho}{\rho^{\circ}\text{C}}$;
- multiplicando-se este valor pela temperatura média da região, obtém-se a variação $\frac{\Delta \rho}{\rho}$ para uma determinada região e para as condições de operação;
- este valor ($\frac{\Delta \rho}{\rho}$) é multiplicado pelo valor $\frac{\Delta k}{k} / \frac{\Delta \rho}{\rho}$, obtido pelos cálculos de difusão em multigrupo chegando-se à variação em reatividade

$$\frac{\Delta k}{k}$$

- o somatório das distribuições parciais de cada região permitirá conhecer os efeitos causados pela temperatura no sistema, ou a variação global da reatividade $(\frac{\Delta k}{k})$ do reator como um todo, a um nível P da potência (em MW).

O coeficiente de reatividade $(\frac{\Delta k}{kMW})$ é chamado coeficiente de potência do reator. Os coeficientes de potência típicos são:

$$\text{EBR I, Mark II} \quad - 3,0 \times 10^{-3} \left[\frac{\Delta k}{kMW} \right]$$

$$\text{EBR I, Mark III} \quad - 7,9 \times 10^{-4} \left[\frac{\Delta k}{kMW} \right]$$

$$\text{EBR II} \quad - 6,0 \times 10^{-5} \left[\frac{\Delta k}{kMW} \right]$$

Entre as nomenclaturas utilizadas, encontra-se o coeficiente de difusão isotérmico $(\frac{\Delta k}{k^{\circ C}})$, que fornece uma indicação de quanto se ganha ou perde em reatividade, pelo reator como um todo (ou parte), devido à elevação de 1°C. Este cálculo é feito considerando-se que o aquecimento se faz de maneira uniforme em todo o reator, e associado aos cálculos anteriormente descritos. Para os reatores citados anteriormente obtém-se:

$$\text{EBR-I, Mark I} \quad - 3,5 \times 10^{-5} \left(\frac{\Delta k}{k^{\circ C}} \right)$$

$$\text{EBR-I, Mark II} \quad - 3,1 \times 10^{-5} \left(\frac{\Delta k}{k^{\circ C}} \right)$$

11.5 CONSTANTE DE TEMPO ASSOCIADA AO COMBUSTÍVEL

Os efeitos da expansão geométrica, Doppler e distorções verificadas no núcleo, devido ao aquecimento, não se tornam efetivos imediatamente. Estes efeitos são levados em conta através de uma constante de tempo. Esta constante é calculada obtendo-se a distribuição espacial e temporal da temperatura no combustível e no moderador. Portanto, os valores dependerão da geometria e dimensões do reator, do material do encamisamento e do tipo de refrigerante empre-

gado.

Adotou-se, neste estudo, elementos combustíveis cilíndricos refrigerados por um metal líquido Na-K. O combustível e o encamisamento de zircônio foram homogeneizados numa região.

Considerando-se uma mistura perfeita do refrigerante na direção radial e chamando-se $q(t)$ a distribuição de potência e $T_{AE}(t)$ a temperatura de entrada do refrigerante, pode-se escrever:

- para uma zona homogeneizada do combustível

$$K_F \nabla^2 T_F(r,t) + q(t) = C_{F\rho_F} \frac{dT_F(r,t)}{dt} \quad (40)$$

- para uma zona homogeneizada do refrigerante

$$\begin{aligned} -A \cdot K_F \frac{dT_F(r,t)}{dr} \Big|_{\text{superfície}} + 2\dot{m} C_{AE} T_{AE}(t) &= \\ = 2\dot{m} C_A T_A(t) + V_A \rho_A C_A \frac{dT_A(t)}{dt} & \quad (41) \end{aligned}$$

Observe-se que $T_A(t)$ é a temperatura média do refrigerante. Desde que se já tomada uma variação linear desta temperatura ao longo do eixo vertical, a expressão (41) reforça o princípio da superposição, na presente análise.

Condições de contorno

$$\frac{dT_F(r,t)}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \quad (42)$$

$$-K_F \frac{dT_F(r,t)}{dr} \Big|_{r=C} = h [T_F(C,t) - T_A(t)] \quad (43)$$

Este sistema de equações lineares poderia ser resolvido por transformadas de Laplace, supondo-se, inicialmente, que o reator esteja operando em regime estacionário. Após ser aplicada uma perturbação na potência ou na temperatura de entrada do refrigerante, calcula-se os incrementos, acima deste nível estacionário. Observe-se que a derivada temporal é de primeira ordem, exigindo-se apenas o conhecimento das variáveis envolvidas com a condição $t = 0^-$.

Para simplicidade, serão redefinidos os seguintes parâmetros:

$$2\dot{m}C_A = \alpha \quad \mathcal{L}\{T_F(r,t)\} = \theta_F(r,s)$$

$$V_A \rho_A C_A = \beta \quad \mathcal{L}\{T_{AE}(t)\} = \theta_{AE}(s)$$

$$C_F \rho_F = \gamma \quad \mathcal{L}\{T_{AS}(t)\} = \theta_{AS}(s)$$

$$\frac{K_F}{C_F \rho_F} = \zeta^2 \quad \mathcal{L}\{T_A(t)\} = \theta_A(s)$$

Os símbolos das equações acima apresentam os significados abaixo:

$T_F(r,t)$ = temperatura do combustível, $[^{\circ}\text{C}]$.

$q(t)$ = calor gerado por cm^3 do combustível, $[\text{cal}/\text{cm}^3\text{-s}]$.

C_F = calor específico da zona homogeneizada combustível (U) + revestimento (Zr), $[\text{cal}/\text{g}^{\circ}\text{C}]$.

ρ_F = densidade da zona homogeneizada $[\text{g}/\text{cm}^3]$.

K_F = condutividade térmica da zona homogeneizada $[\text{cal}/\text{cm-s-}^{\circ}\text{C}]$.

r = raio externo da zona homogeneizada $[\text{cm}]$.

A = superfície da zona homogeneizada $[\text{cm}^2]$.

\dot{m} = fluxo de massa total $[\text{g}/\text{s}]$.

h = coeficiente de transferência de calor $[\text{cal}/\text{cm}^2\text{-s-}^{\circ}\text{C}]$.

C_A = calor específico do refrigerante $[\text{cal}/\text{g}^{\circ}\text{C}]$.

V_A = volume do refrigerante no entorno da região homogeneizada $[\text{cm}^3]$.

ρ_A = densidade do refrigerante $[\text{g/cm}^3]$.

$T_{AE}(t)$ = temperatura de entrada do refrigerante $[^{\circ}\text{C}]$.

$T_{AS}(t)$ = temperatura de saída do refrigerante $[^{\circ}\text{C}]$.

$T_A(t)$ = temperatura média do refrigerante (bulky), considerando-se variação linear $[^{\circ}\text{C}]$.

Deve ser observado que todas as condições iniciais foram feitas iguais a zero, ao se aplicar a transformada de Laplace, o que é satisfatório para o estudo em questão. O objetivo é, pois, estudar-se ou conhecer-se a função de transferência associada à reatividade, como função da temperatura. Outra solução seria admitir $T(r,t) = R(r)\theta(t)$ e normalizar a resposta

Aplicando-se a transformada de Laplace nas equações (41) e (43) obtém-se:

$$-AK_F \left. \frac{d\theta(r,S)}{dr} \right|_{r=C} + \alpha_{AE}\theta(S) = \alpha_A\theta(S) + \beta S\theta_A(S) \quad (44)$$

$$\left. \frac{d\theta_F(r,S)}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad (45)$$

$$-k_F \left. \frac{\theta_F(r,S)}{dr} \right|_{r=C} = h \left[\theta_F(C,S) - \theta_A(S) \right] \quad (46)$$

A equação (40) fornece, como solução e transformada, o seguinte valor:

$$\nabla^2 \theta_F(r,S) + \frac{1}{K_F} q(S) = \frac{S}{\zeta^2} \theta_F(r) \quad (47)$$

com solução homogênea $\lambda^2 = \frac{S}{\zeta^2}$. (48)

Tomando-se agora:

$$\nabla^2 \theta_F(r,S) - \lambda^2 \theta_F(r,S) = 0 \quad (49)$$

verifica-se que esta é uma equação modificada de Bessel com solução:

$$\theta_F(r, S) = C_1(S) I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} r\right) + B_1(S) K_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} r\right) \quad (50)$$

A solução particular é dada considerando-se:

$$\theta_F(r, S) = A_1 \frac{q(S)}{K_F}$$

a qual levada em (47) conduz a

$$\frac{1}{K_F} q(S) = \frac{S}{\zeta^2} A_1 \frac{q(S)}{K_F} \quad (51)$$

onde $A_1 = \frac{\zeta^2}{S}$

Assim, a solução geral será dada por:

$$\theta_F(r, S) = C_1(S) I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} r\right) + B_1(S) K_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} r\right) + \frac{q(S)}{\gamma S} \quad (52)$$

onde $\frac{\zeta^2}{K_F} = \frac{1}{\gamma}$

A equação (45) impõe $B_1(S) = 0$ na equação (52), visto $K_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} r\right)$ não ser definido na origem.

Levando-se $\theta_F(r, S)$, como definido acima, na equação (44), obtém-se:

$$-AC_1(S) K_F \frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) + \alpha \theta_{AE}(S) = \alpha \theta_A(S) + \beta S \theta_A(S) \quad (53)$$

$$C_1(S) = - \frac{(\alpha + \beta S) \theta_A(S) - \alpha \theta_{AE}(S)}{K_F A \frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right)}$$

É conveniente observar-se que

$$\theta_F(r, S) = \frac{-(\alpha + \beta S)\theta_A(S) + \alpha\theta_{AE}(S)}{A \frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) K_F} I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} r\right) + \frac{q(S)}{\gamma S}$$

$$-K_F \frac{d\theta_F(r, S)}{dr} \Big|_{r=C} = h \left[\theta_F(C, S) - \theta_A(S) \right]$$

obtendo-se:

$$-K_F \frac{d\theta_F(r, S)}{dr} = -K_F \frac{-(\alpha + \beta S)\theta_A(S) + \alpha\theta_{AE}(S)}{AK_F} = h \left[\theta_F(C, S) - \theta_A(S) \right]$$

$$\frac{K_F(\alpha + \beta S)}{AK_F} \theta_A(S) - \frac{\alpha K_F}{AK_F} \theta_{AE}(S) = \frac{hq(S)}{\gamma S} +$$

$$+ \frac{-h(\alpha + \beta S)\theta_A(S) + h\alpha\theta_{AE}(S)}{A \frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) K_F} I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) - h\theta_A(S)$$

$$\theta_A(S) \left[\frac{K_F(\alpha + \beta S)}{AK_F} + \frac{h(\alpha + \beta S) I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right)}{\frac{\sqrt{S}}{C} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) K_F} - h \right]$$

$$= \theta_{AE}(S) \left[\frac{\alpha}{A} + \frac{h\alpha I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right)}{A \frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) K_F} \right] + \frac{hq(S)}{\gamma S}$$

Logo:

$$\Theta_A(S) = \frac{\Theta_{AE}(S) \left[\frac{\alpha}{A} + \frac{h\alpha I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right)}{K_F A \frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right)} \right] + \frac{hq(S)}{\gamma S}}{\frac{\alpha + \beta S}{A} + \frac{h(\alpha + \beta S) I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right)}{A \frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) K_F} + h} \quad (54)$$

$$\Theta_A(S) = \frac{\Theta_{AE}(S) \left[\alpha K_F \frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) + h\alpha I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) \right] + \frac{hq(S)}{\gamma S} K_F A \frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right)}{K_F(\alpha + \beta S) \frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) + h(\alpha + \beta S) I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) + hA \frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) K_F} \quad (55)$$

Se os polos da equação (55) não se situarem sobre o eixo imaginário, ou à sua direita, (a exceção do ponto zero), o valor de $T_A(t)$, quando $t \rightarrow \infty$, poderá ser conhecido diretamente da expressão acima, ou seja:

$$T_A(\infty) = \lim_{S \rightarrow 0} S \Theta_A(S) \quad (56)$$

O denominador da equação (55) inclui as funções modificadas de Bessel do tipo $I_0(x)$ e $I_1(x)$. Em casos práticos, estas expansões são truncadas após os quatro primeiros termos.

No presente trabalho, adotando-se apenas os dois primeiros termos da expansão, chega-se a:

$$\begin{aligned} & \left[K_F h A \frac{\sqrt{S}}{\zeta} + K_F(\alpha + \beta S) \frac{\sqrt{S}}{\zeta} \right] \left[\frac{\sqrt{S}}{2} \frac{C}{\zeta} + \frac{S\sqrt{S}}{16} \frac{C^3}{\zeta^3} \right] = \\ & = - \left[1 + \frac{SC^2}{4\zeta^2} \right] \left[h(\alpha + \beta S) \right] \end{aligned} \quad (57)$$

$$K_F(\alpha + \beta S) \frac{SC}{2\zeta^2} + K_F(\alpha + \beta S) \frac{S^2 C^3}{16\zeta^4} + hAK_F \frac{SC}{2\zeta^2}$$

$$hAK_F \frac{S^2 C^3}{16\zeta^4} = -h(\alpha + \beta S) + \frac{SC}{4\zeta^2} h(\alpha + \beta S) \quad (58)$$

$$\left[\frac{K_F \beta C^3}{16\zeta^4} \right] S^3 + \left[\frac{K_F \beta C}{2\zeta^2} + \frac{K_F \alpha C^3}{16\zeta^4} + K_F \frac{hAC^3}{16\zeta^4} + \frac{h\beta C^2}{4\zeta^2} \right] S^2 +$$

$$+ \left[\frac{K_F \alpha C}{2\zeta^2} + \frac{K_F \cdot h \cdot A \cdot C}{2\zeta^2} + \frac{h\alpha C^2}{4\zeta^2} + h\beta \right] S + h\alpha = 0 \quad (59)$$

A equação (59) poderá ser escrita em termos de suas raízes:

$$(S - S_1)(S - S_2) \dots (S - S_n) = 0 \quad (60)$$

$$\text{ou: } S_1 S_2 \dots S_n \left(\frac{S}{S_1} - 1 \right) \left(\frac{S}{S_2} - 1 \right) \dots \left(\frac{S}{S_n} - 1 \right) = 0 \quad (61)$$

onde $\frac{1}{S^n}$ caracteriza as diferentes constantes de tempo sendo que, em geral, apenas uma destas constantes será dominante ao longo do tempo. Portanto, o valor de $T_A(\infty)$ será

$$T_A(\infty) = T_{AE}(\infty) + \frac{qAC}{2\alpha} \quad (62)$$

Uma dedução similar à desenvolvida na obtenção da equação (55) fornecerá uma expressão para combustível, ou seja:

$$\begin{aligned} \theta_F(r, s) = & \frac{I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} r\right) \left[\theta_{AE}(S) h\alpha - \frac{q(S)}{S\gamma} h(\alpha + \beta S) \right] + I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) h(\alpha + \beta S)}{\frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) K_F(\alpha + \beta S) + h(\alpha + \beta S) I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) + \frac{hA\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) K_F} \\ & + \frac{\frac{q(S)}{S\gamma} \frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) \left[(\alpha + \beta S) K_F + hAK_F \right]}{\frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) K_F(\alpha + \beta S) + h(\alpha + \beta S) I_0\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) + hA \frac{\sqrt{S}}{\zeta} I_1\left(\frac{\sqrt{S}}{\zeta} C\right) K_F} \quad (63) \end{aligned}$$

O valor de $T_F(r, \infty)$ será obtido à semelhança do valor de $T_A(\infty)$, obtendo-se

$$T_F(r, \infty) = \frac{q_1}{4K_F} \left[C^2 + \frac{2CK_F}{h} - r^2 \right] + T_A(\infty) \quad (64)$$

A equação (63) poderá ser escrita como

$$\theta_F(r, S) = \frac{G(S, r)}{D(S)} \quad (65)$$

Consequentemente, a solução, dependente do tempo, será:

$$T_F(r, t) = \sum_{n=1}^N \frac{G(S, r) (S - S_n)}{D(S)} \Big|_{S=S_n} \cdot e^{-S_n \cdot t} \quad (66)$$

onde N representa o número de raízes de D(S).

A equação (66) poderá ser calculada diretamente pela transformada inversa de Laplace.

As equações (55) e (63) mostram que as constantes de tempo associadas ao combustível homogeneizado e ao refrigerante são as mesmas, visto que o denominador de ambas as expressões constituem-se dos mesmos termos.

Adotou-se uma constante de tempo $\tau = 0,5s$ para o combustível e refrigerante, e para a estrutura um valor representativo tirado dos trabalhos de Sandmeier⁽¹²⁾, dado por $\tau_S = 5s$.

A constante de tempo estrutural é extremamente dependente do projeto do reator, tornando-se imperioso determinar quais as componentes de estrutura que afetam a reatividade e, a partir delas, definir uma constante de tempo relativa à estrutura como um todo.

A variação da reatividade, a uma potência determinada, devido a expansões do combustível e refrigerante, será dada por:

$$Pk(S)_{exp} = P \cdot \left[\theta_F(r, S) \right] \left[\frac{\Delta\rho/\rho}{\sigma_C} \right]_F \left[\frac{\Delta k/K}{\Delta\rho/\rho} \right]_F \cdot P \cdot \left[\theta_A(S) \right] \left[\frac{\Delta\rho/\rho}{\sigma_C} \right]_A \left[\frac{\Delta k/K}{\Delta\rho/\rho} \right]_A \quad (67)$$

onde P = nível de potência em MW.

$k(S)$ = coeficiente de potência no campo de frequência $\frac{k(S)}{kMW}$.

$\left[\frac{\Delta\rho/\rho}{\sigma_C} \right]_F$ = coeficiente de expansão isotérmico do combustível homogeneizado.

$$\left[\frac{\Delta k/k}{\Delta \rho/\rho} \right]_F = \text{coeficiente de reatividade do combustível homogeneizado.}$$

II.6 EFEITOS SOBRE A REATIVIDADE, DEVIDO À TEMPERATURA

Os efeitos descritos previamente serão adicionados na obtenção de um coeficiente global sobre a reatividade. Este coeficiente, para o caso do EBR-I, Mark II, será dado por:

$$P_k(S) = P_k(S)_{\text{distorção}} + P_k(S)_{\text{expansão}} \quad (68)$$

$$\text{ou: } P_k(S) = P \left[\frac{\Delta k(S)}{k_{MW}} \right]_D \left[\frac{1}{1 + \tau_F S} \right] + P \left[\frac{\Delta k(S)}{k_{MW}} \right]_E \left[\frac{1}{1 + \tau_F S} \right] \left[\frac{1}{1 + \tau_S S} \right] \quad (69)$$

onde $\frac{1}{1 + \tau_F S}$ é a constante de tempo associada ao combustível e ao refrigerante, $\frac{1}{1 + \tau_S S}$ é a constante de tempo estrutural e P o nível de potência (P = 1 é a potência máxima permitida).

Substituindo-se os valores na equação (69), ter-se-á:

$$P_k(S) = P \left[2 \cdot 10^{-3} \right] \left[\frac{1}{1 + 0,5S} \right] - P \left[3 \cdot 10^{-3} \right] \left[\frac{1}{1 + 0,5S} \right] \left[\frac{1}{1 + 5S} \right]$$

$$P_k(S) = P \cdot 10^{-3} \left[\frac{2}{1 + 0,5S} - \frac{3}{(1 + 0,5S)(1 + 5S)} \right] \quad (70)$$

A presença de um excesso de reatividade de um reator, no estado estacionário, causa a existência de uma retroalimentação, que será adicionada ao valor do excesso da reatividade introduzida, ou seja:

$$\delta k(t) = k_{ex}(t) + RA(t) \quad (71)$$

$$\delta k(S) = k_{ex}(S) + n_0 Pk(S) \frac{\delta N(S)}{n_0} \quad (72)$$

onde $\mathcal{L}\{RA(t)\} = Pk(S)\delta N(S)$.

A função de transferência de carga $[LP(S)]$ será escrita, conforme estabelecido pela equação (72) e pela definição de $ZP(S)$, como:

$$LP(S) = \frac{ZP(S)}{1 - ZP(S)Pk(S)} \quad (73)$$

A equação (72) inclui a condicionante para o estado inicial. Isto pode admitir n_0 dado pelo valor unitário e permitindo, em consequência, o conhecimento dos valores relativos das variáveis de interesse.

II.7 ESTABILIDADE DE REATORES RÁPIDOS, EM FUNÇÃO DO NÍVEL DE POTÊNCIA

A equação (72) fornece o diagrama de bloco, com retroalimentação, ou seja, uma combinação da cinética a potência zero com a expressão incremental da reatividade.

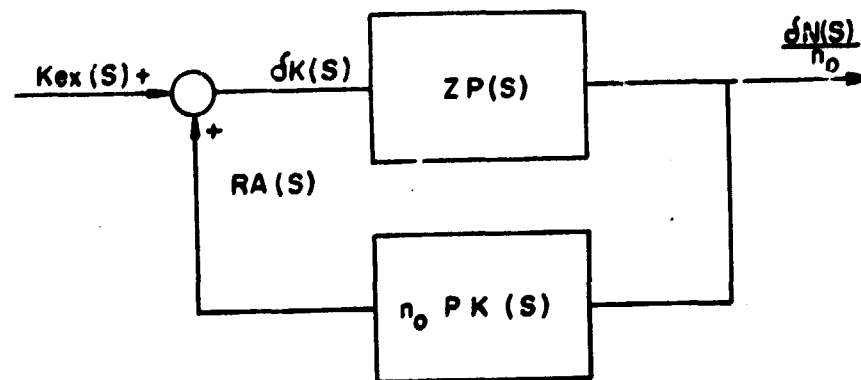


Diagrama de bloco de um reator com realimentação.

Testes de oscilação indicaram que a função de transferência de carga dos reatores EBR-I-Mark II e III mostram um pico que limita o nível de potência

em que o reator deve ser utilizado. A potência de ressonância caracteriza uma situação em que o reator inicia uma oscilação com amplitude crescente. É desejável que o reator opere a um nível de potência inferior a esta potência crítica.

Observe-se que, sendo $PK(S)$ a retroalimentação, esta deve variar com o nível de potência durante a excursão do reator, visto que as constantes de tempo e as constantes dos materiais considerados modificam-se ao longo da faixa compreendida entre a potência zero e a potência de operação. Se estas variações ao nível de potência forem pequenas, como primeira aproximação poder-se-á tomá-las constantes, e não comprometendo, desta forma, as principais conclusões ou aquelas referentes aos efeitos do nível de potência sobre o comportamento dinâmico do reator.

A variação do nível de potência produz um deslocamento das raízes da equação característica de $LP(S)$. Considerando-se uma retroalimentação negativa, em nível de potência, visto que o reator deve ser estável, a condição inicial de exploração para os polos de $LP(S)$ deve ser zero. Para a aplicação do método "Root-Locus", a expressão (73) será escrita como:

$$LP(S) = \frac{1}{PK(S)} \cdot \frac{ZP(S)PK(S)}{1 - ZP(S)PK(S)} \quad (74)$$

Com a expressão (70) e a expressão de $ZP(S)$ ajustada na faixa $0,1 < \omega < 10$ rad/s, numa forma de razão de polinomiais, pode-se escrever:

$$ZP(S) = 10,8 \frac{(40S + 1)(2,76S + 1)}{S(9,09S + 1)} \quad 0,1 < \omega < 10 \text{ rad/s} \quad (75)$$

$$P \cdot K(S) \cdot ZP(S) = 10,8 \times 10^{-3} \frac{(40S + 1)(2,76S + 1)(10S - 1)}{S(9,09S + 1)(5S + 1)(0,5S + 1)}$$

Os polos da expressão (74) são dados pelas soluções das equações:

$$ZP(S)PK(S) = 1 \quad (75-a)$$

$$PK(S) = 0 \quad (75-b)$$

Estas soluções definem:

$$\frac{1}{PK(S)} \left\{ \begin{array}{l} \text{zeros} \left\{ \begin{array}{l} S = -0,2 \\ S = -2,0 \end{array} \right. \\ \\ \text{polos} \{ S = 0,1 \end{array} \right.$$

$$ZP(S)PK(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{zeros} \left\{ \begin{array}{l} S = -0,025 \\ S = -0,3623189 \\ S = 0,1 \end{array} \right. \\ \\ \text{polos} \left\{ \begin{array}{l} S = 0,0 \\ S = -0,2 \\ S = -2,0 \\ S = -0,110011 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Apenas o polo e o zero para $S = 0,1$ se anulam. Os polos e os zeros para $S = -0,2$ e $S = -2,0$ o fazem somente a potência zero, a fim de que a expressão (73) tenha significado.

A Figura 6 mostra o comportamento dos polos em função da potência. Esta figura foi construída através dos valores indicados pela Tabela I. O programa EAV-ROOT permitiu o conhecimento das raízes e seu comportamento em função do nível de potência.

A Figura 7 mostra o valor do módulo da função de transferência de carga em função da potência e da frequência. Esta figura indica que a frequência, em que o pico máximo de $LP(j\omega)$, aparece não é a mesma para todos os níveis de potência (Programa FRESP).

A Figura 8 indica que o incremento de fluxo $\delta n/n_0$ é função crescente do nível de potência e ocorre um deslocamento positivo do pico de ressonância, em relação à reatividade ($k_{ex} \sin wt$), à proporção que o nível de potência au-

menta (Programa GTRESP).

Percebe-se, claramente, que a estabilidade decresce com a potência e que a instabilidade ocorre a um valor $\omega \approx 0,46$ rad/s e uma potência igual a $3,02 P_{\max}$. Observe-se que o "Root-Locus" indicou uma potência crítica de $P = 3.20 P_{\max}$. Entretanto, este fato provém da aproximação usada na definição de $ZP(S)$.

II.8 ESTABILIDADE EM FUNÇÃO DO NÍVEL DE POTÊNCIA POR MEIO DOS DIAGRAMAS DE NYQUIST

O critério de Nyquist é aplicável principalmente a sistemas cuja resposta em frequência é disponível somente através de sistemas gráficos, ou cujas equações características sejam transcendentais. A equação característica, dada pela equação (73), pode ser representada por:

$$Q(S) = 1 + [-ZP(S)] PK(S) \quad (76)$$

Se $L(S) = -ZP(S)PK(S)$ pode-se escrever:

$$Q(S) = 1 + L(S) \quad (77)$$

Em geral, sistemas lineares com retroalimentação $Q(S)$ apresentam polos localizados no eixo dos valores imaginários das variáveis complexas. Usualmente, na origem do plano de representação desta variável, transformações sucessivas conduzem ao estudo da função $L(S)$ no seu plano de imagens. Neste plano, o ponto crítico torna-se o valor -1 fornecido pelos zeros de $Q(S)$ indicado pela equação (77). Procurando-se a estabilidade, deve-se evitar que a imagem de $L(S)$ não se situe no entorno deste ponto e desejando-se que os zeros de $Q(S)$ não se situem no semi-plano à direita do eixo imaginário, ou seja, não apresente raízes com a parte real positiva.

Dir-se-ia que, se o "locus" atinge o ponto -1, a ressonância é alcançada, caracterizando a ressonância de potência crítica. Observe-se que esta ressonância é específica para a expressão $L(S) = ZP(S) [-PK(S)]$ adotada no presente estudo.

Nos planos tem-se os seguintes pontos a destacar:

- 1) À proporção que S tende para zero $L(S) \approx \frac{k}{S}$ onde k é uma constante. Portanto $L(S)$ tende para infinito a -90° ($S = j\epsilon$ e $\epsilon \rightarrow 0$).

Considerando-se $S = -j\epsilon$, $L(S)$ tende para infinito a $+90^\circ$ e, neste trajeto, descreve um arco aproximando-se assintoticamente do eixo $I_m\{L(j\omega)\}$. Pode-se, então, escrever:

$$L(j\epsilon) \approx -j \frac{10,8 \cdot 10^{-3}P}{\epsilon} \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (79)$$

A expressão acima não estabelece que a parte real de $L(j\epsilon)$ seja nula. Tomando-se a expressão (75) pode-se escrever:

$$L(S) = \hat{P} \frac{e^{301S}}{S} \approx \frac{\hat{P}}{S} (1 + 301S)$$

onde $R\{L(j\omega)\} = 301\hat{P}$.

- 2) O comportamento de $L(j\omega)$ nas vizinhanças da origem será descrito pelos valores limitantes de $L(j\omega)$ quando $\omega \rightarrow \pm\infty$.

Retornando-se à expressão (75) pode-se escrever:

$$|L(j\omega)| = \frac{40 \times 2,76 \times 10P}{9,09 \times 5 \times 0,5\omega} \rightarrow 0 \quad \omega \rightarrow \pm\infty \quad (80)$$

$$L(j\omega) \approx - \frac{40 \times 2,76 \times 10 \times \hat{P}}{9,09 \times 5 \times 0,5 \times j\omega} \quad \omega \rightarrow \pm\infty \quad (81)$$

$$L(j\omega) \approx j \frac{\hat{P} \times A}{\omega} \quad \omega \rightarrow \pm\infty \quad (82)$$

$$\text{ou } L_1(j\omega) = \frac{\hat{P}A}{\omega} \quad \omega \rightarrow \pm\infty$$

O resultado indica que no plano das imagens de $L(S)$, o seu valor tende a ± 0 quando $\omega \rightarrow \pm\infty$.

O número de contornos no entorno do ponto -1 , no plano das imagens de $L(S)$, é igual ao número de polos menos o número de zeros da expressão $1+L(S)$, localizados no semiplano à direita.

Se, para potências maiores que $3,02 P_{\max}$ existem menos dois contornos, no entorno do ponto -1 , o número de zeros do polinomial $1 - ZP(S)PK(S)$, no semiplano à direita, é igual a dois. Consequentemente, o reator é instável, pois tem-se dois zeros no semiplano à direita do eixo imaginário, no plano das imagens de S , ou seja $LP(S)$ tem dois polos no semiplano à direita.

A figura 9 mostra o diagrama de Nyquist de $-K(j\omega) \cdot ZP(j\omega)$ a qual independe de P .

Desde que todos os polos de $-K(S) \cdot ZP(S)$ localizam-se no SPE do plano- S , o sistema será considerado estável se a curva polar de $-P \cdot K(j\omega) \cdot ZP(j\omega)$ não contornar o ponto -1 . Pela expressão (75) pode-se verificar que o fato acima ocorre. Desta forma, devemos encontrar qual o valor de P que faz com que a curva de $-PK(j\omega)ZP(j\omega)$ cruze o eixo real exatamente no ponto -1 . Esta potência é chamada de potência crítica do sistema. Portanto:

$$-P_c \cdot \operatorname{Re}\{K(j\omega_c) \cdot ZP(j\omega_c)\} = -1$$

onde ω_c é a frequência crítica do sistema, isto é:

$$\operatorname{Im}\{K(j\omega_c) \cdot ZP(j\omega_c)\} = 0$$

Observando-se a figura 9, podemos escrever:

$$P_c (-0,311) = -1$$

$$\boxed{P_c \approx 3,21} \quad \omega_c \approx 0,387 \text{ rad/s}$$

Desde que o valor de potência foi anteriormente normalizado, o valor da potência crítica será $3,21 \times P_{\max}$. Este é um valor aproximado, desde que $ZP(S)$ é uma função de transferência aproximada.

A figura 10 mostra o comportamento da curva polar de $-P \cdot K(j\omega) \cdot ZP(j\omega)$ quando varia-se o valor de P . Pela figura 10 podemos verificar que a medida

que o valor de P aumenta o sistema tende à instabilidade. Pelo critério de estabilidade de Nyquist, comprovou-se os valores encontrados pelo método "Root-Locus".

Nas figuras 9 e 10 não foram traçadas as curvas de $-k(j\omega) \cdot ZP(j\omega)$ para valores negativos de ω (curva simétrica em relação ao eixo real à curva obtida para valores positivos de ω) e conseqüente união entre as curvas de $-k(j\omega)ZP(j\omega)$ para valores positivos e negativos de ω para a aplicação normal do critério de estabilidade de Nyquist. Isto porque, no momento, estamos interessados em determinar apenas a potência crítica do sistema. Neste caso particular de $K(S)ZP(S)$ não há necessidade de plotar as curvas mencionadas acima para se obter a potência crítica do sistema, e sim apenas necessita-se do valor da $Re\{-K(j\omega)ZP(j\omega)\}$ quando a curva intercepta o eixo real. Se desejássemos também obter o número de polos no SPD do plano-S para valores de potência superiores à potência crítica do sistema, o traçado completo do diagrama de Nyquist, isto é, diagrama polar para todos os valores de frequência ($-\infty < \omega < \infty$) nos forneceriam informações exatas a esse respeito. Neste tópico não houve necessidade, pois essas informações já foram obtidas quando da aplicação do método "Root-Locus".

11.9 - RESPOSTA A TRANSITÓRIOS

Sendo que são conhecidas as raízes de $LP(S)$ para diferentes níveis de potência, pode-se definir a resposta no tempo devido à introdução de um degrau de reatividade. Desejando-se obter a expansão de $LP(S)$, em termos de suas raízes, chega-se a seguinte expressão:

$$LP(t) = \frac{\delta n(t)}{n_0 \cdot K_{ex}} = A_0 + A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t} + \dots \quad (83)$$

Onde K_{ex} é a amplitude do degrau de reatividade.

As raízes ρ_i , onde $i \in (1,4)$ são funções do nível de potência e A_i , onde $i \in (1,4)$ são os resíduos dos polos ρ_i com $i \in (1,4)$.

Observe-se que as raízes ρ_3 e ρ_4 , a altas potências, são complexos conjugados e, reduzindo-se a uma exponencial, ou uma função senoidal.

Para a estabilidade, todas as raízes devem ter partes reais negativas.

A resposta no tempo $\delta n(t)/n_0$, para uma estrada degrau de reatividade de amplitude K_{ex} , será obtida expandindo-se em frações parciais $LP(S) \cdot K_{cx}(S)$ e

posteriormente faz-se a transformada inversa de Laplace de cada termo.

$$\frac{\delta N(S)}{n_0} = K_{ex}(S) \cdot LP(S) = \frac{K_{ex}}{S} \cdot LP(S) = K_{ex} \cdot \frac{LP(S)}{S}$$

Se a reatividade for expressa em dólar, têm-se:

$$\frac{\delta N(S)}{n_0} = K_{ex} \cdot \frac{\beta \cdot LP(S)}{S}$$

$$\text{onde } LP(S) = \frac{10,8(40S+1)(2,76S+1)}{S(9,09S+1)} \\ 1 + P \cdot 10^{-3} \frac{(10S-1)}{(5S+1)(0,5S+1)} \cdot \frac{10,8(40S+1)(2,76S+1)}{S(9,09S+1)}$$

Para a expansão em frações parciais de $\frac{\beta \cdot LP(S)}{S}$, utilizou-se o programa PRFEXP.

A tabela-II, mostra algumas respostas no tempo de $\delta n(t)/n_0$ para alguns valores de P.

Nota-se pela tabela-II que, para os valores selecionados de P, compreendidos entre 0,1 e 3,0 todas as exponenciais são decrescentes com o tempo, isto é, após um certo tempo, praticamente todos os termos exponenciais se anulam, mantendo desta forma o valor de $\delta n(t)/n_0$ sempre num valor constante e o sistema, portanto, é considerado estável. Para $P = 4,0$, pode-se verificar o aparecimento de um termo exponencial crescente com o tempo, multiplicado por uma função cosseno, também dependente do tempo e, desta forma, $\delta n(t)/n_0$ será oscilante com amplitudes crescentes e, portanto, o sistema é considerado instável para este valor de potência. Este fato já era esperado, desde que pela aplicação do método "root-locus" e do critério de estabilidade de Nyquist, verificou-se que a potência crítica do sistema é $P_c = 3,2 P_{max}$ e, neste caso, o reator está operando a um nível de potência maior que P_c .

11.10 - EFEITO DOS NÊUTRONS RETARDADOS EM RELAÇÃO À ESTABILIDADE LINEAR

Considere-se a equação (76) na seguinte forma:

$$\hat{Q}(S) = \frac{1}{ZP(S)} - P_0K(S) = Y(S) - P_0K(S) \quad (84)$$

onde $Y(S)$ é o inverso da função de transferência a potência zero.

verifica-se que, para $Y(S) = 0$ chega-se à conhecida equação de "inhour", com $I+1$ raízes, a primeira localizada na origem e as I restantes situadas no eixo real negativo, no plano- S .

Para pequenas perturbações (correspondentes a pequenos valores de P_0) interpreta-se o termo adicional $P_0K(S)$ como um termo corretivo para $Y(S)$. O seu efeito sobre o valor da raiz na origem poderá ser obtido através de uma expansão em série na forma ($K(0) < 0$ para a estabilidade):

$$SY'(0) + \frac{1}{2} S^2 Y''(0) = P_0 K(0) + P_0 K'(0) S \quad (85)$$

onde $Y'(0) = \ell^*$

$$S = P_0 K(0) / \ell^*$$

portanto $S < 0$.

O valor da potência crítica será definida como a potência a partir da qual a equação característica (equação 85) adquira, pela primeira vez, raízes com parte real positiva. Neste aspecto, pode-se escrever:

$$P_c Z(j\omega_c) K(j\omega_c) = 1 \quad (86)$$

Observe-se que a equação (86) define uma potência e uma frequência críticas (ω_c). Esta equação permite que se escreva:

$$P_c \operatorname{Re}[K(j\omega_c)] + jP_c \operatorname{Im}[K(j\omega_c)] = \operatorname{Re}[Y(j\omega_c)] + j\operatorname{Im}[Y(j\omega_c)] \quad (87)$$

Desde que a equação 87 não tenha solução real para P_c o sistema será linearmente estável para qualquer nível de potência.

Ergen⁽¹⁴⁾ prova que, se um reator apresentar $\operatorname{Re}[K(j\omega)] < 0$ e, se for submetido a uma oscilação periódica de potência, na ausência de nêutrons retardados, estas oscilações tornam-se amortecidas, pela presença destes nêutrons.

A presença dos nêutrons retardados por vezes desestabiliza o sistema, como proposto por Smets⁽¹⁵⁾, tanto para sistemas lineares como para sistemas não lineares. No momento, será feita o tratamento de sistemas lineares e, pos

teriormente, a análise será ampliada.

Sejam P_c e w_c a potência e a frequência críticas de um sistema, na ausência de nêutrons retardados. Portanto, a equação (86) pode ser escrita como:

$$P_c K(jw_c) = jw_c \ell \quad (88)$$

e, na presença de nêutrons retardados:

$$P'_c K(jw'_c) = Y(jw'_c) \quad (89)$$

Deve-se verificar que as frequências críticas são ditadas pelos ângulos de fase, ou seja:

$$\text{Arg}\{K(jw_c)\} = \frac{\pi}{2} \text{ sem nêutrons retardados, como indicado pela equação (88)}$$

$$\text{Arg}\{Y(jw'_c)\} = \text{Arg}\{K(jw'_c)\} \text{ com nêutrons retardados, como indicado pela equação (89)}$$

Se o ângulo de fase do inverso da função de transferência à potência zero fica compreendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ (figura 2, capítulo I), pode-se escrever:

$$\text{Arg}\{K(jw'_c)\} < \frac{\pi}{2} \quad (89-a)$$

$$\text{Arg}\{K(jw_c)\} > \text{Arg}\{K(jw'_c)\} \quad (89-b)$$

$$w'_c > w_c \quad (89-c)$$

Se relacionarmos as expressões (88), (89) e a expressão (34), chega-se a:

$$\frac{P'_c}{P_c} = \frac{|K(jw_c)|}{|K(jw'_c)|} \left\{ \left| 1 + \frac{1}{\ell} \sum_i \frac{\beta_i}{\lambda_i + jw'_c} \right| \right\} \frac{w'_c}{w_c} \quad (90)$$

Sendo $|K(j\omega_c)| > |K(j\omega'_c)|$, em termos da equação (89-c), tem-se que $P'_c > P_c$.

Uma condição suficiente para as afirmações que $\omega'_c > \omega_c$ e $P'_c > P_c$, é que a fase e o módulo da realimentação $K(j\omega)$ seja decrescente em relação a ω .

Com as condicionantes acima, conclui-se que, se o reator funcionar a uma potência P_c , a inclusão de nêutrons retardados no sistema permitirá uma maior estabilidade, ampliando-se a faixa de operação até o nível P'_c .

Com a finalidade de ilustrar o exposto acima, verificar-se-á a influência dos nêutrons retardados em relação à estabilidade linear do reator em estudo.

Desde que

$$K(S) = 10^{-3} \frac{(10S - 1)}{(5S + 1)(0,5S + 1)}$$

Transformando para o domínio da frequência, têm-se:

$$K(j\omega) = 10^{-3} \frac{(10j\omega - 1)}{(5j\omega + 1)(0,5j\omega + 1)}$$

Separando-se a expressão acima em parte real e imaginária, têm-se:

$$K(j\omega) = 4 \times 10^{-3} \left[\frac{2,3\omega^2 - 0,04}{(0,4 - \omega^2) + (2,2\omega)^2} + j \frac{\omega(0,4 - \omega^2) + 0,22\omega}{(0,4 - \omega^2)^2 + (2,2\omega)^2} \right]$$

Pela identidade (88), determina-se a frequência crítica ω_c do sistema, sem a inclusão dos nêutrons retardados.

$$P_c \cdot K(j\omega_c) = j\omega_c \ell$$

$$\therefore P_c \cdot \text{Re}\{K(j\omega_c)\} = 0$$

assumindo-se $\ell = 4 \times 10^{-8}$ s, obtem-se:

$$\omega_c = 0,132 \text{ rad/s}$$

Igualando-se as partes imaginárias, obtem-se a potência crítica do sistema sem a inclusão dos nêutrons retardados.

$$P_c \cdot I_m \{K(j\omega_c)\} = \omega_c \ell$$

$$\therefore P_c = 0,382 \times 10^{-5} P_{\max}$$

A figura 11-a mostra o diagrama de Nyquist de $-K(j\omega) \cdot ZP(j\omega)$ onde $ZP(j\omega) = 1/j\omega \ell$. Aplicando-se critério de estabilidade de Nyquist, verifica-se os resultados encontrados acima.

Para estabilidade

$$0 < P < \frac{1}{263 \times 10^3}$$

Portanto, o valor máximo de P , para o qual o sistema ainda não é instável será a potência crítica P_c do sistema sem a inclusão dos nêutrons retardados.

$$P_c = \frac{1}{263 \times 10^3} = 0,382 \times 10^{-5} \quad (\text{valor normalizado em } P_{\max})$$

É conveniente, antes de se partir direto para a determinação da potência crítica, utilizando o critério de estabilidade de Nyquist ou se resolver analiticamente a identidade (87), verificar se há possibilidade desta existir ou não. Uma análise preliminar é sempre conveniente e por muitas vezes proveitosas. Para o sistema reator rápido em estudo, pode-se fazer o seguinte:

$$\text{Desde que: } ZP(S) = \frac{1 - S \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{S + \lambda_i}}{S(\ell + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{S + \lambda_i})} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, 6$$

pode ser aproximada (equação 34, capítulo 1) para:

$$ZP(S) = \frac{1}{S(\ell + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{S + \lambda_i})} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, 6$$

transformando para o domínio da frequência, têm-se:

$$ZP(j\omega) = \frac{1}{j\omega(\ell + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{j\omega + \lambda_i})}$$

Então:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{ZP(j\omega)}\right\} = \frac{1}{\sum_{i=1}^6} \left[\frac{\omega^2 \beta_i}{(\lambda_i^2 + \omega^2)} \right] > 0 \quad \text{para todo } \omega.$$

Pode-se, então, concluir que se $\operatorname{Re}\{K(j\omega)\} < 0$ para todo ω , a identidade (87) não terá solução para P_c real e positivo, desta forma, o sistema será linearmente estável para todo ω (condição suficiente).

No sistema reator rápido em estudo, tem-se:

$$K(j\omega) = \frac{10^{-3}(10j\omega - 1)}{(5j\omega + 1)(0,5j\omega + 1)}$$

cujo diagrama polar é mostrado na figura 11.b.

Como podemos verificar pela figura (11.b), a $\operatorname{Re}\{K(j\omega)\} > 0$ para $0,132 \text{ rad/s} < \omega < \infty$, portanto, não se pode concluir que o sistema será linearmente estável para todos os valores de ω . O que se pode concluir é que se a identidade for satisfeita para um $P_c' \neq 0$, a frequência ω_c' será maior que $0,132 \text{ rad/s}$.

Após esta primeira análise, pode-se a partir do critério de estabilidade de Nyquist, determinar, se existir, a nova potência crítica do sistema P_c' , quando se inclui a presença dos nêutrons retardados.

Com a finalidade de comparar, através do diagrama de Nyquist, se a inclusão destes nêutrons estabiliza ou instabiliza o sistema, construiu-se o diagrama de Nyquist de $-P_c' \cdot K(j\omega) \cdot ZP(j\omega)$, onde P_c' é a potência crítica do sistema sem a inclusão dos nêutrons retardados e $ZP(j\omega)$ inclui a presença destes, então:

$$ZP(j\omega) = \frac{1 - j\omega \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{j\omega + \lambda_i}}{j\omega \left(\ell + \sum_{i=1}^6 \frac{\beta_i}{j\omega + \lambda_i} \right)} \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

Observando a figura (12), pode-se verificar que o ponto de cruzamento desta curva com o eixo real é maior que -1 e próximo da origem. De onde conclui-se que a presença dos nêutrons retardados têm um efeito estabilizante pa

ra o sistema.

Com o auxílio da figura (12), pode-se aplicar o critério de estabilidade de Nyquist e determinar a potência crítica P'_c . Então, pode-se escrever:

$$-A \cdot P_c \cdot K(j\omega'_c) \cdot ZP(j\omega'_c) = -1$$

onde A é uma constante real positiva, utilizada na determinação da potência crítica do sistema.

Pela expressão acima, têm-se que:

$$P'_c = A \cdot P_c$$

Pode-se escrever que:

$$A \cdot \text{Re}\{-P_c \cdot K(j\omega'_c) \cdot ZP(j\omega'_c)\} = -1$$

onde ω'_c é a frequência crítica do sistema e nesta frequência, têm-se:

$$\text{Im}\{-P_c \cdot K(j\omega'_c) \cdot ZP(j\omega'_c)\} = 0$$

Portanto, $\text{Re}\{-P_c \cdot K(j\omega'_c) \cdot ZP(j\omega'_c)\}$ é exatamente o ponto de cruzamento da curva polar de $\{-P_c \cdot K(j\omega) \cdot ZP(j\omega)\}$ com o eixo real, que pode ser visto na figura (12).

Então

$$A \cdot (-0,1258 \times 10^{-5}) = -1$$

$$A = 7,95 \times 10^5$$

Portanto,

$$P'_c = A \cdot P_c = 7,95 \times 10^5 \times 0,382 \times 10^{-5}$$

$$P'_c = 3,04 \quad (\text{valor normalizado em } P_{\max})$$

A faixa de estabilidade do sistema será:

$$0 < P < 3,04 \quad \omega'_c = 0,452 \text{ rad/s}$$

Desde que $K(S) \cdot ZP(S)$ possui todos os polos no SPE do plano-S, e no caso em estudo isto é verdade, pois:

$$K(S) = \frac{10^{-3}(10S - 1)}{(5S + 1)(0,5S + 1)}$$

e

$$ZP(S) = \frac{1 - \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{S + \lambda_i}}{S \left(\ell + \sum_{i=1}^I \frac{\beta_i}{S + \lambda_i} \right)} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, 6$$

e $Y(S) = \frac{1}{ZP(S)} = 0$ é a conhecida equação "Inhour" com $I + 1$ raízes, com uma delas situada na origem e as demais no SPE do plano-S, então, para se determinar a potência crítica do sistema P'_c , basta determinar para qual valor de potência que a curva de Nyquist intercepta o ponto -1. Para potências maiores que P'_c o sistema apresentará dois polos no SPD, pois pelo critério de estabilidade de Nyquist, haverá dois envolvimentos do ponto -1 e, desta forma, o sistema será instável.

Pelo valor encontrado para P'_c , conclui-se que a presença dos nêutrons retardados no sistema em questão, têm efeito estabilizante, pois $P'_c > P_c$. Neste caso têm $P'_c > P_c$ e $w'_c > w_c$, apesar do módulo da realimentação não ser uma função decrescente com a frequência. Esta última conclusão ilustra o fato, que se $K(jw)$ é uma função decrescente, tanto em módulo como em fase, em relação à frequência é uma condição suficiente, mas não necessária para que $P'_c > P_c$.

TABELA I - Comportamento dos polos da função de transferência de carga LP(S) em função do nível de potência P.

POTÊNCIA	POLOS DE LP(S)							
	P ₁		P ₂		P ₃		P _L	
	REAL	IMAG.	REAL	IMAG.	REAL	IMAG.	REAL	IMAG.
0,00	-0,110	0,000	-0,200	0,000	-2,000	0,000	0,000	0,000
0,11	-0,128	0,000	-0,180	0,000	-1,940	0,000	-0,00116	0,000
0,55	-0,152	-0,077	-0,152	+0,077	-1,710	0,000	-0,00523	0,000
0,96	-0,149	-0,120	-0,149	+0,120	-1,500	0,000	-0,00829	0,000
1,50	-0,142	-0,177	-0,142	+0,177	-1,230	0,000	-0,01140	0,000
2,50	-0,097	-0,299	-0,097	+0,299	-0,796	0,000	-0,01500	0,000
3,09	-0,022	-0,374	-0,022	+0,374	-0,635	0,000	-0,01640	0,000
3,24	+0,006	-0,390	+0,006	+0,390	-0,605	0,000	-0,01670	0,000
3,60	+0,067	-0,412	+0,067	+0,412	-0,560	0,000	-0,01730	0,000
4,02	+0,165	-0,422	+0,165	+0,422	-0,516	0,000	-0,01800	0,000
5,53	+0,531	-0,125	+0,531	+0,125	-0,448	0,000	-0,01970	0,000
8,06	+2,860	0,000	+1,790	0,000	-0,412	0,000	-0,02120	0,000
16,95	+6,860	0,000	+0,133	0,000	-0,382	0,000	-0,02310	0,000
∞	+∞	0,000	+0,100	0,000	-0,362	0,000	-0,02500	0,000

P	Resposta $\delta n(t)/n_0$
0,1	$K_{ex} \left[1715,8 - 1653,1 \cdot e^{-0,0010t} - 45,8e^{-0,1262t} + 6,1e^{-0,1826t} - 0,5e^{-1,9476t} \right]$
1,0	$K_{ex} \left[171,6 - 113,1e^{-0,0086t} - 40,5e^{-0,1482t} \cdot \cos(0,1246t + 0,744) - 6,3e^{-1,4804t} \right]$
2,0	$K_{ex} \left[85,8 - 37,6e^{-0,0134t} - 60,5e^{-0,1274t} \cdot \cos(0,2347t + 1,378) - 14,0e^{-0,9926t} \right]$
3,0	$K_{ex} \left[57,2 - 18,0e^{-0,0162t} - 92,1e^{-0,0337t} \cdot \cos(0,3653t + 1,517) - 11,7e^{-0,6523t} \right]$
4,0	$K_{ex} \left[42,9 - 10,4e^{-0,0180t} - 12,24e^{-0,1621t} \cdot \cos(0,4215t + 1,529) - 4,9e^{-0,5174t} \right]$

TABELA II - Resposta no tempo de $\delta n(t)/n_0$, para uma inserção de reatividade em dólar, do tipo degrau, de amplitude K_{ex} , para alguns valores de P.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1) Hetrick, D.L. - Dynamic of Nuclear Reactors, University of Chicago Press, Chicago - 1971.
- 2) Salmon, J. - "Théorie cinétique des neutrons rapides", Presses Universitaires de France, Paris (1961).
- 3) Keepin, G.R. - "Delayed Neutrons", A review as of October 1968 - Los Alamos Scientific Laboratory.
- 4) Keepin, G.R. - "Physics of Nuclear Kinetics", Addison-Wesley Publishing Co., 1965.
- 5) Enrico Fermi Atomic Power Plant: Technical Information and Hazards - Summary Report USAEC - Repl NP-11526, Vol. 7, U.S. Atomic Energy Commission, Washington, 1961.
- 6) Long, Y.K.; Loewenstein, W.B.; Branyan, C.E. et al - "Fast neutron power reactor studies with ZPR-III" - Proc. 2nd United Nations Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneve, 1958 - Paper 598.
- 7) Bhide, M.G. e Hummel, H.H. - "Calculations of the Doppler coefficient of large ceramic fueled fast reactors" - ANL-6601 (1962).
- 8) Bethe, H.A. - "On the Doppler effect in fast reactors", APDA-119, Atomic Power Development Associates Inc., Detroit, Michigan (1958).
- 9) Summary Report of the Hazards of EBR-II - ANL-5719 (1957).
- 10) Feshbach, H.; Goertzel, G.; Yamarchir, H. - "Estimation of the Doppler effect in fast reactors", Nuc. Sci. Eng., 1 p4, March, 1956.
- 11) Hughes e Hall, Physical Review, 73, III (1958).
- 12) Sandmeier, H.A. - "The kinetics and stability of fast reactors with special considerations of nonlinearities" - ANL-6014 (TID-4500, 14th Ed.) AEC Research and Development Report - 1961.
- 13) Bickel, J.H. - "Control and protection system design" - Staff N.S.S.S. Engineer Reactor Dynamics Dept/IEE - CE Nuclear Power Systems, Windsor, RTO6095 - Seminar on Nuclear Reactor Design - RPI-Troy - New York - NUO21 - July (1976).

- 14) Ergen, W.K. e Nohel, J.A. - "Stability of a continuous-medium reactor",
Journal of Nuclear Energy - Part A-10:14 (1959).
- 15) Smets, H.B. - "Problems on nuclear power reactor stability", Presses Univ.
de Bruxelles, Belgium (1962).

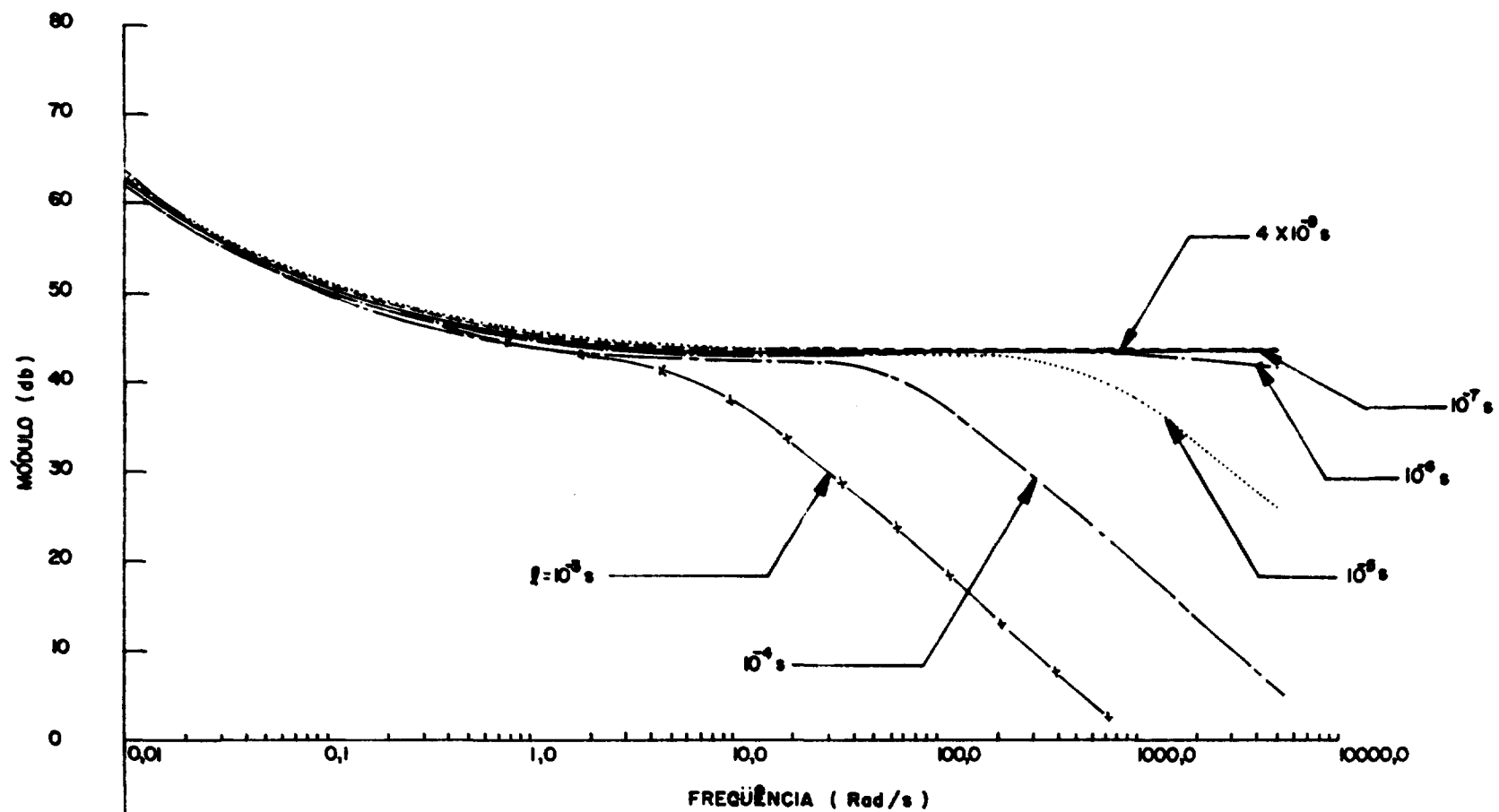


Figura 1 - Módulo da função de transferência, à potência zero, para alguns valores de vida média dos nêutrons (λ).

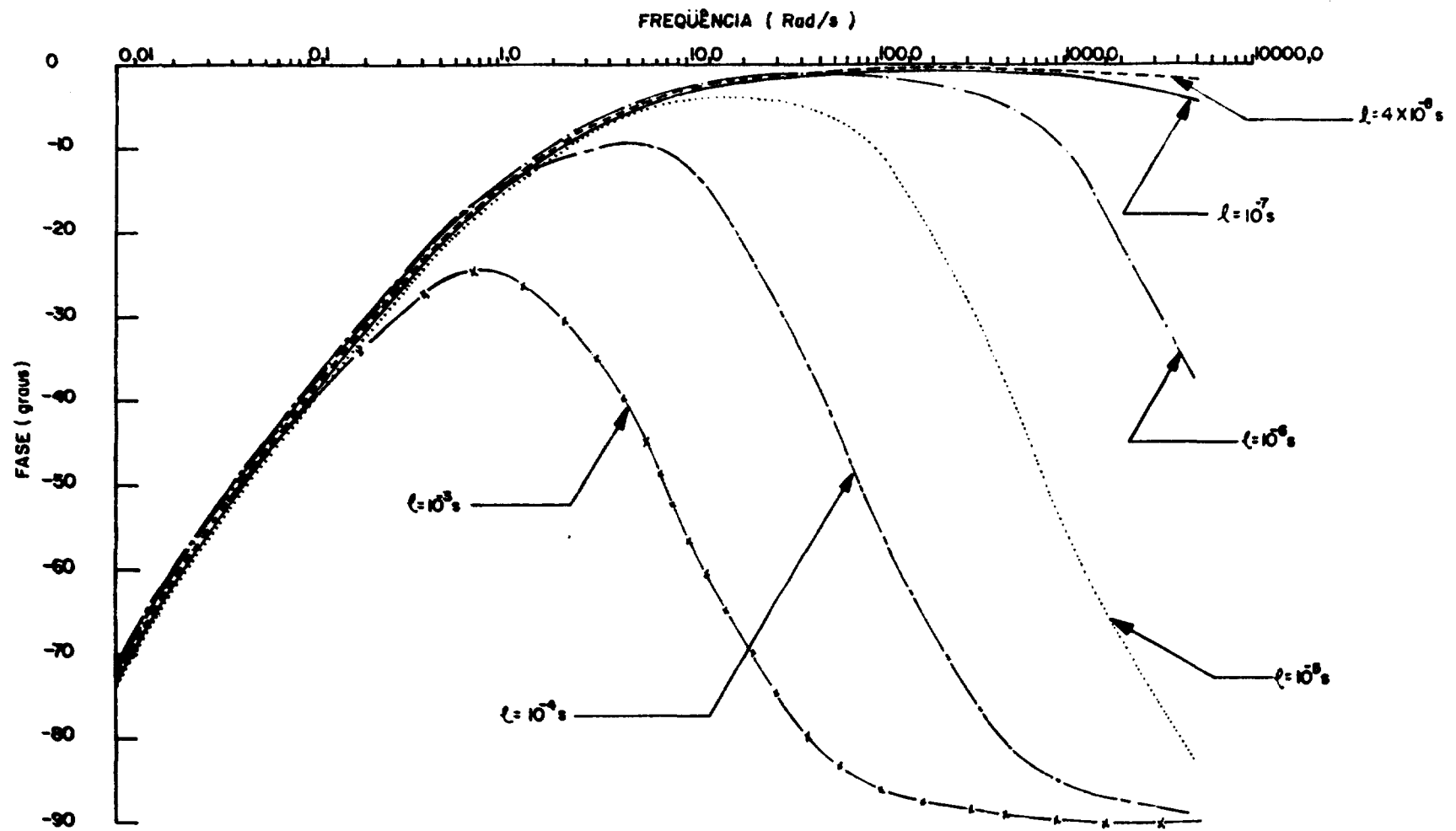


Figura 2- Fase da função de transferência, a potência zero, para alguns valores de vida média dos nêutrons (λ).

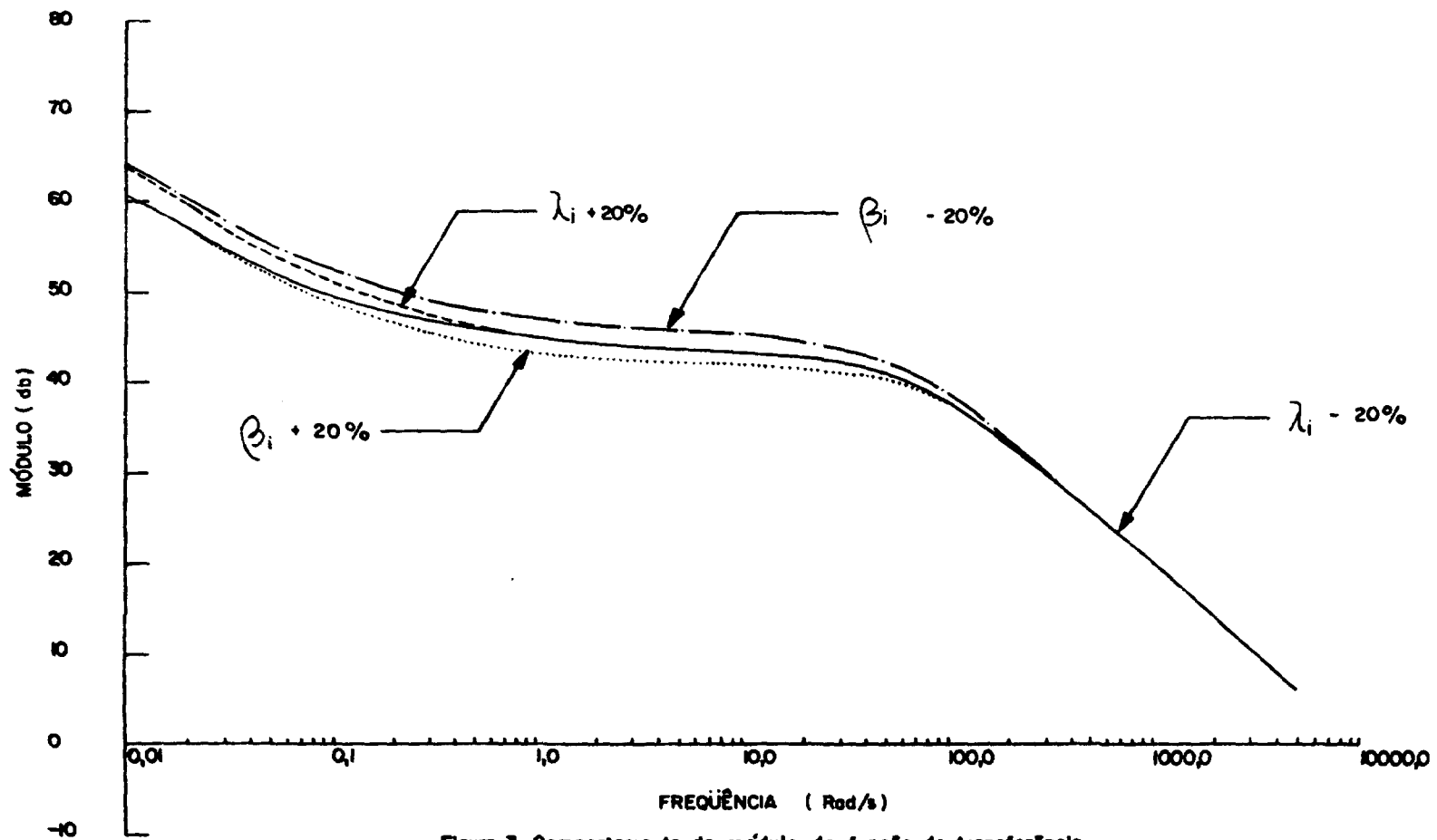


Figura 3-Comportamento do módulo da função de transferência,
 a potência zero, para variação de 20% nos valores β_i e λ_i . ($\lambda = 10^4$ s).

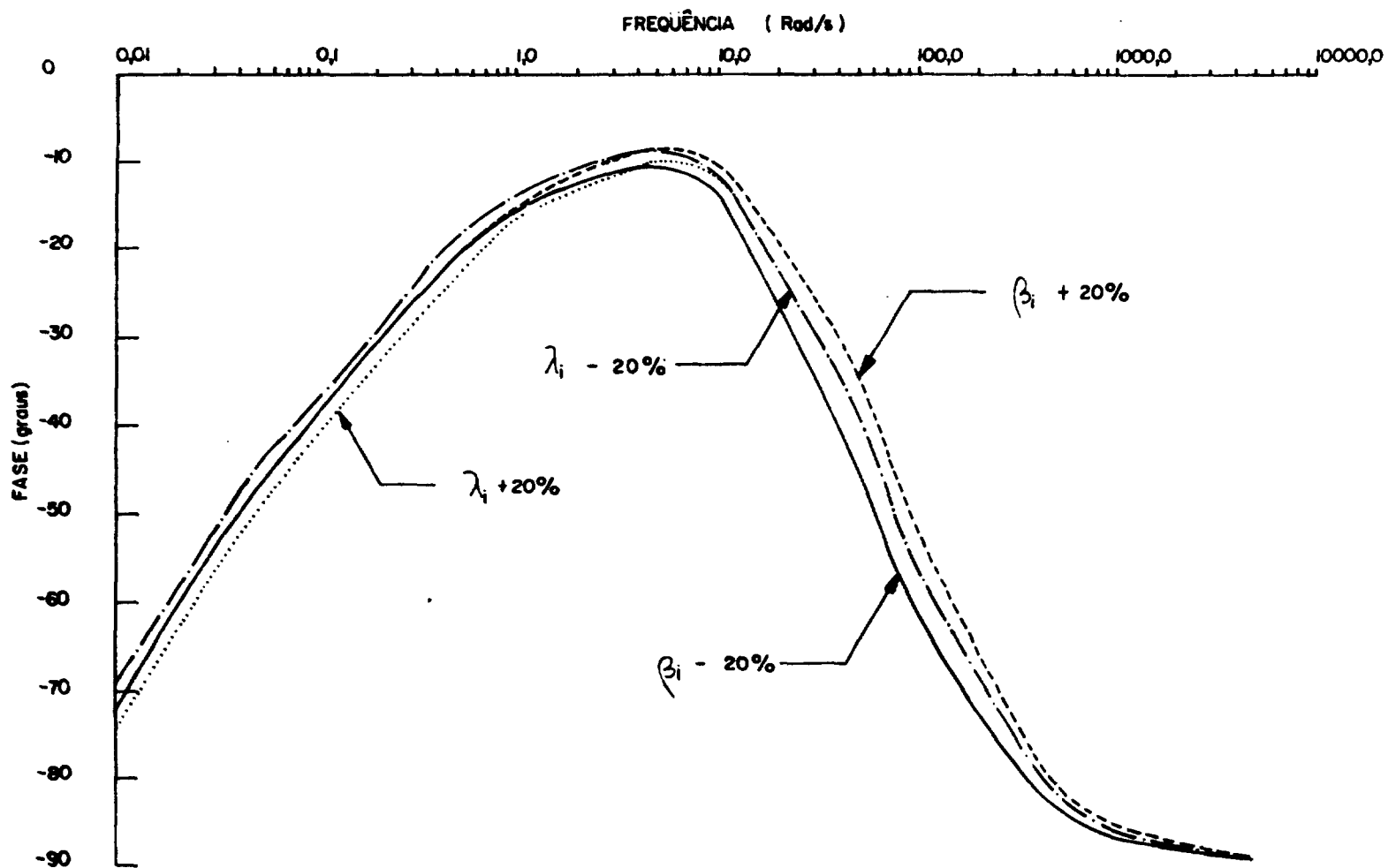


Figura 4 - Comportamento da fase da função de transferência, a potência zero, para variação de 20% nos valores β_i e λ_i .

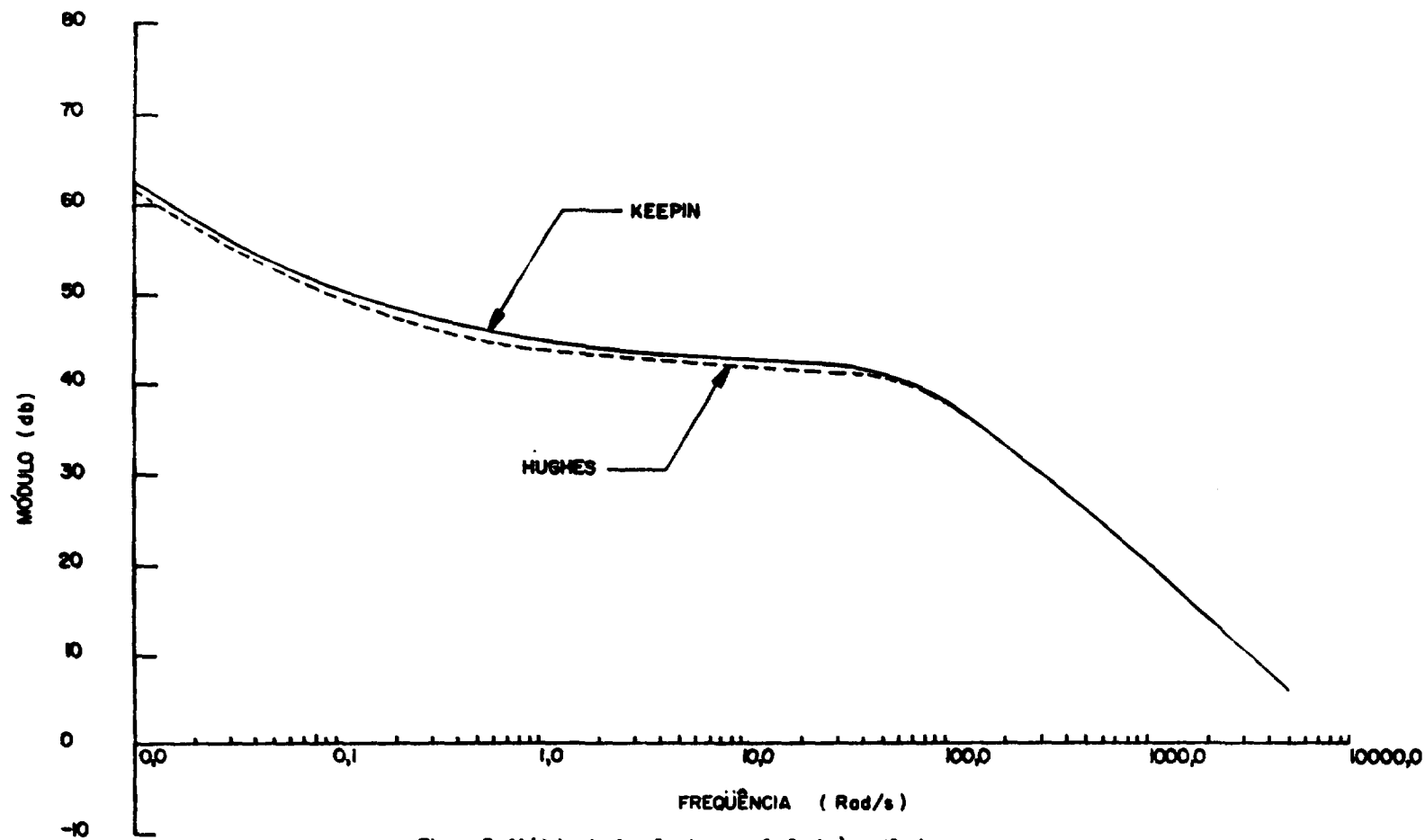


Figura 5- Módulo da função de transferência, a potência zero,
para dados sobre nêutrons atrasados fornecidos por Keepin e Hughes.

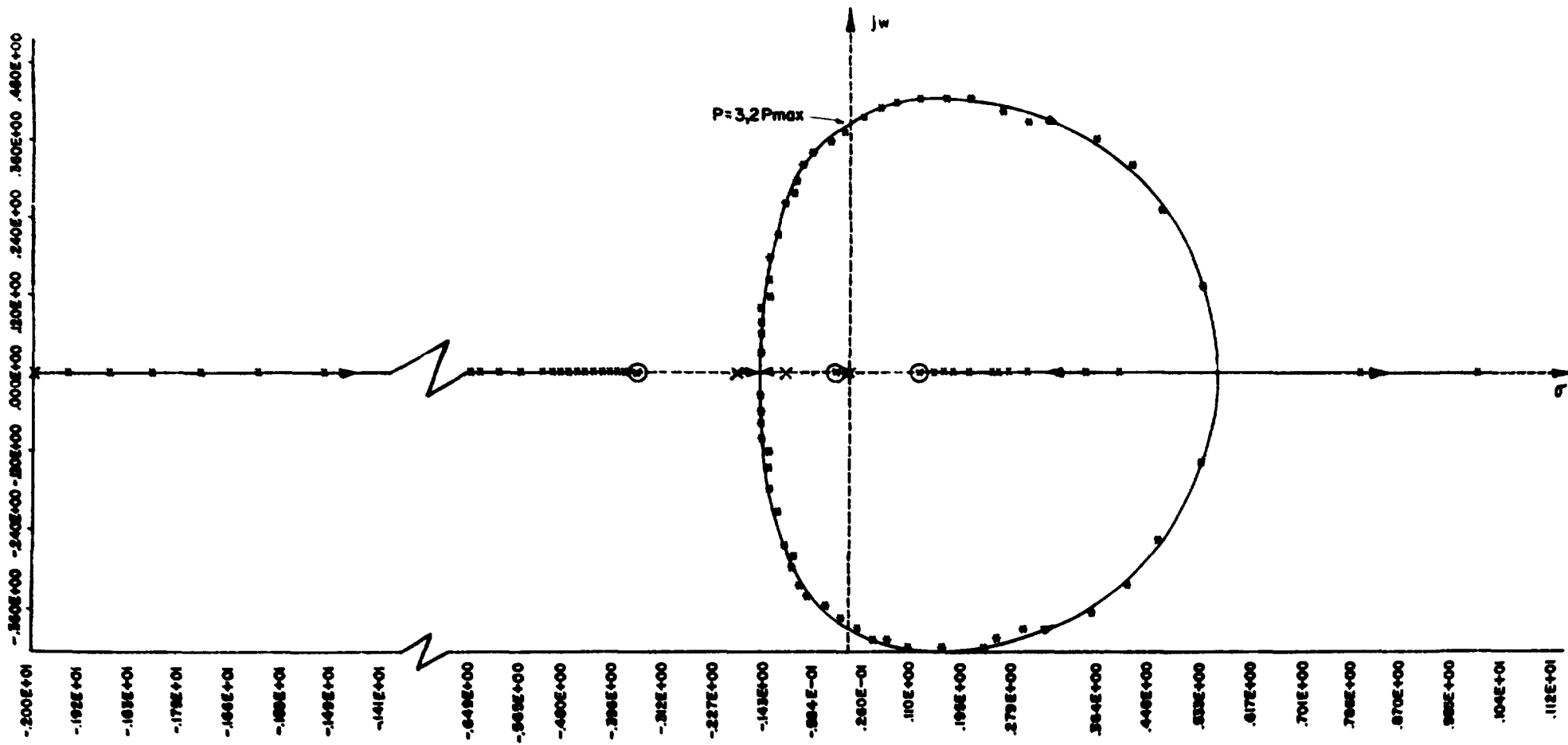


Figura 6 - Comportamento dos polos de $LP(s)$ no plano $-s$ em função do nível de potência P .

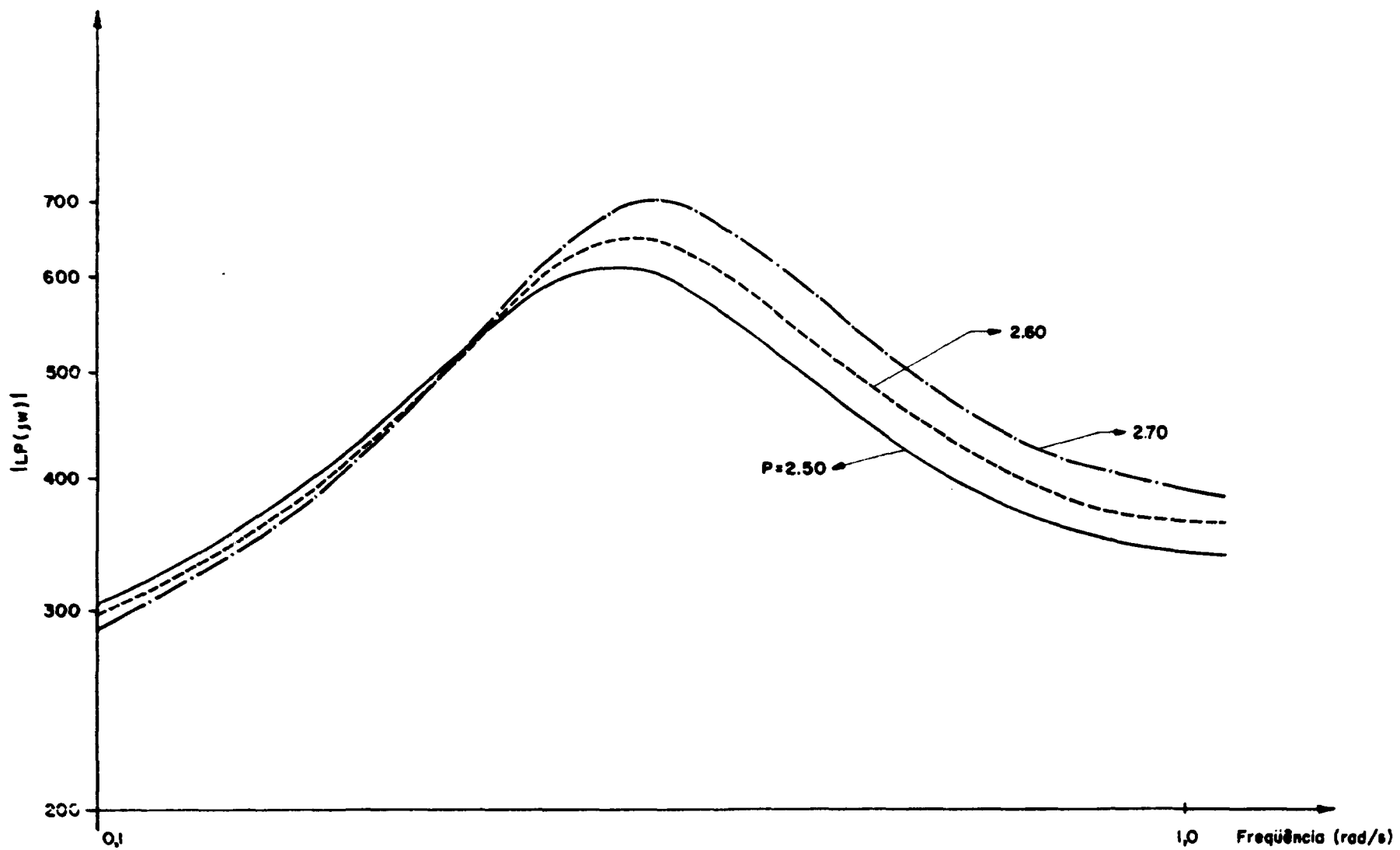


Figura 7. Módulo da função de transferência de carga em função da frequência e potência.

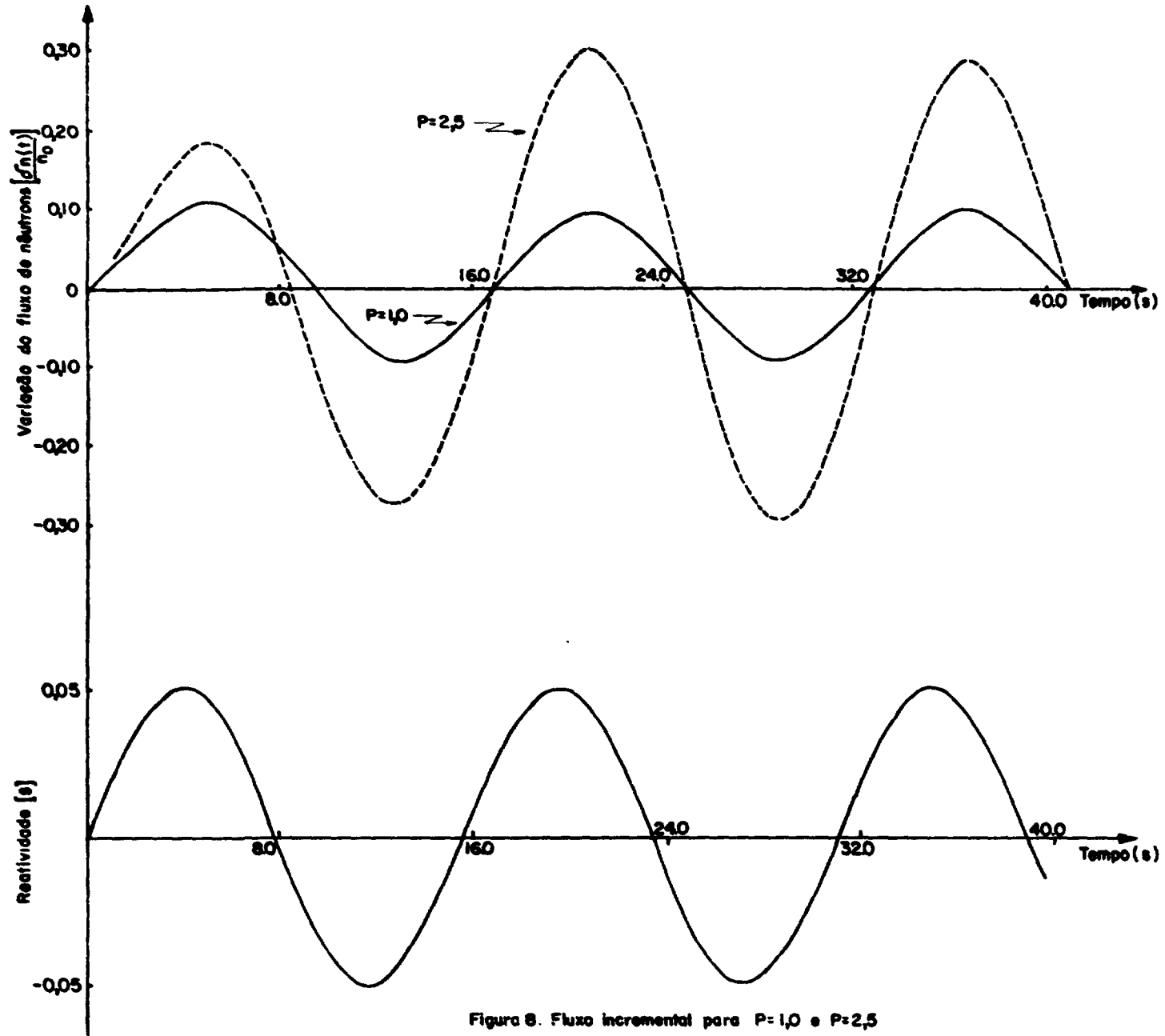


Figura 8. Fluxo incremental para $P=1,0$ e $P=2,5$
 em relação a uma reatividade do tipo $K_{ex}(t)=0,05 \text{ sen}(0,4t)$.

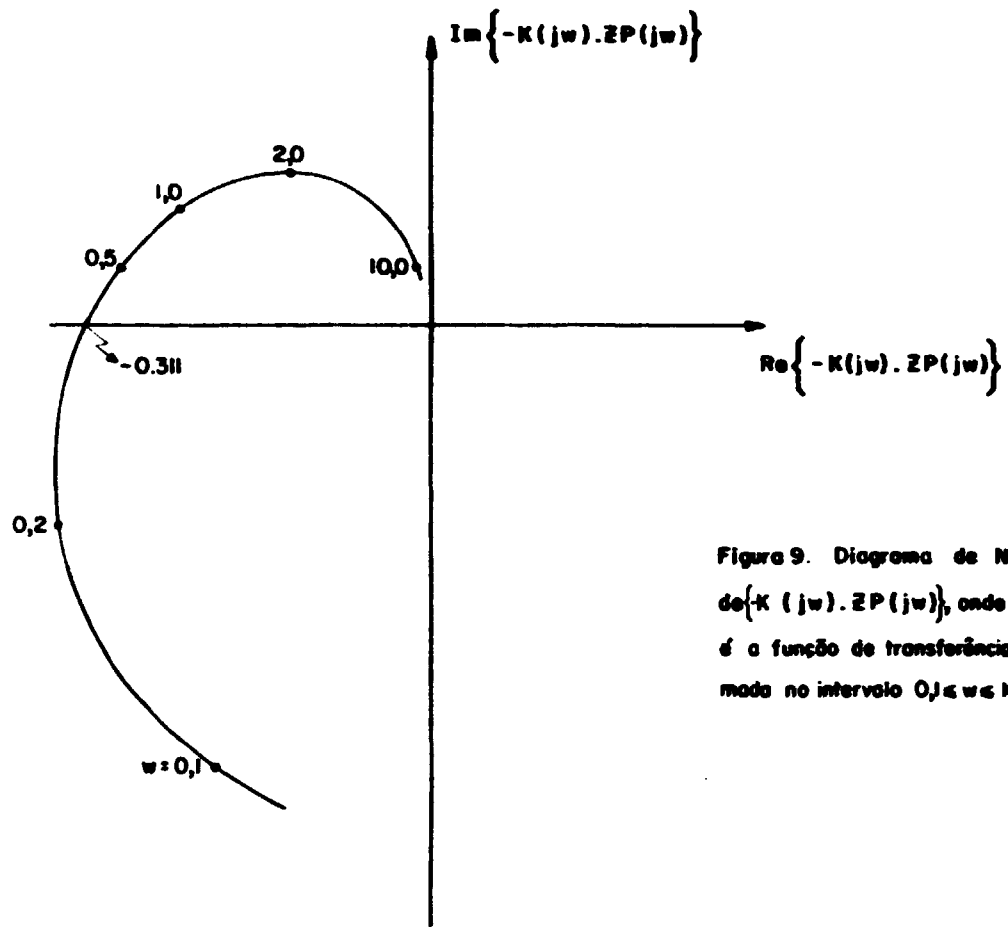


Figura 9. Diagrama de Nyquist de $\{K(jw).ZP(jw)\}$, onde $ZP(s)$ é a função de transferência aproximada no intervalo $0,1 \leq w \leq 10,0$ rad/s.

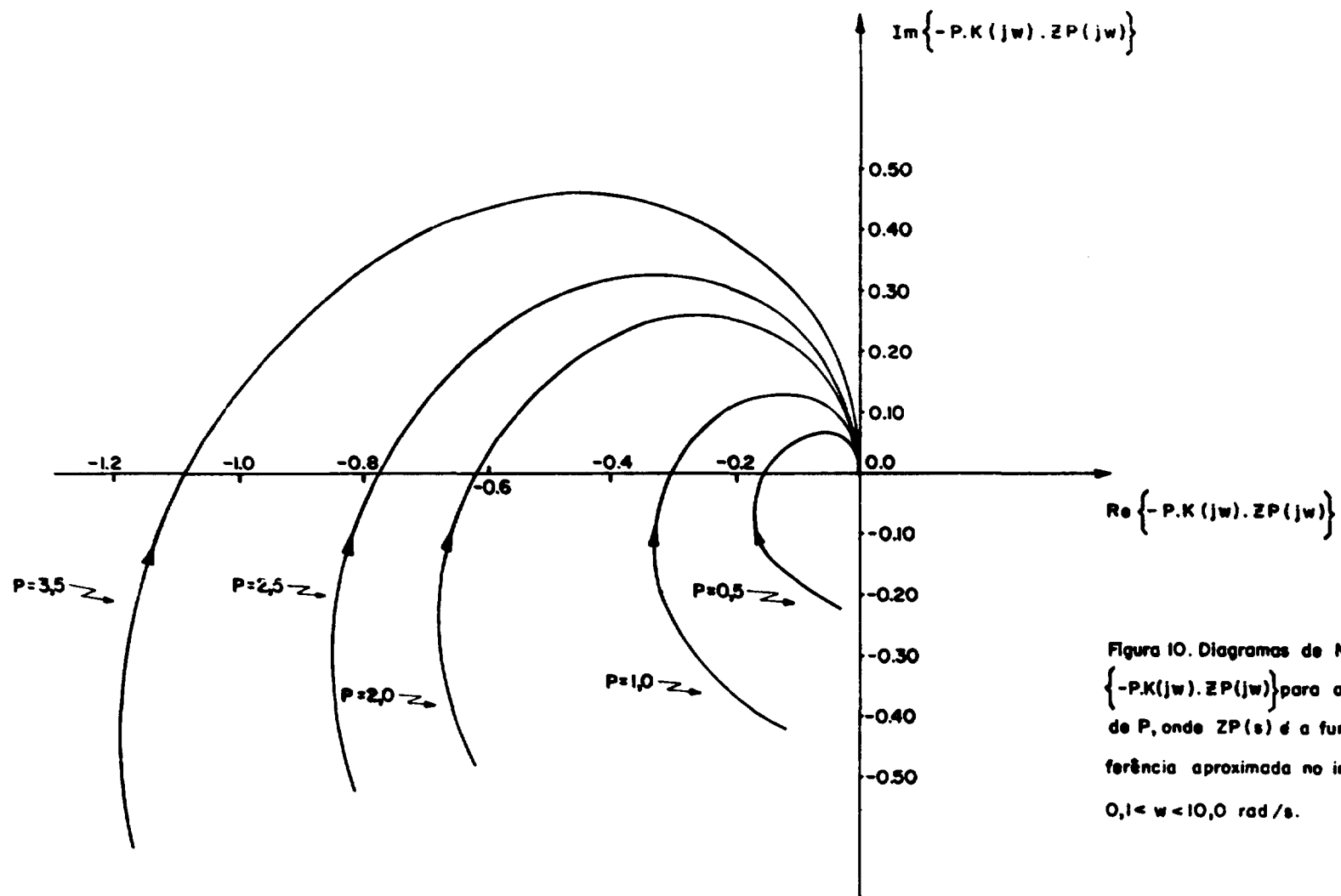
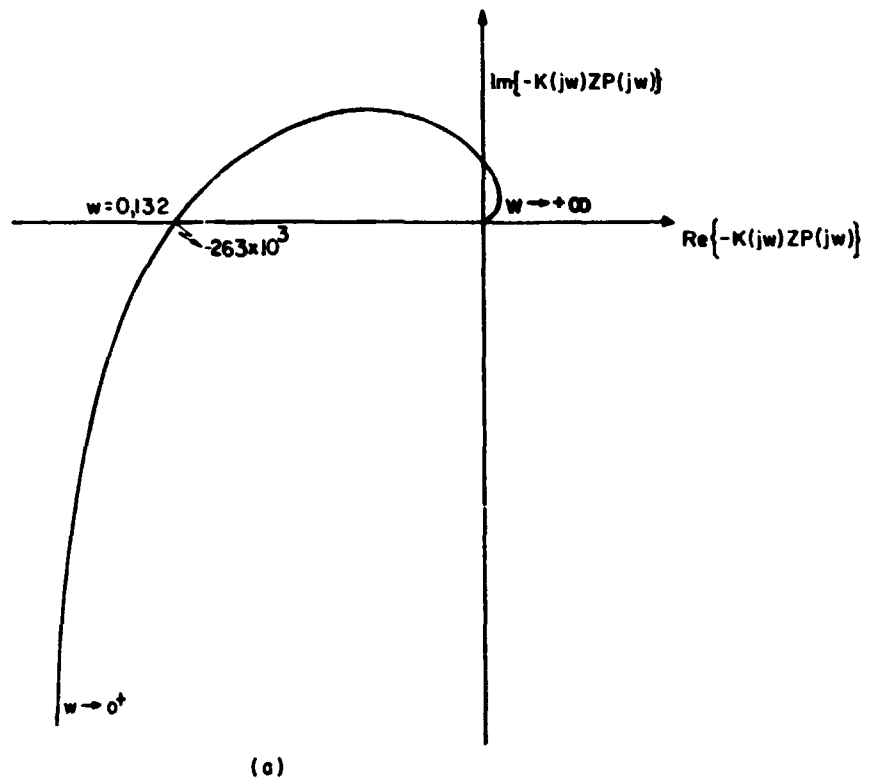
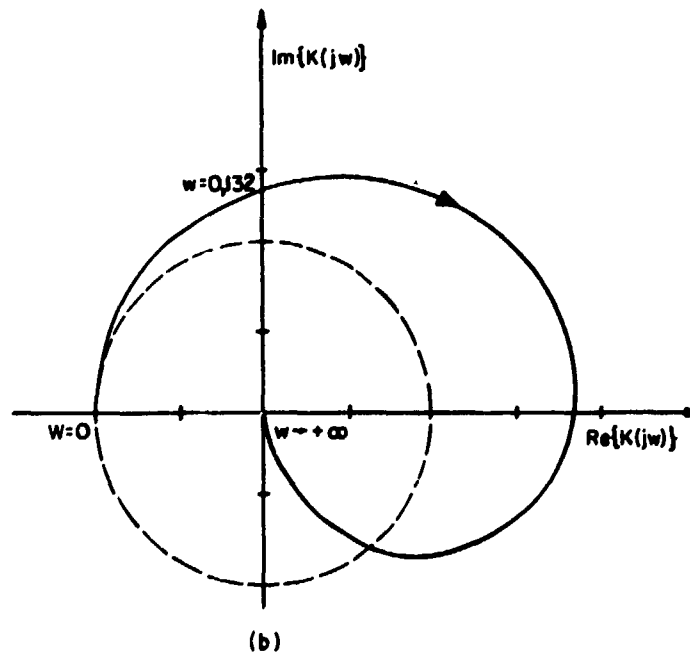


Figura 10. Diagramas de Nyquist de $\{-P.K(jw).ZP(jw)\}$ para alguns valores de P , onde $ZP(s)$ é a função de transferência aproximada no intervalo $0,1 < w < 10,0$ rad/s.



(a)



(b)

Figura II - Diagrama de Nyquist: (a) $-K(j\omega)ZP(j\omega)$, onde $ZP(j\omega)$ não inclui a presença dos nêutrons atrasados. (b) $K(j\omega)$.

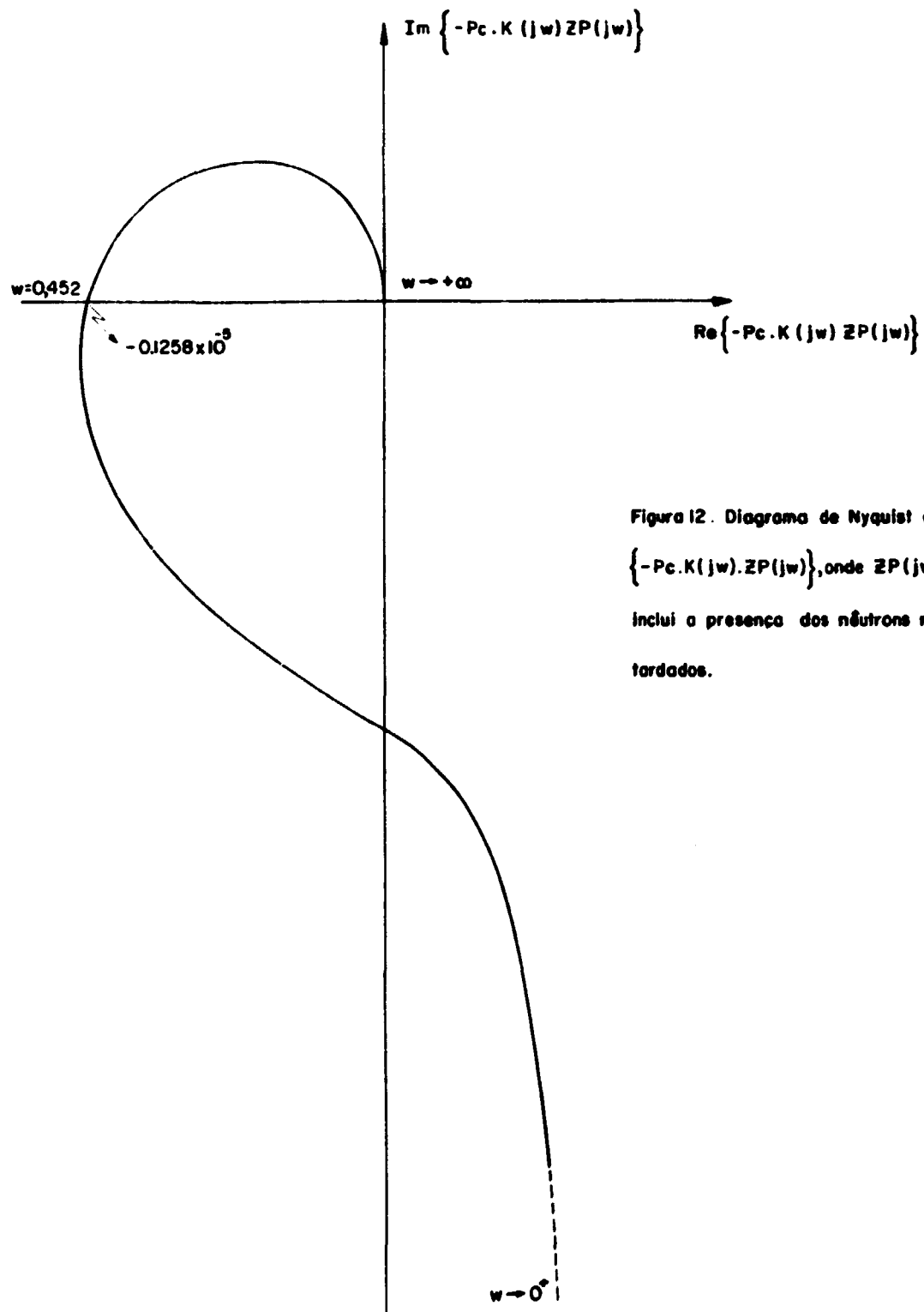


Figura 12. Diagrama de Nyquist de $\{-P_c.K(j\omega).ZP(j\omega)\}$, onde $ZP(j\omega)$ inclui a presença dos nêutrons retardados.