UM MÉTODO NODAL BASEADO NO MÉTODO DE MATRIZ-RESPOSTA

Francisco D. Rocamora Jr. (CTA/IEAv)

Artur Menezes (CTA/IEAv)

INTRODUÇÃO

Métodos Nodais tem sido largamente utilizados[1,2] em reatores nucleares na determinação da distribuição de potência, fatores de multiplicação, etc. Basicamente estes métodos envolvem a substituição de comportamentos espaciais detalhados por comportamentos médios, válidos para regiões do reator denominados nodos.

Sendo um dos objetivos do Instituto de Estudos Avançados, desenvolver um programa de reatores rápidos, é interessante que diferentes procedimentos de cálculo sejam utilizados para avaliações preliminares e testes, aos quais os métodos nodais são bastante úteis devido aos reduzidos tempos de computação envolvidos.

O objetivo deste trabalho é apresentar um método nodal, baseado no método de matriz-resposta[3], e investigar a sua aplicação em problemas com altos gradientes espaciais, tais como os que existem em reatores rápidos, próximos da interface núcleo-cobertor.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Em termos de coeficientes de transmissão e correntes, o balanço de nêutrons para um nodo n pode ser escrito como:

$$J^{g}_{n\to m} = \sum_{m'} \sum_{g'} t^{g'\to g}_{n,m'\to m} \; J^{g'}_{m'\to n} \qquad (1)$$

onde

$J^{g}_{n\to m}$ – corrente de nêutrons (no grupo de energia g), indo do nodo n para o nodo m (m adjacente a n).

$t^{g'\to g}_{n,m'\to m}$ – coeficiente de transmissão (do grupo g' para o grupo g), da face m' para a face m do nodo n.

Estes coeficientes de transmissão são, em geral, pré-calculados através de técnicas de transporte ou difusão de nêutrons, o que faz com que os métodos de matriz resposta sejam formalmente corretos.

Desenvolvendo a equação (1), obtém-se:

$$J^{g}_{n\to m} = t^{g\to g}_{n,m\to m} \; J^{g}_{m\to n} + \sum_{m'} \sum_{g'\neq g} t^{g'\to g}_{n,m'\to m} \; J^{g'}_{m'\to n} +$$

$$+ \sum_{m'\neq m} t^{g\to g}_{n,m'\to m} \; J^{g}_{m'\to n} \; . \tag{2}$$

Adicionando $(\pm \; t^{g\to g}_{n,m//\to m} \; J^{g}_{m\to n})$ no lado direito da eq.(2), temos:

$$J^{g}_{n\to m} = \rho^{g}_{nm} \; J^{g}_{m\to n} + t^{g\to g}_{n,m//\to m} \; J^{g}_{m\to n} + \sum_{m'\neq m} t^{g\to g}_{n,m'\to m} \; J^{g}_{m'\to n} +$$

$$+ \sum_{m'} \sum_{g'\neq g} t^{g'\to g}_{n,m'\to m} \; J^{g'}_{m'\to n} \tag{3}$$

onde

$$\rho^{g}_{nm} = t^{g\to g}_{n,m\to m} - t^{g\to g}_{n,m//\to m}$$

é a reflexão direta e $t^{g\to g}_{n,m//\to m}$ é o coeficiente de transmissão da face m//, paralela a face m, no nodo n.

Vamos admitir que os coeficientes de transmissão possam ser redefinidos como:

$$t^{g'\to g}_{n,m'\to m} = (1 - \rho^{g'}_{nm'}) \; t^{g'\to g}_{n} \; \Gamma^{g}_{nm} \tag{4}$$

onde Γ^{g}_{nm} está associado à fuga no grupo g na face m do nodo n e $t^{g'\to g}_{n}$ é o coeficiente de separabilidade que deve ser calculado de modo a preservar quantidades importantes do nodo n, tais como a fuga total.

Reescrevendo a eq.(3) com a definição dada por (4), temos:

$$J^{g}_{n\to m} - \rho^{g}_{nm} \; J^{g}_{m\to n} = (1 - \rho^{g}_{nm//}) \; t^{g\to g}_{n} \; \Gamma^{g}_{nm} \; J^{g}_{m\to n} +$$

$$+ \sum_{n'\neq m} (1 - \rho^{g}_{nm'}) \; t^{g\to g}_{n} \; \Gamma^{g}_{nm} \; J^{g}_{m'\to n} + \sum_{m'} \sum_{g'\neq g} (1 - \rho^{g'}_{nm'}) \; t^{g'\to g}_{n}$$

$$\Gamma^{g}_{nm} \; J^{g'}_{m'\to n} \; . \tag{5}$$

ou

$$J^g_{n\to m} - \rho^g_{nm} J^g_{m\to n} = (1 - \rho^g_{nm//}) t^{g\to g}_n \Gamma^g_{nm} J^g_{m\to n} + \sum_{m'\neq m} (1 - \rho^g_{nm'}) t^{g\to g}_n \cdot$$

$$\cdot \Gamma^g_{nm} J^g_{m'\to n} + \sum_{g'\neq g} C^{g'\to g}_n \sum_{m'} (1 - \rho^{g'}_{nm'}{}^{,g}) t^{g'\to g'}_n \Gamma^g_{nm} J^{g'}_{m'\to n} \qquad (6)$$

onde

$$C^{g'\to g}_n = \frac{t^{g'\to g}_n}{t^{g'\to g}_n}$$ é o coeficiente de acoplamento entre o grupo $\underline{g}'$ e $\underline{g}$ no nodo $\underline{n}$.

Definindo

$$Lgn = \sum_{m'} (1 - \rho^g_{nm'}) t^{g\to g}_n J^g_{m'\to n} \qquad (7)$$

podemos escrever a eq.(6) da forma:

$$J^g_{n\to m} - \rho^g_{nm} J^g_{m\to n} = (1 - \rho^g_{nm//}) t^{g\to g}_n J^g_{m\to n} - (1 - \rho^g_{nm}) t^{g\to g}_n \Gamma^g_{nm} J^g_{m\to n}$$

$$+ \Gamma^g_{nm} Lgn + \sum_{g'\neq g} C^{g'\to g}_n \Gamma^g_{nm} Lg'n$$

$$= (\rho^g_{nm} - \rho^g_{nm//}) t^{g\to g}_n \Gamma^g_{nm} J^g_{m\to n} +$$

$$+ \Gamma^g_{nm} \left[Lgn + \sum_{g'\neq g} C^{g'\to g}_n Lg'n \right] \qquad (8)$$

Considerando apenas nodos cúbicos, temos:

$$\rho^g_{nm} = \rho^g_n$$

$$\Gamma^g_{nm} = 1/6$$

e a eq.(8) fica:

$$J^g_{n\to m} - \rho^g_n \; J^g_{m\to n} = 1/6 \left[Lgn + \sum_{g'\neq g} C^{g'\to g}_n \; Lg'n \right] \tag{9}$$

e trocando-se os índices n e m, temos:

$$J^g_{m\to n} - \rho^g_m \; J^g_{n\to m} = 1/6 \left[Lgm + \sum_{g'\neq g} C^{g'\to g}_m \; Lg'm \right] \tag{10}$$

Resolvendo (9) e (10) para $J_{m\,n}$, obtemos:

$$J^g_{m\to n} = 1/6 \; \frac{\left| \rho^g_m \left[Lgn + \sum_{g'\neq g} C^{g'\to g}_n \; Lg'n \right] + \left[Lgm + \sum_{g'\neq g} C^{g'\to g}_m \; Lg'm \right] \right|}{(1 - \rho^g_m \; \rho^g_n)} \tag{11}$$

Substituindo (11) em (7), temos:

$$Lgn \left[\frac{(1 - t^{g\to g}_n)}{t^{g\to g}_n} + \frac{1}{6} \sum_m \frac{(1 - \rho^g_m)}{(1 - \rho^g_m \; \rho^g_n)} \right] = \frac{1}{6} \quad x$$

$$\left| \sum_{g'\neq g} C^{g'\to g}_n \; Lg'n \sum_m \frac{(1 - \rho^g_n) \; \rho^g_m}{(1 - \rho^g_m \; \rho^g_n)} + \sum_m \frac{(1 - \rho^g_n)}{(1 - \rho^g_m \; \rho^g_n} \; Lgm \; + \right.$$

$$\left. + \sum_m \frac{(1 - \rho^g_n)}{(1 - \rho^g_m \; \rho^g_n)} \sum_{g'\neq g} C^{g'\to g}_m \; Lg'm \right| \tag{12}$$

Colocando a eq.(12) na forma de autovalor, temos:

$$Lgn = \frac{t^{g\to g}_n}{\hat{t}} \cdot \left| \left[1 - \frac{1}{6} \sum_m \frac{(1 - \rho^g_m)}{(1 - \rho^g_m \; \rho^g_n)} \right] Lgn + \frac{1}{6} \left[\sum_{g'\neq g} C^{g'\to g}_n \; Lg'n \; x \right.\right.$$

$$\times \sum_m \frac{(1-\rho_n^g)\,\rho_m^g}{(1-\rho_m^g\,\rho_n^g)} + \sum_m \frac{(1-\rho_n^g)}{(1-\rho_m^g\,\rho_n^g)}\, Lgn \; +$$

$$+ \sum_m \frac{(1-\rho_n^g)}{(1-\rho_m^g\,\rho_n^g)} \sum_{g'\neq g} C_m^{g'\to g}\, Lg'n \Bigg| \qquad (13)$$

A fuga total no nodo $\underline{n}$ no grupo $\underline{g}$ é dada por:

$$L^{*}gn = \sum_m \sum_{m'} \sum_{g'} t_{n,m'\to m}^{g'\to g}\, J_{m'\to m}^{g'}$$

$$= \sum_m t_{n,m\to m}^{g\to g}\, J_{m\to n}^{g} + \sum_m \sum_{m'\neq m} t_{n,m'\to m}^{g\to g}\, J_{m'\to n}^{g} \; +$$

$$+ \sum_m \sum_{m'} \sum_{g'\neq g} t_{n,m'\to m}^{g'\to g}\, J_{m'\to n}^{g'} \qquad (14)$$

ou, reescrevendo em termos de reflexão direta:

$$L^{*}gn = \sum_m \rho_n^g\, J_{m\to n}^{g} + \sum_m t_{n,m//\to m}^{g\to g}\, J_{m\to n}^{g} + \sum_n \sum_{m'\neq m} t_{n,m'\to m}^{g\to g}\, J_{m'\to n}^{g}$$

$$+ \sum_m \sum_{m'} \sum_{g'\neq g} t_{n,m'\to m}^{g'\to g}\, J_{m'\to n}^{g'} \qquad (15)$$

Vamos definir "Fuga Alocada" como:

$$L^{*}{}_{gn}^{(A)} = \left[\sum_{m} \rho_n^g \; J_{m\to n}^g + \sum_{m} t^{g\to g}_{n,m//\to m} \; J^g_{m\to n} + \sum_{m} \sum_{m'\neq m} t^{g\to g}_{n,m'\to m} \; J^g_{m'\to n} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m} \sum_{m'} \sum_{g'\neq g} t^{g'\to g}_{n,m'\to m} \quad J^{g'}_{m'\to n} \right]^{(A)} \tag{16}$$

O primeiro critério para a determinação dos coeficientes de separabilidade, $t_n^{g'\to g}$, é considerar:

$$L^{*}{}_{gn} = L^{*}{}_{gn}^{(A)} \tag{17.a}$$

$$J^g_{m\to n} = J^{g\;(A)}_{m\to n} \tag{17.b}$$

$$\rho^g_n = \rho^{g\;(A)}_n \tag{17.c}$$

e $t^{g'\to g}_{n,m'\to m} = t^{g'\to g\;(A)}_{n,m'\to m} = (1 - \rho^{g'}_n) \; t^{g'\to g}_n \; \Gamma^g_{nm}$.

Com isto, obtemos:

$$t^{g\to g}_n = \frac{\sum_{m} \left| \sum_{m'\neq m} t^{g\to g}_{n,m'\to m} \; J^g_{m'\to n} + t^{g\to g}_{n,m//\to m} \; J^g_{m\to n} \right|}{\sum_{m} (1 - \rho^g_n) \; J^g_{m\to n}} \tag{18.a}$$

e

$$t^{g'\to g}_n = \frac{\sum_{m} \sum_{m'} t^{g'\to g}_{n,m'\to m} \; J^{g'}_{m'\to n}}{\sum_{m} (1 - \rho^{g'}_n) \; J^{g'}_{m\to n}} \tag{18.b}$$

Este tem sido o critério mais freqüentemente utilizado em cálculos nodais[3].

O objetivo deste trabalho é testar uma outra alternativa para a obtenção dos coeficientes de separabilidade.

Retornando à eq. (13), vamos definir a "Fuga Alocada" como:

$$L^{*}{}_{gn}^{(A)} = \left[\sum_{m} t^{g\to g}_{n,m\to m} \; J^{g}_{m\to n} + \sum_{m} \sum_{m'\neq m} t^{g\to g}_{n,m'\to m} \; J^{g}_{m'\to n} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m} \sum_{m'} \sum_{g'\neq g} t^{g'\to g}_{n,m'\to m} \; J^{g'}_{m'\to n} \right]^{(A)} \qquad (19)$$

e substituindo o conjunto de eqs.(16) por:

$$L^{*}{}_{gn} = L^{*}{}_{gn}^{(A)} \qquad (20.a)$$

$$J^{g}_{m\to n} = J^{g\,(A)}_{m\to n} \qquad (20.b)$$

$$t^{g\to g}_{n,m\to m} = t^{g\to g\,(A)}_{n,m\to m} \qquad (20.c)$$

e $$t^{g'\to g\,(A)}_{n,m'\to m} = (1 - \rho^{g'\,(A)}_{n}) \; t^{g'\to g}_{n} \; \Gamma^{g}_{nm}$$

obtemos:

$$t^{g\to g}_{n} = \frac{\sum_{m} \sum_{m'\neq m} t^{g\to g}_{n,m'\to m} \; J^{g}_{m'\to n}}{\sum_{m\neq m'} (1 - \rho^{g\,(A)}_{n}) \; J^{g}_{m\to n}} \qquad (21.a)$$

e

$$t^{g'\to g}_{n} = \frac{\sum_{m} \sum_{m'\neq m} t^{g'\to g}_{n,m'\to m} \; J^{g'}_{m'\to n}}{\sum_{m\neq m'} (1 - \rho^{g\,(A)}_{n}) \; J^{g'}_{m\to n}} \qquad (21.b)$$

onde agora $\rho^{g'\,(A)}_{n}$ é obtido como

$$\rho_n^{g'(A)} = t_{n,m\to m}^{g'\to g'} - \frac{1}{5} \sum_{m'\neq m} t_{n,m'\to m}^{g'\to g'} \qquad (22)$$

Utilizando as equações (18), (21) e (22) foram realizados vários testes em diferentes configurações para reatores rápidos através do programa " SIMTWO " com opções para alocação de ρ e albedo em qualquer nodo desejado.

Os resultados obtidos foram comparados com os resultados do programa EPRINMG utilizado como referência no presente trabalho.

Os resultados obtidos são mostrados nas tabelas (1), (2) e (3).

C	C	C	C .156178 -4.299 5.466 -2.022 3.029 14.806
C	C	C .192899 -3.261 4.026 -1.096 1.676 10.208	C .169636 -3.535 5.282 -1.275 2.850 13.270
N	N 3.02971 .070 -1.122 - .510 - .480 - .350	C .230286 -1.665 3.282 .062 1.364 7.579	C .189071 -1.949 5.488 .104 3.259 11.992
N 3.78746 (a) .633 (b) .043 (c) .540 (d) .133 (e) -3.098 (f)	N 3.37117 .399 -1.074 .023 - .661 -1.690	C .254072 -1.460 2.585 .032 .916 5.801	C .202641 -1.369 5.316 .530 3.245 10.932

Tabela 1 - Distribuição de potência normalizada (Configuração 2-D)

C .99977 (a) -2.000 (b) 2.927 (c) - .315 (d) 1.108 (e) 12.803 (f)	C .130265 -2.272 .639 -1.019 - .729 7.181	N 1.75711 .124 -1.296 - .146 -1.002 .247	N 2.01285 .138 .945 .209 .867 -1.315

Tabela 2 - Distribuição de potência normalizada (Configuração 1-D)

N - Núcleo

C - Cobertor

(a) - Matriz Resposta (2 grupos) - (Ref.).

(b) - Eq (18) aplicada a todos os nodos (erro relativo %).

(c) - Eq (21) aplicada aos nodos adjacentes a interface e Eq (18) p/ os nodos restantes (erro relativo %).

(d) - Eq (21) aplicada aos nodos adjacentes a interface no lado do cobertor e Eq (18) p/ os nodos restantes (erro relativo %).

(e) - Eq (21) aplicada aos nodos adjacentes a interface no lado do núcleo e Eq (18) p/ os nodos restantes (erro relativo %).

(f) - Eq (21) aplicada a todos os nodos (erro relativo %).

COMENTÁRIOS

Nos exemplos realizados foram utilizados dois grupos de energia tanto para a referência como para o programa SIMTWO.

As tabelas mostram que a alocação de albedo na interface no lado do cobertor (caso-d), fornece resultados tão bons quanto no caso em que se utiliza a locação de ρ p/ todos os nodos.

Principalmente nos nodos adjacentes a interface no lado do cobertor, o caso (d) apresentou quase sempre resultados melhores que o caso (b). Sendo estes nodos os mais importantes no tocante a taxa de regeneração em reatores rápidos, torna-se interessante estabelecer uma estratégia de alocações, através das eqs (18) e (21), de modo a melhorar os resultados obtidos nesta região, ao que o programa SIMTWO modificado se mostrou bastante promissor.

REFERÊNCIAS

1 - Z. Weiss, "Nodal Equations Derived from Invariant Embedding Theory" , Nucl. Sci. Eng. 48, 235 (1972).

2 - R.A. Shober, "A Nodal Method for Fast Reactor Analysis", Processing of the Topical Meeting on Computational Methodsin Nuclear Engineering, Vol 1 (1979).

3 - Artur Menezes, "Transport and Spectral Effects in the Application of Nodal Methods to Thermal and Fast Reactors", Ph. D Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute (1979).

4 - M. Robinson, "An Interrelation of Selected Conceptually Distinct, Spatially Course Transport Methods", M.Sc. Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute (1976).

5 - D. Verplanck et.al., "Simulate Reactor Simulator Code", Yankee Atomic Electric Co. (1972).