SU123030...

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 82-162
ОТФ

А.Н.Лезнов, В.В.Хрущев

СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ В КВАНТОВОМ СЛУЧАЕ

Серпухов 1982

А.Н.Лезнов, В.В.Хрущев

СУПЕРСИММЕТРИЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ В КВАНТОВОМ СЛУЧАЕ

Направляется в ЯФ и
Lett. in Math.Phys.

Аннотация

Лезнов А.Н., Хрущев В.В.

Суперсимметричное уравнение Лиувилля в квантовом случае. Серпухов, 1982.

7 стр. (ИФВЭ ОТФ 82-162).

Библиогр. 5.

Установлено соотношение между константами связи взаимодействующих нелинейного скалярного $\phi(x_0, x_1)$ и спинорного $\psi(x_0, x_1)$ полей, $\mathfrak{L}_{int}=-\bar{g}^2/2\, e^{2\phi}-g' e^{\phi}\bar{\psi}\psi$, приводящее к конечным рядам теории возмущений для динамической переменной $e^{-\phi}$. При этом оказывается, что в классическом пределе $\hbar \to 0$ рассматриваемая система описывается суперсимметричным уравнением Лиувилля.

Abstract

Leznov A.N., Khrushchov V.V.

Supersymmetric Liouville Equation in Quantum Case. Serpukhov, 1982.

p. 7. (IHEP 82-162).

Refs. 5.

The relation between coupling constants of interacting nonlinear scalar $\phi(x_0, x_1)$ and spinor $\psi(x_0, x_1)$ fields, $\mathfrak{L}_{int} = -\bar{g}^2/2\, e^{2\phi}-g' e^{\phi}\bar{\psi}\psi$ was established, which leads to finite series of perturbation theory for the dynamical variable $e^{-\phi}$. In the classical limit $\hbar \to 0$ the system under consideration turns out to be described by supersymmetric Luiville equation.

Как известно, причиной точной интегрируемости ряда классических моделей теории поля в двумерном пространстве-времени является наличие у них группы внутренней симметрии/1/. Известные примеры с бозе-полями показывают, что это свойство сохраняется и в квантовой области, где условие точной интегрируемости формулируется в тех же терминах теории представлений групп, что и в классической области. Для экспоненциальных систем условием обрыва ряда теории возмущений для некоторых динамических переменных как в классическом, так и в квантовом случаях является пропорциональность матрицы констант связи матрице Картана некоторой полупростой алгебры Ли/2/. Поэтому следует ожидать, что группа внутренней симметрии в квантовом случае сохраняется, хотя описать ее в явном виде не удается.

Рассматриваемый в настоящей работе пример показывает, что учет спинорных полей существенным образом изменяет эту ситуацию и что условие обрыва рядов теории возмущений в квантовом случае зависит от постоянной Планка. Таким образом, само понятие алгебры внутренних симметрий в квантовой области должно каким-то образом быть модифицировано.

В силу связи, полученной в настоящей работе, между решениями квантовой версии и классического суперсимметричного уравнения Лиувилля также следует, что грассмановые переменные, которые чужды классической теории поля, можно понимать как формальные пределы квантовых гайзенберговских спинорных полей и в этом смысле антикоммутативность грассмановых переменных следует из соотношения (см. (4)) $\{\psi^{\pm}(z_{\pm}), \psi^{\pm}(z'_{\pm})\} = -i\hbar\,\delta(z_{\pm} - z'_{\pm})$ при $\hbar \to 0$.

Лагранжиан рассматриваемой системы $\{\phi(x), \psi(x)\}$ взаимодействующих скалярного и спинорного полей запишем в следующем виде, имея в виду, что в классическом пределе при соотношении $\bar{g}^2 = -4g'^2$ он приводит к суперсимметричному уравнению Лиувилля:

$$\mathfrak{L}(x) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{1}{2}\bar{g}^2 e^{2\phi} - g' e^{\phi}\bar{\psi}\psi, \tag{1}$$

где $x = \{x_0, x_1\}$, $g_{\mu\nu} = g_{\mu\mu}\delta_{\mu\nu}$, $g_{00} = -g_{11} = 1$, $\psi(x)$ - майорановский спинор, $\bar{\psi}(x) = i\psi^+\gamma_0$, $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В дальнейшем будем пользоваться координатами светового конуса $z_{\pm} = \frac{1}{2}(x_0 \pm x_1)$ и "±"-компонентами спинорного поля $\psi^{\pm} = \psi_1 \pm \psi_2$.

Лагранжиан (1) приводит к следующим уравнениям движения:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z_-\partial z_+}+\bar{g}^2 e^{2\phi}+ig'e^{\phi}\psi^-\psi^+=0,\qquad \frac{\partial\psi^+}{\partial z_-}=g'e^{\phi}\psi^-,\quad \frac{\partial\psi^-}{\partial z_+}=-g'e^{\phi}\psi^+. \qquad (2)$$

Система уравнений (2) при $\bar{g}^2=-4g'^2$ совпадает с суперсимметричным уравнением Лиувилля, записанным для компонент скалярного суперполя /3/.

Для вычисления формальных рядов теории возмущений для некоторых операторов в представлении Гайзенберга воспользуемся известной формулой Швингера:

$$A_n(F(z^+,\ z^-))=(i\hbar)^{-n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}dz_1^+,\ dz_1^-,\ \ldots\ dz_n^+\ dz_n^-\ .$$
$$\theta(t-t_1)\ldots\ \theta(t_{n-1}-t_n)[\ldots\ [[F(z^+,\ z^-),\ 2H_1],\ \ldots\ 2H_n]_{in}\ , \qquad (3)$$

где $2H_i=\bar{g}^2 e^{2\phi(z_i^+,\,z_i^-)}+2ge^{\phi(z_i^+,\,z_i^-)}\psi^-(z_i^-)\psi^+(z_i^+)$, $g\equiv ig'$, $t_i\equiv x_{o,i}$, $F(z^+,\ z^-)$ – некоторая динамическая переменная, в общем случае зависящая от полей $\phi(x)$ и $\psi(x)$, F и $2H_i$ в многократном коммутаторе, который необходимо вычислить, зависят от асимптотических полей $\phi_{in}(x)$ и $\psi_{in}(x)$. В формуле (3) при вычислении $A_n(F(z^+,\ z^-))$ необходимо также перейти от упорядочения по временным переменным t_i к упорядочению по переменным светового конуса $z_i^{\pm}$.

Ввиду инфракрасной особенности уайтмановской функции $<\phi_m(x),\ \phi_m(y)>_o$ при $m=0$, где m – масса свободного скалярного поля, существует проблема построения физического пространства состояний для поля $\phi_o(x)\equiv\phi_{in}(x)$ /4/. Настоящая работа посвящена выяснению только свойств рядов теории возмущений для гайзенберговых динамических переменных, необходимы дальнейшие исследования для вычисления функций Грина рассматриваемой модели. При каноническом квантовании свободного безмассового скалярного поля $\phi_{in}(x)$ мы придерживаемся схемы, введенной в работе /5/, в которой существенным образом используется разбиение поля на две компоненты $\phi_{in}^+(z_+)$ и $\phi_{in}^-(z_-)$.

Поля $\phi_{in}^{\pm}(z_{\pm})$ и $\psi_{in}^{\pm}(z_{\pm})$ удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[\phi_{in}^{\pm}(z_{\pm}),\ \phi_{in}^{\mp}(z'_{\mp})]=\{\psi_{in}^{\pm}(z_{\pm}),\ \psi_{in}^{\mp}(z'_{\mp})\}=0,$$
$$[\phi_{in}^{\pm}(z_{\pm}),\ \phi_{in}^{\pm}(z'_{\pm})]=\frac{\hbar}{4i}\,\varepsilon(z_{\pm}-z'_{\pm}), \qquad (4)$$
$$\{\psi_{in}^{\pm}(z_{\pm}),\ \psi_{in}^{\pm}(z'_{\pm})\}=\frac{\hbar}{i}\,\delta(z_{\pm}-z'_{\pm}),$$

где $\phi_{in}(z_+,z_-)=\phi_{in}^+(z_+)+\phi_{in}^-(z_-)$, $\varepsilon(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

Найдем по формуле Швингера ряд теории возмущений для динамической переменной $e^{-\phi}$. Подставляя $e^{-\phi_{in}(z)}$ в правую часть формулы (3) после выполнения всех необходимых вычислений получим, что если

$$\hbar g'^2+2\bar{g}^2\,tg\ \hbar/8=0, \qquad (5)$$

то происходит обрыв ряда теории возмущений начиная с членов порядка g^3.

Таким образом,

$$e^{-\phi(z^+,z^-)} = e^{-\phi_{in}(z^+,z^-)} + A_1(e^{-\phi_{in}(z^+,z^-)}) + A_2(e^{-\phi_{in}(z^+,z^-)}) =$$

$$= \{1 + 2g\,\frac{e^{i\hbar/2}-1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{z^+}\int_{-\infty}^{z^-} dz_1^+\, dz_1^-\, e^{\phi_{in}(z_1^+,\, z_1^-)}\, \psi_{in}^-(z_1^-)\psi_{in}^+(z_1^+) +$$

$$+ g^2 e^{i\hbar/4}(1 + e^{i\hbar/4})^2 \int_{-\infty}^{z^+}\int_{-\infty}^{z^-} dz_1^+\, dz_1^-\, e^{2\phi_{in}(z_1^+,\, z_1^-)} +$$

$$+ g^2 e^{i\hbar/4}(1 + e^{i\hbar/4}) \times \frac{e^{i\hbar/2}-1}{i\hbar}\Big(\int_{-\infty}^{z^+}\int_{-\infty}^{z^-} dz_1^+\, dz_1^-\, e^{\phi_{in}(z_1^+,\, z_1^-)} \cdot e^{\phi_{in}^+(z_1^+)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{z_1^-} e^{\phi_{in}^-(z_2^-)} \cdot [\psi_{in}^-(z_1^-),\ \psi_{in}^-(z_2^-)]\, dz_2^- +$$

$$+ \int_{-\infty}^{z^+}\int_{-\infty}^{z^-} dz_1^+\, dz_1^-\, e^{\phi_{in}(z_1^+,\, z_1^-)}\ e^{\phi_{in}^-(z_1^-)} \int_{-\infty}^{z_1^+} dz_2^+\, e^{\phi_{in}^+(z_2^+)}\ [\psi_{in}^+(z_1^+),\ \psi_{in}^+(z_2^+)]\Big) +$$

$$+ g^2 e^{i\hbar/4}\Big(\frac{e^{i\hbar/2}-1}{i\hbar}\Big)^2 \int_{-\infty}^{z^+}\int_{-\infty}^{z^-} dz_1^+\, dz_1^-\, e^{\phi_{in}(z_1^+,\, z_1^-)} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{z_1^+}\int_{-\infty}^{z_1^-} dz_2^+\, dz_2^- \cdot e^{\phi_{in}(z_2^+,\, z_2^-)} \cdot [\psi_{in}^-(z_1^-),\ \psi_{in}^-(z_2^-)] \times$$

$$\times [\psi_{in}^+(z_1^+),\ \psi_{in}^+(z_2^+)]\} e^{-\phi_{in}(z^+,\, z^-)} . \qquad (6)$$

($[\psi_{in}^-(z_1^-),\ \psi_{in}^-(z_2^-)]$ – коммутатор полей $\psi_{in}^-(z_1^-)$ и $\psi_{in}^-(z_2^-)$). Решения (6) для $e^{-\phi}$ при $\hbar \to 0$ переходят в решение для $e^{-\phi}$ классического суперсимметричного уравнения Лиувилля, полученное в работе/6/.

При доказательстве по индукции соотношения (5) в произведениях типа $\psi^{\pm}(z_{i_1}^{\pm})\ldots\ldots\psi^{\pm}(z_{i_k}^{\pm})$ необходимо сначала выделить части полностью антисимметричные относительно перестановок аргументов $z_{i_1}^{\pm}, \ldots\ldots, z_{i_k}^{\pm}$. Остающиеся слагаемые содержат δ-функции от разностей $z_{i_k}^{\pm} - z_{i_n}^{\pm}$ и сводятся к интегралам от меньшего, по сравнению с первоначальным интегралом, числа переменных. Интеграл, содержащий при данном n максимальное число ферми-полей (антисимметризованных относительно всех перестановок аргументов) обращается при $n \geqslant 3$ в нуль. Покажем это для $A_4(e^{-\phi_{in}})$, хотя, как будет видно из дальнейшего, приводимое доказательство справедливо для всех n при $n \geqslant 3$.

Подынтегральное выражение в $A_4(e^{-\phi_{in}})$, содержащее произведение максимального числа (в данном случае, восьми) ферми-полей, пропорционально выражению

$$[[[[e^{-\phi},\ e^{\phi_1}\psi_1^-\ \psi_1^+],\ e^{\phi_2}\psi_2^-\ \psi_2^+],\ e^{\phi_3}\psi_3^-\ \psi_3^+],\ e^{\phi_4}\psi_4^-\ \psi_4^+]_{antisym}, \qquad (7)$$

где $e^{-\phi} \equiv e^{-\phi_{in}(z^+, z^-)}$, $e^{\phi_i} \psi_i^- \psi_i^+ \equiv e^{\phi_{in}(z_i^+, z_i^-)} \psi_{in}^-(z_i^-) \psi_{in}^+(z_i^+)$,
в (7) рассматривается только та часть, которая содержит антисимметризованные произведения ферми-полей

$$a(\psi_{i_1}^- \psi_{i_2}^- \psi_{i_3}^- \psi_{i_4}^-) a(\psi_{i_1}^+ \psi_{i_2}^+ \psi_{i_3}^+ \psi_{i_4}^+) \equiv a^-_{i_1 i_2 i_3 i_4} a^+_{i_1 i_2 i_3 i_4} .$$

После перехода от упорядочивания по временным переменным t_i к упорядочиванию по переменной $z_i^{\pm}$, получим

$$a^-_{1234} a^+_{1234} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} (-1)^{\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta}} e^{\phi^-_\alpha} e^{\phi^-_\beta} e^{\phi^-_\gamma} e^{\phi^-_\delta} \times \{[\{e^{\phi_1^+} e^{-2\phi^+}, e^{\phi_2^+}\} e^{\phi_3^+}] e^{\phi_4^+}\} e^{\phi} , \qquad (8)$$

где $\sigma_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 0, & \text{если перестановка } (\alpha\beta\gamma\delta) \text{ четная,} \\ 1, & \text{если перестановка } (\alpha\beta\gamma\delta) \text{ нечетная.} \end{cases}$

Упорядоченная по переменным z_i^+ структура $[\{e^{\phi_1^+} e^{-2\phi^+}, e^{\phi_2^+}\} e^{\phi_3^+}]$, где квадратные скобки означают коммутатор, а фигурные – антикоммутатор, содержится во всех рассмотренного типа подынтегральных выражениях начиная с $n = 3$ и равна нулю в силу перестановочных соотношений (4) для $\phi_{in}^+(z_i^+)$.

Отметим то очевидное обстоятельство, что развитая схема нахождения явного вида динамических переменных применима в идейном плане также к системам уравнений, заданным на конечном пространственном интервале с любыми, в том числе и периодическими, граничными условиями.

Основной результат настоящей работы содержится в формуле (6) в явном виде дающей выражение для динамической переменной $e^{-\phi}$ как функции от асимптотического поля ϕ_{in}. Факт обрыва ряда теории возмущений при определенном соотношении (5) между константами $\bar{g}$ и g', содержащем постоянную Планка, пока не понятен нам с групповой точки зрения. Выяснение этого вопроса позволило бы проинтегрировать более широкий класс моделей, содержащих взаимодействующие ферми- и бозе-поля, а также найти более простые методы расчета, приводящие к результатам настоящей работы. Основной недостаток, присущий всем работам данного направления, связан с отсутствием расчетов матричных элементов построенных динамических величин и получения на их основе физических следствий хотя бы модельного характера.

Авторы благодарны Б.А.Арбузову, М.А.Мествиришвили, М.В.Савельеву, А.И.Оксаку, И.А.Федосееву, О.А.Хрусталеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б. – ТМФ, 1982, 51, с. 10,
2. Лезнов А.Н., Федосеев И.А. – Препринт ИФВЭ 82-45, Серпухов, 1982.
3. Chaichian M., Kulish P.P. - Phys. Lett., 1978, 78B, c. 413.
4. Вайтман А.С. – Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. – М., Наука, 1968.
5. Оксак А.И. Нефоковские линейные бозонные системы и их применение в двумерных полях. В кн.: Труды III Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. – Протвино: ИФВЭ, 1980, с. 340.
6. Лезнов А.Н., Лейтес Д.А., Савельев М.В. – Письма в ЖЭТФ, 1980, 32, с. 85.

Рукопись поступила в издательскую группу
6 августа 1982 года.

Цена 5 коп.

Индекс 362

А.Н.Лезнов, В.В.Хрушев.

Суперсимметричное уравнение лиувилля в квантовом случае.

Редактор М.Л.Фоломешкина. Технический редактор Л.П.Тимкина.
Корректор М.И.Онегина.

Подписано к печати 24.08.82.Т-14177. Формат 70x100/16.
Офсетная печать. Индекс 3624. Цена 5 коп.
Заказ 1981. 0,35 уч.-изд.л. Тираж 250.

Институт физики высоких энергий, 142284, Серпухов,
Московской обл.