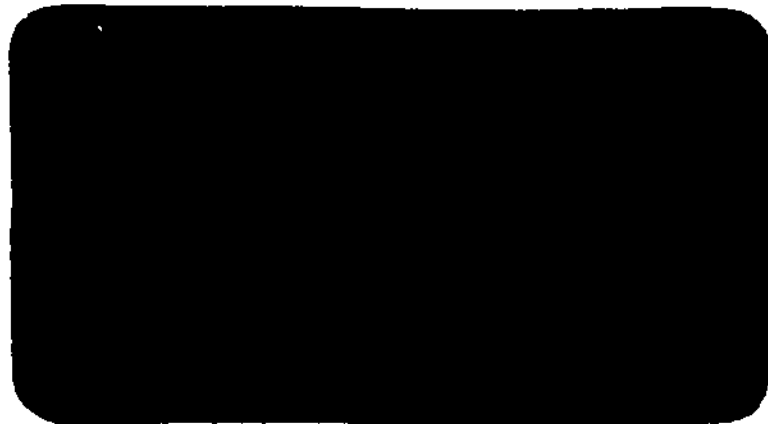




Relatório de Pesquisa e Desenvolvimento



- SEPLAN/PR** - SECRETARIA DE PLANEJAMENTO DA PRESIDÊNCIA DA REPÚBLICA
CNPq - CONSELHO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO E TECNOLÓGICO
LCC - LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA



PEDIDOS DE CÓPIA DESTE RELATÓRIO FAVOR DIRIGIR-SE A :
REQUEST FOR COPY OF THIS REPORT PLEASE ADDRESS TO :

Biblioteca do LCC
Av. Wenceslau Braz, 71 - Fundos
CEP 22.290 - Rio de Janeiro - RJ
Brasil

LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - LCC
AGOSTO DE 1981

LCC -- Nº 017/81
UM ELEMENTO FINITO PARA PLACAS E
CASCAS*

Arthur Muller**

Raúl Feijóo***

Luiz Bevilacqua**

* A ser apresentado no VI Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, dezembro/81.

** Depto de Engenharia Mecânica - PUC/RJ
Rua Marquês de São Vicente, 225
22453 Rio de Janeiro - RJ

***LCC/CNPq

RESUMO

~~Consiste este trabalho na elaboração de um elemento fini~~
to triangular de simples aplicação para placas e cascas. Por apre-
sentar um campo de rotações independente dos deslocamentos, o
elemento permite a resolução de cascas espessas. No limite para
cascas finas, a hipótese de Kirchoff-Love é automaticamente sa-
tisfeita, o que torna o elemento bastante abrangente. (cont.)

ABSTRACT

~~The object of this work is the presentation of~~ A simple
triangular finite element for plates and shells. Since the
rotation fields are assumed independent of the displacement
fields, the element allows one to solve thick shells problems.
In the limit for thin shell, the Kirchoff-Love hypothesis is
automatically satisfied, thus enlarging its range of application. (cont.)

1. INTRODUÇÃO

A obtenção de elementos finitos para placas e cascas tem sempre esbarrado no inconveniente de que, para cascas finas, o campo de rotações é descrito por uma combinação linear que envolve a derivada do deslocamento normal à casca, resultando daí que o funcional energia elástica apresente derivadas de segunda ordem neste deslocamento. Uma exigência básica para funcionais deste tipo é que este campo de deslocamentos deve ser de classe C^1 .

Esta condição faz com que uma aproximação em elementos finitos exija polinômios de interpolação de grau bastante elevado, de forma a satisfazer a continuidade da derivada de elemento para elemento.

De forma a evitar esta dificuldade, vários métodos já foram propostos, todos baseados na supressão da hipótese de Kirchhoff-Love, de que a normal à casca permanece normal após a deformação. Isto possibilita a introdução de um campo de rotações independente do de deslocamentos porém, como pode ser observado na literatura especializada, a energia relativa às deformações da normal resulta muito elevada. Alguns autores sugerem uma penalização desta energia através de um fator determinado numericamente, de forma a reproduzir as soluções analíticas para cascas finas [1]. Outros, com o mesmo intuito, optam por integrações numéricas inexatas [2], [3].

O objetivo deste trabalho é mostrar que esta penalização está implicitamente contida no funcional, o que permite a elaboração de um elemento de simples aplicação.

2. DEFORMAÇÕES

O campo de deformações aqui utilizado será aquele apresentado por Kraus [4], onde despreza-se a extensão da casca na direção normal, mantendo-se porém as rotações β_1 e β_2 independentes do campo de deslocamentos u_1 , u_2 e w , onde os índices referem-se às direções ortogonais θ^1 e θ^2 , que definem a superfície média da casca. Tem-se:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} = & \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \theta^1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta^2} + \frac{w}{r_1} \right) + \\ & + \xi \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta^2} + \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (1.a)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{22} = & \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \theta^2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \theta^1} - \frac{w}{r_1} \right) + \\ & + \xi \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta^1} + \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \theta^1} \right) \end{aligned} \quad (1.b)$$

$$\epsilon_{33} = 0 \quad (1.c)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = & \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial u_2}{\partial \theta^1} - \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta^1} \right) + \xi \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta^1} - \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta^2} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial u_1}{\partial \theta^2} - \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \theta^2} \right) + \xi \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta^2} - \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \theta^1} \right) \end{aligned} \quad (1.d)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \theta^1} - \frac{u_1}{r_1} + \beta_2 \right) \quad (1.e)$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta^2} - \frac{u_2}{r_2} + \beta_1 \right) \quad (1.f)$$

onde A_1 e A_2 são os elementos lineares da casca oriundos da primeira forma fundamental, r_1 e r_2 são os raios de curvatura, ξ é a coordenada normal e

$$\rho_1 = 1 + \xi/r_1 \quad (2)$$

Definindo-se:

$$\underline{\epsilon}^T = [\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{23}] \quad (3.a)$$

$$\underline{\sigma}^T = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23}] \quad (3.b)$$

pode-se mostrar que, para materiais lineares vale a relação

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\epsilon}$$

onde a matriz \underline{E} pode ser encontrada na referência [5].

3. A ENERGIA ELÁSTICA

Esta pode ser dada por

$$W = \frac{1}{2} \int \underline{\sigma} \cdot \underline{\epsilon} \, dvol \quad (4)$$

Definindo-se então

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi}{r_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi}{\rho_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho_1} & \frac{1}{\rho_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi}{\rho_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi}{\rho_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.a)$$

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \frac{\partial \mu_1}{\partial \theta^1} + \frac{\nu_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta^2} + \frac{w}{r_1} \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial \mu_2}{\partial \theta^2} + \frac{\nu_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \theta^1} + \frac{w}{r_2} \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \mu_2}{\partial \theta^1} - \frac{\nu_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta^2} \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial \mu_1}{\partial \theta^2} - \frac{\nu_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \theta^1} \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \theta^1} - \frac{\nu_1}{r_1} + \beta_1 \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \theta^2} - \frac{\nu_2}{r_2} + \beta_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta^1} + \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta^2} \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta^2} + \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \theta^1} \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta^1} - \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \theta^2} \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta^2} - \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \theta^1} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

vemos que \underline{c} pode ser dado por

$$\underline{c} = \underline{H} \underline{c} \quad (6)$$

donde, por (4), a energia total armazenada no vaso pode ser dada por

$$W = \frac{1}{2} \int \underline{d} \cdot \underline{F} \underline{d} A_1 A_2 d\theta^1 d\theta^2 \quad (7)$$

onde

$$\underline{F} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{H}^T \underline{E} \underline{H} \rho_1 \rho_2 d\ell \quad (8)$$

e pode ser determinada analiticamente [6]. Em (8), h é a espessura da casca.

É importante ressaltar-se aqui que as resultantes de tensão podem ser dadas por

$$\underline{N} = \underline{F} \underline{d} \quad (9)$$

onde

$$\underline{N}^T = (N_1 \quad N_2 \quad N_3, \quad W_{z1} \quad Q_1 \quad Q_2 \quad M_1 \quad M_2 \quad M_{12} \quad M_{21}) \quad (10)$$

Denominando-se por V ao trabalho das forças externas que atuam no vaso, o problema pode ser posto na forma variacional. Isto é, procurar-se-ã os campos u_1 , u_2 , w , β_1 e β_2 tal que a variação

$$\delta \pi = 0 \quad (11)$$

onde

$$\pi = W - V \quad (12)$$

Como, na discretização da casca em elementos finitos, o trabalho das forças externas resulta simplesmente em um vetor de cargas, o funcional pode ser analisado através de sua energia elástica "W". Observando-se então esta energia vemos que, para o caso de vigas em flexão - que nada mais é do que uma particularização de uma placa com coeficiente de Poisson nulo - esta pode ser dada por:

$$W = \frac{bEh^3}{12} \int_0^L \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 + \frac{12G}{L^2 E} \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right)^2 dx \quad (13)$$

onde "b" é a largura da viga em questão.

Como, neste caso, $G = E/2$, tem-se:

$$W = \frac{bLh^3}{12} \int_0^L \left(\frac{dg}{dx} \right)^2 + \frac{6}{h^2} \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right)^2 dx \quad (14)$$

Observando-se que o fator $bEh^3/12$ é comum aos termos de flexão e cisalhamento, pode-se observar que o último vem penalizado por um fator $6/h^2$ de forma que a introdução de um fator de penalização numérica torna-se desnecessária. Isto é, no limite para cascas finas, a deformação γ_1 , aparece no funcional multiplicada

da por um fator que tende a crescer com a diminuição da espessura. No processo de minimização, este fator faz com que γ_{11} tenda a zero. Assim, no limite para cascas finas, a hipótese de Kirchhoff-Love é satisfeita.

4. O ELEMENTO FINITO

De acordo com o exposto no item anterior, a aproximação do campo "w" de forma linear torna-se ineficiente visto que, no limite para cascas finas, a rotação β resulta constante no elemento, perdendo-se portanto quaisquer informações acerca dos momentos. Utilizou-se portanto um elemento triangular com seis nós, cinco graus de liberdade por nó, resultando em aproximações parabólicas para todos os campos de deslocamentos e rotações. Consequentemente, em placas finas, as rotações resultam lineares e, por conseguinte, os momentos resultam constantes a nível de elemento. A aproximação do campo de rotações por um polinômio de mesmo grau que os deslocamentos faz-se necessária para cascas com curvatura, de forma a dar ao polinômio interpolante dos campos de rotações o mesmo grau dos que definem os termos u_i/r_i contidos nas deformações γ_{ij} , $i=1,2$.

Os polinômios de interpolação podem ser encontrados na referência [7].

5. RESULTADOS

Aplicou-se o elemento acima em vigas em balanço, cuja razão entre a espessura e o comprimento (h/L) variavam de 1 a 0.001. Os resultados encontram-se plotados nas Figuras 1 a 3.

O elemento foi também aplicado a um cilindro e a uma es-

fera, casos clássicos da referência [7]. Os resultados foram também excelentes (Figuras 4 e 5).

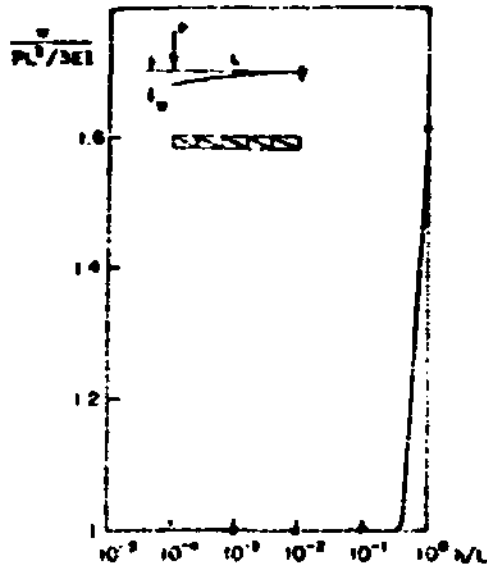


FIG. 1 - VARIAÇÃO DA FLEXÃO COM A ESPESURA DA VIGA

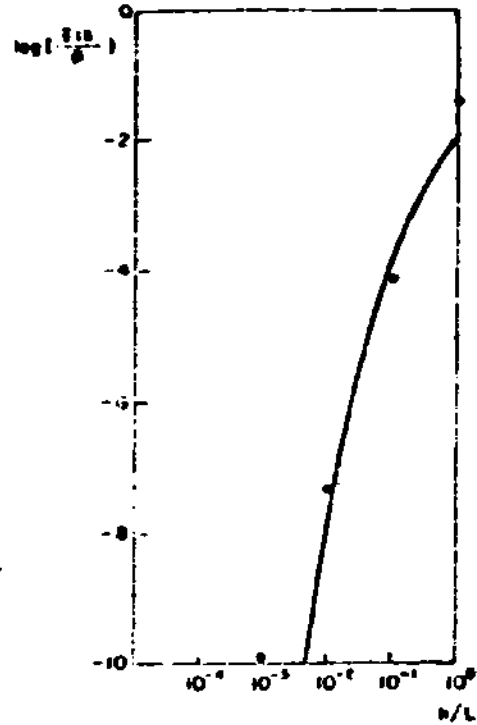


FIG. 2 - DEFORMAÇÃO ϵ_{15} NO PONTO DE APLICAÇÃO DA FORÇA

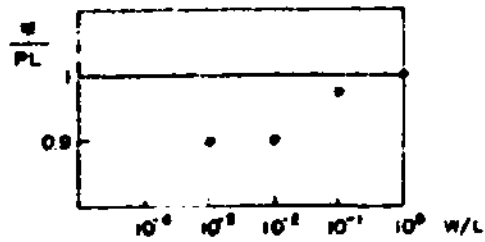


FIGURA 3 - MOMENTO NO ENGASTE

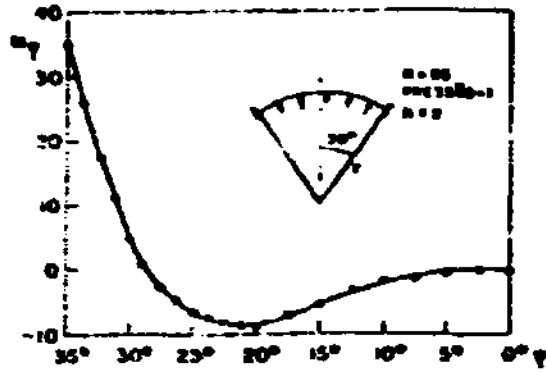


FIGURA 4 - MOMENTO M_y PARA A ESFERA COM PRESSÃO INTERNA ENGASTADA

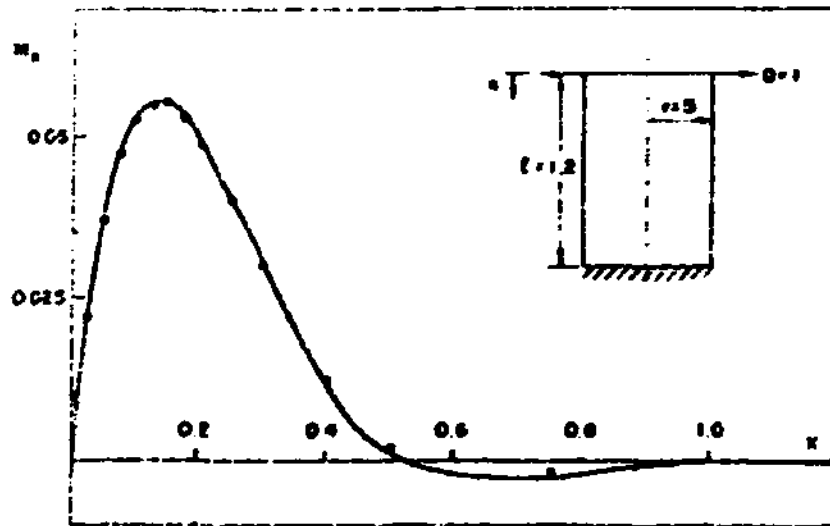


FIGURA 5 - MOMENTO M_x PARA O CILINDRO COM FORÇA CORTANTE

6. CONCLUSÕES

O elemento comportou-se satisfatoriamente em todos os testes. Entretanto, a força cortante, quando calculada pela relação (9) sofreu desvios acentuados para cascas finas, em virtude da diminuição da deformação $\gamma_{1,3}$, em presença das outras. Quando calculada através das equações de equilíbrio, isto é, derivando-se os momentos, ela resultou nula, como de esperado já que, no elemento, o momento é constante para placas. Sugere-se aqui a aproximação do campo de deslocamentos "w" por um polinômio de 3º grau de classe C^0 , de forma a alcançar a força cortante aqui perdida.

REFERÊNCIAS

- [1] SHORE II P.K. Basu, P.L. Gould, "Shell of Revolution Finite Element Program, 1975.
- [2] O.C. Zienkiewicz, J. Too and R.L. Taylor, "Reduced integration technique in general analysis of plates and shells", Int.J. Num.Meth.Eng., 3, 275-90, 1971.
- [3] G.A. Wempner, J.T. Oden and D.A. Kross, "Finite element analysis of thin shells", Proc.Am.Soc.Civ.Eng., 94, EM6, 1273-94, 1968.
- [4] H. Kraus, "Thin elastic shells", 69-77, 1967.
- [5] Bathe-Wilson, "Numerical Methods in Finite Element Analysis", pg. 110, 1976.
- [6] A. Muller, "Um elemento finito para cascas com aplicação a vasos esféricos suportados por colunas", Tese de Mestrado, PUC/RJ, 1981.
- [7] O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element method in Engineering Science, pg. 119, 1971.