

JAERI-M
83-085

ERATOによるトカマク・プラズマの
位置不安定性解析

1983年6月

熊谷 道一・常松 俊秀・徳田 伸二・竹田 辰典

日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute

JAERI-M レポートは、日本原子力研究所が不定期に公開している研究報告書です。
入手の間合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課（〒319-11 茨城県那珂郡東海村）あて、お
申しこしてください。なお、このほかに財団法人原子力弘済会資料センター（〒319-11 茨城県那珂郡東海村
日本原子力研究所内）で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.
Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Section, Division of
Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken
319-11, -Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1983

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 日立高速印刷株式会社

ERATOによるトカマク・プラズマの位置不安定性解析

日本原子力研究所東海研究所核融合研究部

熊谷道一・常松俊秀・徳田伸二・竹田辰興

(1983年5月19日受理)

線形理想MHD安定性解析コードERATO-Jを用いてトカマク・プラズマの位置不安定性(軸対象モードの安定性)の解析を行った。プラズマの平衡としてSolov'ev平衡を用いて、プラズマ断面形状の楕円度、三角形度、アスペクト比、磁気軸の安全係数およびプラズマと導電性シェルの間の距離と不安定性成長率との関係を調べた。剛体モデルとの比較を行った結果、剛体モデルにおいて平衡外部磁場の減衰指数(n -index)について与えられる安定条件は、三角形度の小さな形状に対してよい近似となることが示された。また、プラズマ変位を空間的に一様であると仮定したモデル(剛体的変位モデル)との比較を行い、各近似モデルの適用限界について解析を行った。

Positional Instability Analysis of Tokamak Plasmas

by ERATO

Michikazu KUMAGAI*, Toshihide TSUNEMATSU, Shinji TOKUDA
and Tatsuoki TAKEDA

Department of Thermonuclear Fusion Research
Tokai Research Establishment, JAERI

(Received May 19, 1983)

The stability of axisymmetric modes of a tokamak plasma (positional instabilities) is analyzed for the Solov'ev equilibrium by using the linear ideal MHD code ERATO-J. The dependence of the stability on various parameters, i.e., the ellipticity and triangularity of the plasma cross-section, the aspect ratio, the safety factor at the magnetic axis, and the distance between the plasma and a conducting shell is investigated. Comparison of the results with those by the rigid model shows that the stability condition derived from the rigid model in terms of the decay index (n -index) of the external equilibrating field is a good approximation for the plasma with small triangular deformation. Also the results are compared with those of the rigid displacement model and applicability of the various models on the positional instability analyses is discussed.

Keywords : Tokamak Plasma, Positional Instability, Axi-symmetric Mode, ERATO, Rigid Model, Rigid Displacement Model, Decay Index, Ellipticity, Triangularity, MHD Stability, Stability Diagram

* On leave from Toshiba Co.

目 次

1. はじめに	1
2. プラズマの平衡	2
3. 数値解析の方法	4
4. 解析結果	6
4.1 導電シェルの安定化効果	6
4.2 シェルの無い場合の成長率	6
4.3 変位分布	7
4.4 安定領域	7
4.5 剛体的変位モデルとの比較	8
4.6 $n=0/m=0$ モードの影響	8
5. まとめ	9
謝 辞	9
参考文献	10
付録 1 剛体的変位モデル	11
付録 2 Solov'ev平衡の表面の楕円度と三角形度	12

Contents

1. Introduction	1
2. Plasma equilibrium	2
3. Numerical procedure	4
4. Results of computation	6
4.1 Stabilizing effect of conducting shell	6
4.2 Growth rate for a shell-less plasma	6
4.3 Pattern of displacements	7
4.4 Stability diagrams	7
4.5 Comparison with rigid displacement model	8
4.6 Effect of $n=0/m=0$ modes on horizontal positional instability	8
5. Summary	9
 Acknowledgements	 9
References	10
 Appendix 1 Rigid displacement model	 11
Appendix 2 Ellipticity and triangularity of the surface of the Solov'ev equilibrium	12

1. は じ め に

トカマク核融合炉の研究開発において、炉心プラズマの位置不安定性の解析は重要課題の1つである。この不安定性は、通常、次の4つのモデルで理論解析が行われている。

- (1) 剛体モデル：環状電流を持つ導電性の剛体によってプラズマを近似し、その変形を無視して電気力学的に安定性を解析する。このモデルによれば、プラズマの平衡を維持するに要する外部磁場の減衰指数 (n-index) n_1 を

$$n_1 \equiv - \left. \frac{r}{B_z} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial r} \right|_{\substack{r=R_M \\ z=0}} \quad (1.1)$$

とする時、安定条件は

$$0 < n_1 < \frac{3}{2} \quad (1.2)$$

で与えられる¹⁾。ここで、 R_M はプラズマ主半径である。(1.2)式において $0 < n_1$ および $n_1 < 3/2$ は、それぞれ、垂直変位および水平変位 (または膨張) に対する安定条件である。一様プラズマ電流分布でシェルの無い場合について、プラズマ断面の楕円度 (= 垂直方向小半径/水平方向小半径) e と減衰指数 n_1 の関係は次式のように与えられる²⁾。

$$e = 1 + \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{3}{4} \ell n 8 A - \frac{17}{16} - n_1 \left(\ell n 8 A + \beta_p - \frac{5}{4} \right) \right\}, \quad (1.3)$$

ここで、 A および β_p は、それぞれ、アスペクト比 (= プラズマ主半径/水平方向小半径) およびポロイダル・ベータ値である。(1.2)式および(1.3)式から垂直変位に対する楕円度の制限は次のように与えられる³⁾。

$$e < e_c \equiv 1 + \frac{1}{A^2} \left(\frac{3}{4} \ell n 8 A - \frac{17}{16} \right). \quad (1.4)$$

このように、位置不安定性の抑制のためには、プラズマ断面の楕円度をアスペクト比から定まるある一定値より小さく押える必要があるが、より大きな楕円度を持つ場合でも、プラズマ外部に導電性シェルを置くことにより安定化できることが知られている³⁾。

- (2) 剛体的変位モデル：試行関数としてプラズマの一様変位を仮定し変分原理によって安定性を解析する。プラズマ断面に、三角形度や四角形度等の高次の変形が加わった場合の位置不安定性について Rebhan によって剛体的変位モデルを用いた解析が行われている⁴⁾。この解析によれば、比較的小さな楕円変形の場合垂直位置不安定性に対しては小アスペクト比、大三角形度のプラズマ平衡が有利であることが示されている⁴⁾。
- (3) 表皮電流モデル：表皮電流平衡に対して、一般的なプラズマ変位について変分原理を適

用して解析的に安定性を計算する⁵⁾。このモデルでは前述の2つのモデルから剛体変位の仮定をはずしており、変位に関しては現実的なプラズマの挙動をより忠実に表現しているものと考えられる。ただし、表皮電流平衡はトカマクについては極めて特殊な平衡である点には注意を要する。このモデルと剛体的変位モデルの結果のあいだの最も顕著な差は、三角形度の効果である。表皮電流モデルでは、三角形度は垂直位置不安定性にとって不利な要因となる⁵⁾。

- (4) 一般的線形磁気流体モデル：変分原理に基づく一般的な数値解析コードERATO⁶⁾、PEST⁷⁾等により一般的平衡、一般的変形について安定性を解析する。ERATO⁶⁾、PEST⁹⁾のいずれのコードを用いた計算においてもプラズマ断面形状の位置不安定性に与える効果は定性的に表皮電流モデルと良い一致を示している。現実的なトカマク・プラズマの位置不安定性を線形近似の範囲内で最も一般的に扱うにはこのモデルによる解析を行わねばならないが、この方法を用いて広範なパラメータ・サーベイを行い線形位置不安定性について系統的に調べた例はない。

本報告書では、原研に導入後改良された原研版ERATOコード(ERATO-J)^{10,11)}を用いて、断面形状、アスペクト比、導電シェルの位置、安全係数等のパラメータについての位置不安定性を解析し、剛体モデル、剛体的変位モデルによる解析結果との比較を行った。第2章では解析に用いたプラズマ平衡について、また、第3章では数値解析の方法について述べる。第4章は、解析結果について、また、第5章はまとめを記す。

2. プラズマの平衡

プラズマの磁気流体的平衡は、磁場、電流密度、圧力を、それぞれ、 B 、 j 、 p として、次式で与えられる。

$$\nabla p = j \times B \quad (2.1)$$

$$\nabla \times B = j \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.3)$$

軸対称性を考慮に入れて、(2.1)式～(2.3)式を変形して次のGrad-Shafranov方程式を得る。

$$(\nabla^*)\phi \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -rj_\phi \quad (2.4)$$

$$j_\phi = r \frac{dp}{d\phi} + \frac{1}{2r} \frac{dT^2}{d\phi} \quad (2.5)$$

ここで、座標系は円筒座標系(r , ϕ , z)、 ϕ はポロイダル磁束である。磁場 B は、 ϕ およびトロイダル磁場関数 T を用いて

$$\mathbf{B} = \frac{T}{r} \mathbf{e}_p + \frac{1}{r} \mathbf{e}_p \times \nabla \psi, \quad (2.6)$$

と表わせる。ここで \mathbf{e}_p はトロイダル方向の単位ベクトルである。

本報告書では、Grad-Shafranov 方程式を満たす最も簡単な解析解の 1 つである Solov'ev 平衡¹²⁾ について位置不安定性を解析する。Solov'ev 平衡解 $\psi(r, z)$ 、および、この平衡についての圧力関数、 $p(\psi)$ 、トロイダル磁場関数 $T(\psi)$ は、次のように与えられる。

$$\psi(r, z) = \frac{\phi_s}{a^2 R^2} \left[\frac{(1-d)r^2 + dR^2}{E^2} z^2 + \frac{(r^2 - R^2)^2}{4} \right], \quad (2.7)$$

$$p(\psi) = \frac{2\phi_s}{a^2 R^2} \left(1 + \frac{1-d}{E^2} \right) (\phi_s - \psi), \quad (2.8)$$

$$T^2(\psi) = T_0^2 - \frac{4\phi_s}{a^2 E^2} d\psi, \quad (2.9)$$

ここで、 E 、 d は、それぞれ、精円度、三角形度に関するパラメータ、 R は磁気軸の r 座標 ($R = \sqrt{R_M^2 + r_p^2}$ 、 r_p : プラズマの水平方向小半径)、 $\phi_s = a^2 E T_0 / (2q_0 R)$ 、 q_0 は磁気軸での安全係数、 $T_0 = B_T R$ 、 B_T : 磁気軸でのトロイダル磁場、 $a = R_M r_p / R$ である。

平衡が存在するための条件から三角形度に関するパラメータ d については次のような条件が課せられる。まず、圧力 p が負でないために、(2.8) 式より、

$$d \leq E^2 + 1, \quad (2.10)$$

また、 $T^2 \geq 0$ であることから (2.9) 式より、

$$d \leq q_0^2 R^2 / a^2, \quad (2.11)$$

が成り立つ。また、プラズマ表面が閉じるために、

$$d \geq 1 - \frac{R}{2a}, \quad (2.12)$$

が得られる。これは、アスペクト比 $A (\equiv R_M / r_p)$ を使えば、次のように表わせる。

$$d \geq 1 - \frac{1}{2} \left(A + \frac{1}{A} \right). \quad (2.13)$$

プラズマ電流分布は、

$$j_\phi = -\frac{2\phi_s}{a^2 R^2} \left\{ \left(1 + \frac{1-d}{E^2} \right) r + \frac{R^2 d}{E^2} \frac{1}{r} \right\}, \quad (2.14)$$

で与えられる。また、ポロイダル・ベータ値 β_p は、次のように近似される。

$$\beta_p \cong 1 - \frac{d}{1+E^2} \quad (2.15)$$

3. 数値解析の方法

本研究では、一般的な線形理想磁気流体的安定性解析コード ERATO-J^{10,11)}を用いて、前節の Solov'ev 平衡にあるトカマク・プラズマの位置不安定性を解析した。ERATO-J は、原版 ERATO に比べると、特に、平衡-安定性解析部インターフェイスの高性能化を行い高精度計算が可能になっている。これらのコードでは、以下に示すように、変分形の線形理想磁気流体方程式：

$$\delta L \equiv \delta(W_p + W_v + W_k) = 0, \quad (3.1)$$

を混成有限要素法 (the finite hybrid element method)¹²⁾を用いて行列の固有値問題に変換して数値解析することが基本になっている。ここで、 W_p , W_v , W_k は、それぞれ、プラズマのポテンシャル・エネルギー、真空のエネルギー、およびプラズマの運動エネルギーで、次のように与えられる。

$$W_p = \frac{1}{2} \int_P d\tau \{ [\nabla \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{B}) + (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{j} \times \boldsymbol{\nu})]^2 + r \rho (\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^2 - 2(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^2 (\mathbf{j} \times \boldsymbol{\nu})(\mathbf{B} \cdot \nabla) \boldsymbol{\nu} \}, \quad (3.2)$$

$$W_v = \frac{1}{2} \int_V d\tau |\nabla \phi|^2, \quad (3.3)$$

$$W_k = \frac{1}{2} \int_P d\tau \rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 \quad (3.4)$$

ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は変位ベクトル、 $\boldsymbol{\nu}$ は磁気面に垂直な単位ベクトル、 r は比熱比、 ϕ は真空磁場のスカラー・ポテンシャル、 ρ はプラズマの質量密度である。また、積分領域 P および V は、それぞれ、プラズマ中および真空中を意味する。スカラー・ポテンシャル ϕ はラプラス方程式、

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (3.5)$$

を満足し、境界条件として導体表面 C で

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right|_C = 0, \quad (3.6)$$

プラズマ表面Sで

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right|_S = [\nabla \times (\boldsymbol{\epsilon} \times \mathbf{B})] \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad (3.7)$$

を満たす。スカラー・ポテンシャルを使った真空磁場の表現法には、膨張や収縮を伴う変動が含まれていない。このため、解析結果がより不安定な結果を与える可能性がある。この点に関しては4.6で解析をする。

ERATOコードでは、ポロイダル断面内に (ψ, χ) 座標を設定して解析を行う。ここで、 ψ は磁気面を基礎とする座標で χ は磁気軸のまわりの角度変数である。 χ は、トーラス外側の中心面上($r < R, z = 0$)を原点($\chi = 0$)とし、この解析では次のように定義する。

$$d\chi \equiv \frac{T(\psi) d\ell}{q(\psi) r |\nabla \psi|} \quad (3.8)$$

ここで、 ℓ はポロイダル面内で磁気面に沿った弧長、 $q(\psi)$ は磁気面 ψ の安全係数である。系の固有振動数を ω とすれば、変位ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}$ は時間 t に関して $\exp(i\omega t)$ で変化することにより、

$$\boldsymbol{\epsilon}(\psi, \chi, \varphi, t) = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\psi, \chi) \exp(i\omega t + in\varphi), \quad (3.9)$$

と書ける。ここで、 n はトロイダル・モード数で位置不安定性については $n = 0$ である。よって、(3.1)式は、

$$\delta W_p + \delta W_v - \omega^2 \delta W_K = 0, \quad (3.10)$$

となり、問題は ω^2 を固有値とする固有値問題：

$$\hat{\mathbf{A}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \omega^2 \hat{\mathbf{B}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (3.11)$$

を解くことに帰着する。 $\omega^2 < 0$ は不安定性を表わし、 $\Gamma = \sqrt{-\omega^2}$ が不安定性成長率になる。ERATOコードでは、変位 $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ を有限要素近似(厳密には混成有限要素法¹²⁾による近似)して行列の固有値問題：

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x} = \omega^2 \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{x}, \quad (3.12)$$

に帰着して数値的に固有値を求めている。位置不安定性解析の際の重要なパラメータの1つである導電性シェルの位置は次式で与えられる(図1)。

$$\rho_w = \rho_p + (R_{ext} - 1) r_p, \quad (3.13)$$

ここで、 ρ_p はプラズマ中心からシェルまでの径線上のプラズマ表面の位置で、 R_{ext} はシェル半径をきめるためのパラメータである。

ERATOによって求められた固有値 ω_N^2 は、混成有限要素法の効果によって、使用したメッシュ数 N (N_p または N_z)に関して自乗収束する¹³⁾。図2に、 $E = 1.5$ 、 $d = 0$ 、 $q_0 = 1$ 、 $A = 3$ 、 $R_{ext} = 3$ の場合について軸対称モードの固有値の収束例を示す。周波数 ω はアルフヴェン

周波数 $\omega_A (= B_T^2 / \mu_0 \rho R^2)$ で規格, また, 横軸は $N = N_\phi = N_r$ ととり $1/N^2$ 尺度で表示してある。この図より, 軸対称モードについても自乗収束は明らかである。

4. 解析結果

4.1 導電シェルの安定化効果

プラズマ断面の形状パラメータ E および d の種々の値に対して, 自乗成長率 ($-\omega^2$) の導電シェル半径 R_{ext} 依存性を図 3 ~ 図 5 に示す。それぞれの図は同一の三角形度パラメータ d についてまとめたもので, $d = 0.6$ (図 3) は楕円断面, $d = -0.2$ (図 4) は D 形断面, $d = 1.5$ (図 5) は逆 D 形断面の典型的な例となっている。一般に, 円に近い断面形状の方が安定であるが, 不安定領域では D 形断面プラズマの方が縦長楕円断面のプラズマよりも高い成長率を持つ。これらのデータから位置不安定性の安定化に必要なシェル半径 R_{ext} の最大値 λ_c の楕円度パラメータ E に対する依存性をまとめたものが図 6 である。この図より, 通常興味のある楕円度 ($E \leq 1.8$) に対してはプラズマ小半径の 2 倍程度の半径に置かれた導電シェルによって位置不安定性が安定化されることがわかる。

4.2 シェルの無い場合の成長率

シェルを置かない場合 ($R_{ext} = \infty$) の不安定性成長率の E , d , q_0 および A に対する依存性について調べた。

図 7 は, 三角形度パラメータ d の異なるプラズマ ($d = -0.2, 0.6, 1.5$) の位置不安定性成長率の楕円度パラメータ E に対する依存性を, $A = 3$, $q_0 = 1$ のプラズマについて示したものである。この図によれば, 逆 D 形のプラズマの不安定性成長率が最も高いことがわかる。なお, $d = 1.5$ で $E < \sqrt{0.5}$ の平衡は存在しない ((2.10) 式)。

図 8 は, 異なる楕円度を持つ縦長楕円プラズマの不安定性成長率の三角形度パラメータ d に対する依存性を示す。一般に, 大きな楕円度の場合には逆 D 形から D 形に移行するに従って成長率が減少する傾向にあるが, 小さな楕円度の場合には円に近いパラメータで安定領域が観測される。図 9 は, 同様の依存性を横長楕円について示したものである。この場合には, D 形, 逆 D 形いずれについても不安定性成長率は高く, 円に近いパラメータで成長率が低くなっている。

図 10 および図 11 は, それぞれ, 縦長楕円および横長楕円プラズマの場合の不安定性成長率と磁気軸の安全係数 q_0 (この場合, プラズマ表面の安全係数に比例) との関係を示したものである。縦長楕円の場合には, 成長率は, 良い精度で q_0 に逆比例し, 横長楕円の場合にも, 成長率は, ほぼ q_0 に逆比例することがわかる。

図 12 および図 13 は, それぞれ, $E = 1.5$ および 0.8 の場合の成長率のアスペクト比 A 依存性を示したものである。ここで $q_0 = 1$ である。 $E = 1.5$, $d = 0.9$ の場合を除き, A と共に

成長率が増加する傾向が見られる。

4.3 変位分布

図14および図15に、それぞれ、縦長断面 ($E = 1.25$) および横長断面 ($E = 0.8$) の場合の変位分布を $d = -0.2, 0.46, 1.5$ について図示する。ここで、 $A = 3, R_{ext} = \infty, q_0 = 1$ である。縦長断面の場合には、楕円形 ($d = 0.46$) で垂直方向に、ほぼ一様な剛体変位的パターンを得る (図14(b))。この場合、D形 ($d = -0.2$, 図14(a)) についても、ほぼ一様な変位パターンを得るが、楕円の場合に比べるとトラス外側の変位が内側に比べてやや小さい。逆D形 ($d = 1.5$, 図14(c)) についてはプラズマ周辺部の変位の向きが顕著に変化しているのが見られ、全体的に変位は剛体的でなくなる。横長断面の場合にも、楕円形 ($d = 0.46$) では、水平方向にほぼ一様な変位を得る (図15(b))。D形および逆D形で変位が剛体的でなくなるのは縦長断面の場合と同様である。

変位成分の動径方向の変化を見れば、プラズマ形状の影響がより明確になる $E = 1.25, A = 3, R_{ext} = \infty, q_0 = 1$ の場合の ξ_ϕ 分布および $E = 0.8, A = 3, R_{ext} = \infty, q_0 = 1$ の場合の ξ_x 分布をプラズマ断面上下方向 ($\chi = \pi/2$ 曲線) について、それぞれ、図16および図17に図示する。いずれの場合についても楕円断面 ($d = 0.46$) ではほぼ一様な変位を示し剛体的なモデルが適用可能であるが、D形あるいは逆D形の断面ではプラズマ周辺部に比べて磁気軸近傍の変位が小さく剛体的なモデルの適用限界を示唆している。

4.4 安定領域

シエルの無い場合 ($R_{ext} = \infty$) の $q_0 = 1$ の Solov'ev 平衡についての位置不安定性の安定領域をパラメータ空間 $E-d$ の中でまとめたものが図18である。アスペクト比 $A = 3, 5, 10$ の各曲線の内側が安定領域となる。この図を、楕円度 e -三角形度 δ ($= (R_M - r_1)/r_p, r_1$: プラズマ断面頂点の r 座標) 空間に変換したものが図19である。三角形度 δ はアスペクト比 A および三角形度パラメータ d によって定まるが、楕円度 e はアスペクト比 A , 楕円度パラメータ E , および三角形度パラメータ d によって定まることに注意しなければならない。パラメータ A, E, D と e, δ との関係は、いずれの図においても左側がD形、右側が逆D形断面の平衡を表わす。各曲線の左右両端の尖端部は変位モードの転換点であり、これらの点より上側は垂直変位に対する安定限界、下側は水平変位に対する安定限界を与える。安定領域は、アスペクト比 A が小さい程広く、太いプラズマがより安定であることを示している。

剛体モデルによると、外部磁場の減衰指数 n_1 が (1.2) 式を満たす時、その平衡は位置不安定性に対して安定である。この条件の妥当性を検証するために Solov'ev 平衡を成立させるための外部磁場を計算し、減衰指数を求めて、 $n_1 = 0$ および $n_1 = 1.5$ の曲線を図18, 図19に併せて図示してある。また、縦長楕円断面プラズマに対する垂直位置不安定性の安定限界楕円度 e_c についても図19上に白丸で示してある。これらの結果は、三角形度が小さい場合には、計算精度の範囲内で良い一致を示しており、剛体モデルによって与えられる安定限界は楕円断面

プラズマの安定限界の良いいやすを与えると結論できる。

4.5 剛体的変位モデルとの比較

剛体的変位モデルによる垂直変位の安定性を調べるため、付録に示す安定条件（(A-10)式）を数値的に評価した。図20に、アスペクト比 $A=3$ 、5および10の場合の垂直変位の安定限界を剛体的変位モデルによる解析結果とERATOによる解析結果について図示してある。ここで、 $R_{ext} = \infty$ 、 $q_0 = 1$ である。これらの解析結果の間の顕著な差は、ERATOの結果ではD形および逆D形で精円形断面の場合より不安定になるのに対して剛体的変位モデルではD形および逆D形の方が精円断面よりも安定になることである。これは、既に、Bernard等によって $A=3$ の場合について指摘されたことであるが⁶⁾、 $A=5$ 、10の平衡についてもほぼ同様の結果が得られた。このような三角形度依存性においては、ERATOの結果と表皮電流モデルによる解析結果とよく一致し⁵⁾、断面変形の大きな平衡の場合には剛体的なモデルを適用することは疑問である。

4.6 $n=0/m=0$ モードの影響

第3章で述べたように、この解析では真空磁場はスカラー・ポテンシャル法（グリーン関数法）によって扱っている。ERATO-Jには、他にベクトル・ポテンシャル法による版がある¹⁾が、本解析では用いていない。スカラー・ポテンシャル法によるコードでは、 $n=0/m=0$ の等方的変位を表現できないため、真空磁場の $n=0/m=0$ の寄与は解析にとりいれられていない。この項は垂直変位に対しては影響を与えないが、水平変位はプラズマの膨張・収縮を伴うために横長断面の平衡を考える時には、この項の評価を行う必要がある。 $n=0/m=0$ の真空磁場の項は位置不安定性の安定化に寄与するので、この項を無視した本解析はより不安定な結果を与えている可能性がある。

$n=0$ 軸対称変位における主要ポロイダル・モード数は $m=1$ である。そこで、プラズマ変位の ϕ 方向成分 ξ_ϕ の $m=1$ 成分を1とした時の $m=0$ 成分の大きさを各等 ϕ 面上で平均した値の最大値およびそれらの量の ϕ 平均値を横長断面平衡の代表的な場合について表1に示す。 $m=0$ 成分は、D形断面で大きく、逆D形断面で小さいことがわかる。また、この $m=0$ 成分の割合は最大でもせいぜい2~3%であって、この項を無視したことは本解析の結果に大きな影響は与えていないものと考えられる。 $n=0/m=0$ 成分は本質的に圧縮性モードであり、この成分の寄与が小さいことと、表皮電流モデルと流体モデルの傾向が良く一致することは、軸対称モードが非圧縮性モードでかなり良く近似されることを示唆している。

5. ま と め

Solov'ev平衡の位置不安定性についてERATOコードを用いて計算を行い、主として、プラズマ形状と位置不安定性の関係について解析した。まず第1に、導電壁の安定化効果を調べ、通常興味のある楕円度の範囲内ではプラズマ表面からプラズマ半径程度離れた位置に置かれた導電性のシェルによって位置不安定性は完全に安定化されることを示した。次に、プラズマ断面形状を楕円度と三角形度で整理して縦長断面および横長断面平衡について安定領域を求めた。この結果、逆D形および極端に三角形度の強いD形は不安定で、楕円形に近い断面の平衡で安定性の高いことが示された。

剛体モデルによる解析結果との比較を行い、剛体モデルによる平衡外部磁場の減衰指数 n_i についての安定条件は楕円断面に近い平衡では良い近似になっていることが示された。また、縦長断面について一様な垂直変位を仮定して変分原理に基づく解析を行う剛体的変位モデルは、位置不安定性の三角形度の効果に関してERATOの解析と逆の傾向を与えることが明らかにされた。

水平方向位置不安定性の解析については、本報告書の計算は真空磁場の $m=0$ 成分の効果を無視しているが、この影響が小さいことが各フーリエ成分の比較より確認された。

Solov'ev平衡においては、通常の炉心プラズマで考えられている範囲の楕円度、三角形度 ($0.7 \leq e \leq 1.8$, $|\delta| \leq 0.3$) では、プラズマ表面の局所的な曲率はそれ程大きくならない。そのため、本報告書で示したように、実用的に興味ある範囲のプラズマ形状では、プラズマの平均半径の2倍以内に導電シェルがあれば軸対称モードは完全に安定化される。ところが、セバトリックスがプラズマ表面付近にある場合のように局所的に表面の曲率が大きくなると、Solov'ev平衡で楕円度や三角形度が極端に大きな場合に見られたように局所の変位が成長しやすくなりシェルが近くにあっても不安定になる危険性がある。このような平衡群についての解析は今後の課題である。また、線形理論で不安定であっても非線形発展の結果新たな安定平衡に到達できる可能性も残されている。この研究も今後に残された課題である。

謝 辞

理論解析研究室の方々には有益な議論と助言を頂きました。ここに記して感謝にかえます。また、本研究遂行に当り終始御激励下さった小幡行雄核融合研究部長、田中正俊核融合研究部次長に感謝いたします。

参考文献

- 1) V. S. Mukhovátov, V. D. Shafranov, Nucl. Fusion 11 (1971) 605.
- 2) L. E. Zakharov, Sov. Phys. Tech. Phys. 16 (1971) 645.
- 3) J. A. Wesson, Nucl. Fusion 18 (1978) 87.
- 4) E. Rebhan, Nucl. Fusion 15 (1975) 277.
- 5) E. Rebhan, A. Salat, Nucl. Fusion 16 (1976) 805.
- 6) L. C. Bernard, D. Berger, R. Gruber, F. Troyon, Nucl. Fusion 18 (1978) 1331.
- 7) B. Lipschultz, S. C. Prager, A. M. M. Todd, J. DeLucia, Nucl. Fusion 20 (1980) 683.
- 8) S. Rousset, R. Schreiber, W. Kerner, W. Schneider, K. V. Roberts, Comput. Phys. Commun. 21 (1981) 323.
- 9) R. C. Grimm, J. M. Greene, J. L. Johnson, in Methods in Computational Physics, Vol. 16, (Academic Press, New York 1976) P 253.
- 10) 田中幸夫, 松浦俊彦, 竹田辰興, 安積正史, 徳田伸二, 常松俊秀, 栗田源一, 滝塚知典, "MHD安定性解析コード ERATO-J", JAERI-M 9040 (1980)。
- 11) 徳田伸二, 常松俊秀, 安積正史, 滝塚知典, 奈良岡賢逸, 竹田辰興, "改訂版ERATO-JによるMHD安定性解析", JAERI-M 9899 (1982)。
- 12) K. Appert, D. Berger, R. Gruber, J. Rappaz, J. Comput. Phys. 18 (1975) 284.
- 13) T. Takizuka, S. Tokuda, M. Azumi, T. Takeda, Comput. Phys. Commun. 23 (1981) 19.

付録 1 剛体的変位モデル

剛体的変位モデル⁴⁾によれば、プラズマの垂直変位

$$\xi = \zeta \mathbf{e}_z \quad (\text{A-1})$$

に伴う真空磁場の変動を

$$\delta \mathbf{B}_v = \zeta \mathbf{b}_\zeta \quad (\text{A-2})$$

とする時

$$y = (\mathbf{e}_\varphi \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{b}_\zeta \quad (\text{A-3})$$

について次の積分方程式が成り立つ ($\boldsymbol{\nu}$: プラズマ境界の法線ベクトル)。

$$y = \frac{1}{2\pi} \int K(\ell, \ell') y' d\ell' + \frac{1}{2\pi} \int L(\ell, \ell') \sigma' d\ell' \quad (\text{A-4})$$

ただし積分はプラズマ境界について行い、 K , L は次式で与えられる。

$$K(\ell, \ell') = \frac{4r'}{|\nabla\psi| r_0^3 (1-k^2)} \left\{ \left[\frac{\partial\psi}{\partial r} r + \frac{\partial\psi}{\partial z} (z-z') \right] E(k) - \frac{\partial\psi}{\partial r} r' \frac{1}{k^2} [(2-k^2) E(k) - 2(1-k^2) K(k)] \right\} \quad (\text{A-5})^*$$

$$L(\ell, \ell') = \frac{4}{|\nabla\psi| r_0^2 (1-k^2)} \left\{ \left[r \frac{\partial\psi}{\partial z} - (z-z') \frac{\partial\psi}{\partial r} \right] E(k) - \frac{r'}{k^2} \frac{\partial\psi}{\partial z} [(2-k^2) E(k) - 2(1-k^2) K(k)] \right\} \quad (\text{A-6})$$

$$\sigma = \frac{1}{|\nabla\psi|} \left[\frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial^2\psi}{\partial z \partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A-7})$$

$$K = \sqrt{\frac{4rr'}{(r+r')^2 + (z-z')^2}} \quad (\text{A-8})$$

*) 文献⁴⁾の(45)式に右辺第一項と第二項の係数が逆転している誤りがあり、正しくは(A-5)式になる。

$$r_0 = \frac{2}{k} \sqrt{r r'} \quad (\text{A-9})$$

エネルギー原理より安定条件は変数 y について

$$c_v = \oint \left\{ \frac{1}{r |\nabla \phi|} \left[-\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \right] + y \right\} \frac{\partial \phi}{\partial z} d\ell > 0 \quad (\text{A-10})$$

で与えられる。

付録2 Solov'ev 平衡の表面の楕円度と三角形度

本文で示したように、Solov'ev 平衡は

$$\phi = \frac{\phi_s}{a^2 R^2} \left[\frac{(1-d)r^2 + dR^2}{E^2} z^2 + \frac{(r^2 - R^2)^2}{4} \right], \quad (\text{A-11})$$

$$\phi_s = \frac{a^2 E T_0}{2 q_0 R}, \quad (\text{A-12})$$

$$R^2 = R_M^2 + r_p^2, \quad (\text{A-13})$$

$$a = \frac{R_M r_p}{R}, \quad (\text{A-14})$$

$$A = R_M / r_p, \quad (\text{A-15})$$

で与えられる。表面の楕円度 e と三角形度 δ は、対称面から最も離れた表面上の点を $(r_t, z_t > 0)$ とすると、

$$e = z_t / r_p, \quad (\text{A-16})$$

$$\delta = (R_M - r_t) / r_p, \quad (\text{A-17})$$

で定義される。

点 (r_t, z_t) は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad (\text{A-18})$$

$$\psi = \psi_0 \quad (\text{A-19})$$

を満足する点である。

(A-18)より、

$$\frac{2(1-d)}{E^2} z^2 + r^2 - R^2 = 0 \quad (\text{A-20})$$

(A-19)より、

$$a^2 R^2 E^4 = \left\{ (1-d)(r^2 - R^2) E^2 + R^2 E^2 \right\} z^2 + \frac{(r^2 - R^2)^2}{4} E^4 \quad (\text{A-21})$$

が得られ、(A-20)を(A-21)に代入すると、 z に関する複二次方程式が得られる。

$$(1-d)^2 z^4 - R^2 E^2 z^2 + a^2 R^2 E^4 = 0 \quad (\text{A-22})$$

この方程式には4個の解があるが、2つは $z \approx \pm aE$ 、もう2つは $z \approx \pm RE$ でこのうち前者が必要な解で、

$$z_1^2 = \frac{2a^2 E^2}{1 + \sqrt{1 - 4 \frac{a^2}{R^2} (1-d)^2}} \quad (\text{A-23})$$

で与えられる。(A-22)は $d=1$ の時、 $z_1^2 = a^2 E^2$ となるが、(A-23)はこの場合を含んでいる。(A-23)の分母の平方根の中が正である条件から磁気面が閉じる条件

$$d > 1 - \frac{R}{2a} \quad (\text{A-24})$$

が得られる。(A-23)を(A-20)に代入して

$$r_i^2 = R^2 \left\{ 1 - \frac{4 \frac{a^2}{R^2} (1-d)}{1 + \sqrt{1 - 4 \frac{a^2}{R^2} (1-d)^2}} \right\} \quad (\text{A-25})$$

が得られる。一方、(A-13)から(A-14)式を使って、 a/r_p 、 a/R は、それぞれアスペクト比 A の関数として、

$$a/r_p = A/\sqrt{A^2+1} \quad (\text{A-26})$$

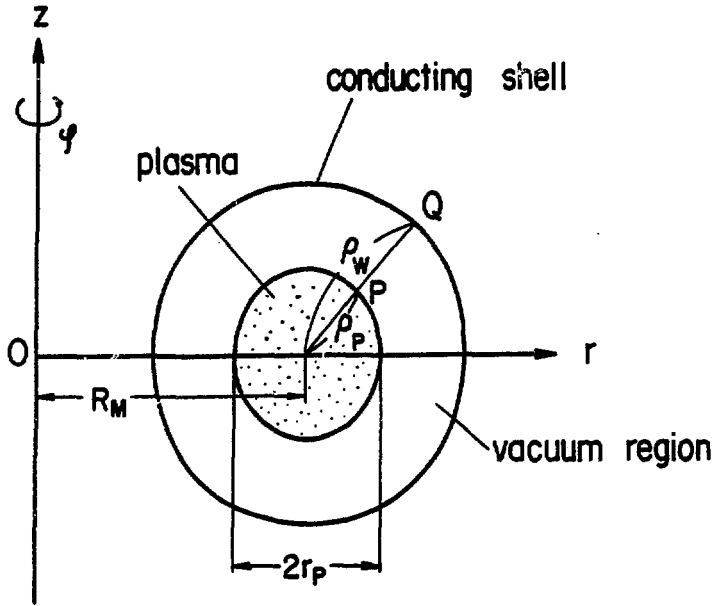
$$a/R = A/(A^2+1) \quad (\text{A-27})$$

となり、(A-16)、(A-17)で定義された楕円度、三角形度は、

$$e = \frac{a}{r_p} E \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4 \frac{a^2}{R^2} (1-d)^2}}} \quad (\text{A-28})$$

$$\delta = A - \sqrt{A^2 + 1} \sqrt{1 - \frac{4 \frac{a^2}{R^2} (1-d)}{1 + \sqrt{1 - 4 \frac{a^2}{R^2} (1-d)^2}}} \quad (\text{A-29})$$

となる。



$$PQ = (R_{ext} - 1) \cdot r_p$$

図1 プラズマと導電性シェルの幾何学的配位

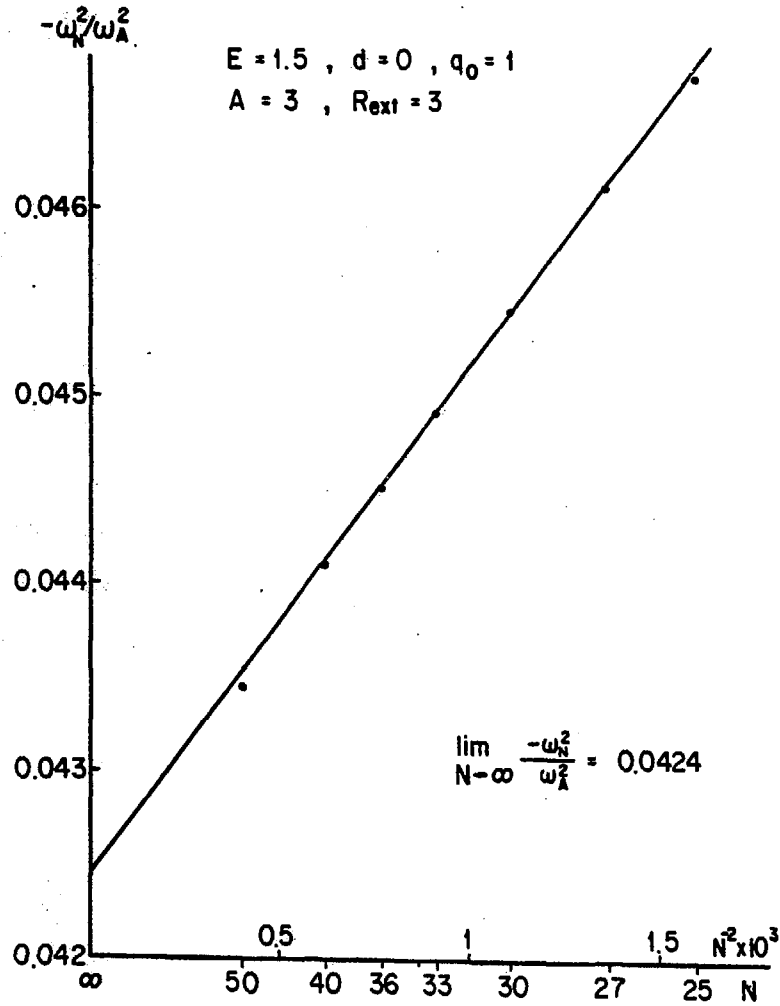


図2 不安定性成長率の自乗収束の例

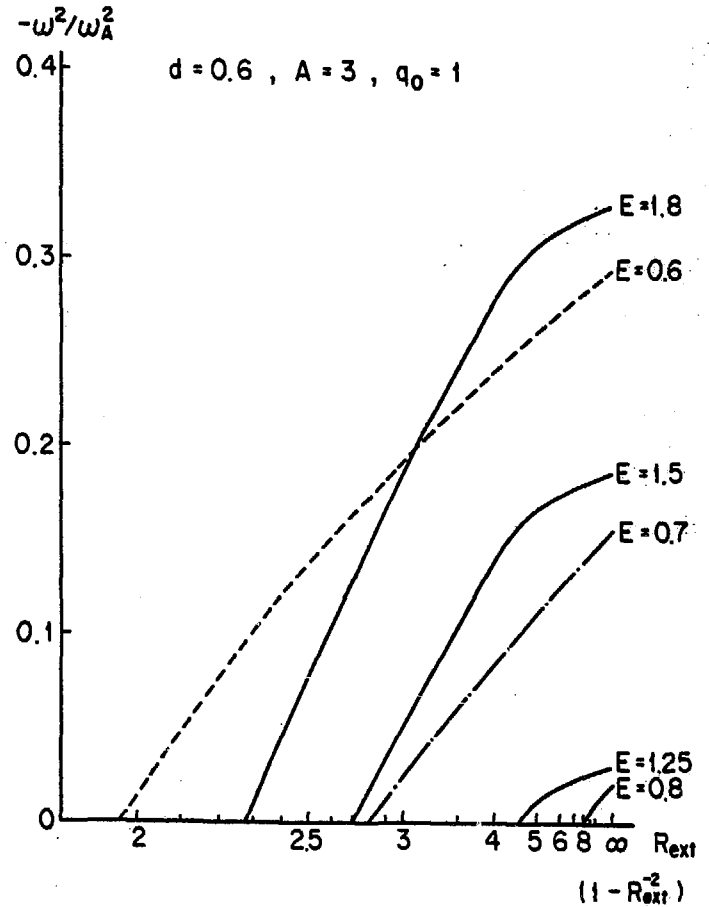


図3 不安定性成長率のシュル半径に対する依存性
 ($d = 0.6, A = 3, q_0 = 1$)

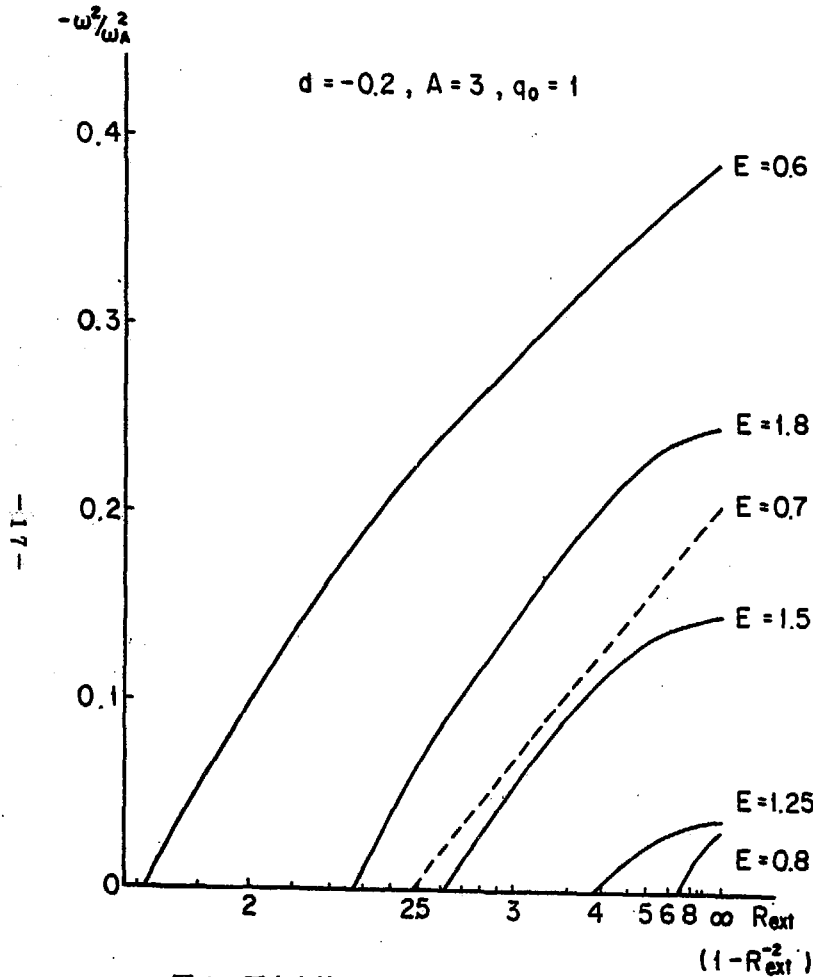


図4 不安定性成長率のシェル半径に対する依存性
($d = -0.2, A = 3, q_0 = 1$)

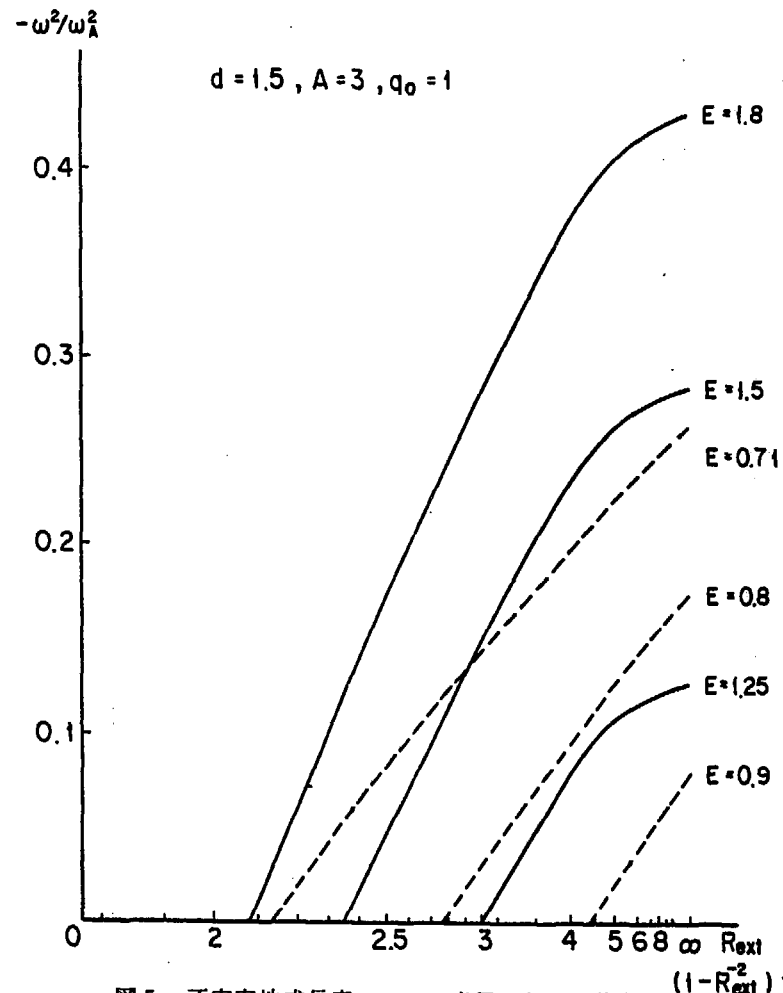


図5 不安定性成長率のシェル半径に対する依存性
($d = 1.5, A = 3, q_0 = 1$)

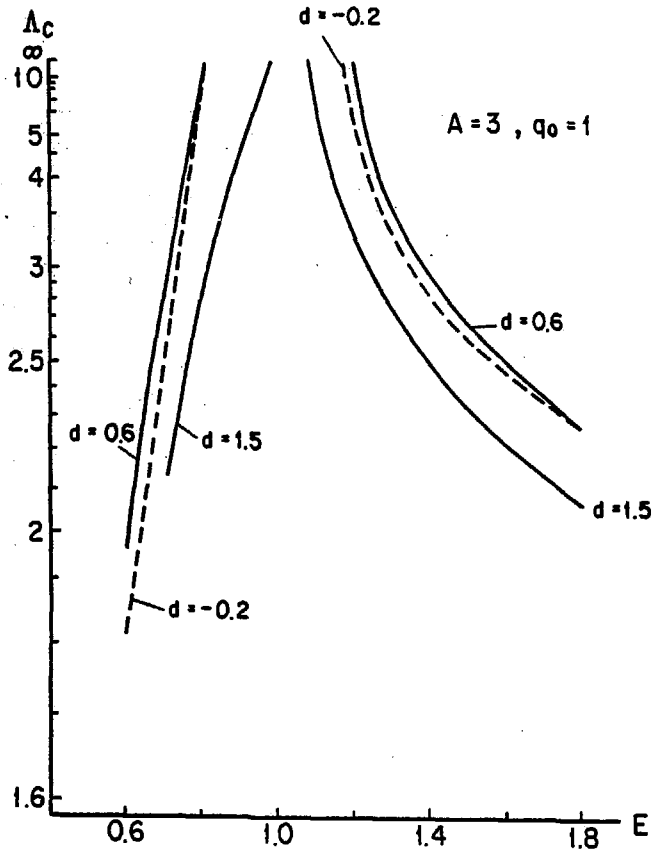


図6 安定化に必要な最大シェル半径 λ_c 対扁平度パラメータ E
($A=3, q_0=1$)

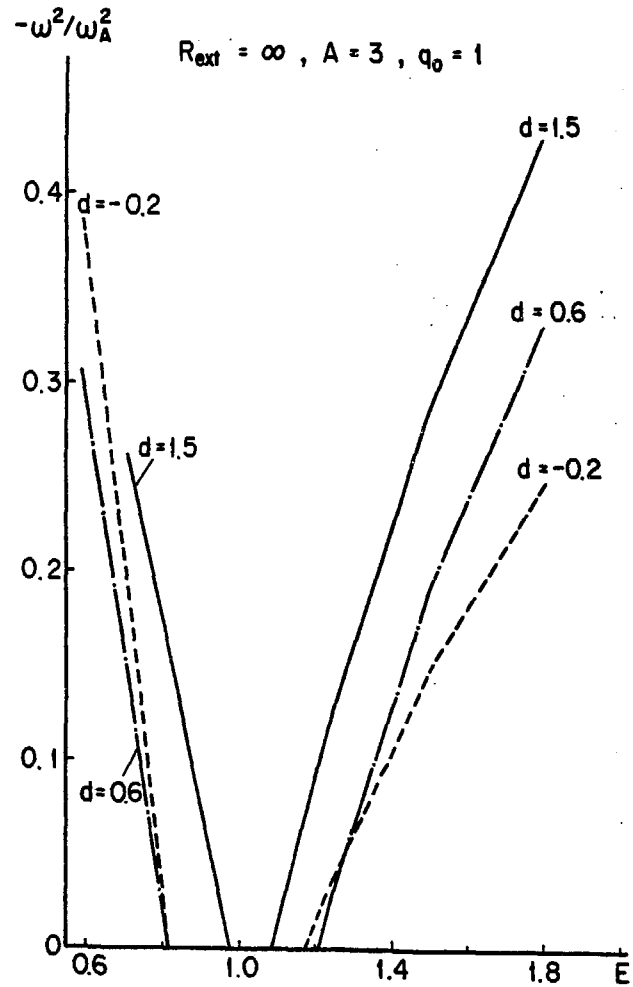


図7 不安定性成長率の扁平度パラメータ E 依存性
($R_{ext} = \infty, A=3, q_0=1$)

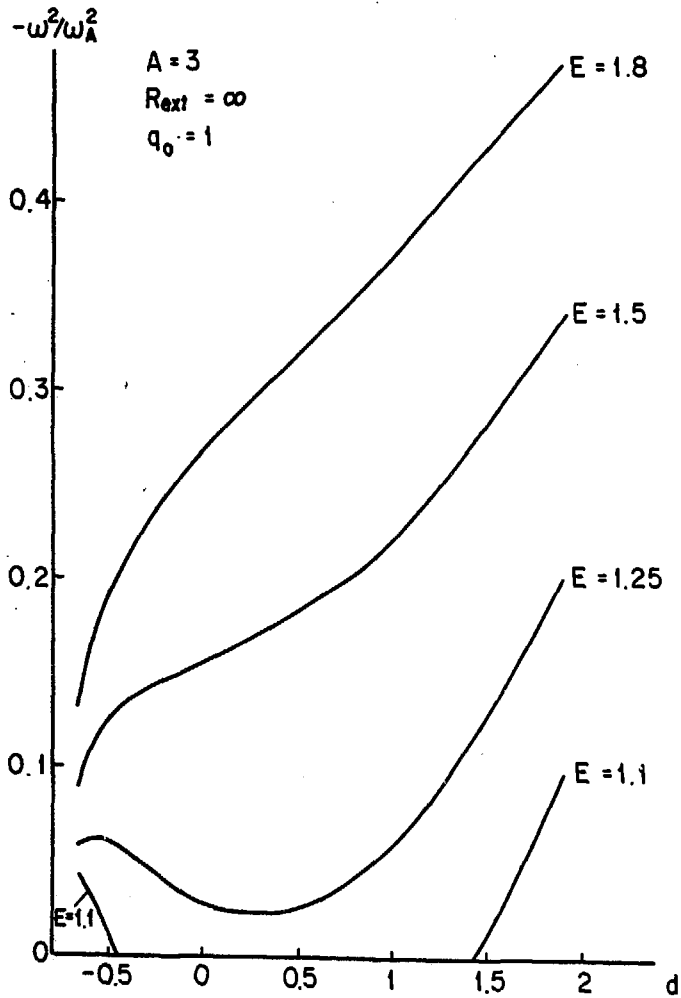


図8 縦長断面プラズマの不安定性成長率の三角形度パラメータ(d) 依存性 ($A=3$, $R_{ext} = \infty$, $q_0 = 1$)

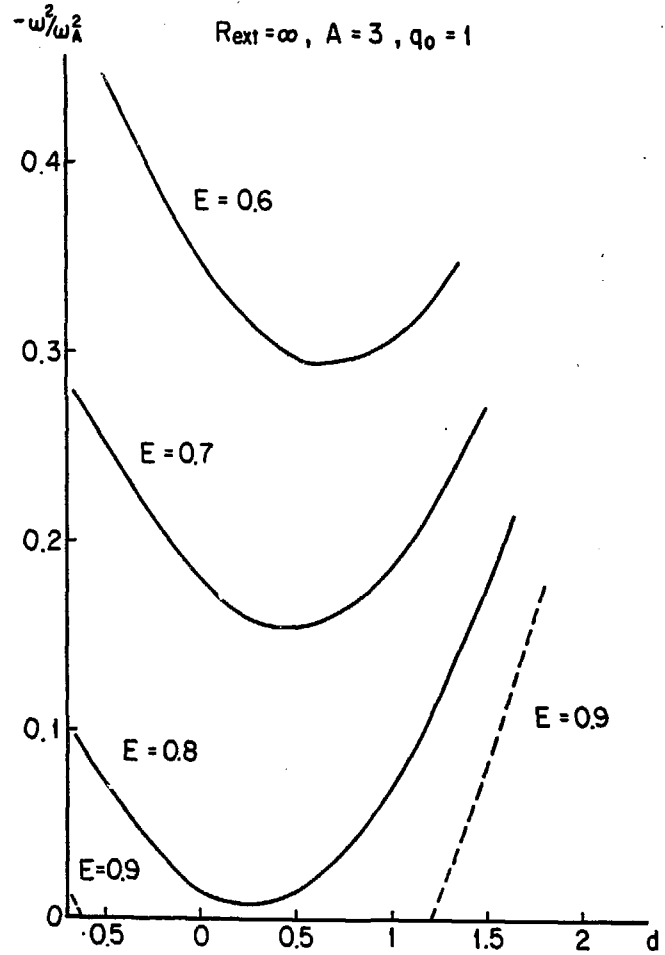


図9 横長断面プラズマの不安定性成長率の三角形度パラメータ(d) 依存性 ($A=3$, $R_{ext} = \infty$, $q_0 = 1$)

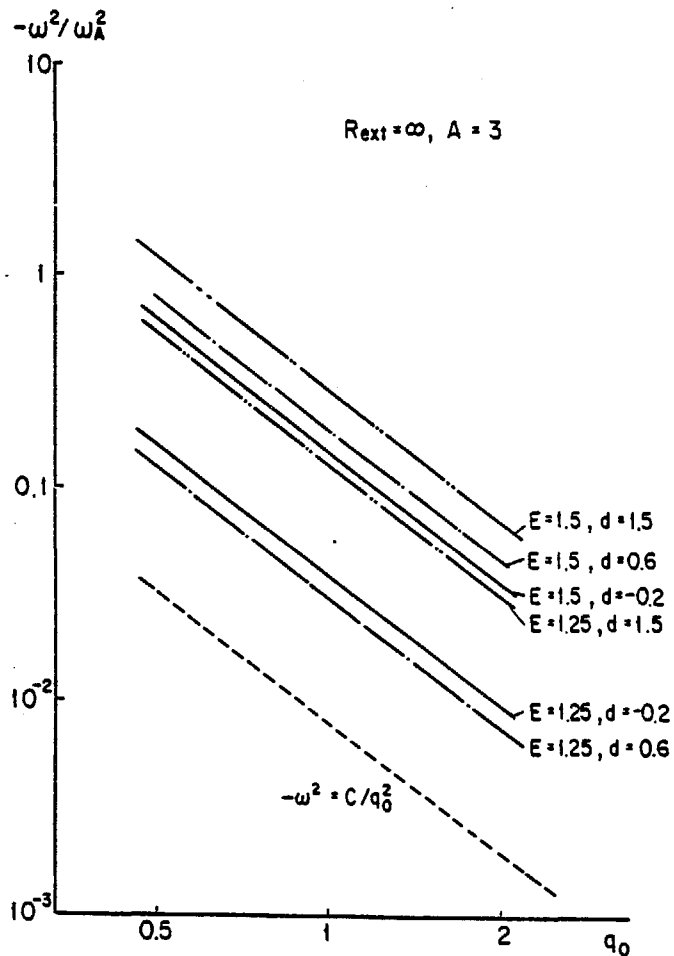


図10 不安定性成長率の磁気軸安全係数 (q_0) 依存性
($E > 1, R_{ext} = \infty, A = 3$)

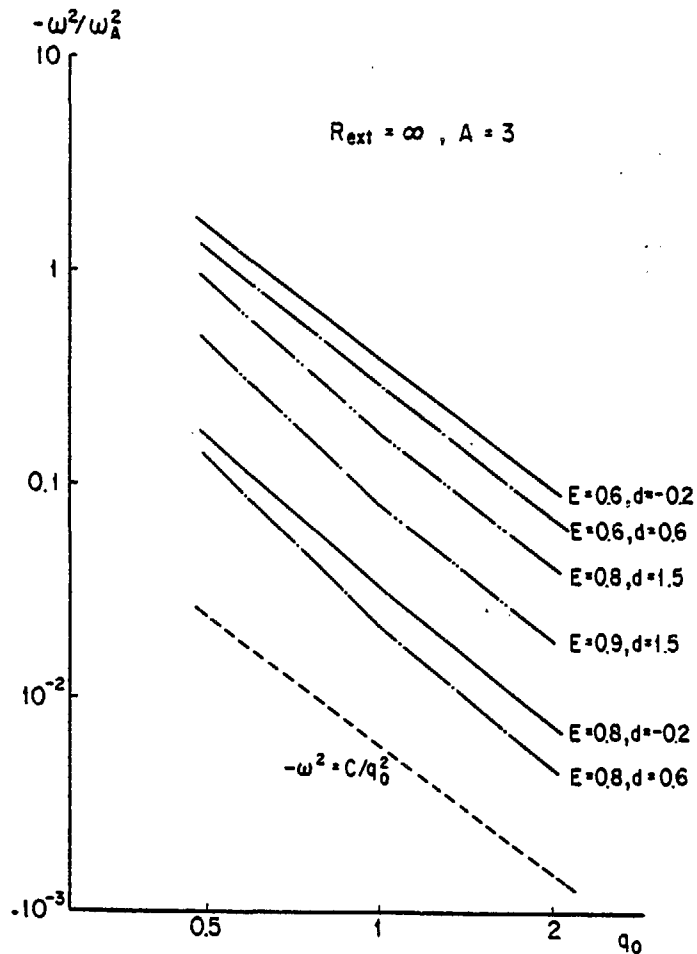


図11 不安定性成長率の磁気軸安全係数 (q_0) 依存性
($E < 1, R_{ext} = \infty, A = 3$)

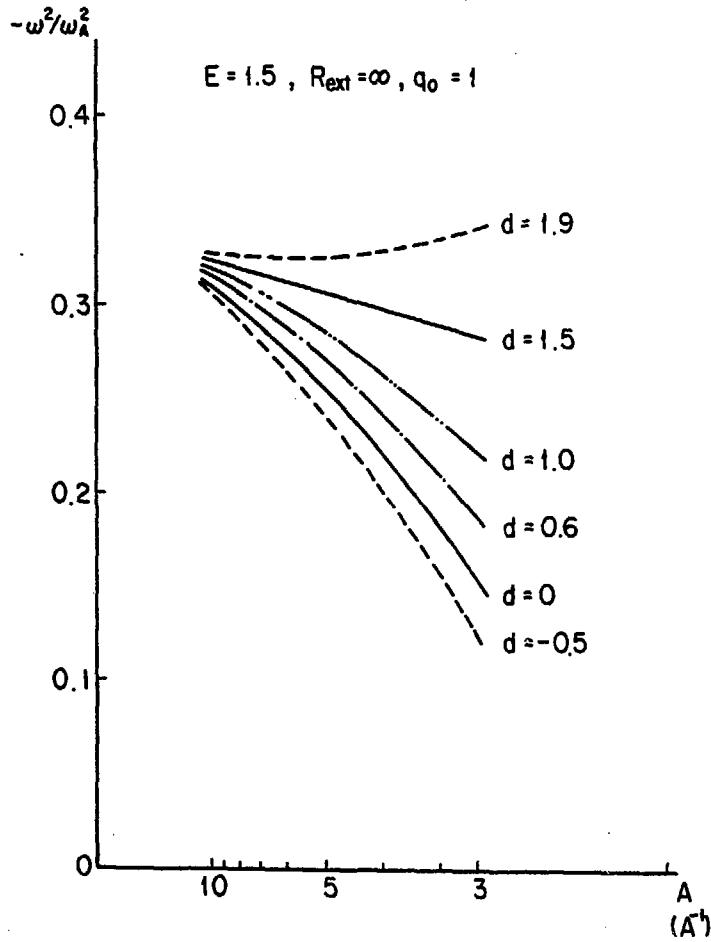


図 12 不安定性成長率のアスペクト比依存性
($E = 1.5, R_{ext} = \infty, q_0 = 1$)

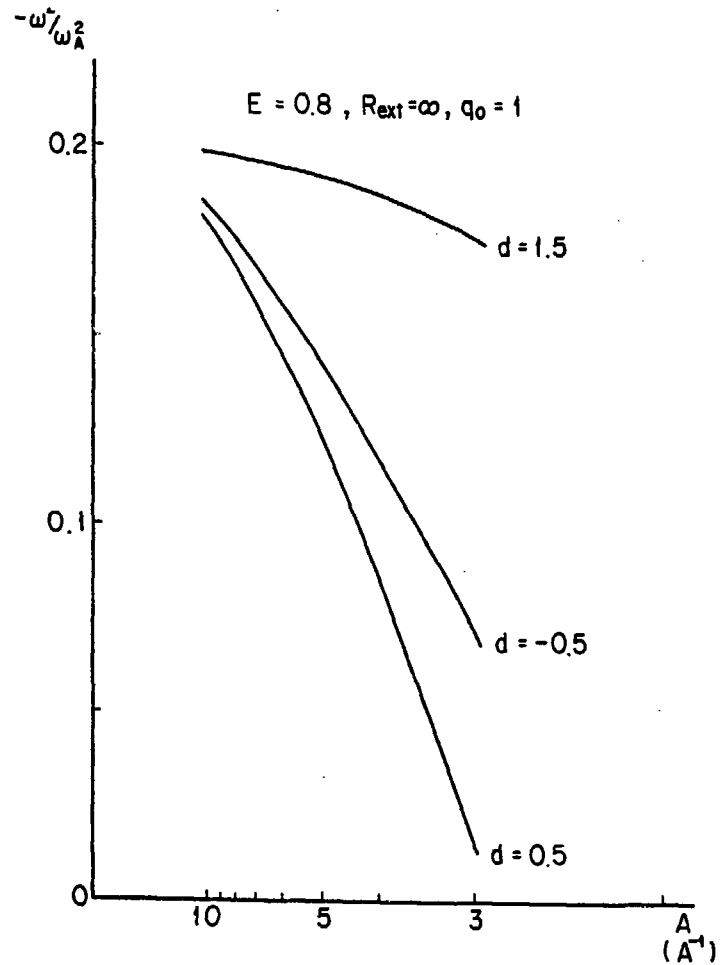
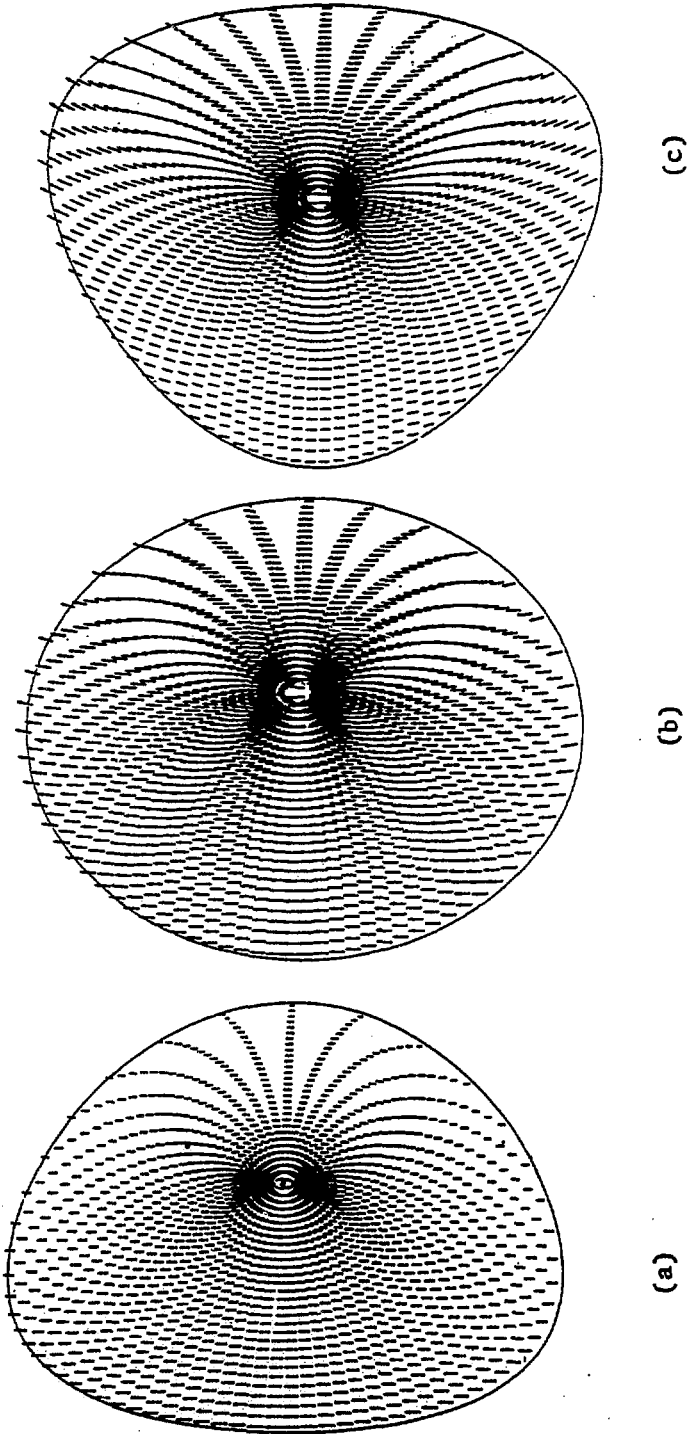


図 13 不安定性成長率のアスペクト比依存性
($E = 0.8, R_{ext} = \infty, q_0 = 1$)



(a) $d = -0.2, \beta_p = 1.08, q_s = 1.67$ (b) $d = 0.46, \beta_p = 0.81, q_s = 1.32$ (c) $d = 1.5, \beta_p = 0.39, q_s = 1.12$

図 14 垂直方向位置不安定性の変位分布図 ($E = 1.25, A = 3, R_{ext} = \infty, q_0 = 1$)

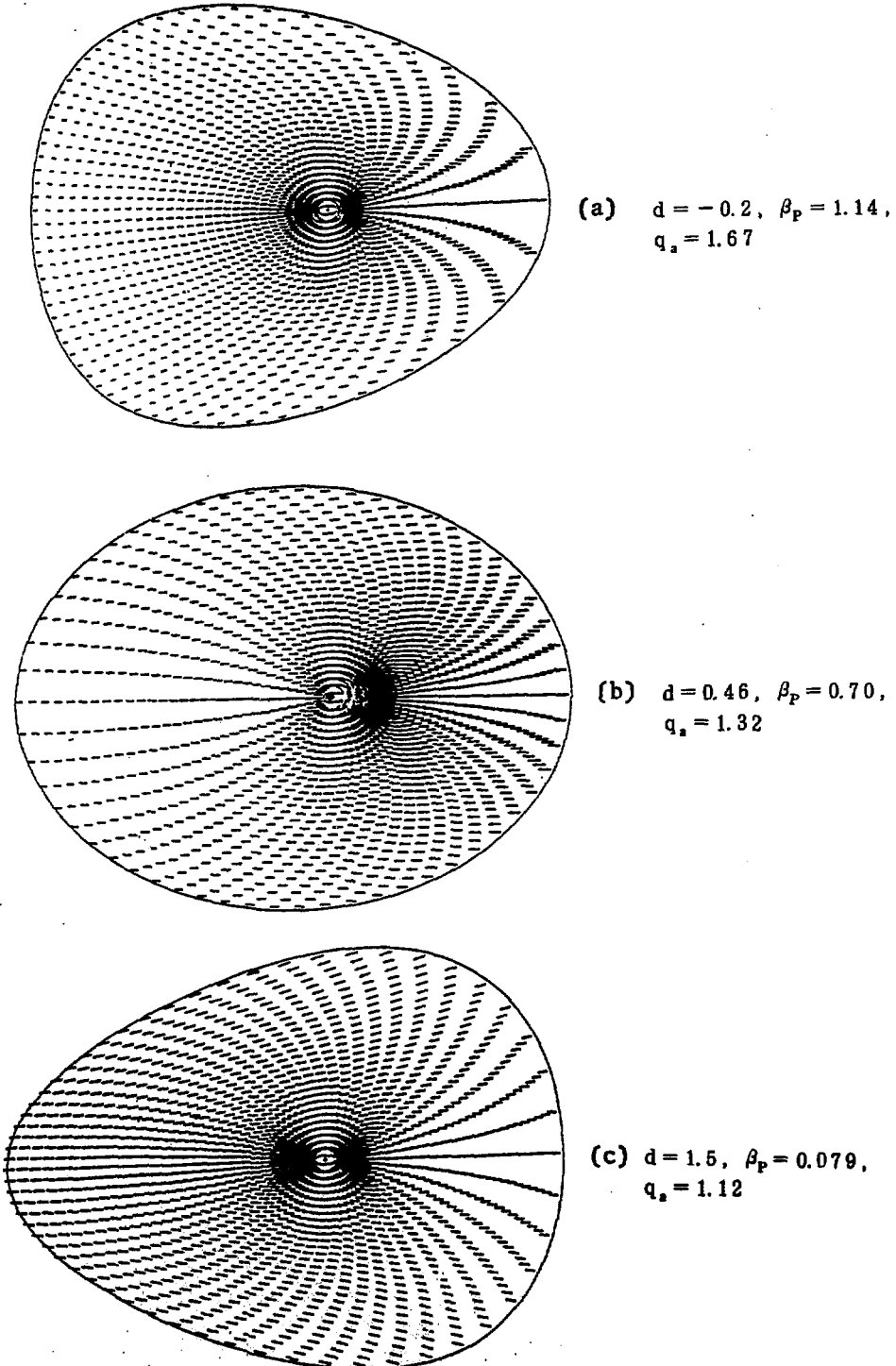


図 15 水平方向位置不安定性の変位分布図 ($E = 0.8, A = 3, R_{ext} = \infty, q_0 = 1$)

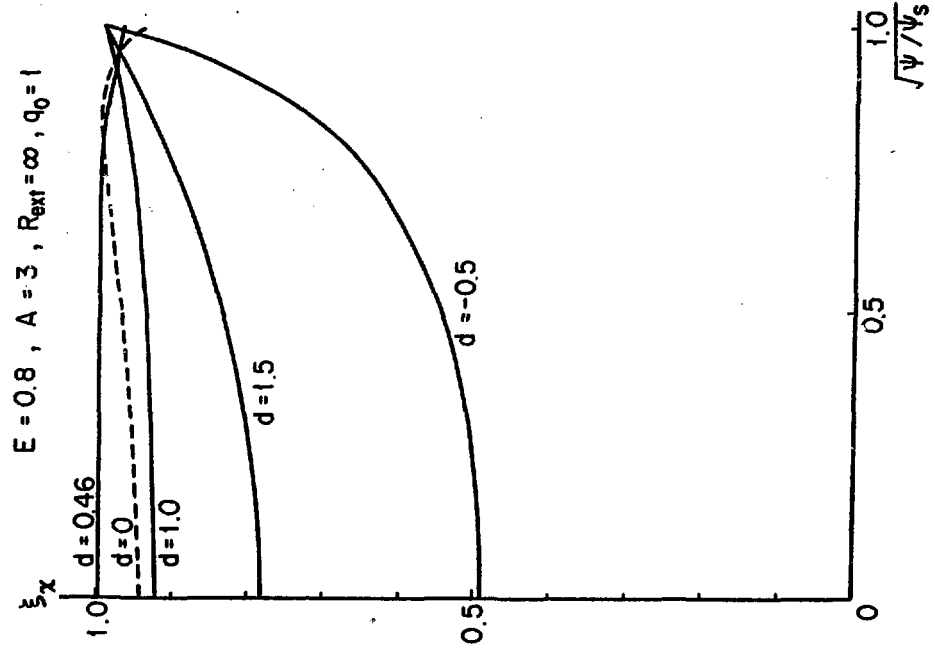


図 17 ξ_x の ψ 方向分布
 ($E = 0.8, A = 3, R_{ext} = \infty, q_0 = 1$)

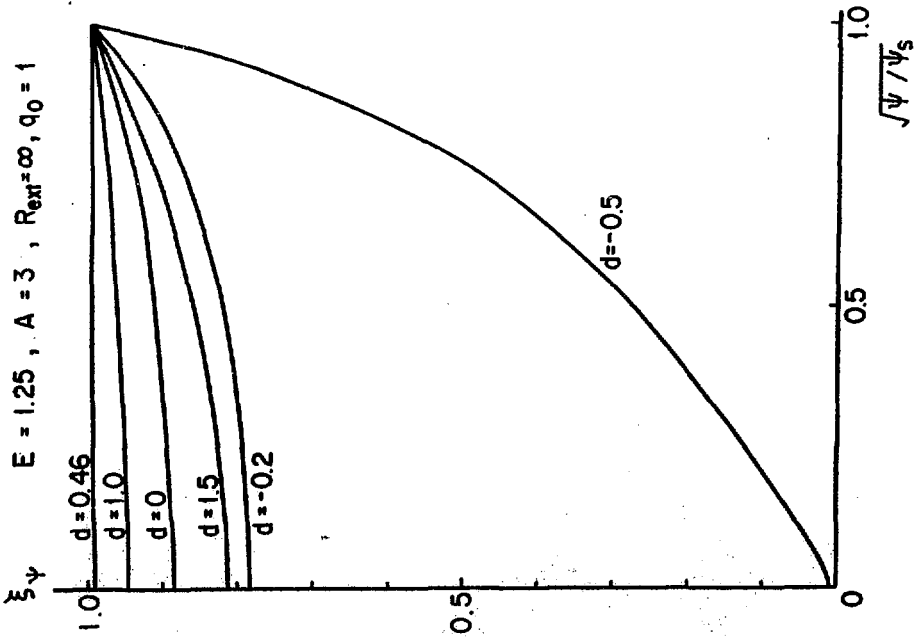


図 16 ξ_ϕ の ψ 方向分布
 ($E = 1.25, A = 3, R_{ext} = \infty, q_0 = 1$)

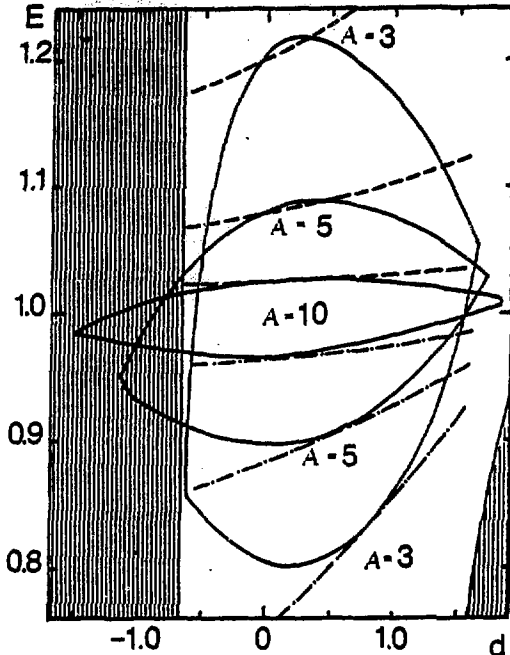


図18 Solov'ev平衡の安定領域(パラメータE対d, $R_{ext} = \infty$, $q_0 = 1$), 破線は減衰指数 $n_1 = 0.0$, 一点鎖線は $n_1 = 1.5$ を示す。また、ハッチしてある部分はA=3の平衡の無い領域を示す。

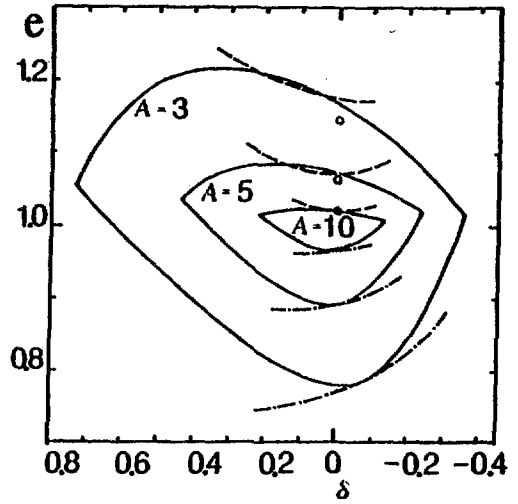


図19 Solov'ev平衡の安定領域(精円度e対三角形度 δ , $R_{ext} = \infty$, $q_0 = 1$), 破線は減衰指数 $n_1 = 0.0$, 一点鎖線は $n_1 = 1.5$ を示す。また白丸は(1.4)式から定まる垂直位置不安定性安定限界。

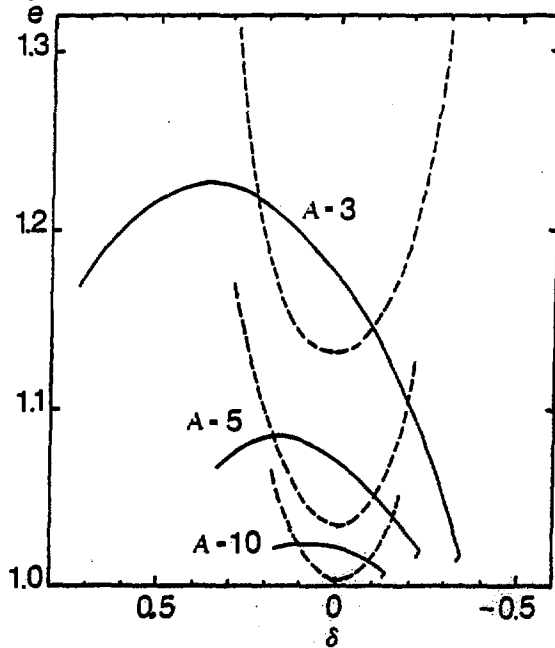


図20 剛体的変位モデル(破線)と一般的磁気流体モデル(実線)による安定限界の比較(精円度e対三角形度 δ , $R_{ext} = \infty$, $q_0 = 1$)

表1 横長プラズマにおける ϕ 方向変位 ξ_ϕ の $m=0$ 成分の $m=1$ 成分に対する割合
 ($R_{ext} = \infty$, $A = 3$, $q_0 = 1$)

ケース		m=0成分の割合	
E	d	最大値	平均値
0.8	-0.5	0.02	0.013
0.8	-0.2	0.02	0.012
0.8	0	0.02	0.010
0.8	0.46	0.02	0.007
0.8	0.6	0.02	0.007
0.8	1.0	0.02	0.004
0.8	1.5	0.02	0.003
0.71	1.5	0.01	0.002
0.7	-0.2	0.01	0.008
0.7	-0.6	0.01	0.005
0.6	-0.2	0.03	0.021
0.6	0	0.01	0.010
0.6	0.46	0.01	0.003
0.6	0.6	0.01	0.003