

PROBLÈME SPECTRAL DE STURM-LIOUVILLE :
LE CAS DE L'OSCILLATEUR QUARTIQUE

par André VOROS*

On considère sur la droite réelle le problème aux valeurs propres de Sturm-Liouville constitué par l'équation de Schrödinger stationnaire en mécanique quantique

$$(1) \quad \left[-\hbar^2 \frac{d^2}{dq^2} + (V(q) - E) \right] \psi(q) = 0 .$$

où \hbar est la constante de Planck, la fonction potentiel $V(q) = q^{2M} + \dots$ est ici un *polynôme réel* de degré $2M \geq 2$, avec E (l'énergie) le paramètre spectral, ajusté de sorte que $\inf_{q \in \mathbb{R}} \{V(q)\} = 0$. Le problème (1) admet alors un spectre purement discret $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ [1] :

$$(2) \quad 0 < E_0 < E_1 < \dots < E_k < \dots \quad (E_k \uparrow +\infty)$$

mais on ne dispose pas de formules exactes sauf pour $M = 1$ (oscillateur harmonique = équation d'Hermite) : $V(q) = q^2 \Rightarrow E_k = (2k+1)\hbar$. Aussi les méthodes asymptotiques *semi-classiques* (en puissances de \hbar), qui produisent d'excellentes approximations, ont-elles été très étudiées [2] du point de vue analytique [3-4], et sous l'angle de leurs relations avec l'optique géométrique [5-7]. Ces méthodes relient le comportement asymptotique du spectre (2) aux *orbites fermées* du champ de vecteurs hamiltonien de la fonction

$$(3) \quad H(p,q) = p^2 + V(q)$$

dans l'espace de phase \mathbb{R}^2 (*limite classique* du problème (1)). On trouve ainsi la règle spectrale de Bohr-Sommerfeld [2] :

$$(4) \quad \hbar^{-1} \oint_{H=E_k} p dq = (2k+1)\pi + O(\hbar k^{-1}) \quad (\hbar k^{-1} \rightarrow 0)$$

qui précise, dans les problèmes unidimensionnels, la formule asymptotique de Weyl [7].

Notre travail [8] vise à établir que ces méthodes, que l'on considère irrémédiablement approximatives, dissimulent en fait un procédé d'attaque *exact* du problème (1). L'illustration sera fournie par l'*oscillateur quartique*, à savoir $V(q) = q^4$, qui est le cas non-trivial le plus simple et qui a servi de banc d'essai pour l'élaboration de la méthode [9-10], ainsi que sa vérification à l'aide des valeurs numériques assez précises disponibles par ailleurs pour le spectre [11]. L'extension à V de degré > 4 ne présente que des difficultés calculatoires.

* Chercheur au C.N.R.S.

1. Rappels et notations

On définit (pour $M > 1$) les fonctions spectrales [10] :

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta(E) = \prod_0^\infty (1 - E/E_k) & \text{(déterminant de Fredholm)} \\ \zeta(s) = \sum_0^\infty E_k^{-s} & \text{(fonction zêta du problème (!))} \end{cases} .$$

On utilisera plus tard la série de Taylor (convergente pour $|E| < E_0$) :

$$(6) \quad \log \Delta(E) = - \sum_{n=1}^\infty \zeta(n) E^n / n .$$

Des techniques spécifiques aux équations différentielles ordinaires [1] simplifient l'étude du spectre à une dimension. Soit l'impulsion classique :

$$(7) \quad p(q) = (E - V(q))^{1/2} \text{ avec } \text{Arg } p(q) = -\pi/2 \quad (q \rightarrow -\infty) .$$

On pose $x = \hbar^{-1}$ (paramètre de fréquence, plus commode que \hbar) .

Il existe alors une solution unique de (1) vérifiant [3] :

$$(8) \quad \Psi(q) \sim p(q)^{-1/2} \exp ix \int_{q_0}^q p(q') dq' \quad (q \rightarrow -\infty) ,$$

solution *récessive* (évanescence) en $-\infty$. De l'autre côté :

$$(9) \quad \lim_{q \rightarrow +\infty} \Psi(q) [p(q)^{-1/2} \exp ix \int_{q_0}^q p(q') dq']^{-1} = a$$

existe, et $a = 0$ ssi E est valeur propre de (1). On a même l'identité remarquable [8] :

$$(10) \quad \begin{cases} D(E, x) \equiv \Delta_{c1}(E, x) a(E, x) , \text{ où} \\ D = e^{-\zeta'(0)} \Delta , \quad \Delta_{c1} = \exp x \int_0^\infty \frac{d(\int_{H < E} dp dq)}{E' - E} = \exp x \int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{V-E} - \sqrt{V}) dq \end{cases}$$

définie par prolongement analytique à partir de $E < 0$; $\Delta_{c1}(E)$ désigne la partie divergente de $\Delta(E)$, laquelle provient de la formule semi-classique (4).

Remarque.— afin d'alléger les formules nous omettons d'écrire les variables muettes ou non significatives telles que \hbar dans (5), E dans (8).

2. La méthode semi-classique exacte. Principales étapes :

a) on complexifie la coordonnée q , et les paramètres E et $x = \hbar^{-1}$;

b) on calcule les solutions formelles de (1) du type Liouville-Green ou eikonal (c'est la "méthode BKW complexe" [2-5]) :

$$(11) \quad \Psi_{\pm}(q; x) = a(q; x) p^{-1/2} \exp \pm ix \int_{q_0}^q p(q') dq'$$

où a se calcule comme série formelle :

$$(12) \quad a(q; x) \sim 1 + \sum_1^\infty \alpha_n(q) x^{-n} ;$$

c) on passe en représentation conjuguée de Fourier-Laplace par rapport à la variable x (transformation de Balian-Bloch [5]), $C(q)$ étant un chemin infini à spécifier :

$$(13) \quad \Psi(q; x) = x \int_{C(q)} \tilde{\Psi}(q, s) e^{-xs} ds .$$

Le problème (1) devient alors l'équation aux dérivées partielles homogène :

$$(14) \quad \partial^2 \tilde{\Psi} / \partial q^2 + (E - V(q)) \partial^2 \tilde{\Psi} / \partial s^2 = 0 ;$$

d) on cherche (11) comme image d'une solution $\tilde{\Psi}(q,s)$ analytique en (q,s) et à ramification logarithmique isolée (problème de Cauchy ramifié [12]). Le lieu de ramification est nécessairement le graphe Σ d'une solution complexe de l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$(15) \quad \Sigma = \{(q,s(q)) \mid s'(q)^2 = V(q) - E\} ,$$

et la série de Puiseux de la ramification est la transformée de Borel de (12) :

$$(16) \quad \tilde{a}(q,s) = -(2\pi i)^{-1} \log s \left[1 + \sum_1^{\infty} \alpha_n(q) s^n / n! \right] ;$$

e) on résout (14) sous les conditions aux limites pour $q \rightarrow -\infty$:

$$(17) \quad \begin{cases} s(q) = - \int_{q_0}^q |p| dq & (\text{choix d'une branche positive pour } s(q)) \\ \lim_{q \rightarrow +\infty} \tilde{a}(q,s) = -(2\pi i)^{-1} \log s ; & \lim_{q \rightarrow +\infty} \partial \tilde{a} / \partial q = 0 ; \end{cases}$$

conditions garantissant, si $\tilde{\Psi}$ existe, que $\Psi(q,x)$ obtenu par l'intégration (13) est la solution récessive (8) qui nous intéresse ;

f) on détermine la structure analytique complète de la fonction $s \rightarrow \tilde{\Psi}(q,s)$ pour q quelconque par prolongement analytique à partir de $q = -\infty$ (méthode de déformation par isotopies ambiantes [13-14]) ;

g) de même qu'en (9) on prend la limite $q \rightarrow +\infty$ dans (11-16)

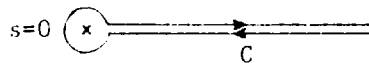
$$(18) \quad a(x) = \lim_{q \rightarrow +\infty} a(q;x) = x \int_C \tilde{a}(+\infty,s) e^{-xs} ds \quad (\text{fig. 1})$$

$$(19) \quad = x \int_0^{\infty} a_B(s) e^{-xs} ds , \text{ où}$$

$$(20) \quad a_B(s) = \tilde{a}(+\infty,s) - \tilde{a}(+\infty, e^{2i\pi}s)$$

est la variation de $\tilde{a}(+\infty,s)$ autour du point de ramification $s = 0$.

Figure 1.



La méthode indiquée en f) aboutit donc à la structure analytique complète (au groupe de monodromie globale [14]) de la fonction transformée de Borel $a_B(s)$, liée au spectre $\{E_k\}$ par la formule de sommation de Borel (19) puis l'identité (10). On trouve ainsi que $a_B(s)$ est une fonction résurgente au sens d'Ecalte [15], se ramifiant au-dessus du réseau des points :

$$(21) \quad s = \omega_Y = -i \int_Y p dq$$

où Y est toute orbite périodique, réelle ou complexe, du hamiltonien (3) à l'énergie E considérée ; les déterminations de a_B sont indexées par ces mêmes orbites et forment en outre une algèbre de convolution (à base dénombrable) ;

h) pour avoir le spectre (les zéros de $a(x;E)$) il ne "reste qu'à" reconstruire

$a_B(s)$ à partir de sa monodromie (puis intégrer (19)). Ce problème de Riemann-Hilbert [16] n'est hélas pas résolu, et seul un résultat partiel peut être explicité [8] : les symétries de la monodromie imposent au déterminant $\Delta(E)$ de vérifier une *équation fonctionnelle polynômiale*, dont la structure rappelle les équations de Sibuya pour les multiplicateurs de Stokes [17]. Dans le cas de l'oscillateur harmonique cette équation est la formule des compléments pour la fonction Γ d'Euler ; pour les potentiels homogènes ($V(q) = q^{2M}$), le développement des équations fonctionnelles en puissances de E fournit une infinité d'*identités arithmétiques* entre les valeurs de la fonction zêta aux divers points entiers.

3. Remarques et exemples

L'argumentation détaillée étant longue [8], nous ferons seulement quelques commentaires explicatifs illustrés par quelques résultats relatifs à l'*oscillateur quartique* $V(q) = q^4$. Les lettres a), c)... renvoient à l'énumération ci-dessus.

a) l'analyticité de V est une condition fondamentale car la méthode de prolongement utilisée en f) n'est efficace qu'en coordonnées complexes. En revanche il est concevable de l'étendre à des potentiels non polynômiaux, voire méromorphes, ou encore à des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur.

c) on fait l'*hypothèse* qu'une telle représentation (13) existe pour un chemin ouvert C (autorisé à dépendre de q) et pour une fonction analytique $\tilde{\Psi}$ tempérée à l'infini en s . Par déformation de contour, seules les singularités de $\tilde{\Psi}$ contribuent au résultat, donc $\tilde{\Psi}$ est à considérer comme une fonction ramifiée modulo des fonctions analytiques (un genre de microfonction globale et tempérée).

d) les formules (15-16) décrivent la propagation dans le complexe des singularités des solutions de l'équation aux dérivées partielles homogène (14) (la coordonnée q jouant le rôle du "temps"). Ce sont des analogues holomorphes [12] des théorèmes sur les fronts d'onde C^∞ [6].

e) la validation mathématique de notre procédure se réduit entièrement à démontrer que le problème aux limites (17) est bien posé dans une classe de fonctions tempérées à l'infini en s et à ramifications isolées. Actuellement ce résultat est *conjectural*, mais il est corroboré par de nombreuses conséquences se prêtant à des vérifications numériques précises.

f) le problème est de déformer le groupe de monodromie de la fonction $s \rightarrow \tilde{\Psi}(q,s)$ par rapport à q , partant d'un voisinage de $q = -\infty$ où la formule (17) impose la monodromie (connue) de la fonction $\log s$. Cette déformation est induite par la géométrie de la courbe complexe Σ ; les obstructions à la déformation triviale proviennent des singularités de Σ , pour lesquelles on invoque les formules de Picard-Lefschetz. Si l'on se limite aux valeurs de E (génériques) telles que les racines q_j^E de $V(q) = E$ soient simples, alors l'équation de Hamilton-Jacobi (15) n'autorise comme singularités que des self-intersections transverses, et des "points cuspidaux"

au-dessus des $q_j^!$, où :

$$(22) \quad s(q) - s(q_j^!) \sim c(q - q_j^!)^{3/2}.$$

L'effet des self-intersections se trouve être nul ; en revanche le sous-groupe de monodromie relatif à deux branches de Σ se raccordant suivant (22) doit représenter le groupe du *nœud de trèfle*, et cette contrainte le détermine complètement.

Dans le problème initial (1), l'obstruction ainsi décrite est connue sous le nom de "phénomène de Stokes" [2-4] : la décomposition d'une solution ψ sur une base de solutions formelles du type (5) :

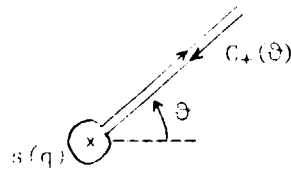
$$(23) \quad \psi = b_+ \psi_+ + b_- \psi_-$$

est locale en q et ne se prolonge globalement qu'en autorisant des variations *fi-elles* des coefficients b_{\pm} , variations données par des *équations de raccordement* ("connection formulas") dont la précision et la portée sont assez obscures dans la littérature asymptotique. Le passage à l'équation transformée de Borel (14) a rendu le problème analytique, et conduit par notre raisonnement à une réponse exacte, unique et générale au problème du raccordement (possibilité pressentie par Dingle [4], Knoll et Schaeffer [18]) :

1) si ψ_{\pm} sont resumés par la méthode de Borel dans la direction ϑ , à savoir par exemple (Fig. 2) :

$$(24) \quad \Psi_+(q; x) = x \int_{C_+(\vartheta)} \tilde{\Psi}(q; s) e^{-xs} ds,$$

Figure 2.



alors b_+ et b_- subissent des sauts à chaque traversée d'une *ligne de Stokes*, courbe du plan q définie par la condition :

$$(25) \quad ix \int_{q_j^!}^q p(q') dq' \in \mathbb{R} \quad (q_j^! \text{ racine de } V(q) = E).$$

2) sauf pour les valeurs (en nombre fini) de $\text{Arg } x = -\vartheta$ vérifiant :

$$(26) \quad ix \int_{q_j^!}^{q_k^!} p(q') dq' \in \mathbb{R} \quad (q_k^! \text{ racine distincte de } q_j^!)$$

les sauts δb_{\pm} à la traversée d'une ligne de Stokes dans le sens trigonométrique (vu de l'origine $q_j^!$), en supposant que ψ_+ est la solution dominante :

$ix \int_{q_j^!}^q p(q') dq' > 0$ (le cas opposé se traite de même), valent :

$$(27) \quad \begin{cases} \delta b_+ = 0 & \delta b_- = i u_{\Gamma}^{\vartheta} b_+ & \text{avec} \\ u_{\Gamma} = \exp ix \int_{\Gamma} (p - ia'/xa) dq & (\text{Fig. 3}) \text{ et} \\ u_{\Gamma}^{\vartheta} = \text{somme de Borel de } u_{\Gamma} & \text{dans la direction } \vartheta \end{cases}$$

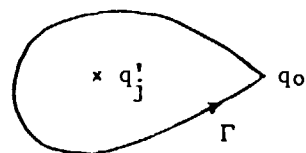


Figure 3.

Remarques. — la sommabilité de Borel des séries formelles ψ_{\pm} et u_{Γ} , dans les directions ϑ non exclues par (25) et (26) respectivement, fait partie du résultat.

— lorsque ϑ traverse une valeur exclue, les expressions *formelles* finales ont des sauts exponentiellement petits qui mesurent en dernière analyse la *non-commutativité* du groupe de monodromie ; le rôle essentiel de ce groupe n'apparaît pas dans les présentations habituelles.

— la restriction des formules (27) au domaine réel redonne les règles de saut de l'indice de Maslov à une dimension [6].

g) pour $V(q) = q^4$ (cas quartique) et $E < 0$, soient γ, γ' (fig. 4) deux orbites matérialisant les périodes primitives de la trajectoire classique complexe (une fonction elliptique cn), et soient les actions classiques :

$$(28) \quad \omega = -i \int_{\gamma} pdq = \frac{\Gamma(1/4)^2}{3\sqrt{\pi}}, \quad \omega' = -i \int_{\gamma'} pdq = i\omega$$

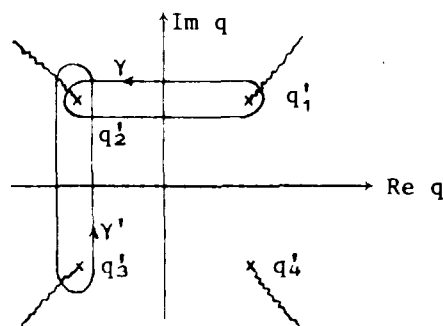


Figure 4.

On peut décrire la structure analytique de $a_B(s)$ dans un plan coupé de sorte que le premier feuillet ne contienne qu'un nombre *fini* de points de branchement de $a_B(s)$, tous de la forme $s_{mm} = m\omega + m'\omega'$. Les variations de a_B autour des s_{mm} , sont indiquées sur la figure 5 ; plus précisément, si $a'(x) = a(ix)$:

$$(29) \quad a_B(s_{mm} + s) - a_B(s_{mm} + e^{2i\pi}s) = c_{mm} [a(x)^{1-m} a'(x)^{-m'}]_B(s), \quad (c_{mm} \in \mathbb{Z}).$$

On peut réécrire le membre de droite à l'aide de la notation :

$$(30) \quad [f(x)g(x)]_B(s) = f_B(s) \star g_B(s) = \frac{d}{ds} \int_0^s f_B(t) g_B(s-t) dt$$

(au niveau des séries de Taylor : $\frac{s^p}{p!} \star \frac{s^q}{q!} = \frac{s^{p+q}}{(p+q)!}$). Grâce à une formule combinatoire générale donnant les discontinuités d'un produit de convolution comme (30) en termes de celles des facteurs, on étend ensuite la formule (29) à tous les feuillets de la surface de Riemann de $a_B(s)$, seul le poids c_{mm} , dépendant du feuillet d'une manière en principe calculable.

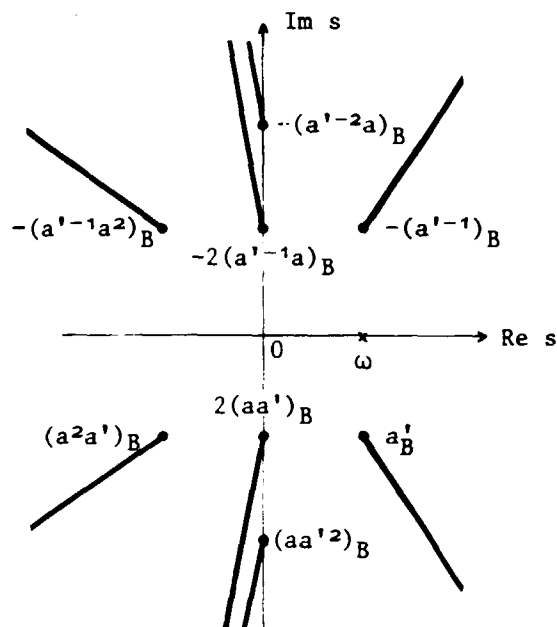


Figure 5.

La formule (29) contient donc sous forme condensée toute la monodromie de $a_B(s)$: la base naturelle des déterminations est indexée par le réseau des périodes classiques et se construit par convolution-traduction (noter le changement d'origine par rapport à (29)) :

$$(31) \quad \varphi_{mm'}(s) = [a_B(\cdot)^{\dot{*}(-m)} * a_B(-i\cdot)^{\dot{*}(-m')}] (s - s_{mm'}) .$$

La monodromie est engendrée par une famille de formules du type :

$$(32) \quad \varphi_{mm'}(s_{nn'} + s) - \varphi_{mm'}(s_{nn'} + e^{2i\pi}s) = C_{mm'}^{nn'} \varphi_{nn'}(s_{nn'} + s) , \quad C_{mm'}^{nn'} \in \mathbb{Z} .$$

Remarque.— chaque fonction $\varphi_{mm'}$ se trouve être analytique aux points $s = 0$ et $s = s_{mm'}$ (et sur toute la droite passant par ces points).

Cette structure analytique remarquable est, pour des raisons qui nous échappent, exactement du type "résurgent" défini et étudié par Ecalle [15] dans des contextes tout autres. Ici cette structure est d'origine purement dynamique et se généralise à $V(q)$ quelconque (avec la seule complication technique que les points de branchement forment, en projection sur \mathbb{E} , un réseau partout dense).

h) Nous ne savons malheureusement pas exploiter complètement l'information analytique ainsi obtenue pour ce qui nous intéresse, à savoir le spectre (2). Nous donnons seulement deux approches partielles, mais intéressantes à double titre :

- elles fournissent des résultats exacts et de type global à partir d'une analyse *micro locale* complexe, interprétée à l'aide d'hypothèses raisonnables ;
- elles sont incomplètes à cause de questions mathématiques qu'il serait intéressant de résoudre.

1) La première approche consiste à effectuer la somme de Borel de $a(x)$ par l'intégrale (19) et à repasser au déterminant par (10). Les contraintes imposées par la rigidité de la structure analytique de $a_B(s)$ se traduisent par une *équation fonc-*

tionnelle polynômiale pour le déterminant. Pour $V = q^4$:

$$(33) \quad D(E)D(jE)D(j^2E) = D(E) + D(jE) + D(j^2E) + 2 \quad (j = e^{2i\pi/3}) .$$

Exemple inhomogène : $V = q^4 + Kq^2$; la structure de $a_B(s;K)$ se déduit du cas $K = 0$ par *déformation isomonodromique* (le réseau cesse d'être carré) ; l'équation fonctionnelle garde sa forme mais implique maintenant aussi la variable K :

$$(34) \quad D(E,K)D(jE,j^2K)D(j^2E,jK) = D(E,K) + D(jE,j^2K) + D(j^2E,jK) + 2 .$$

Les méthodes de Sibuya [17] devraient reproduire ces mêmes équations plus directement, mais c'est bien par resommation d'une série semi-classique divergente que les résultats exacts (33-34) sont apparus.

Le problème ouvert est maintenant de décrire les solutions de (33) par exemple, compatibles avec la forme de produit infini (5). Mais une *vérification* très simple de (33) existe : on la développe en série de Taylor dans le disque $|E| < E_0$ à l'aide de la formule (6) et par identification on obtient une infinité d'identités arithmétiques [8] dont les deux premières sont :

$$(35) \quad \zeta'(0) = -\log 2$$

$$(36) \quad \zeta(3) = \frac{1}{6} \zeta(1)^3 - \frac{1}{2} \zeta(1)\zeta(2) .$$

La première se démontre par ailleurs [10], et les suivantes se contrôlent numériquement à l'aide des tables de valeurs propres existantes [11] (il existe une famille plus complète de telles identités, impliquant la fonction zêta alternée $\zeta^P(s) = \sum_0^\infty (-1)^k E_k^{-s}$, et généralisable explicitement à $V(q) = q^{2M}$ [8]).
Remarque.— ces résultats sont distincts du calcul des $\zeta(n)$ pour les entiers *negatifs* par la méthode des identités de trace [19-10].

2) La seconde approche s'applique aux transformées de Borel $\varphi_{mm}(s)$ elles-mêmes, par exemple $\varphi_{-1,0}(s) = a_B(\omega + s)$. D'abord, si $a_B(s)$ est "raisonnablement tempérée à l'infini", i.e. $a_B(s) \sim As^Y/\Gamma(Y+1)$, il découle des théorèmes abéliens [20] que $a(x) \sim A/x^Y$ et, comparant avec (10) et (35) :

$$(37) \quad a_B(s) \rightarrow e^{-\zeta'(0)} = +2 \quad (s \rightarrow +\infty) .$$

De même tous les φ_{mm} ont des *limites finies* calculables dans tout secteur (ce par application répétée des formules de monodromie (32)).

Par ailleurs les coefficients $C_{mm}^{nn'}$ ont des symétries qui font que :

$$(38) \quad f(s) = \varphi_{-1,0}(s) + \varphi_{-1,0}(is) + \varphi_{-1,0}(i^2s) + \varphi_{-1,0}(i^3s)$$

est une fonction sans singularités donc entière, mais bornée par ce qui précède, donc *constante* :

$$(39) \quad f(s) = \varphi_{-1,0}(+\infty) + \varphi_{-1,0}(i\infty) + \varphi_{-1,0}(-\infty) + \varphi_{-1,0}(-i\infty) = 3e^{-\zeta'(0)}$$

grâce à (37) et aux valeurs explicites des $C_{mm}^{nn'}$ [8]. Alors (38) équivaut à :

$$(40) \quad \varphi_{-1,0}(0) = 3/2 \quad , \quad \frac{d^n \varphi_{-1,0}}{ds^n}(0) = 0 \quad \text{pour } n = 4, 8, 12, \dots \quad ,$$

résultat découvert numériquement avec une grande précision, et qui paraîtrait inexplicable si (37) devait être faux (ceci confirme que nos transformées de Borel ont un comportement à l'infini encore bien meilleur que tempéré).

De même $\varphi_{mm}(0)$ est calculable explicitement, après quoi les formules de monodromie (29) livrent en principe la valeur de $\varphi_{-1,0}(s)$ en tout point de sa surface de Riemann au-dessus de $s = 0$. La reconstruction de $a_B(s)$ (puis du spectre par resommation de Borel) devient alors un problème ouvert, et pas des plus simples, d'*interpolation* analytique.

Conclusion : la méthode semi-classique exacte, élaborée à partir des anciennes techniques d'équations différentielles ordinaires, a déjà pu produire des résultats inattendus, mais il reste encore beaucoup à faire pour expliciter davantage ses possibilités et surtout pour l'étendre aux problèmes à plusieurs dimensions (au moins dans les cas intégrables).

RÉFÉRENCES

- [1] E.C. TITCHMARSH, *Eigenfunction Expansions*, vol.1, Oxford University Press, 1961.
- [2] M.V. BERRY, K. MOUNT, *Rep. Prog. Phys.* 35(1972), 315 (article de revue).
- [3] N. FRÖMAN, P. FRÖMAN, *JWKB Approximation : Contribution to the Theory*, North-Holland, 1965.
- F.W.J. OLVER, *Asymptotics and Special Functions*, Acad. Press, 1974.
- [4] R.B. DINGLE, *Asymptotic Expansions : Their Derivation and Interpretation*, Acad. Press, 1973.
- [5] R. BALIAN, C. BLOCH, *Ann. Phys.* 85(1974), 514.
- [6] V.P. MASLOV, *Théorie des Perturbations et Méthodes Asymptotiques*, Dunod, 1972.
- J.J. DUISTERMAAT, V. GUILLEMIN, *Invent. Math.* 29(1975), 39.
- J. LERAY, *Analyse Lagrangienne et Mécanique Quantique*, Collège de France, 1976, et IRMA Strasbourg, 1978, n° 10/P-03 (traduction anglaise : MIT Press, 1982).
- J. CHAZARAIN, *Comm. in PDE* 5(1980), 595.
- [7] L. HÖRMANDER, *Arkiv för Mat.* 17(1979), 297.
- B. HELFFER, D. ROBERT, *C.R.A.S.* 292, Série I(1981), 47, et *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (à paraître).
- [8] A. VOROS, *The Return of the Quartic Oscillator*, Prétirage Saclay D.Ph-T/81-48, soumis aux *Ann. Inst. H. Poincaré* (série A), et *C.R.A.S.* 293, Série I(1981), 709. (Version anglaise : *J. Physique-Lettres* 43(1982), L-1.)
- [9] C.M. BENDER, K. OLAUSSEN, P.S. WANG, *Phys. Rev. D* 16(1977), 1740.
- R. BALIAN, G. PARISI, A. VOROS, *Quartic Oscillator*, dans : S. Albeverio et al. (eds), *Feynman Path Integrals*, Springer, *Lecture Notes in Physics*, vol. 106 (1979), 337.

- [10] A. VOROS, Nucl. Phys. B165(1980), 209, et dans [16], p. 184.
- [11] C.E. REID, J. Molec. Spectrosc. 36(1970), 183.
- [12] Y. HAMADA, J. LERAY, C. WAGSCHAL, J. Math. Pures et Appl. 55(1976), 297.
- [13] D. FOTIADI, M. FROISSART, J. LASCoux, F. PHAM, Topology 4(1965), 159.
- [14] G. PONZANO, T. REGGE, E.R. SPEER, M.J. WESTWATER, Comm. Math. Phys. 15(1969), 83.
- [15] J. ÉCALLE, Les fonctions réurgentes, Publications Mathématiques de l'Université Paris-Sud vol. 81-05 et 81-06, Orsay, 1981.
- [16] D. CHUDNOVSKY, G. CHUDNOVSKY (eds.), The Riemann Problem..., Springer, Lecture Notes in Maths. vol. 925(1982).
- [17] Y. SIBUYA, Global Theory of a second Order Linear Ordinary Differential Equation with a Polynomial Coefficient, chap. V, North-Holland, 1975.
- [18] J. KNOLL, R. SCHAEFFER, Ann. Phys. 97(1976), 307.
- [19] G. PARISI, dans [16], p. 178.
- [20] D. WIDDER, The Laplace Transform, chap. V, Princeton University Press, 1946.

André VOROS

Service de Physique Théorique
CEN Saclay
F-91191 GIF-SUR-YVETTE