

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

FR 830 2890

**PROPAGATION D'UNE ONDE EN INCIDENCE
OBLIQUE DANS UN PLASMA INHOMOGENE.
INTRODUCTION D'UNE TRANSFORMATION
DE LORENTZ SIMPLIFICATRICE***par***A. BOURDIER**

Centre d'Etudes de Limeil

Rapport CEA-R-5216**1983****SERVICE DE DOCUMENTATION**

C.E.N. - SACLAY 91191 GIF-sur-YVETTE Cedex FRANCE

PLAN DE CLASSIFICATION DES RAPPORTS ET BIBLIOGRAPHIES CEA
(Classification du système international de documentation nucléaire SIDON/INIS)

A 11	Physique théorique	C 30	Utilisation des traceurs dans les sciences de la vie
A 12	Physique atomique et moléculaire	C 40	Sciences de la vie : autres études
A 13	Physique de l'état condensé	C 50	Radioprotection et environnement
A 14	Physique des plasmas et réactions thermonucléaires	D 10	Isotopes et sources de rayonnements
A 15	Astrophysique, cosmologie et rayonnements cosmiques	D 20	Applications des isotopes et des rayonnements
A 16	Conversion directe d'énergie	E 11	Thermodynamique et mécanique des fluides
A 17	Physique des basses températures	E 12	Cryogénie
A 20	Physique des hautes énergies	E 13	Installations pilotes et laboratoires
A 30	Physique neutronique et physique nucléaire	E 14	Explosions nucléaires
B 11	Analyse chimique et isotopique	E 15	Installations pour manipulation de matériaux radioactifs
B 12	Chimie minérale, chimie organique et physico-chimie	E 16	Accélérateurs
B 13	Radiochimie et chimie nucléaire	E 17	Essais des matériaux
B 14	Chimie sous rayonnement	E 20	Réacteurs nucléaires: (en général)
B 15	Corrosion	E 30	Réacteurs nucléaires: (types)
B 16	Traitement du combustible	E 40	Instrumentation
B 21	Métaux et alliages (production et fabrication)	E 50	Effluents et déchets radioactifs
B 22	Métaux et alliages (structure et propriétés physiques)	F 10	Economie
B 23	Céramiques et ciments	F 20	Législation nucléaire
B 24	Matières plastiques et autres matériaux	F 30	Documentation nucléaire
B 25	Effets des rayonnements sur les propriétés physiques des matériaux	F 40	Sauvegarde et contrôle
B 30	Sciences de la terre	F 50	Méthodes mathématiques et codes de calcul
C 10	Action de l'irradiation externe en biologie	F 60	Divers
C 20	Action des radioisotopes et leur cinétique		

Rapport CEA-R-5216

Cote-matière de ce rapport : A.14

DESCRIPTION-MATIERE (mots clefs extraits du thesaurus SIDON/INIS)

en français

en anglais

PLASMA INHOMOGENE
PROPAGATION D'ONDES
TRANSFORMATIONS DE LORENTZ
RAYONNEMENT ELECTROMAGNETIQUE
DOMAINE RELATIVISTE
RESONANCE

INHOMOGENEOUS PLASMA
WAVE PROPAGATION
LORENTZ TRANSFORMATIONS
ELECTROMAGNETIC RADIATION
RELATIVISTIC RANGE
RESONANCE

RAPPORT CEA-R-5216 - A. BOURDIER

PROPAGATION D'UNE ONDE EN INCIDENCE OBLIQUE DANS UN PLASMA INHOMOGENE.
INTRODUCTION D'UNE TRANSFORMATION DE LORENTZ SIMPLIFICATRICE.

Sommaire. - On étudie une méthode qui simplifie la recherche de la forme d'une onde arrivant en incidence oblique sur un plasma dont le vecteur champ électrique E est dans le plan d'incidence. Notre méthode consiste à introduire, à l'aide d'une transformation de LORENTZ, un nouveau repère dans lequel l'onde se propage en incidence normale. On ramène ainsi un problème à deux dimensions à un problème à une seule dimension. Dans ce nouveau repère, les termes relativistes dus à la vitesse de dérive du milieu sont pris en compte. Notre solution est complémentaire de celle de GINSBURG ; la description que nous donnons de la résonance à la densité critique ($N_0 = N_c$) est précise pour de petits angles d'incidence. Nous décrivons de plus la résonance qui prend place à une densité égale à quatre fois la densité critique ($N_0 = 4 N_c$).

1983

Commissariat à l'Energie Atomique - France

53 p.

RAPPORT CEA-R-5216 - A. BOURDIER

OBLIQUE INCIDENCE OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE IN A COLD INHOMOGENEOUS
ELECTRON PLASMA. INTRODUCTION OF A SIMPLIFYING LORENTZ TRANSFORMATION.

SUMMARY. - We present a method which simplifies the investigation of the form of an obliquely incident wave on a plasma. The electric field E of the wave is assumed to be in the plane of incidence. Our method consists in introducing a new frame in which the wave is normally incident. To do so, we use a LORENTZ transformation. This way, we reduce a two-dimensional problem to a one-dimensional one. In the new frame, relativistic terms due to the drift-velocity of the plasma are taken into consideration. The solution we obtain is complementary to GINSBURG's ; it is accurate for small angles of incidences. We also describe another resonance taking place at four times the critical density ($N_0 = 4 N_c$).

1983

Commissariat à l'Energie Atomique - France.

53 p.

- Rapport CEA-R-5216 -

Centre d'Etudes de Limeil

**PROPAGATION D'UNE ONDE EN INCIDENCE OBLIQUE
DANS UN PLASMA INHOMOGENE.
INTRODUCTION D'UNE TRANSFORMATION DE LORENTZ SIMPLIFICATRICE**

par

A. BOURDIER

- Mars 1983 -

R E S U M E

On étudie une méthode qui simplifie la recherche de la forme d'une onde arrivant en incidence oblique sur un plasma dont le vecteur champ électrique \vec{E} est dans le plan d'incidence. Notre méthode consiste à introduire, à l'aide d'une transformation de LORENTZ, un nouveau repère dans lequel l'onde se propage en incidence normale. On ramène ainsi un problème à deux dimensions à un problème à une seule dimension. Dans ce nouveau repère les termes relativistes dus à la vitesse de dérive du milieu sont pris en compte. Notre solution est complémentaire de celle de GINZBURG ; la description que nous donnons de la résonance à la densité critique ($N_0 = N_c$) est précise pour de petits angles d'incidence. On prédit une nouvelle résonance qui prend place à une densité égale à quatre fois la densité critique ($N_0 = 4 N_c$).

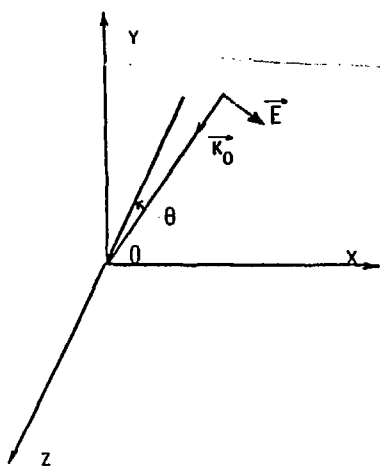
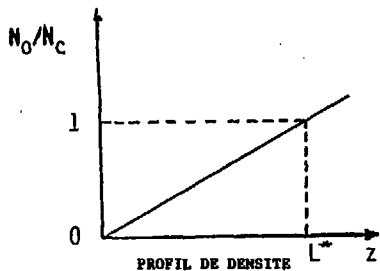
I - INTRODUCTION

Nous présentons une méthode qui simplifie la recherche de la forme d'une onde arrivant en incidence oblique sur un plasma stratifié en couches planes et parallèles dont les propriétés ne varient que dans une direction. A l'aide d'une transformation de Lorentz nous ramenons ce problème a priori à deux dimensions à un problème à une dimension.

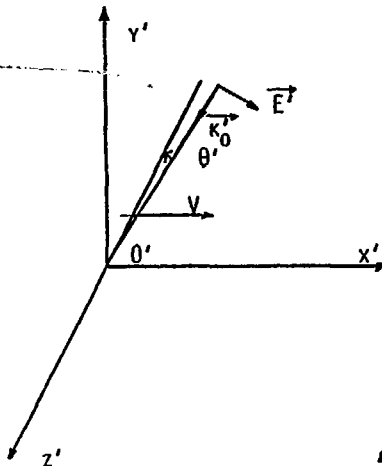
Notre but est d'étudier la propagation d'une telle onde en tenant compte d' "effets relativistes" /1-3/. Ici nous nous contentons de donner l'idée et de tester la méthode en faisant des hypothèses simplificatrices.

On considère que le champ électrique \vec{E} et le vecteur d'onde \vec{k}_0 de l'onde incidente dans le vide sont dans le plan d'incidence xoz ; l'axe des z étant dirigé selon le gradient de densité (Fig. 1). On suppose que les ions constituent un fond continu neutralisant ($m_e/m_i \ll 1$) et que le champ électromagnétique est assez intense pour induire des vitesses électroniques très grandes par rapport à celles dues à l'agitation thermique.

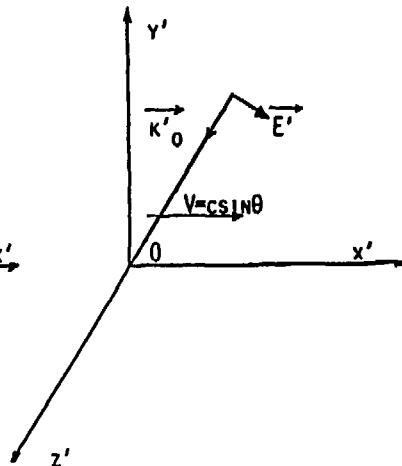
Nous obtenons une solution qui est complémentaire de celle de Ginzburg /4/. En effet, dans la partie de son travail qui concerne le problème de l'incidence oblique, Ginzburg utilise des approximations qui impliquent que pour un profil de densité donné sa solution n'est valable que pour des valeurs de l'angle d'incidence (θ (fig.1)) suffisamment élevées. Par contre notre solution est précise pour de faibles valeurs de θ , lorsque $\theta \rightarrow 0$ notre solution tend vers celle obtenue par Ginzburg dans le cas de l'incidence normale.



REPERE DU LABORATOIRE



REPERE(L') QUELCONQUE



REPERE(L') POUR LEQUEL
ON A $\theta' = 0$

Fig. 1

Un gros avantage de notre méthode est de donner une solution analytique pour le champ électrique qui conduit à une estimation précise de l'absorption à la densité critique lorsque celle-ci est maximum.

Nous montrons qu'il existe une résonance à une densité égale à quatre fois la densité critique. Cette résonance est indépendante de θ et existe donc en incidence normale ($\theta = 0$) /5/. Elle apparaît dans nos calculs parce que nous avons tenu compte de termes non linéaires provenant d'effets relativistes. On sait que si l'on place un électron dans une onde électromagnétique de fréquence ω , celui-ci crée un champ électrique perpendiculaire à celui de l'onde qui oscille à la fréquence 2ω . La résonance à $N_0 = 4N_c$ (quatre fois la densité critique) s'explique par l'existence de ce petit champ de fréquence 2ω qui entre en résonance avec le milieu dans le plasma dense.

II - RAPPEL DE CERTAINS RESULTATS OBTENUS PAR GINZBURG ET DENISOV

L'objet de ce chapitre n'est pas de faire la synthèse des résultats de Ginzburg /4/ et de Denisov /6/, ce genre de travail ayant déjà été fait /7,8/. Nous rappelons ici un certain nombre de résultats afin de faciliter la discussion de notre solution.

Le repère et le profil linéaire utilisés par Ginzburg dans la partie de son travail qui nous intéresse sont représentés sur la figure 2. Le profil de densité en question est défini de la façon suivante :

$$\epsilon(z_0) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = -\frac{z_0}{L} = -\xi_0 \quad (2.1)$$

où ϵ est la constante diélectrique du milieu.

REPÈRE ET PROFIL DE DENSITÉ UTILISÉS PAR GINZBURG

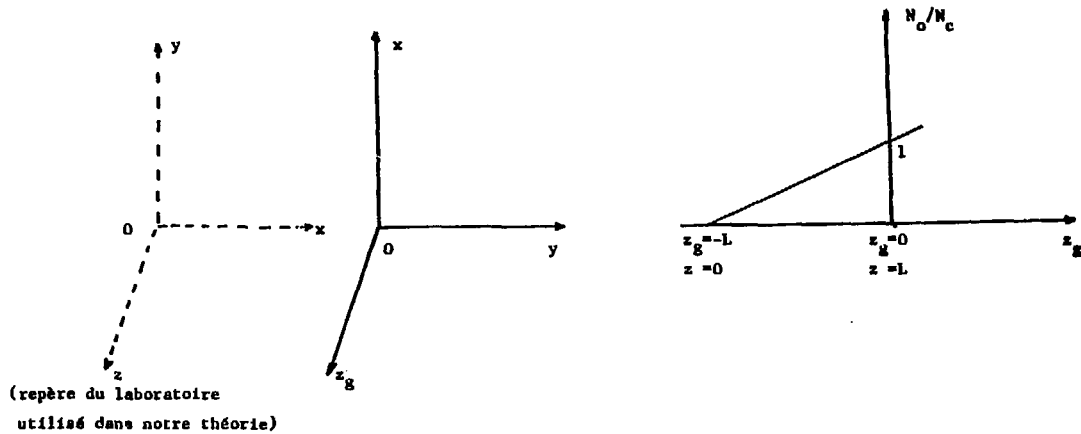


Fig. 2

Notons au passage qu'ici le gradient de densité est selon l'axe des z .

Nous avons donc la relation

$$\frac{z_0}{L} = \frac{z}{L} - 1 \quad (2.2)$$

qui permet de passer de nos notations à celles de Ginzburg.

Dans la suite, nous allons effectuer les calculs intermédiaires avec les notations Ginzburg, seuls certains résultats seront écrits ou réécrits avec nos notations afin de faciliter certaines comparaisons.

Commençons par rappeler la solution de Ginzburg dans le cas de l'incidence normale. On suppose que le champ électrique est parallèle à l'axe des y . L'équation d'onde s'écrit ainsi

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega, z_0) E_y = 0 \quad (2.3)$$

On pose

$$X_0 = \left(\frac{\omega}{c} L\right)^{2/3} z_0 \quad (2.4)$$

L'équation (2.3) devient

$$\frac{d^2 E_y}{dX^2} - X_0 E_y = 0 \quad (2.5)$$

Où nous savons que la seule solution ayant un sens physique est la fonction d'Airy suivante

$$\begin{aligned} E_z &= \lambda A_2(x_0) \\ &= \lambda A_2[(k_0 L)^{2/3} \xi_0] \end{aligned} \quad (2.6)$$

où λ est un certain coefficient qui peut être déduit des conditions aux limites et où $k_0 = \omega/c$. Nous avons donc avec nos notations

$$E_z = \lambda A_2[-(k_0 L)^{2/3} (z - \frac{z_0}{2})] \quad (2.7)$$

Passons maintenant au cas de l'incidence oblique ($\theta \neq 0$) où le champ électrique de l'onde incidente est dans le plan d'incidence (plan z_0oy). Ginzburg part des équations suivantes

$$H_x = G(z_0) e^{i\omega t - i\omega \sin\theta y/c} \quad (2.8a)$$

$$\frac{E_y}{E_0} = -\frac{i}{\omega \varepsilon/c} \frac{\partial G(z_0)}{\partial z_0} e^{i\omega t - i\omega \sin\theta x/c} \quad (2.8b)$$

$$\frac{E_{z_0}}{E_0} = \frac{\sin\theta}{\varepsilon} G(z_0) e^{i\omega t - i\omega \sin\theta x/c} \quad (2.8c)$$

où E_0 est l'amplitude du champ dans le vide.

Il détermine la fonction $G(z_0)$ à partir de l'équation de propagation pour le champ magnétique. Il pose

$$A_2 = G(\xi_0) / \sqrt{\xi_0} \quad (2.9)$$

et trouve en dehors d'un voisinage de $\beta_0=0$

$$u = \left(\frac{1}{2} \pi k_0 L\right)^{1/2} e^{-i\pi/22} \left(\frac{s}{e}\right)^{1/2} H_{1/3}^{(2)}(is) \quad (2.10)$$

où $H_{1/3}^{(2)}$ est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre 1/3 et où

$$s = \frac{2}{3} k_0 L (\beta_0 + \sin^2 \theta)^{3/2}$$

et

$$s' = ds/d\beta_0$$

D'après Abramovitz [9], on a

$$H_{1/3}^{(2)}(s e^{i\pi/2}) = -\kappa_{1/3}(s) i \frac{s}{\pi} e^{-i\pi/6} \quad (2.11)$$

d'autre part

$$\kappa_{1/3}(s) = \pi \left(\frac{3}{X}\right)^{1/2} A_2(X) \quad (2.12)$$

avec

$$X = (k_0 L)^{2/3} (\beta_0 + \sin^2 \theta) \quad (2.13)$$

Ginzburg obtient donc ainsi

$$c(\beta_0) = -2\sqrt{\pi} (k_0 L)^{1/6} e^{i\pi/4} \sqrt{\beta_0} A_2(X) \quad (2.14)$$

∴

Et en conséquence

$$\frac{E_D}{E_0} = -2i \sqrt{\pi} (k_0 L)^{-5/6} e^{i\pi/4} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{3}c} A_2(x) + \frac{1}{\sqrt{3}c} A_2'(x) (k_0 L)^{3/2} \right\} e^{i(\omega t - k_0 \sin \theta z)} \quad (2.15)$$

avec $A_2'(x) = \frac{d}{dx} A_2(x)$

Lorsque $\theta \rightarrow 0$, E_D/E_0 tend vers la valeur suivante

$$\frac{E_D}{E_0} = -2i \sqrt{\pi} (k_0 L)^{-5/6} e^{i\pi/4} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{3}c} A_2(x) + \frac{1}{\sqrt{3}c} A_2'(x_0) (k_0 L)^{3/2} \right\} e^{i\omega t} \quad (2.16)$$

Nous avons vu que dans le cas de l'incidence normale ($\theta = 0$) Ginzburg trouve un résultat très différent de celui-ci (équ. 2.6). La limite que nous avons considérée n'a donc pas de sens. La résolution de Ginzburg implique que pour une valeur de $k_0 L$ donnée l'angle d'incidence doit être suffisamment grand. Cette remarque sera d'un grand intérêt lorsque nous voudrons comparer notre solution à celle de Ginzburg.

D'autre part, d'après (2.8c) E_z peut s'écrire

$$\frac{E_z}{E_0} = 2 \sqrt{\pi} \sin \theta (k_0 L)^{1/6} e^{i\pi/4} \frac{A_2(x)}{\sqrt{z}^{1/2}} \quad (2.17)$$

c'est-à-dire avec nos notations

$$\frac{E_z}{E_0} = 2 \sqrt{\pi} \sin \theta (k_0 L)^{1/6} e^{i\pi/4} \frac{A_2 \left[-(k_0 L)^{3/2} (\cos^2 \theta - z/L) \right]}{\sqrt{\frac{z}{L} - 1}} \quad (2.18)$$

La valeur du champ E_z a été calculée à la résonance ($z=L$) par Denisov en tenant compte de collisions /6/, il trouve

$$|E_z|_{z=L} = \frac{\phi(q)}{\sqrt{2\pi kL}} \quad (2.19)$$

avec

$$q = (kL)^{2/3} \sin^2 \theta \quad (2.20)$$

et

$$\nu = \frac{\nu_{eff}}{\omega} \quad (2.21)$$

ν_{eff} est la fréquence de collisions effective qui est supposée faible par rapport à ω .

Sur la figure 3 nous comparons la fonction $\phi(q)$ de Denisov à celle donnée par Guillauneux à l'aide d'une méthode plus simple /10/. On observe une divergence importante au voisinage du maximum.

Nous comparons ensuite les absorptions calculées par différentes théories /6, 10, 11, 12/. Nous constatons que les solutions analytiques ici considérées et en particulier celle de Denisov permettent d'évaluer cette grandeur avec en général peu de précision autour de $q = 0,5$ (figure 4). Seule la solution analytique de G.I. Pert /11/ est en bon accord avec les résultats numériques de Forslund et al /12/ dans cette région.

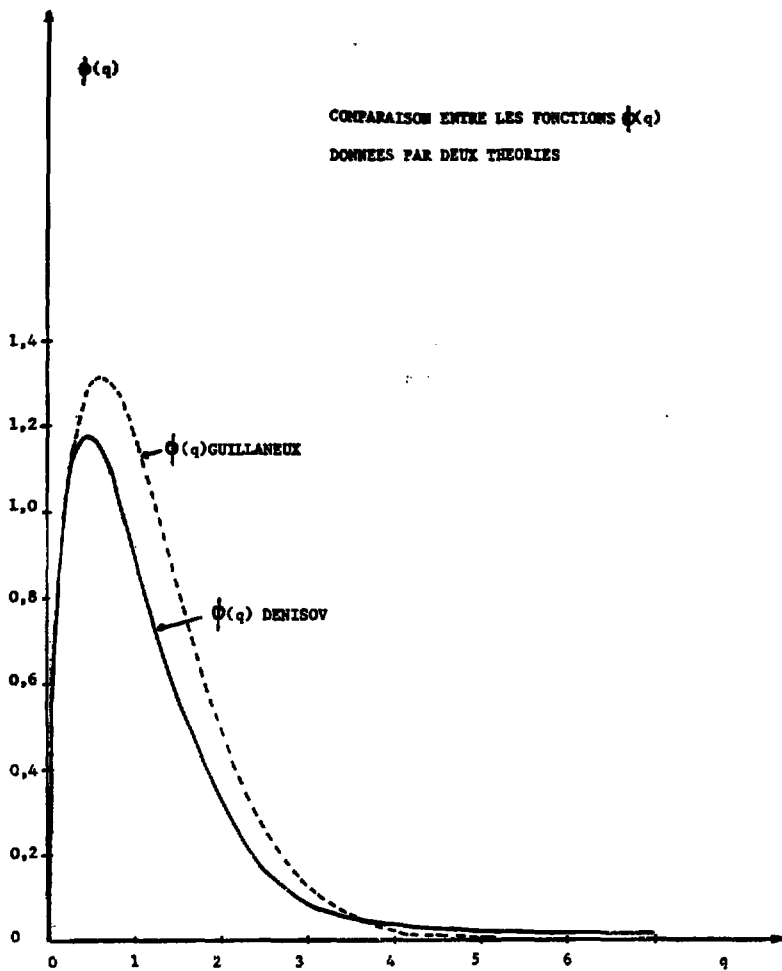


Fig. 3

COMPARAISON ENTRE DIFFERENTES ABSORPTIONS CALCULEES

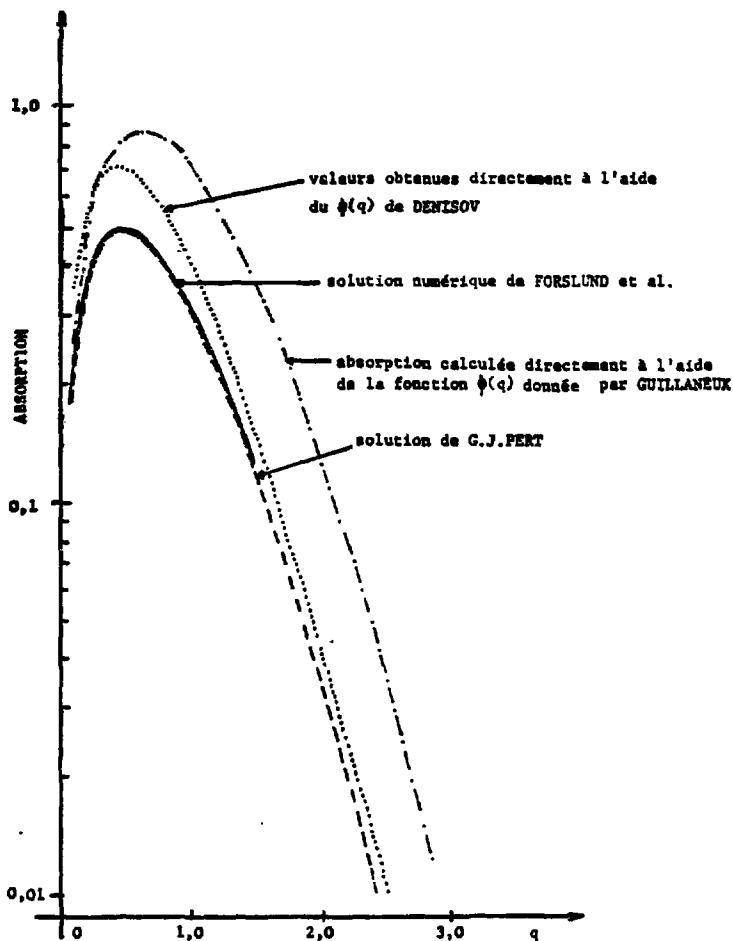


Fig. 4

III - INTRODUCTION DE LA TRANSFORMATION DE LORENTZ SIMPLIFICATRICE

Etudions le problème d'un photon de l'onde incidente dans le vide dont le vecteur vitesse est dans le plan (xoz) et fait un angle θ avec l'axe des z (fig. 1). Notons que le fait de considérer un photon de l'onde dans le vide a un sens dans la mesure où nous considérons que notre plasma est confiné dans le demi espace défini par l'inégalité $z > 0$ (fig. 1). Nous introduisons un nouveau repère (L') qui est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à (L) (repère du laboratoire). Les deux systèmes d'inertie se meuvent l'un par rapport à l'autre selon l'axe des x avec la vitesse \vec{V} (fig. 1).

Dans (L) et (L') la vitesse du photon est respectivement

$$\vec{v} = c (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (3.1)$$

$$\vec{v}' = c (\sin \theta', 0, \cos \theta') \quad (3.2)$$

Les formules de transformations relativistes des vitesses s'écrivent [12/

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \quad (3.3a)$$

$$v_y = \frac{v'_y (1 - V^2/c^2)^{1/2}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \quad (3.3b)$$

$$v_z = \frac{v'_z (1 - V^2/c^2)^{1/2}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \quad (3.3c)$$

à partir de ces relations on obtient un système d'équations reliant θ à θ'

$$\sin \theta = \frac{\sin \theta' + V/c}{1 + \frac{V}{c} \sin \theta'} \quad (3.4)$$

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' (1 - V^2/c^2)^{1/2}}{1 + \frac{V}{c} \sin \theta'} \quad (3.5)$$

On voit qu'il existe un repère (L') tel que $\theta' = 0$. La vitesse V de ce repère particulier est définie par la relation suivante

$$\sin \theta = \frac{V}{c} \quad (3.6)$$

et ceci pour θ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Dans toute la suite (L') sera ce repère particulier.

Le fait que notre onde est bien en incidence normale dans (L') peut être vérifié en utilisant les formules de transformation de son quadrivecteur d'onde /13/

$$k'_{0z} = \frac{k_{0z} - \frac{V}{c} k_{0x}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (3.7a)$$

$$k'_{0y} = k_{0y} \quad (3.7b)$$

$$k'_{0x} = k_{0x} \quad (3.7c)$$

$$\frac{\omega'}{c} = \frac{\omega/c - \frac{V}{c} k_{0x}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (3.7d)$$

L'onde incidente étant dans le plan d'incidence on a dans (L) $k_{0y} = 0$, ce qui implique d'après l'équation (3.7b) que $k'_{0y} = 0$ dans (L'). D'autre part d'après (3.7a) on a $k'_{0x} = 0$ si l'on considère que l'équation (3.6) est satisfaite. Dans (L'), le vecteur d'onde associé à l'onde incidente est donc bien parallèle à l'axe des z' , c'est-à-dire au gradient de densité.

./.

Considérant encore une fois que $(\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ est un quadrivecteur, on montre facilement que la loi de Descartes est invariante vis-à-vis de notre transformation de Lorentz (Annexe I). En conséquence dans (L'), notre onde qui dans ce repère est en incidence normale se propage bien le long du gradient de densité à l'intérieur du plasma. Ainsi, nous chercherons une solution dans (L') puisque dans ce repère notre problème est à une dimension et qu'il est de ce fait plus simple à étudier. Ensuite nous utiliserons les formules de transformation de Lorentz pour le champ afin d'obtenir la solution correspondante dans (L).

IV - EQUATION DE PROPAGATION ET RECHERCHE D'UNE SOLUTION APPROCHÉE POUR UN CHAMP "FAIBLE" ET UN ANGLE D'INCIDENCE PETIT

Déterminons donc dans le repère (L') la forme de l'équation de propagation. Pour ce faire, nous allons prendre les équations suivantes pour le transfert de quantité de mouvement /2,3/

$$e \vec{E}' = - \frac{\partial \vec{P}'}{\partial t'} - \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}' \quad \left(P'_x = (P'^2 + m^2 c^4)^{1/2} \right) \quad (4.1a)$$

$$e \vec{B}' = c \vec{\nabla}' \wedge \vec{P}' \quad (4.1b)$$

ou \vec{P}' est la quantité de mouvement des électrons.

Lorsque les équations (4.1) sont satisfaites, il reste encore les deux équations de Maxwell suivantes à vérifier afin de décrire une onde

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{B}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{P}'}{\partial t'} + \frac{4\pi e}{c} (N_0' \vec{V}' - n' \vec{v}') \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}' = -4\pi e (n' - N_0') \quad (4.3)$$

N_0' est la densité des ions, n' et \vec{v}' sont respectivement la densité et la vitesse des électrons.

La présence d'un courant dans (4.2) vient de ce que, dans (L'), le milieu est animé d'une vitesse de dérive \vec{V}' .

En effectuant des développements par rapport à $\frac{\vec{P}'}{mc}$ (\vec{P}' étant l'amplitude de \vec{P}') et en ne retenant que les termes en \vec{P}'/mc et en \vec{P}'^2/mc^2 , on obtient, à partir des équations (4.1 - 4.3), l'équation de propagation pour \vec{P}'

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}'}{\partial t'^2} + \vec{\nabla}' \cdot (\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}') - \Delta' \vec{P}' + \frac{\omega_p'^2}{c^2} \vec{P}' = & -\frac{1}{c m c^2} \vec{\nabla}' \cdot \frac{\partial \vec{P}'^2}{\partial t'} + \frac{\omega_p'^2}{2 c^2} \left(\frac{\vec{P}'^2}{m c} \right) \vec{P}' \\ & - \frac{\vec{P}'}{m c^2} \frac{\partial}{\partial t'} (\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}') - \frac{\vec{P}'}{2 m c^2} \Delta' \vec{P}'^2 + \frac{\omega_p'^2}{c^2} m \vec{V}' \end{aligned} \quad (4.4)$$

avec

$$\omega_p'^2 = \frac{4\pi e^2 N_0'}{m} \quad (4.5)$$

Le profil de densité est donné par la relation suivante

$$1 - \frac{\omega_p'^2}{\omega'^2} = 1 - \frac{z'}{L'} + \alpha^{(2)} \quad (4.6)$$

ou $\alpha^{(2)}$ est un terme relativiste (en $\frac{\vec{P}'^2}{m^2 c^2}$) qui sera utilisé pour éliminer dans la solution tout terme séculaire.

Afin de résoudre l'équation de propagation, nous avons utilisé la méthode de Lindscedt-poincaré /14/. Cette méthode consiste à poser

$$\vec{P}' = \vec{P}'^{(0)} + \vec{P}'^{(1)} + \vec{P}'^{(2)} \quad (4.7)$$

où $\vec{P}'^{(0)}$ est la quantité de mouvement qui est solution de notre équation de propagation (4.4) lorsque tous les termes non linéaires sont négligés, $\vec{P}'^{(1)}$ est une correction semi-relativiste (d'ordre $\frac{v}{mc}$) et $\vec{P}'^{(2)}$ une correction relativiste (d'ordre $\frac{v^2}{mc^2}$) /1-3/.

Ainsi, si l'on pose

$$\square' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \vec{\nabla}' \cdot (\vec{\nabla}') - \Delta' + \frac{\partial \omega'}{c^2} \quad (4.8)$$

l'équation (4.4) devient

$$\begin{aligned} \square' \vec{P}'^{(0)} + \square' \vec{P}'^{(1)} + \square' \vec{P}'^{(2)} = & \text{(termes d'ordre 0)} + \\ & + \text{(termes d'ordre 1)} + \text{(termes d'ordre 2)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

On trouvera une solution en disant que l'équation (4.9) est vérifiée à chaque ordre ; on cherchera à satisfaire les trois équations suivantes

$$\square' \vec{P}'^{(0)} = \text{(termes d'ordre 0)} \quad (4.10a)$$

$$\square' \vec{P}'^{(1)} = \text{(termes d'ordre 1)} \quad (4.10b)$$

$$\square' \vec{P}'^{(2)} = \text{(termes d'ordre 2)} \quad (4.10c)$$

On utilisera ensuite la relation (4.7). D'autre part cette solution sera telle que $\vec{P}'_y = 0$, et ceci afin de bien décrire une onde située dans le plan xoz.

IV. * RESOLUTION DE L'EQUATION DE PROPAGATION DANS L'APPROXIMATION NON RELATIVISTE

Nous négligeons ici tous les termes non linéaires en \vec{P}'/mc et en \vec{P}'^2/m^2c^2 . A cet ordre notre équation de propagation (4.4) est identique à l'équation (4.10a) qui projetée sur l'axe des x et des z (P_z' est nulle) donne les deux équations suivantes

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_x'(t)}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 P_x'(t)}{\partial z'^2} + \frac{\omega_c'^2}{c^2} P_x'(t) = -\frac{\omega_c'^2}{c^2} m V \quad (4.11a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_x'(t)}{\partial t'^2} + \frac{\omega_c'^2}{c^2} P_x'(t) = 0 \quad (4.11b)$$

La solution de (4.11a) peut être mise sous la forme

$$P_x'(t) = \tilde{P}_x'(t) - m V \quad (4.12)$$

$\tilde{P}_x'(t)$ étant à cet ordre la quantité de mouvement due au seul champ électromagnétique. La résolution de (4.11a) est ainsi ramenée à celle de

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}_x'(t)}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 \tilde{P}_x'(t)}{\partial z'^2} + \frac{\omega_c'^2}{c^2} \tilde{P}_x'(t) = 0 \quad (4.13)$$

Afin de résoudre cette équation on pose

$$\tilde{P}_x'(t) = \lambda(z') \sin \omega_c' t' \quad (4.14)$$

et

$$\lambda = \left(\frac{\omega_c'^2}{c^2 L'} \right)^{1/2} (L' - z') \quad (4.15)$$

./.

En tenant compte de (4.6) (ici $\alpha^{(2)} = 0$), on obtient la solution suivante

$$\tilde{p}_z^{(0)} = \Lambda A_1 (-z) A_m \omega' e^i \quad (4.16)$$

Λ est une constante qui dépend comme nous le verrons de la puissance de l'onde incidente, A_1 est la fonction d'Airy.

Pour l'équation (4.11b), nous prenons la solution particulière suivante

$$p_z^{(0)} = 0 \quad (4.17)$$

ceci afin de nous placer dans le cas d'une onde presque transverse. La solution à cet ordre est donc

$$p^{(0)} = \Lambda A_1 (-z) A_m \omega' e^i - m V \quad (4.18a)$$

$$p_y^{(0)} = 0 \quad (4.18b)$$

$$p_x^{(0)} = 0 \quad (4.18c)$$

IV.b APPROXIMATION "SEMI-RELATIVISTE"

Dans le cadre de cette approximation, nous tenons compte des termes en \bar{V}^2/mc^2 , mais nous négligeons ceux en \bar{V}^4/m^2c^4 . Après linéarisation l'équation de propagation devient l'équation (4.10b), c'est-à-dire le système d'équations couplées suivant

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_z^{(2)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p_z^{(2)}}{\partial z^2} + \frac{\omega'^2}{c^2} p_z^{(2)} = 0 \quad (4.19a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_x^{(2)}}{\partial t^2} + \frac{\omega'^2}{c^2} p_x^{(2)} = -\frac{1}{2mc^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2 \partial z^2} (p_z^{(0)})^2 \quad (4.19b)$$

D'après (4.19a) on peut prendre

$$P'_z(\omega) = 0 \quad (4.20)$$

On résoud maintenant l'équation (4.19b), pour cela, commençons par calculer le terme de droite de cette équation

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m c^2} \frac{\delta^2 P'(\omega)^2}{\delta b' \delta z'} &= -\frac{1}{2m c^2} \frac{\delta^2}{\delta b' \delta z'} \left\{ \tilde{P}'_z(\omega)^2 + m^2 V^2 - 2 \tilde{P}'_z(\omega) m V \right\} \\ &= \frac{(\omega' L')^{1/2}}{c^2 L'} \left\{ -\frac{\omega' L'}{m c^2} A_z(-\gamma) A'_z(\gamma) \sin 2\omega' b' + \frac{L}{c^2} \frac{\omega' L'}{c} A'_z(-\gamma) \cos \omega' b' \right\} \end{aligned} \quad (4.21)$$

L'équation (4.19b) admet comme solution particulière

$$P'_z(\omega) = \left(\frac{c}{\omega' L'}\right)^{1/2} L \left\{ \frac{\omega'^2}{\omega_c'^2 - \omega'^2} \frac{V}{c} A'_z(-\gamma) \cos \omega' b' + \frac{\omega'^2}{4 \omega_c'^2 - \omega'^2} \frac{L}{m c} A_z(-\gamma) A'_z(\gamma) \sin 2\omega' b' \right\} \quad (4.22)$$

Ainsi, nous obtenons la solution suivante pour l'équation de propagation linéarisée

$$P'_z(\omega) = 0 \quad (4.23a)$$

$$P'_y(\omega) = 0 \quad (4.23b)$$

$$\begin{aligned} P'_z(\omega) &= \left(\frac{c}{\omega' L'}\right)^{1/2} L \left\{ \frac{\omega'^2}{\omega_c'^2 - \omega'^2} \frac{V}{c} A'_z(-\gamma) \cos \omega' b' \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega'^2}{4 \omega_c'^2 - \omega'^2} \frac{L}{m c} A_z(-\gamma) A'_z(\gamma) \sin 2\omega' b' \right\} \end{aligned} \quad (4.23c)$$

V - APPROXIMATION RELATIVISTE

Nous allons tenir compte ici de certains termes relativistes mais pas de tous. Nous négligerons les nonlinéarités en $\Lambda^2 / m^2 c^2$ et celles en $(\Lambda / mc) \cdot (V/c)$, par contre nous tiendrons compte de celles en V^2/c^2 . Ceci implique que pour un angle d'incidence donné notre solution ne sera précise que pour un champ suffisamment faible.

L'équation de propagation que nous devons résoudre est l'équation (4.10c) c'est-à-dire celle relative à la correction du deuxième ordre (d'ordre $\tilde{P}^{(2)} / m^2 c^2$)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}^{(2)}}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 \tilde{P}^{(2)}}{\partial z'^2} + \frac{\omega'^2}{c^2} \tilde{P}^{(2)} = -\frac{1}{m c^2} \tilde{P}^{(0)} \frac{\partial^2 \tilde{P}^{(0)}}{\partial t'^2} + \frac{\omega'^2}{2 c^2} \frac{\tilde{P}^{(0)2}}{m^2 c^2} \tilde{P}^{(0)} - \frac{\tilde{P}^{(0)}}{2 m^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \left(\tilde{P}^{(0)} \right)^2 + \alpha^{(2)} \frac{\omega'^2}{c^2} \tilde{P}^{(0)} \quad (4.24)$$

Calculons le premier terme du membre de droite de (4.24)

$$\begin{aligned} -\frac{\tilde{P}^{(0)}}{m c^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}^{(0)}}{\partial t'^2} &= -\frac{1}{m c^2} \left[\Lambda A_i(-\xi) \sin \omega' t' - m V \right] \left(\frac{\omega'^2}{c^2 \xi^2} \right) \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \left(\frac{c}{\omega' \xi} \right)^{3/2} \times \right. \\ &\quad \times \left[-\Lambda \frac{\omega'^2}{\omega'^2 - \omega_c^2} \frac{V}{c} A_i'(-\xi) \sin \omega' t' + \frac{\Lambda^2}{m c} \frac{2 \omega'^2}{4 \omega'^2 - \omega_c^2} \times \right. \\ &\quad \left. \left. \times A_i(-\xi) A_i'(-\xi) \cos 2 \omega' t' \right] \right\} \\ &= \frac{\omega'^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \left[\Lambda \frac{V^2}{c^2} A_i'(-\xi) \xi^{-2} \sin \omega' t' \right] \\ &= \frac{\omega'^2}{c^2} \left[\Lambda \frac{V^2}{c^2} \xi^{-2} A_i'(-\xi) \sin \omega' t' - \Lambda \frac{V^2}{c^2} A_i(-\xi) \sin \omega' t' \right] \quad (4.25) \end{aligned}$$

Le second terme du membre de droite de (4.24) s'écrit

$$-\frac{\omega'^2}{2c^2} \frac{P_x^{(2)}}{m^2 c^2} P_x^{(1)} = \frac{\omega'^2}{2c^2} [\Lambda A_2(-\xi) \sin \omega' t' \dots m V] \frac{V^2}{c^2} \quad (4.26)$$

Enfin, le troisième terme se met sous la forme

$$\frac{P_x^{(2)}}{2m^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} P_x^{(1)} = \frac{\omega'^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega'^2}{\omega'^2}\right) \frac{V^2}{c^2} \Lambda A_2(-\xi) \sin \omega' t' \quad (4.27)$$

Ainsi, l'équation (4.24) devient

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_x^{(1)}}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 P_x^{(1)}}{\partial z'^2} + \frac{\omega'^2}{c^2} P_x^{(1)} = \Lambda \frac{V^2}{c^2} \frac{\omega'^2}{c^2} \xi^{-2} A_2(-\xi) \sin \omega' t' - \frac{V^2}{c^2} \frac{\omega'^2}{2c^2} \Lambda A_2(-\xi) \sin \omega' t' + \frac{\omega'^2}{2c^2} m V \frac{V^2}{c^2} + \frac{\omega'^2}{c^2} P_x^{(2)} \quad (4.28)$$

Dans le but d'éviter la présence de tout terme séculaire dans notre solution nous avons pris

$$\xi^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\omega'^2}{\omega'^2} \frac{V^2}{c^2} \quad (4.29)$$

Nous obtenons ainsi la solution suivante pour $P_x^{(1)}$

$$P_x^{(1)} = -\frac{1}{2} m V \frac{V^2}{c^2} + \widehat{P}_x^{(1)} \quad (4.30)$$

$\widehat{P}_x^{(1)}$ étant solution de

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \widehat{P}_x^{(1)}}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 \widehat{P}_x^{(1)}}{\partial z'^2} + \frac{\omega'^2}{c^2} \widehat{P}_x^{(1)} = \Lambda \frac{V^2}{c^2} \frac{\omega'^2}{c^2} \xi^{-2} A_2(-\xi) \sin \omega' t' \quad (4.31)$$

En conséquence $\widehat{P}_x^{(1)} \rightarrow 0$ rapidement lorsque $\xi \rightarrow \infty$, d'autre part quand $\omega' L / \omega^2 \sim 1$ on a

$$\widehat{P}_x^{(1)} \approx \left(\frac{\omega' L}{c}\right)^{3/2} \mathcal{L} \frac{V^2}{c^2} \mathcal{L} \gamma \left(\frac{\omega' L}{c}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2}\right) \left| A_i(-\xi) \sin \omega' t' \right| \quad (4.32)$$

De la même façon que pour $P_x^{(2)}$, on obtient l'équation suivante pour $P_x^{(1)}$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_x^{(1)}}{\partial t'^2} + \frac{\omega'^2}{c^2} P_x^{(1)} = 0 \quad (4.33)$$

On peut prendre

$$P_x^{(1)} = 0 \quad (4.34)$$

Finalement, notre solution s'écrit

$$P_x' = -mV \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}\right) + \mathcal{L} A_i(-\xi) \sin \omega' t' + \widehat{P}_x^{(1)} \quad (4.35a)$$

$$P_y' = 0 \quad (4.35b)$$

$$P_z' = \left(\frac{c}{\omega' L}\right)^{1/2} \mathcal{L} \left\{ \frac{\omega'^2}{\omega'^2 - \omega^2} \frac{V}{c} A_i(-\xi) \sin \omega' t' + \frac{\mathcal{L}}{m c} \frac{\omega'^2}{4 \omega'^2 \omega^2} \times A_i(-\xi) A_i(-\xi) \sin 2\omega' t' \right\} \quad (4.35c)$$

avec

$$1 - \frac{\omega'^2}{\omega^2} = 1 - \frac{z'}{L} + \frac{\omega'^2}{2 \omega^2} \frac{V^2}{c^2} \quad (4.36)$$

./.

On calcule maintenant le champ électrique à partir de (4.1a), on trouve

$$E_z' = -\frac{\omega'}{c} \Lambda A_2(-\zeta) \cos \omega' t' + E_z^{(0)} \quad (4.37a)$$

$$E_y' = 0 \quad (4.37b)$$

$$E_x' = \left(\frac{c}{\omega' L}\right)^{1/2} \frac{\omega'}{c} \Lambda \left\{ \frac{\omega_c'^2}{\omega'^2 - \omega_c'^2} \frac{V}{c} A_2(-\zeta) - \frac{\Lambda}{2mc} \frac{\omega_c'^2}{4\omega'^2 \omega_c'^2} A_2(-\zeta) A_2(-\zeta) \right. \\ \left. + \cos 2\omega' t' - \frac{\Lambda}{2mc} A_2(-\zeta) A_2(-\zeta) \right\} \quad (4.37c)$$

avec $E_z^{(0)} \rightarrow 0$ lorsque $\zeta \rightarrow \infty$, et lorsque $\omega_c'^2 / \omega'^2 \sim 1$

$$E_x^{(0)} = -\frac{\omega'}{c} \left(\frac{\omega'}{c} L\right)^{1/2} \Lambda \frac{V}{c^2} L \cos \left(\frac{\omega' L}{c}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\omega_c'^2}{\omega'^2}\right) A_2(-\zeta) \cos \omega' t' \quad (4.38)$$

Le profil de densité étant donné par (4.36).

L'expression de E_x' (4.37c) contient deux singularités : une pour $\omega'^2 = \omega_c'^2$ et l'autre pour $4\omega'^2 = \omega_c'^2$. La première singularité est due au fait que, en un point, la force de Lorentz ($e \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}'$) entre en résonance avec le milieu. Cette force de Lorentz vient de ce que dans (L') notre plasma a une vitesse de dérive \vec{V} , elle s'annule lorsque le champ est perpendiculaire au plan d'incidence. La deuxième singularité est liée à une force en $e \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}'$, \vec{v}' étant la vitesse électronique induite par le champ électrique. Cette dernière singularité existe donc quelle que soit la polarisation du champ.

Utilisons les formules de transformation de Lorentz pour calculer le champ dans (L) /13/

$$E_x = E'_x \quad (4.39a)$$

$$E_y = \frac{E'_y + v/c H'_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.39b)$$

$$E_z = \frac{E'_z - v/c H'_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.39c)$$

On calcule H'_y et H'_z dans (L') à l'aide de l'équation de Maxwell suivante

$$\vec{\nabla}' \wedge \vec{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \vec{H}' \quad (4.40)$$

Cela donne

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} H'_x = 0 \quad (4.41a)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} H'_y = -\frac{\partial}{\partial z'} E'_x \quad (4.41b)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} H'_z = 0 \quad (4.41c)$$

D'après (4.41a,c), on a

$$H'_x = H'_{0x}(x', y', z') \quad (4.42a)$$

$$H'_z = H'_{0z}(x', y', z') \quad (4.42b)$$

D'autre part (4.41b) implique

$$H'_y = \left(\frac{\omega'^2}{c^2}\right)^{1/3} \frac{c}{e} \int A'_z(-s) \Delta \omega' E'_x - c \int \frac{\partial}{\partial z'} E'_x dx' + H'_{0y}(x', y', z') \quad (4.43)$$

On vérifie dans l'annexe II que l'on peut prendre

$$H'_{0x} = H'_{0y} = H'_{0z} = 0 \quad (4.44)$$

On utilise maintenant les formules de transformation de Lorentz pour les coordonnées /13/

$$x = \frac{z' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (4.45a)$$

$$y = y' \quad (4.45b)$$

$$z = z' \quad (4.45c)$$

$$t = \frac{t' + V/c^2 z'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (4.45d)$$

Le champ dans (L) s'écrit

$$E_x = -\frac{\omega}{c} \cos \theta \Lambda A_i(-\zeta) \cos(\omega t - k_0 \sin \theta x) + E_x^{(0)} \quad (4.46a)$$

$$E_y = 0 \quad (4.46b)$$

$$E_z = (k_0 L)^{-1/2} \frac{\omega}{c} \Lambda \left\{ \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \theta A_i'(-\zeta) \sin(\omega t - k_0 \sin \theta x) - \frac{\omega_0^2}{4\omega_0^2 - \omega^2} \frac{\Lambda}{mc} A_i(-\zeta) A_i'(-\zeta) \cos 2(\omega t - k_0 \sin \theta x) - \frac{\Lambda}{2mc} A_i(-\zeta) A_i'(-\zeta) \right\} \quad (4.46c)$$

avec $E_x^{(0)} \rightarrow 0$ rapidement lorsque $\zeta \rightarrow \infty$, et lorsque $\omega_0^2/\omega^2 \sim 1$

$$E_x \approx -\frac{\omega}{c} (k_0 L)^{1/2} \Lambda \sin^2 \theta \operatorname{Log} \left| (k_0 L)^{-2/3} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) A_i(-\zeta) \right| \times \cos(\omega t - k_0 \sin \theta x) \quad (4.47)$$

D'autre part, on a

$$\omega = \omega' / \cos \theta$$

$$L = L' / \cos^2 \theta$$

$$\omega_0^2 = \omega'^2 \cos \theta$$

$$k_0 = \omega / c$$

et

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega'^2} = 1 - \frac{z}{L_0} \quad (4.48)$$

où

$$L_0 = L (1 + \sin^2 \theta) \quad (4.49)$$

Avec ces notations, nous avons

$$\zeta = (k_0 L)^{2/3} \left(\omega'^2 - \frac{z}{L} \right) \quad (4.50)$$

Pour déterminer Λ , on considère une valeur particulière de ζ : ζ_2 à la fois grande et proche de $\zeta = (k_0 L)^{2/3} \cos^2 \theta$ et qui vérifie $A_2(-\zeta_2) = 0$.

Pour cette valeur de ζ les coordonnées du champ sont

$$E_x \approx - \frac{\omega}{c} \cos \Lambda A_2(-\zeta_2) \cos(\omega t - k_0 \sin \theta x) \quad (4.51a)$$

$$E_y = 0 \quad (4.51b)$$

$$E_z = 0 \quad (4.51c)$$

./.

Si ζ_2 est assez grand, on a

$$A_2(-\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \zeta_2^{-1/4} \cos\left(\frac{z}{3} \zeta_2^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.52)$$

Dans ces conditions, E_x (4.51a) s'écrit

$$E_x(\zeta_2) = -\frac{\omega}{c} \cos \frac{\Lambda}{2\sqrt{\pi}} \zeta_2^{-3/4} \left[e^{i\left(\frac{z}{3} \zeta_2^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{z}{3} \zeta_2^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)} \right] \cos(\omega t - k \sin \theta z) \quad (4.53)$$

D'autre part on pose

$$E_x(\zeta_2) = (E_+ e^{i\psi} + E_- e^{-i\psi}) \cos \omega(\omega t - k \sin \theta z) \quad (4.54)$$

En rapprochant les expressions (4.53) et (4.54), on obtient

$$E_0 = -\frac{\omega}{2c} \frac{\Lambda}{\sqrt{\pi}} \zeta_2^{-1/4} \quad (4.55)$$

et

$$\psi = \frac{z}{3} \zeta_2^{3/2} - \frac{\pi}{4} \quad (4.56)$$

E_0 sera d'autant plus proche de la valeur de l'amplitude du champ dans le vide que ζ_2 sera proche de $\zeta_{2=0}$.

Nous aurons donc

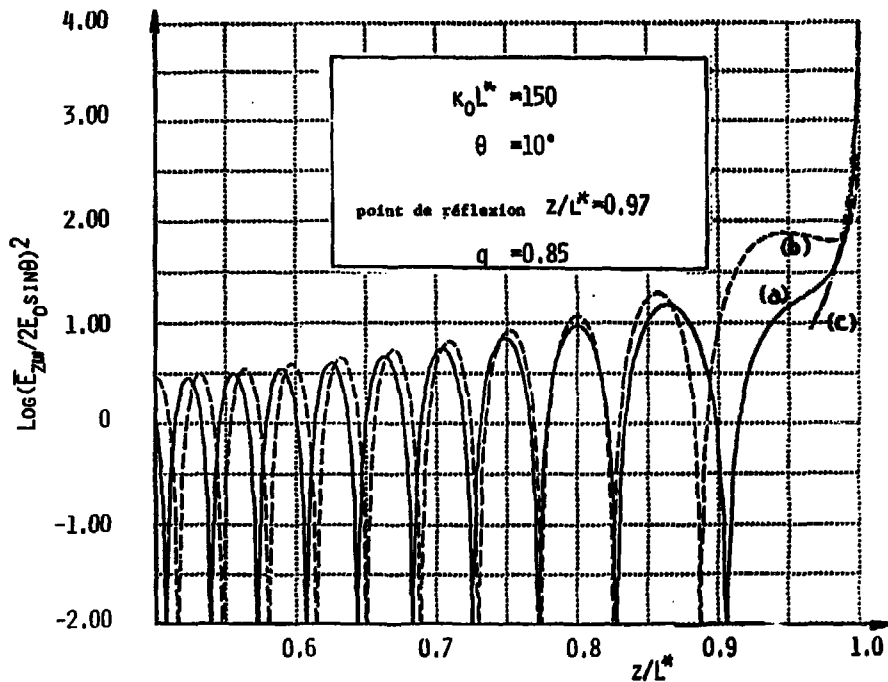
$$\Lambda \approx -\frac{2c E_0}{\omega} \pi^{1/2} (k \cdot L)^{1/6} \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \theta\right) \quad (4.57)$$

./.

VI - DISCUSSION

L'équation (4.47) montre que la composante du champ électrique selon l'axe des x présente une singularité logarithmique à la densité critique ($N_c = N_c$). Il faut noter que cette singularité n'est pas identique à la singularité logarithmique mise en évidence par Ginzburg. On doit se souvenir ici que notre solution est précise pour de petites valeurs de l'angle d'incidence et est ainsi complémentaire du point de vue de son domaine de validité de celle de Ginzburg.

L'expression (4.46c) montre qu'à la densité critique le champ présente une autre singularité. Cette singularité existe bien sûr dans (L') ; elle apparaît dans l'expression de la quantité de mouvement et du champ (4.35c) . Sa présence dans l'expression du champ électrique dans (L') (4.37a) peut être interprétée de la façon qui suit. Du fait de la vitesse de dérive \vec{v} du milieu dans ce repère, le plasma est soumis à la force de Lorentz $e \vec{v} \wedge \vec{B}$ qui est dirigée selon l'axe des z' et qui oscille à la fréquence ω' . Cette force entre en résonance avec le plasma lorsque l'on a $\omega'^2 = \omega_{pe}^2$. Dans (L) cette résonance est une conséquence de ce que le champ électrique a une composante de fréquence $\omega(\vec{E}_{a\omega})$ le long du gradient de densité. Nous avons vérifié que la composante $E_{z\omega}$ donnée par notre théorie rassemble bien à celle de Ginzburg. Pour cela nous avons comparé les deux solutions dans un cas où $\eta = (\lambda_e L)^{2/3} \frac{2}{3} \sim 1$ (Fig. 5). Nous savons que la solution de Ginzburg n'est très précise que pour $\eta \gg 2$ (11), nous pouvons cependant considérer que pour $\eta \sim 1$ elle n'est pas trop mauvaise. De plus, nos résultats numériques montrent que lorsque η devient plus grand que l'unité notre solution devient de moins en moins précise. La comparaison entre les deux solutions est donc faite légèrement en dehors de leurs domaines de validité respectifs.



a) notre solution

b) solution de GINZBURG valable partout en dehors d'un voisinage de $z/L^* = 1$

c) solution de GINZBURG valable à droite du point de réflexion

Fig. 5

Il faut souligner que si nous avons pris en compte plus de non-linéarités dans notre résolution (par exemple les termes en $\sqrt{3}/\epsilon^2$) nous aurions amélioré la précision de notre solution et ceci surtout au voisinage de la résonance.

On peut calculer l'absorption due à la composante du champ : $E_{2,\omega}$. Pour cela, on introduit un terme d'amortissement suffisamment faible et on considère que le champ exciteur est donné par le numérateur de $E_{2,\omega}$ /10,15/. Cela revient à ajouter une petite partie imaginaire : $-\nu/\omega$ (où ν est la fréquence de collision) au dénominateur de $E_{2,\omega}$ et à l'utiliser ainsi pour calculer l'absorption. Dans ce cas, celle-ci est indépendante de ν /15,16/ et est donnée par $\tilde{h} = \frac{1}{2} \Phi^2(\eta)/10/$, où $\Phi(\eta)$ est le facteur d'amplification du champ. Dans notre théorie, cette quantité ne dépend pratiquement que de η dans la limite des angles de faibles incidences. Nous avons comparé l'absorption ainsi calculée à celle obtenue analytiquement, dans la limite des η faibles, par Speziale et Catto /17/. Nous la comparons également à la solution numérique de Forslund et Al. /12/. La figure 6 montre que notre solution conduit à un résultat précis pour $\eta \approx 0,5$, c'est-à-dire lorsque l'absorption est maximum. Nous avons représenté l'évolution de la dépendance spatiale de $E_{2,\omega}$ en fonction de z/λ^D dans un tel cas (fig. 7).

Une troisième singularité est présente dans les équations (4.46). Elle correspond à la résonance de la force $e\vec{v}/c \wedge \vec{B}$ (\vec{v} étant la vitesse induite par le champ), dont la fréquence est 2ω , avec le plasma. Cette résonance a donc lieu à quatre fois la densité critique ($N_e = 4 N_c$). On constate qu'elle est indépendante de θ et existe donc en incidence normale. Elle peut jouer un rôle important soit à très haut flux soit pour de très grandes longueurs d'onde de l'onde incidente.

Notons que les deux dernières résonances dont nous venons de parler sont dues à des termes "semi-relativistes" /1-3/.

COMPARAISON ENTRE LES ABSORPTIONS CALCULEES
A PARTIR DE DIFFERENTES THEORIES

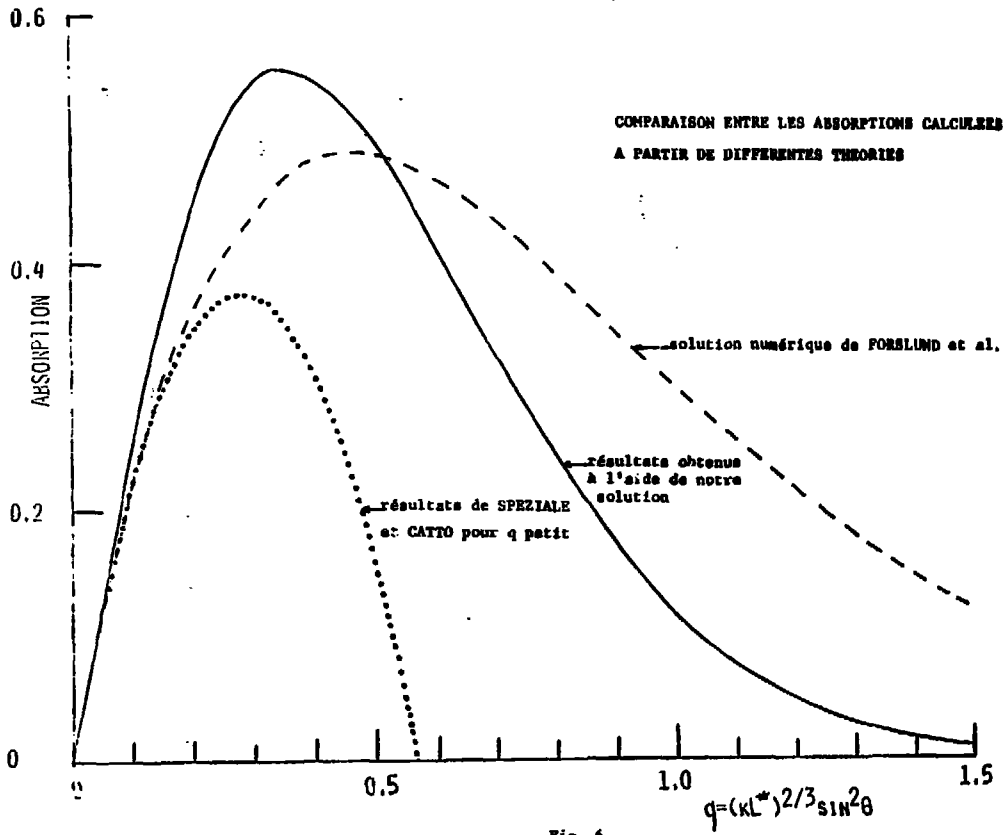
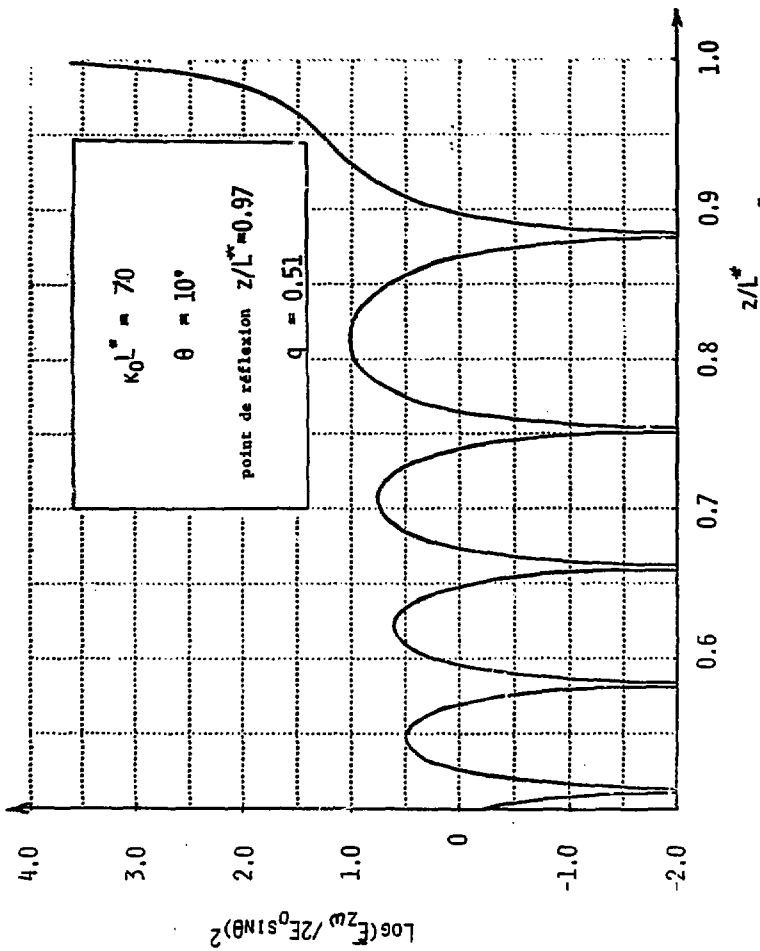


Fig. 6



EVOLUTION DE LA DEPENDANCE SPATIALE DE $F_{z,w}$ EN FONCTION DE z/L

Fig. 7

L'équation (4.46c) contient un terme indépendant du temps, ce terme correspond à une force qui maintient le milieu au repos en moyenne en annulant l'effet de la force pondéromotrice que l'on peut associer à la partie oscillante de notre champ.

VI - CONCLUSION

Nous avons présenté une méthode qui permet de simplifier l'étude de la forme d'une onde arrivant en incidence oblique sur un plasma inhomogène. Ce problème à deux dimensions est ramené à un problème à une seule dimension grâce à une transformation de Lorentz simplifiée.

La solution que nous obtenons est complémentaire de celle de Ginzburg ; elle est précise pour de faibles valeurs de l'angle d'incidence. Elle conduit à une bonne évaluation de l'absorption ayant lieu à la densité critique et ceci lorsque celle-ci est maximum.

Nous mettons d'autre part en évidence une nouvelle résonance à quatre fois la densité critique. Cette résonance risque de jouer un rôle important dans l'interaction laser-matière lorsque l'on utilise de hauts flux ou de grandes longueurs d'onde.

REFERENCES

- /1/ A. Bourdier, D. Babonneau, G. Di Bona and X. Fortin,
Phys. Rev. A 18, 1194 (1976)
- /2/ A. Bourdier and X. Fortin,
Phys. Rev. A 20, 2154 (1979)
- /3/ A. Bourdier,
Thèse d'état, Université de Paris (1978) ; Rapport CEA-R-4976
(1979)
- /4/ G.L. Ginzburg,
The Propagation of Electromagnetic Waves in Plasmas (Pergamon,
New-York, 1964)
- /5/ A. Bourdier, D. Babonneau, G. Di Bona and X. Fortin,
Phys. Lett. A 64, 292 (1977)
- /6/ N.G. Denisov,
Zh. Eksp. Teor. Fiz. 31, 609 (1956) ; Sov. Phys. - JETP 4, 544 (1957)
- /7/ D. Babonneau,
Rapport interne, PG/TDC n° 14 007/75 (1975)
- /8/ A. Salères,
Thèse d'état, Université de Paris (1977) ; Rapport CEA-R-4899 (1978)
- /9/ M. Abramowitz and I.A. Stegun,
Handbook of mathematical functions, (Dover Publications, Inc., New-York)

- /10/ F. Gullieux,
Absorption et diffusion du rayonnement laser, cours CSAN (1981)
- /11/ G.J. Pert,
Plasma Physics 20, 175, (1978)
- /12/ D.W. Forslund, J.M. Kindel, K. Lee, E.L. Lindman, and R.I. Morse,
Phys. Rev. A 11, 679 (1975)
- /13/ L.D. Landau and E.M. Lifshitz,
The Classical Theory of Fields (Pergamon Press, 1972)
- /14/ A. Nayfeh,
Perturbation Methods (Wiley New-York, 1973)
- /15/ W.L. Kruer,
Comments Plasma Phys. 2, 139 (1976)
- /16/ R.B. White and F.F. Chen,
Plasma Physics 16, 565, (1973)
- /17/ T. Spziale and P.J. Catto,
Physics of Fluids 20, 990 (1970)

ANNEXE I

A titre d'exercice vérifions que $(\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ est bien un quadri-vecteur dans le milieu dispersif où notre onde se propage.

Considérons un plasma homogène, plaçons-nous dans (L') et résolvons l'équation d'onde (4.4) pour une onde plane progressive afin d'obtenir dans ce repère l'équation de dispersion. Nous ferons ici les mêmes approximations (sur l'angle d'incidence et sur l'amplitude de l'onde) que dans le cas inhomogène.

Dans l'approximation non relativiste l'équation d'onde se met sous la forme du système d'équations suivant (on suppose que $B_y = 0$ ici et dans toute la suite)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_x'(t)}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 P_x'(t)}{\partial z'^2} + \frac{\omega_p'^2}{c^2} P_x'(t) = - \frac{\omega_p'^2}{c^2} m V \quad (1a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_z'(t)}{\partial t'^2} + \frac{\omega_p'^2}{c^2} P_z'(t) = 0 \quad (1b)$$

on pose :

$$P_x'(t) = \tilde{P}_x'(t) - m V \quad (2)$$

Ainsi la résolution de (1a) se ramène à celle de

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{P}_x'(t)}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 \tilde{P}_x'(t)}{\partial z'^2} + \frac{\omega_p'^2}{c^2} \tilde{P}_x'(t) = 0 \quad (3)$$

./.

On suppose que $\tilde{p}_z^{(s)}$ a la forme suivante

$$\tilde{p}_z^{(s)} = \lambda \cos(\omega' t' - k' z') \quad (4)$$

L'expression (4) n'est solution de (3) que si

$$\omega'^2 = \omega_c'^2 + c^2 k'^2 \quad \left(\omega_c'^2 = \frac{4\pi e^2 N_0}{m} \right) \quad (5)$$

Dans toute la suite on va considérer que

$$\omega'^2 = \omega_c'^2 + c^2 k'^2 + \beta^{(s)} \quad (6)$$

$\beta^{(s)}$ étant un terme relativiste (en $\bar{p}^{(s)} / m^2 c^2$).

Pour l'équation (1b) on prend comme solution particulière

$$p_z^{(s)} = 0 \quad (7)$$

Ainsi à cet ordre notre solution s'écrit

$$p_x^{(s)} = \lambda \cos(\omega' t' - k' z') - m v \quad (8a)$$

$$p_y^{(s)} = 0 \quad (8b)$$

$$p_z^{(s)} = 0 \quad (8c)$$

à condition que la relation de dispersion (5) soit bien vérifiée.

Dans l'approximation "semi-relativiste" l'équation d'onde linéarisée se met sous la forme suivante

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'_z(z)}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 p'_z(z)}{\partial z'^2} + \frac{\omega_a'^2}{c^2} p'_z(z) = 0 \tag{9a}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'_z(z)}{\partial t'^2} + \frac{\omega_a'^2}{c^2} p'_z(z) = -\frac{1}{2mc^2} \frac{\partial^2}{\partial t' \partial z'} (p'_z(z))^2 \tag{9b}$$

Pour l'équation (9a) on prend

$$p'_z(z) = 0 \tag{10}$$

En ce qui concerne (9b) nous avons

$$-\frac{1}{2mc^2} \frac{\partial^2 (p'_z(z))^2}{\partial t' \partial z'} = -\frac{\lambda^2}{mc^2} \omega' k' \cos(\omega' t' - k' z') + \frac{\lambda}{c^2} \lambda k' \omega' \cos(\omega' t' - k' z') \tag{11}$$

Ainsi la solution de l'équation (9b) s'écrit :

$$p'_z(z) = \frac{\lambda^2}{mc} \frac{k' c / \omega'}{4 - \frac{\omega_a'^2}{\omega'^2}} \cos(\omega' t' - k' z') + \lambda \frac{\lambda}{c} \frac{k' c / \omega'}{\frac{\omega_a'^2}{\omega'^2} - 1} \cos(\omega' t' - k' z') \tag{12}$$

avec toujours la relation de dispersion (5).

./.

Passons maintenant à l'approximation relativiste. Nous allons résoudre l'équation sur P'_x qui s'écrit

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P'_x}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 P'_x}{\partial z'^2} + \frac{\omega'^2}{c^2} P'_x = - \frac{P'_x}{m c^2} \frac{\partial^2 P'_x}{\partial t' \partial z'} + \frac{\omega'^2}{2 c^2} \frac{P_x^{(0)2}}{m^2 c^2} P'_x - \frac{P_x^{(0)}}{2 m^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} (P'_x)^2 + \frac{\beta^{(0)}}{c^2} \tilde{P}_x^{(0)} \quad (13)$$

Calculons les termes de droite de cette équation (13) (en tenant compte de nos approximations)

$$\begin{aligned} - \frac{P'_x}{m c^2} \frac{\partial^2 P'_x}{\partial t' \partial z'} &= \left[\frac{V}{c} - \frac{\lambda}{m c} \cos(\omega' t' - k' z') \right] \left[\frac{\lambda^2}{2 m^2 c^2} \frac{4 k'^2}{4 - \frac{\omega'^2}{\omega'^2}} \cos 2(\omega' t' - k' z') \right. \\ &\quad \left. + \frac{V}{c} \lambda \frac{k'^2}{\frac{\omega'^2}{\omega'^2} - 1} \cos(\omega' t' - k' z') \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \lambda \frac{k'^2}{\frac{\omega'^2}{\omega'^2} - 1} \cos(\omega' t' - k' z') \quad (14) \\ \frac{\omega'^2}{2 c^2} \frac{P_x^{(0)2}}{m^2 c^2} P'_x &= \frac{\omega'^2}{2 c^2} \left[\frac{\lambda^2}{m^2 c^2} \cos^2(\omega' t' - k' z') + \frac{V^2}{c^2} - 2 \frac{V}{c} \frac{\lambda}{m c} \cos(\omega' t' - k' z') \right] \\ &\quad \times \left[\lambda \cos(\omega' t' - k' z') - m V \right] \\ &= \frac{\omega'^2}{2 c^2} \frac{V^2}{c^2} \left[3 \lambda \cos(\omega' t' - k' z') - m V \right] \quad (15) \\ \frac{P_x^{(0)}}{2 m^2 c^2} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} P_x^{(0)2} &= \left[- \frac{\lambda}{2 m c} \cos(\omega' t' - k' z') + \frac{V}{2 c} \right] \frac{1}{m c} \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \left[\lambda^2 \cos^2(\omega' t' - k' z') \right. \\ &\quad \left. - 2 m V \cos(\omega' t' - k' z') \right] \\ &= \left[- \frac{\lambda}{2 m c} \cos(\omega' t' - k' z') + \frac{V}{2 c} \right] \left[- 2 \frac{k'^2 \lambda^2}{m^2 c^2} \cos 2(\omega' t' - k' z') \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{V}{c} \lambda k'^2 \cos(\omega' t' - k' z') \right] \\ &= \frac{V^2}{c^2} \lambda k'^2 \cos(\omega' t' - k' z') \quad (16) \end{aligned}$$

Afin de ne pas avoir de terme séculaire dans la solution on élimine les termes en $\cos(\omega' t' - k' z')$, pour cela on prend

$$\begin{aligned} P^{(2)} &= - \left\{ \frac{k'^2 c^2 \omega'^2}{\omega'^2 - \omega_p'^2} + k'^2 c^2 + \frac{2}{c} \omega_p'^2 \right\} \frac{V^2}{c^2} \\ &= - \frac{c V^2}{c^2} \frac{V^2}{c^2} \end{aligned} \quad (17)$$

Ainsi l'équation de dispersion dans (L') s'écrit

$$\omega'^2 = \omega_p'^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \right) + c^2 k'^2 \quad (18)$$

D'autre part comme nous sommes en champ "faible" (on a négligé les termes en $\lambda^2 / m^2 c^2$) on a dans (L)

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \quad (19)$$

avec :

$$\omega_p^2 = \frac{4 \pi e^2 N_0}{m} \quad (20)$$

N_0 étant la densité des ions dans (L).

Nous savons que dans une transformation de Lorentz il y a contraction des volumes et que en conséquence la densité se transforme de la façon suivante :

$$N_0' = \frac{N_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (21)$$

on a donc :

$$\begin{aligned}\omega_e'^2 &= \frac{\omega_e^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \omega_e^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)\end{aligned}\quad (22)$$

Transformons l'équation (18) à l'aide de (22) :

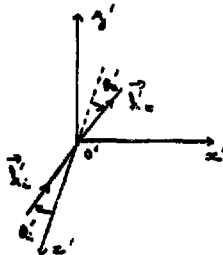
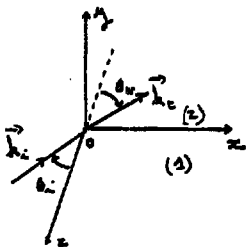
$$\omega'^2 = \omega_e^2 + c^2 k'^2 \quad (23)$$

Ainsi d'après (19) et (23) on a :

$$\omega^2 - c^2 k^2 = \omega'^2 - c^2 k'^2 = \omega_e^2 \quad (24)$$

$\left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$ est bien un quadrivecteur.

Il est simple de montrer, maintenant, que la loi des sinus est invariante par rapport à notre transformation de Lorentz.



On considère que l'on a deux milieux ; le milieu (1) est séparé du milieu (2) par le plan (x o z). Dans (L), le rayon incident est dans le plan (x o z).

On a ainsi

$$\sin \theta_i = m_{21} \sin \theta_r \tag{25}$$

m_{21} étant l'indice relatif du milieu (2) par rapport au milieu (1)

La relation (25) peut encore s'écrire

$$h_i \sin \theta_i = h_r \sin \theta_r \tag{26}$$

soit

$$h_{ix} = h_{rx} \tag{27}$$

Nous allons montrer que dans (L') on a encore

$$h'_{ix} = h'_{rx} \tag{28}$$

c'est-à-dire

$$\sin \theta'_i = m'_{21} \sin \theta'_r \tag{29}$$

./.

Pour ce faire transformons le quadri vecteur $(\frac{\omega}{c}, \vec{k})$

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{k'_x + \frac{\omega'}{c} V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \\ k_y &= k'_y \\ k_z &= k'_z \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\omega'/c + \frac{V}{c} k'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

on remplace k'_x et k'_z par leurs valeurs données par (30) dans (27) et on obtient

$$\frac{k'_x + \frac{\omega'}{c} V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{k'_{ox} + \frac{\omega'}{c} V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (31)$$

ce qui implique

$$k'_x \sin \theta'_z = k'_{ox} \sin \theta'_z \quad (32)$$

soit

$$\sin \theta'_z = m'_{xz} \sin \theta'_z \quad (33)$$

La loi des sinus est donc bien invariante dans notre transformation de Lorentz.

ANNEXE II

Montrons que le fait d'avoir pris $H'_{0z} = H'_{0y} = H'_{0x} = 0$ dans notre solution n'empêche pas que l'équation de Maxwell

$$\vec{\nabla}' \wedge \vec{H}' = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}'}{\partial t'} - \frac{4\pi e}{c} (n' \vec{J}' - n_0 \vec{V}') \quad (1)$$

soit vérifiée.

En tenant compte des équations (4.42), nous avons

$$\vec{\nabla}' \wedge \vec{H}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y'} H'_{0z} - \frac{\partial}{\partial z'} H'_{0y} \\ \frac{\partial}{\partial z'} H'_{0x} - \frac{\partial}{\partial x'} H'_{0z} \\ \frac{\partial}{\partial x'} H'_{0y} - \frac{\partial}{\partial y'} H'_{0x} \end{pmatrix}$$

Intéressons-nous par exemple à la projection de ce vecteur sur l'axe des x'

$$(\nabla' \wedge H')_{x'} = \left(\frac{\omega' n'}{c^2 L} \right) \frac{c}{c} \int A_i(r) \sin \omega' t' + c \left(\frac{\partial}{\partial z'^2} E_{0z}^{(1)} \frac{\partial t'}{\partial z'} - \frac{\partial H'_{0y}}{\partial z'} + \frac{\partial H'_{0x}}{\partial y'} \right) \quad (2)$$

D'autre part, d'après l'équation de Maxwell-Ampère on a

$$(\nabla' \wedge H')_{x'} = \frac{1}{c} \frac{\partial E'_{0x}}{\partial t'} - \frac{4\pi e}{c} \left(n' \frac{c P'_{0x}}{P'_0} + n_0 V' \right) \quad (3)$$

∴

La densité est donnée par l'équation de Poisson

$$\begin{aligned} \rho' &= H_0' - \frac{\Delta \Phi'}{4\pi c^2} \\ &= H_0' - \frac{\omega'^2}{4\pi c^2} \Lambda \frac{V}{c} \left\{ \left[1 - \beta \left(\frac{\omega'}{c} L \right)^2 \right] A_2(-\beta) \sin \omega' t' \right. \\ &\quad \left. - A_2(-\beta) \beta^{-2} \sin \omega' t' \right\} + \frac{\Lambda}{mc} \{ \dots \} \quad (4) \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (3) devient avec les approximations considérées

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 \Lambda H' \right)_{z'} &= \frac{\omega'^2}{c^2} \Lambda A_2(-\beta) \sin \omega' t' - \frac{\omega'^2}{c^2} \Lambda A_2(-\beta) \sin \omega' t' \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \frac{\omega'^2}{c^2} \Lambda A_2(-\beta) \sin \omega' t' + \frac{\omega'^2 V^2}{c^2} \frac{V^2}{c^2} \Lambda A_2(-\beta) \beta^{-2} \sin \omega' t' \quad (5) \end{aligned}$$

En rapprochant cette expression de (2), on constate que l'on doit avoir pour les termes en $A_2(\beta) \sin \omega' t'$

$$1 - \frac{\omega'^2}{c^2} = 1 - \frac{V^2}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{\omega'^2 V^2}{c^2} \quad (6)$$

ce qui est bien en accord avec (4.36).

Notre solution doit également satisfaire

$$\epsilon \int \frac{\Delta^2}{2\pi^2} \Xi^{(0)} dk' = \frac{\omega'^2}{c^2} \frac{V^2}{c^2} A_2(-\beta) \beta^{-2} \sin \omega' t' \quad (7)$$

./.

On vérifie que c'est bien le cas lorsque $\omega_2^2 / \omega^2 \sim 1$ en remplaçant le champ par son expression approchée (4.47).

En ce qui concerne les termes constants de (2), on doit avoir

$$\sum_{\alpha_2} H'_{0\alpha_2} - \sum_{\alpha_2} H'_{0\alpha_2} = 0 \quad (8)$$

si l'on veut qu'il y ait égalité entre les membres de droite de (2) et (5). Cette dernière relation (8) est bien satisfaite lorsque

$$H'_{0\alpha_2} = H'_{0\alpha_2} = H'_{0\alpha_2} = 0 .$$

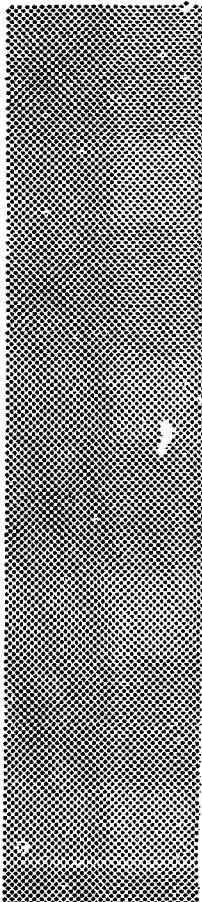
*Achévé d'imprimer
par
le CEA, Service de Documentation, Saclay
Mars 1983*

DEPOT LEGAL
1er trimestre 1983

ISSN 0429 - 3460

La diffusion des rapports et bibliographies du Commissariat à l'Énergie Atomique est assurée par le Service de Documentation, CEN-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cédex, (France)

Reports and bibliographies of the Commissariat à l'Énergie Atomique are available from the Service de Documentation, CEN-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cédex, (France)



*Edité par
le Service de Documentation
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
91191 GIF-sur-YVETTE Cédex (France)*

