

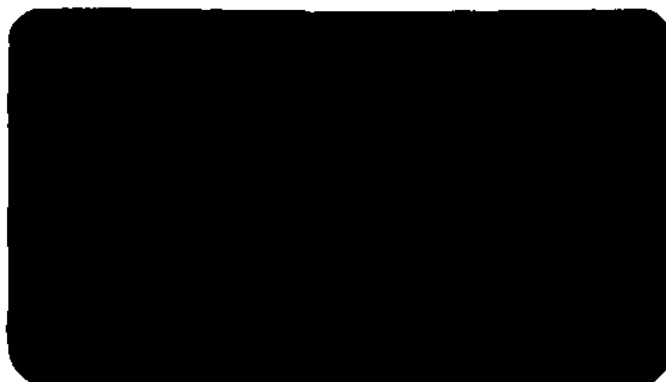
**Laboratório de
Computação
Científica**



RELATÓRIO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO

PEDIDOS DE CÓPIAS DEVEM SER ENVIADOS AO:
REQUEST FOR FREE COPIES SHOULD BE ADDRESSED TO:

Laboratório de Computação Científica
Biblioteca
Av. Wenceslau Braz, 71 – Fundos
CEP 22.290 – Rio de Janeiro – RJ
Brasil



ISSN 0101 6113

LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - LCC

JUNHO DE 1983

LCC -- 007/83

PRESSÃO LIMITE DE BOCAIS §

Néstor Zouain - PUC/RJ *

Raúl A. Feijóo - LCC/CNPq **

Edgardo Taroco - LCC/CNPq **

§ apresentado no II SIBRAT

* PUC/RJ

** LCC/CNPq

PRESSÃO LIMITE DE BOCAIS

NÉSTOR ZOUAIN

PUC/RJ

RAÚL A. FEIJÓO

LCC/CNPq

EDGARDO TAROCO

LCC/CNPq

SUMÁRIO

Apresenta-se neste trabalho uma descrição sucinta do Método Estático para a determinação das cargas de colapso numa estrutura de material elasto-plástico ideal. O emprego desta metodologia, conjuntamente com o Método dos Elementos Finitos na aproximação dos campos que intervêm no problema, conduz finalmente a um problema de minimização de uma função linear com restrições lineares. Por último é analisada em detalhe a aplicação desta técnica ao caso de cascas axissimétricas submetidas a carregamentos também axissimétricos, sendo que a aplicação numérica é feita para o caso de bocais encontrados freqüentemente na junção de tubulações em vasos de pressão.

RESUMO

Apresenta-se neste trabalho uma descrição sucinta do Método Estático para a determinação das cargas de colapso numa estrutura de material elasto-plástico ideal. O emprego desta metodologia, conjuntamente com o Método dos Elementos Finitos na aproximação dos campos que intervêm no problema, conduz finalmente a um problema de minimização de uma função linear com restrições lineares. Por último é analisada em detalhe a aplicação desta técnica ao caso de cascas axissimétricas submetidas a carregamentos também axissimétricos, sendo que a aplicação numérica é feita para o caso de bocais encontrados frequentemente na junção de tubulações em vasos de pressão.

ABSTRACT

The static method for the evaluation of the limit loads of a perfectly elasto-plastic structure is presented in this paper. Using the static theorem of Limit Analysis and the Finite Element Method, a lower bound for the colapso load can be obtained through a linear programming problem. This formulation is then applied to axially loaded shells of revolution and some numerical results of limit loads in nozzles are also presented.

1. Introdução

Um tipo de bocal encontrado freqüentemente na junção de tubulações (Figuras 7 e 8, [10]) em vasos de pressão é utilizado neste trabalho para mostrar a aplicação do critério de carga de colapso no cálculo de estruturas de comportamento elasto-plástico.

Quando se analisa uma peça constituída por um material cuja curva tensão-deformação apresenta um limite de escoamento para as tensões (plasticidade ideal) deve-se esperar que também as cargas sobre a peça estejam limitadas. Se este valor do carregamento, a carga limite, for atingido se produz o fenômeno de colapso plástico que provoca deformações plásticas ilimitadas, enquanto cargas e tensões permanecem constantes.

Duas formulações alternativas do problema permitem o cálculo da carga limite, sendo que uma delas envolve apenas esforços internos (método estático) enquanto a outra constitui uma descrição puramente cinemática, em velocidades de deslocamento, do problema (método cinemático) [12, 15, 3].

Por motivo da limitação de espaço somente o método estático é apresentado (sinteticamente) neste trabalho. No entanto na aplicação ao bocal são apresentados também os resultados numéricos obtidos pelo método cinemático, o qual é tratado no trabalho [1] deste Simpósio.

2. Formulação do Problema

O comportamento elasto-plástico de um material, ou também de um elemento de viga ou casca (e outros) pode ser representado [15] por equações envolvendo variáveis tensoriais que representam respectivamente:

- Q - tensões generalizadas,
- q - deformações generalizadas
- u - deslocamentos generalizados

O significado físico destas variáveis depende do problema que esteja sendo modelado. Por exemplo num problema uniaxial $Q = \sigma_x$, $q = \epsilon_x$; enquanto na análise de um sólido (continuo tridimensional) Q é um tensor de componentes σ_{ij} , e q outro tensor cujas componentes são as deformações ϵ_{ij} . Para a análise do bocal, e de outras cascas de revolução é conveniente definir (Figuras 1 e 2)

$$Q = [n_\phi \quad m_\phi \quad n_\theta \quad m_\theta]^T \quad (1)$$

COM

$$n_{\phi} = \frac{N_{\phi}}{N_0} \quad m_{\phi} = \frac{M_{\phi}}{M_0} \quad n_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{N_0} \quad m_{\theta} = \frac{M_{\theta}}{M_0} \quad (2)$$

$$q = [c_{\phi} \quad k_{\phi} \quad \epsilon_{\theta} \quad k_{\theta}]^T \quad (3)$$

COM

$$k_{\phi} = \frac{M_{\phi}}{N_0} K_{\phi} \quad k_{\theta} = \frac{M_{\theta}}{N_0} K_{\theta} \quad (4)$$

onde N_0 e M_0 são os esforços limites de escoamento em tração e flexão pura definidos mais adiante. Os esforços de tração meridional N_{ϕ} e circunferencial N_{θ} , assim como os momentos M_{ϕ} e M_{θ} são definidos na Figura 2. Finalmente c_{ϕ} , ϵ_{θ} , K_{ϕ} e K_{θ} são as deformações extensionais e de variação da curvatura correspondentes (Figura 1).

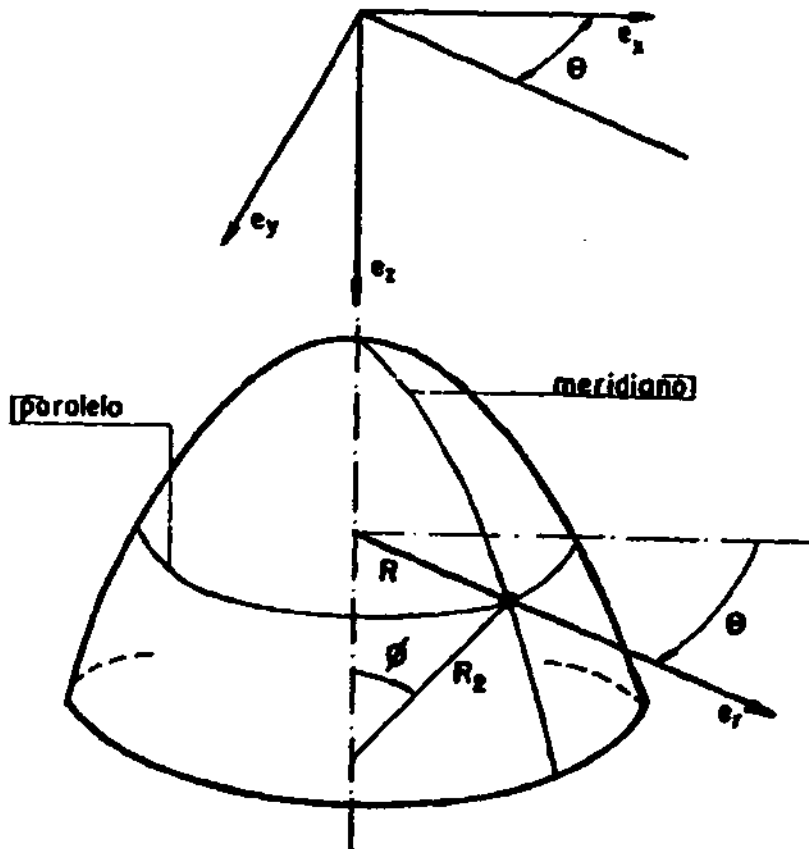


Figura 1 - Casca axissimétrica

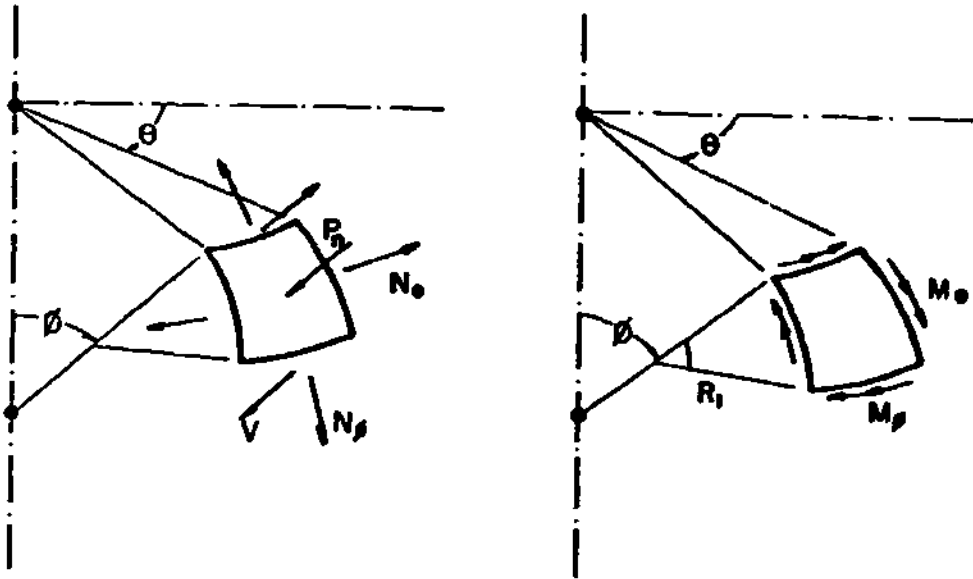


Figura 2 - Esforços na casca axissimétrica

2.1. Equação constitutiva

A relação entre deformações e tensões para um material elástico idealmente plástico [9, 15] deve ser escrita em função das taxas de variação de tensões \dot{Q} e deformações \dot{q} para descrever o comportamento irreversível, em carga e descarga, de um ponto material em estado (de tensões) plástico como mostra a Figura 3.

A relação constitutiva fica definida pelos três elementos seguintes

- i) Relação entre a tensão e a parte elástica da deformação

$$q^e = CQ \quad (5)$$

Esta é uma relação linear determinada pelo tensor C cujas com-

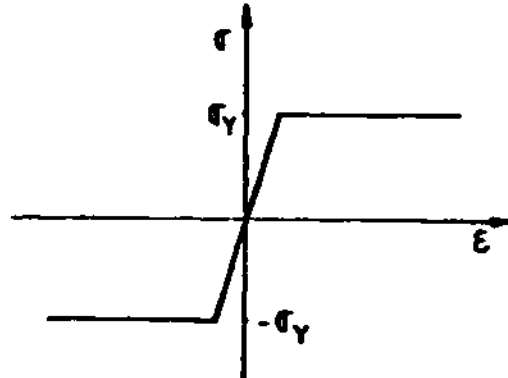


Figura 3 - Processo de carga plástica, e elástico de descarga

ponentes são as constantes elásticas do material ou do elemento de casca. Isto permite definir a parte plástica da deformação como

$$q^P = q - CQ \quad (6)$$

Para as taxas de deformação as relações são análogas

$$\dot{q}^e = C\dot{Q} \quad e \quad \dot{q}^P = \dot{q} - C\dot{Q} \quad (7)$$

ii) Critério de plasticidade

É definido por uma função D , convexa [14], do estado de tensões generalizado Q , que determina no espaço de tensões

$\phi(Q) < 0$ região elástica. É convexa e contém a origem.

$\phi(Q) = 0$ superfície de escoamento

$\phi(Q) > 0$ região inacessível

Por exemplo, na Figura 3 a região elástica é o segmento $(\sigma_Y, -\sigma_Y)$. Se um ponto do material apresenta tensões Q interiores à região elástica, o processo (de carga ou descarga) evolui com variações de deformação puramente elásticas. Taxas de deformação plásticas não nulas somente podem acontecer para tensões na superfície de escoamento.

iii) Lei de escoamento

Quando as variações de deformação plástica são possíveis, para $\phi(Q) = 0$, estas são normais à superfície de escoamento (lei associativa), isto é

$$\dot{q}^p = 0, \text{ para } Q \text{ na região elástica } \phi(Q) < 0 \quad (8)$$

$$\dot{q}^p = \lambda \phi_Q(Q), \text{ com } \lambda > 0, \text{ para } Q \text{ na superfície de escoamento } \phi(Q) = 0 \quad (9)$$

onde se denota ϕ_Q o gradiente da função ϕ (perpendicular a $\phi(Q) = 0$).

Por exemplo, para um contínuo tridimensional são bastante utilizados os critérios de escoamento de Mises ou de Tresca sendo este último definido por

$$\phi(Q) = \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_Y \leq 0 \quad (10)$$

onde σ_i, σ_j são tensões principais e σ_Y a tensão de escoamento em tração pura.

Para a casca de revolução dos exemplos de aplicação é conveniente adotar um modelo de casca sandwiche composta por um núcleo de espessura h' e duas membranas (Figura 4). As membranas suportam um estado plano de tensões, uniforme na espessura t de cada uma delas, cujas componentes principais são σ_ϕ^+ e σ_θ^+ para a membrana externa, e σ_ϕ^- e σ_θ^- para a interna, isto sempre que o carregamento também tenha simetria de revolução.

A relação entre tensões e resultantes de tensão na casca sandwiche é então

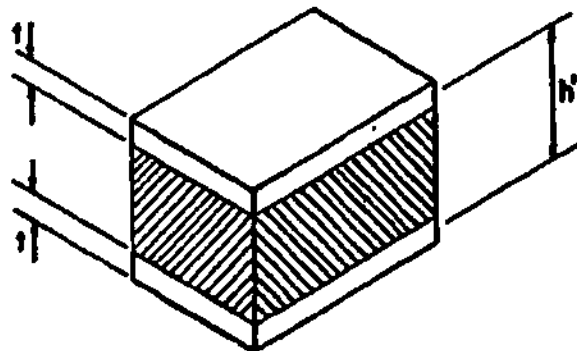


Figura 4 - Casca sandwiche

$$\begin{aligned}
 N_{\phi} &= t(\sigma_{\phi}^{+} + \sigma_{\phi}^{-}) & M_{\phi} &= \frac{t h'}{2} (\sigma_{\phi}^{-} - \sigma_{\phi}^{+}) \\
 N_{\theta} &= t(\sigma_{\theta}^{+} + \sigma_{\theta}^{-}) & M_{\theta} &= \frac{t h'}{2} (\sigma_{\theta}^{-} - \sigma_{\theta}^{+})
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

e os esforços limites em tração e flexão puras são

$$N_0 = 2 t \sigma_Y' \qquad M_0 = t h' \sigma_Y' \tag{12}$$

Invertendo o sistema (11) e utilizando (1) e (12) tem-se que

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\phi}^{+} &= \sigma_Y' (n_{\phi} - m_{\phi}) & \sigma_{\phi}^{-} &= \sigma_Y' (n_{\phi} + m_{\phi}) \\
 \sigma_{\theta}^{+} &= \sigma_Y' (n_{\theta} - m_{\theta}) & \sigma_{\theta}^{-} &= \sigma_Y' (n_{\theta} + m_{\theta})
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Substituindo estas expressões na equação (11) aplicada às membranas externa e interna, e desenvolvendo os valores absolutos nas desigualdades equivalentes, obtém-se a função de escoamento para a casca sandwiche de material tipo Tresca que resulta ser

$$\phi(Q) = N^T Q - R \leq 0 \tag{14}$$

onde Q é definido em (1) e N e R se encontram na Tabela 1.

Tabela 1 - Critério de escoamento $N^T Q \leq R$ para uma casca sandwiche tipo Tresca

Q^T	n_{ϕ}	m_{ϕ}	n_{θ}	m_{θ}	R	modo de escoamento
N^T	0	0	1	-1	1	1
	1	-1	0	0	1	2
	1	-1	-1	1	1	3
	0	0	-1	1	1	4
	-1	1	0	0	1	5
	-1	1	1	-1	1	6
	0	0	1	1	1	7
	1	1	0	0	1	8
	1	1	-1	-1	1	9
	0	0	-1	-1	1	10
	-1	-1	0	0	1	11
	-1	-1	1	1	1	12

O modelo de casca sandwiche pode ser considerado uma aproximação linear do comportamento de uma casca homogêna de espessura h e de material tipo Tresca com limite σ_Y , se os esforços limites em tração e flexão puras forem coincidentes, isto é, se

$$N_0 = 2 t \sigma_Y = h \sigma_Y \quad M_0 = t h' \sigma_Y = \frac{1}{4} h^2 \sigma_Y \quad (15)$$

A equação constitutiva definida pelas equações (5) a (9) pode ser escrita [2] na forma $\dot{Q} = \dot{Q}(Q, \dot{q})$ mediante

$$\dot{Q} = C^{-1} (\dot{q} - \dot{q}^P(Q, \dot{q})) \quad (16)$$

onde

$$\dot{q}^P = \lambda(Q, \dot{q}) \phi_Q(Q) \quad (17)$$

com

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{para } \left\{ \begin{array}{l} \phi(Q) < 0 \text{ tensão interior à região elástica} \\ \text{ou} \\ \phi(Q) = 0 \text{ e } C^{-1} \dot{q} \cdot \phi_Q < 0 \text{ tensão na superfície de escoamento, e processo de descarga local} \end{array} \right. \\ \frac{C^{-1} \dot{q} \cdot \phi_Q}{C^{-1} \phi_Q \cdot \phi_Q} & \text{para } \phi(Q) = 0 \text{ e } C^{-1} \dot{q} \cdot \phi_Q \geq 0 \text{ tensão na superfície de escoamento e processo de carga local} \end{cases} \quad (18)$$

A relação constitutiva $\dot{q} = \dot{q}(Q, \dot{Q})$ inversa da anterior, somente pode ser escrita em função do parâmetro indeterminado λ , como

$$\dot{q} = C\dot{Q} + \dot{q}^P(Q, \dot{Q}) \quad (19)$$

onde

$$\dot{q}^P = \lambda \phi_Q(Q) \quad (20)$$

com

$$\lambda \left\{ \begin{array}{l} = 0 \\ \geq 0 \end{array} \right. \text{ para } \left\{ \begin{array}{l} \phi(Q) < 0 \quad \text{tensão interior à região elástica} \\ \phi(Q) = 0 \text{ e } \dot{\phi} = \phi_Q \cdot \dot{Q} < 0 \quad \text{tensão na superfície de escoamento, e processo de descarga local} \\ \text{indeterminado, para } \phi(Q) = 0 \text{ e } \dot{\phi} = \phi_Q \cdot \dot{Q} = 0 \quad \text{tensão na superfície de coamento, e processo de carga local} \end{array} \right. \quad (21)$$

O caso $\dot{\phi} = 0$ e $\dot{\phi} = \phi_Q \cdot \dot{Q} > 0$ não é considerado na regra anterior pois não é admissível.

3. Colapso Plástico

Devido a que os esforços internos num material perfeitamente plástico não podem exceder o limite de escoamento em nenhum ponto, as cargas externas aplicadas sobre um corpo constituído de um material idealmente plástico não podem ser aumentadas indefinidamente. Quando as cargas alcançam um determinado valor crítico, a carga limite, se produz o colapso plástico que é um fenómeno de deformações indefinidamente crescentes sob carregamento constante. O corpo é incapaz de suportar (estaticamente) qualquer aumento posterior de carga. A distribuição de velocidades de deslocamento sob a carga crítica é chamada de mecanismo de colapso.

O colapso plástico pode acontecer ainda que em algumas regiões da peça, as tensões não tenham alcançado o limite de escoamento, isto é sejam elásticas. É necessário em consequência estabelecer quais as condições que permitem reconhecer um estado no qual alguns pontos ou regiões apresentam tensões no limite elástico mas a carga pode ser mantida neste nível sem provocar deformações indefinidamente crescentes, de um outro estado também apresentando regiões elásticas ou plásticas mas que não pode ser sustentado. Com este propósito estabelecem-se as definições a seguir.

Um campo de tensões Q se diz plasticamente admissível quando $\phi(Q) \leq 0$ para todos os pontos da estrutura. Analogamente, o campo Q é plasticamente seguro se $\phi(Q) < 0$, ou seja todo o corpo se encontra em estado elástico.

Um campo de tensões Q é estaticamente admissível (ou equilibrado) com uma carga P se satisfaz as condições de equilíbrio para este valor da carga.

Para um campo Q plasticamente admissível define-se o mecanismo de colapso associado, ou campo de velocidades puramente plásticas pa

ra Q , como o campo de velocidades \dot{u} que satisfaz

i) não é rígido, isto é, determina deformações não identicamente nulas;

ii) as taxas de deformação \dot{q} correspondentes (compatíveis) são puramente plásticas, ou seja

$$\dot{q} = \dot{q}^P(Q, \dot{q}) = \lambda(Q, \dot{q}) \phi_Q(Q) \quad \text{com } \lambda \text{ definido em (21).}$$

Não é sempre possível achar um campo de velocidades puramente plásticas para um determinado campo de tensões. Se uma distribuição de tensões tem um mecanismo de colapso associado este campo de tensões é de colapso (por definição).

Uma carga de colapso P é uma carga para a qual existe um campo de tensões de colapso equilibrado com esta.

Havendo formalizado a definição de carga limite e colapso plástico algumas conseqüências desta definição devem ser demonstradas, em primeiro lugar para verificar a consistência da própria definição, e também para enriquecer a compreensão do fenômeno físico. A seguir são enunciadas várias destas implicações omitindo a prova formal que pode ser encontrada na referência [2].

Um campo de colapso necessariamente satisfaz $\phi(Q) = 0$ em algum ponto do corpo. O recíproco é obviamente falso.

Se existe um campo de tensões de colapso Q equilibrado com uma carga P (de colapso) todo campo equilibrado com P e plasticamente admissível é de colapso. Em outras palavras, o corpo submetido à carga de colapso necessariamente sofre o colapso plástico.

Teorema estático da análise limite

a) O corpo é capaz de suportar cargas externas num programa de cargas $P(t)$, se for possível achar uma distribuição de tensões estáticamente admissível e segura ($\phi(Q) < 0$ em todo ponto), em cada estágio do programa de carga.

b) O corpo não é capaz de suportar um sistema de cargas para o qual não existe uma distribuição de tensões equilibrada com esta e plasticamente admissível ($\phi(Q) \leq 0$ em todo ponto).

As propriedades anteriores são condições necessária (a) e suficiente (b) para que uma carga seja suportável.

Uma conseqüência imediata deste teorema é que a carga de colapso independe das propriedades elásticas do material que pode então ser considerado rígido-plástico sem que isto modifique o valor da carga crítica, desde que seja utilizada a mesma superfície limite de es

coamento.

Para um programa de carga proporcional, no qual $P = \alpha \bar{P}$ com \bar{P} fixo, o problema da análise limite se reduz à determinação do valor $\bar{\alpha}$ do fator de amplificação de cargas α , tal que $\bar{\alpha}\bar{P}$ seja uma carga de colapso. Ao se considerar \bar{P} como a carga real sobre a peça, pode ser dada uma interpretação do valor crítico $\bar{\alpha}$ como sendo o fator de segurança em relação ao colapso plástico, desta carga \bar{P} , com valores maiores que 1 para cargas \bar{P} suportáveis. Neste caso, de carregamento proporcional, o teorema estático de análise limite adota a forma do seguinte princípio variacional.

O fator de colapso $\bar{\alpha}$ é o máximo multiplicador α para o qual existe um campo de tensões Q , em equilíbrio com $\bar{\alpha}\bar{P}$ e plasticamente admissível ($\phi(Q) \leq 0$ em todo ponto).

O teorema estático de colapso coloca um método alternativo para a resolução do problema de análise limite que consiste em representar os campos de esforços internos, equilibrados com $\bar{\alpha}\bar{P}$ e plasticamente admissíveis, e resolver o problema de maximização com restrições enunciado. Quando os campos candidatos são associados a valores de um conjunto finito de parâmetros tem-se um problema de programação matemática.

5. Equações de Equilíbrio da Casca Axssimétrica

Para uma casca com simetria de revolução na geometria e no carregamento, as equações de equilíbrio podem ser escritas em forma adimensional utilizando os limites de escoamento em tração pura N_0 e em flexão pura M_0 (como foi feito em (2) com os esforços internos) e um comprimento L característico do modelo. Desta forma definem-se as seguintes variáveis adimensionais:

$$r = \frac{R}{L} \quad s = \frac{S}{L} \quad (22)$$

onde R é a distância ao eixo, e S a coordenada curvilínea (comprimento de curva do meridiano) adotada como variável principal nas equações, onde se denota a derivação por

$$(\cdot)' = \frac{d\cdot}{ds} \quad (23)$$

O cortante por unidade de paralelo V é adimensionado por

$$v = \frac{V}{N_0} \quad (24)$$

As cargas externas (ou reações de apoio) são representadas pela pressão normal P_n e as cargas concentradas num paralelo F_r e F_z , aplicadas uniformemente ao longo deste na direção radial e axial respectivamente, e substituídos por

$$p = \frac{P_n L}{N_0} \quad f_r = \frac{F_r}{N_0} \quad f_z = \frac{F_z}{N_0} \quad (25)$$

A espessura da casca é representada pelo parâmetro adimensional

$$\beta = \frac{M_0}{L N_0} \quad (26)$$

que vale $h/4L$ na casca homogênea e $h'/2L$ na sandwiche.

Denotando r_1 e r_2 às curvaturas principais (Figura 1) adimensionadas por L , as equações de equilíbrio [2, 4, 8] ficam

$$(r n_\phi)' - \cos\phi n_\theta - \frac{r}{r_1} v = 0 \quad (27)$$

$$\text{sen}\phi n_\theta + \frac{r}{r_1} n_\phi + (rv)' + r p = 0 \quad (28)$$

$$\beta[(r m_\phi)' - \cos\phi m_\theta] - r v = 0 \quad (29)$$

A seguir estabelecem-se as condições de continuidade para os esforços internos, levando em consideração a existência de pontos angulosos do meridiano apresentados pelo bocal do exemplo.

n_ϕ e v são descontínuos apenas onde existem cargas concentradas ou pontos angulosos do meridiano

m_ϕ é contínuo pois não se admitem momentos concentrados como carregamento externo

n_θ e m_θ podem ser descontínuos

6. Método Estático para Análise Limite de Cascas Axissimétricas

De acordo à formulação do problema de cálculo da carga limite enunciada pelo método estático procura-se a seguir uma representação do conjunto de campos de tensões generalizadas que são equilibrados (aproximadamente) com $\alpha\bar{P}$, isto é, satisfazem (26), (28) e (29) para $p = \alpha\bar{p}$, e são plasticamente admissíveis, ou seja, cumprem com (14) em todo ponto (se possível). Isto se consegue pela utilização da técnica de elementos finitos, e com a notação das Figuras 5 e 6.

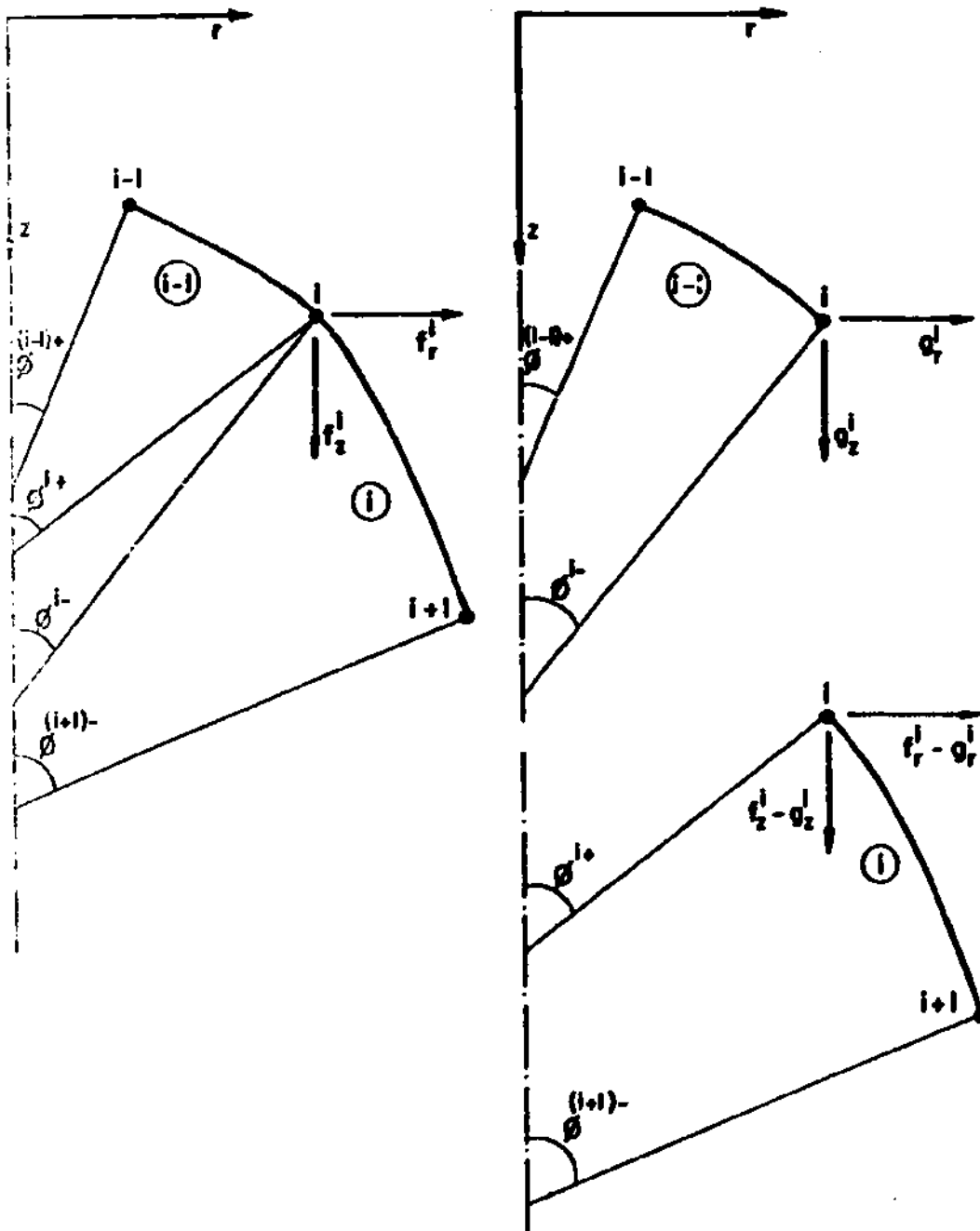


Figura 5 - Esforços externos f_r^i e f_z^i , e esforços internos g_r^i e g_z^i (tração sobre o elemento a esquerda do nó i)

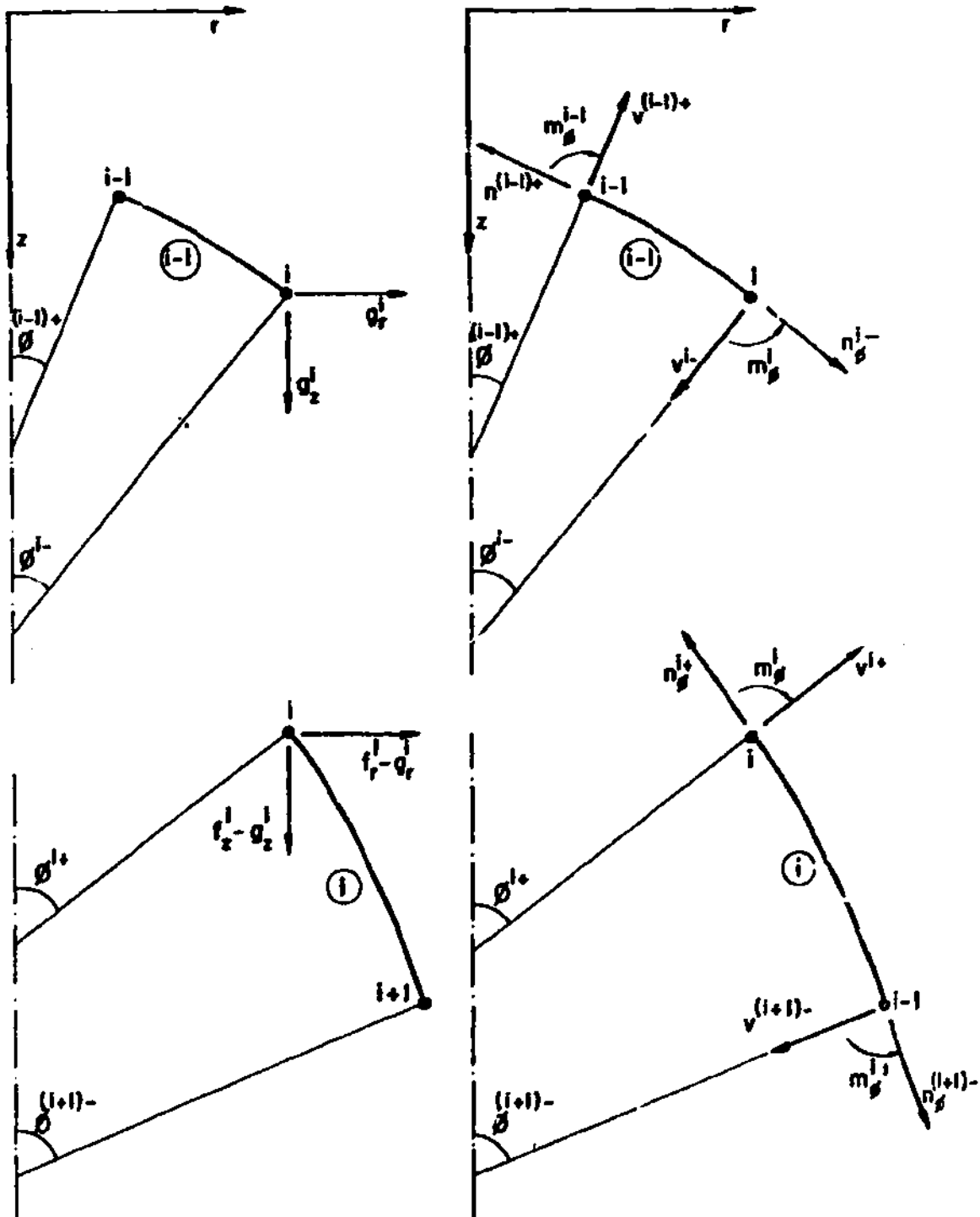


Figura 6. Esforços em coordenadas locais e globais

O método de elementos finitos fornece uma aproximação destes esforços em função de um conjunto de parâmetros de interpolação (nodais) que são determinados resolvendo o problema de maximização mediante uma técnica de programação matemática.

A geometria da casca não é aproximada e em lugar disso assume-se que se dispõe das funções exatas $r(s)$, $z(s)$ e $\phi(s)$ que definem a forma do meridiano. Como as equações de equilíbrio são usadas para gerar as interpolações de esforços estas funções de aproximação resultam dependentes das funções exatas e explícitas que definem a geometria. Este enfoque é de grande importância para a eficiência do método numérico gerado. Naturalmente, a discretização do meridiano, necessária unicamente para a interpolação de esforços, pode ser utilizada também para facilitar a definição da geometria a nível de programa de computador.

O meridiano é discretizado em n_e elementos mediante $n_n = n_e + 1$ nós convenientemente escolhidos. Para cada elemento i de comprimento $2 \ell^i$ se define uma variável uniforme normalizada

$$\eta \in [-1, 1] \text{ e tal que } (\cdot)' = \frac{1}{\ell^i} \frac{d \cdot}{d\eta} \quad (30)$$

Para r_{m_ϕ} é escolhida uma aproximação cúbica e que garanta a continuidade requerida (entre elementos) mediante o uso dos parâmetros nodais m_ϕ^i e os polinômios cúbicos de Hermite

$$h_1 = 0.25 (\eta^2 - 3\eta + 2) \quad h_2 = 0.25 (-\eta^2 + 3\eta + 2) \quad (31)$$

$$h_3 = 0.25 (\eta^2 - \eta^2 - \eta + 1) \quad h_4 = 0.25 (\eta^2 + \eta^2 - \eta - 1)$$

Desta forma a função \hat{m}_ϕ aproximante de m_ϕ resulta de

$$r \hat{m}_\phi = h_1 r^i m_\phi^i + h_2 r^{i+1} + m^{i+1} + \ell^i h_3 (r m_\phi)^{i+} + \ell^i h_4 (r m_\phi)^{(i+1)-} \quad (32)$$

Utiliza-se o índice superior $i+$ para denotar o valor de uma função pela direita do nó i , ou seja, calculada pela particularização da função no elemento i (à direita do nó i).

Para m_θ se adota uma função aproximante \hat{m}_θ seccionalmente constante pois não se requer continuidade, isto é

$$\hat{m}_\theta = m_\theta^i \quad (33)$$

Para satisfazer a equação de equilíbrio (29) em todo ponto do elemento i basta interpolar o cortante de modo que

$$r \hat{v} = \beta [(r m_\phi)'] - \cos\phi \hat{m}_\theta \quad (34)$$

Particularizando esta equação para os nós i e $(i+1)$ do elemento i , tem-se

$$r^i v^{i+} = \beta (r m_\phi)^{i+} - \beta \cos\phi^{i+} m_\theta^i \quad (35)$$

$$r^{i+} v^{(i+1)-} = \beta (r m_\phi)^{(i+1)-} - \beta \cos\phi^{(i+1)-} m_\theta^i$$

donde

$$\begin{aligned} (r m_\phi)^{i+} &= \cos\phi^{i+} m_\theta^i + \frac{r^i}{\beta} v^{i+} \\ (r m_\phi)^{(i+1)-} &= \cos\phi^{(i+1)-} m_\theta^i + \frac{r^{i+1}}{\beta} v^{(i+1)-} \end{aligned} \quad (36)$$

Mediante estas relações pode-se eliminar os parâmetros $(r m_\phi)^{i+}$ e $(r m_\phi)^{(i+1)-}$, substituindo-os por m_θ^i , v^{i+} e $v^{(i+1)-}$ que são mais úteis para estabelecer o equilíbrio nos nós.

Efetuada esta substituição na aproximação proposta para $r m_\phi$ (equação 32) obtem-se a interpolação para m_ϕ

$$\begin{aligned} \hat{m}_\phi = & \frac{h_1 r^i}{r} m_\phi^i + \frac{h_2 r^{i+1}}{r} m_\phi^{i+1} + \frac{\ell^i}{r} (h_1 \cos\phi^{i+} + h_2 \cos\phi^{(i+1)-}) m_\theta^i + \\ & + \frac{\ell^i h_1 r^i}{\beta r} v^{i+} + \frac{\ell^i h_2 r^{i+1}}{\beta r} v^{(i+1)-} \end{aligned} \quad (37)$$

Encontra-se \hat{v} substituindo a expressão anterior na equação (34)

$$\begin{aligned} \hat{v} = & \frac{\beta h_1' r^i}{r} m_\phi^i + \frac{\beta h_2' r^{i+1}}{r} m_\phi^{i+1} + \\ & + \frac{\beta}{r} (\ell^i h_1' \cos\phi^{i+} + \ell^i h_2' \cos\phi^{(i+1)-} - \cos\phi) m_\theta^i + \\ & + \frac{\ell^i h_1' r^i}{r} v^{i+} + \frac{\ell^i h_2' r^{i+1}}{r} v^{(i+1)-} \end{aligned} \quad (38)$$

Escolhe-se agora uma interpolação linear para $r n_\phi$

$$r \hat{n}_\phi = \frac{r^i (1-\eta)}{2} n_\phi^{i+} + \frac{r^{i+1} (1+\eta)}{2} n^{(i+1)-}$$

ou seja

$$\hat{n}_\phi = \frac{r^i (1-\eta)}{2r} n_\phi^{i+} + \frac{r^{i+1} (1+\eta)}{2r} n^{(i+1)-} \quad (39)$$

A equação de equilíbrio (27) é verificada em todo ponto do elemento quando se faz

$$\hat{n}_\theta = - \frac{1}{\text{sen}\phi} \left[\frac{r \hat{n}_\phi}{r_1} + (r \hat{v})' + r p \right] \quad (40)$$

Admitindo apenas carregamento de pressão seccionalmente constante, em cada elemento é

$$p = \alpha \bar{p}^i \quad (41)$$

onde α é o fator de amplificação de todas as cargas externas, incôgnita principal do problema.

Utilizando as expressões conseguidas para \hat{n} e \hat{v} (equações (39) e (38)) em (40) se segue que

$$\begin{aligned} \hat{n}_\theta = - \frac{1}{\text{sen}\phi} & \left[\beta h_1'' r^i m_\phi^i + \beta h_2'' r^{i+1} m_\phi^{i+1} + \right. \\ & + \beta (\ell^i h_3'' \cos\phi^{i+} + \ell^i h_4'' \cos\phi^{(i+1)-}) + \frac{\text{sen}\phi}{r_1} m_\theta^i + \\ & + \ell^i h_5'' r^i v^{i+} + \ell^i h_6'' r^{i+1} v^{(i+1)-} + \\ & \left. + \frac{r^i (1-\eta)}{2 r_1} n_\phi^{i+} + \frac{r^{i+1} (1+\eta)}{2 r_1} n_\phi^{(i+1)-} + r \bar{p}^i \alpha \right] \quad (42) \end{aligned}$$

As funções de aproximação construídas (equações (33), (37), (39) e (42)) determinam uma matriz, $Y_Q^i(\eta)$ de (4 x 7), de interpolação das tensões generalizadas Q , e um campo, $\bar{Q}^i(\eta)$ de (4 x 1), equilibrado com a carga de superfície p ao longo do elemento. As equações mencionadas são escritas como

$$\bar{Q} = Y^i(\eta) a^i + \alpha \bar{Q}^i(\eta) \quad (43)$$

onde a^i é o vetor de parâmetros de interpolação do elemento i

$$a^i = [n_\phi^{i+} \quad v^{i+} \quad n_\phi^{(i+1)-} \quad v^{(i+1)-} \quad m_\phi^i \quad m_\phi^{i+1} \quad m_\theta^i]^T \quad (44)$$

$Q \backslash a^i$	n^{i+}	v^{i+}	$n_{\phi}^{(i+1)-}$	$v^{(i+1)-}$	m_{ϕ}^i	m_{ϕ}^{i+1}	m_{θ}^i
n_{ϕ}	$\frac{r^i(1-n)}{2r}$		$\frac{r^{i+1}(1+n)}{2r}$				
m_{ϕ}		$\frac{\ell^i r^i h_3}{\beta r}$		$\frac{\ell^i r^{i+1} h_4}{\beta r}$	$\frac{r^i h_1}{r}$	$\frac{r^{i+1} h_2}{r}$	$\frac{\ell^i}{r} (h_3 \cos \phi^{i+} + h_4 \cos \phi^{(i+1)-})$
n_{θ}	$-\frac{r^i(1-n)}{2r_1 \sin \phi}$	$-\frac{\ell^i r^i h_3'}{\sin \phi}$	$-\frac{r^{i+1}(1+n)}{2r_1 \sin \phi}$	$-\frac{\ell^i r^{i+1} h_4'}{\sin \phi}$	$-\frac{\beta r^i h_1'}{\sin \phi}$	$-\frac{\beta r^{i+1} h_2'}{\sin \phi}$	$-\beta \left(\frac{\ell^i h_3' \cos \phi^{i+} + \ell^i h_4' \cos \phi^{(i+1)-}}{\sin \phi} + \frac{1}{r_1} \right)$
m_{θ}							1

Tabela 2 - Matriz de interpolação de esforços internos $Y_Q^i(n)$

posição		componentes de $Y_E^i(n)$ (1 x 7)	a^i
1	J		
1	1	$\frac{r^i}{2} \left[\frac{(1-n) \cos\phi}{r_1} - \frac{\text{sen}\phi}{\ell^i} \right]$	n_ϕ^i
1	2	$\ell^i r^i h_3'' \cos\phi - \frac{h_3' \text{sen}\phi}{r}$	v_ϕ^i
1	3	$\frac{r^{i+1}}{2} \left[\frac{(1+n) \cos\phi}{r_1} + \frac{\text{sen}\phi}{\ell^i} \right]$	$n_\phi^{(i+1)-}$
1	4	$\ell^i r^{i+1} \left(h_4'' \cos\phi - \frac{h_4' \text{sen}\phi}{r_1} \right)$	$v_\phi^{(i+1)-}$
1	5	$\beta r^i \left(h_1'' \cos\phi - \frac{h_1' \text{sen}\phi}{r_1} \right)$	m_ϕ^i
1	6	$\beta r^{i+1} \left(h_2'' \cos\phi - \frac{h_2' \text{sen}\phi}{r_1} \right)$	m_ϕ^{i+1}
1	7	$\beta \ell^i \left[\left(h_3'' \cos\phi - \frac{h_3' \text{sen}\phi}{r_1} \right) \cos\phi^{i+} + \left(h_4'' \cos\phi - \frac{h_4' \text{sen}\phi}{r_1} \right) \cos\phi^{(i+1)-} \right]$	m_ϕ^i

Tabela 3 - Operador de equilíbrio $Y_E^i(n)$

A matriz $Y_Q^i(\eta)$ encontra-se na Tabela 2 e

$$\bar{Q}^i(\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{r p^i}{\sin \phi} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (45)$$

6.1. Condições de equilíbrio

As funções de interpolação geradas até aqui satisfazem duas das três equações diferenciais de equilíbrio, as equações (18) e (29), independentemente do valor dos parâmetros de interpolação. Entretanto, a equação de equilíbrio (27) só poderá ser imposta em um número finito de pontos do meridiano mediante restrições (lineares) sobre o valor destes parâmetros. A condição de equilíbrio para o interior do elemento i encontra-se substituindo as interpolações dos esforços internos na equação (27) e resulta da forma

$$Y_E^i(\eta) a^i + y_E^i(\eta) \alpha = 0 \quad (46)$$

onde $Y_E^i(\eta)$ é dado na Tabela 3 e

$$y_E^i(\eta) = r \cos \phi p^i \quad (47)$$

Observando que a restrição (46) não é polinomial em η , exceto para algumas geometrias de casca particulares (p. ex.; cilindro), conclui-se que não é possível, em geral, garantir a admissibilidade estática em todo ponto, qualquer que seja o número de pontos escolhidos para impô-la.

O processo anterior procura a validade do equilíbrio no interior do elemento; falta então considerar o equilíbrio nos nós pois o objetivo é conseguir equilíbrio total do campo de tensões.

Para impor a condição de equilíbrio num nó i , interior à casca ($i = 2, \dots, n_e$), definem-se as trações em coordenadas globais sobre o elemento à esquerda do nó i (Figura 5 e 6). Desta forma

$$\begin{bmatrix} n_\phi^{i-} \\ v^{i-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi^{i-} & \sin \phi^{i-} \\ -\sin \phi^{i-} & \cos \phi^{i-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_r^i \\ g_z^i \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\begin{bmatrix} n_\phi^{i+} \\ v^{i+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi^{i+} & \sin \phi^{i+} \\ -\sin \phi^{i+} & \cos \phi^{i+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_z^i - f_r^i \\ g_z^i - f_z^i \end{bmatrix} \quad (49)$$

Em consequência a equação de equilíbrio do nó fornece a relação entre parâmetros em coordenadas locais e globais seguinte

$$a^i = T^i S^i + T_F^i F^i \quad (50)$$

onde

$$S^i = [g_R^i \quad g_Z^i \quad g_R^{i+1} \quad g_Z^{i+1} \quad m_\phi^i \quad m_\phi^{i+1} \quad m_0^i]^T \quad (51)$$

é o vetor de parâmetros de interpolação de tensões do elemento i em coordenadas globais,

$$F^i = [f_R^i \quad f_Z^i]^T \quad (52)$$

é o vetor de carga do nó i , e

$$T^i = \begin{bmatrix} T_2(\phi^{i+}) & T_2(\phi^{(i+1)-}) & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (7 \times 7) \quad (53)$$

$$T_F^i = \begin{bmatrix} -T_2(\phi^{i+}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7 \times 2) \quad (54)$$

com

$$T_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

as matrizes de transformação correspondentes

O vetor de parâmetros global S , que agrupa g_R^i , g_Z^i , m_ϕ^i e m_0^i está relacionado com o vetor de parâmetros local S^i definido em (51) por uma matriz booleana de localização L^i tal que

$$S^i = L^i S \quad (56)$$

Para o vetor de carga do nó i , F^i , a situação é um pouco diferente e se deve considerar de maneira distinta as cargas que são afetadas pelo fator de carga α e aquelas que são reações e portanto são

incluídas como variáveis do problema.

De acordo com a consideração anterior define-se:

\bar{F} distribuição de cargas nodais externa prescritas (vetor $(n_c \times 1)$) que são afetadas pelo fator de carga α .

F_R vetor de reações nodais (vetor $(n_r \times 1)$) que são variáveis adicionais do problema.

Desta forma pode-se relacionar

$$F^i = \alpha \bar{L}^i \bar{F} + L_R^i F_R \quad (5)$$

onde as matrizes booleanas de localização \bar{L}^i , de $(n_n \times n_c)$ e L_R^i , $(n_n \times n_r)$ contém somente um 1 em cada linha, seja de \bar{L}^i , se for uma carga externa, ou de L_R^i se for reação.

A equação de equilíbrio nodal (50)

$$a^i = T^i S^i + T_F^i F^i$$

que relaciona parâmetros de interpolação em coordenadas locais e globais, assim como as relações de incidência (56) e (57)

$$S^j = L^j D$$

$$F^j = \alpha \bar{L}^j \bar{F} + L_R^j F_R$$

são substituídas na condição de equilíbrio para o campo de tensões aproximadas do elemento i (46)

$$Y_E^i(\eta) a^i + y_E^i(\eta) = 0$$

resultando em

$$Y_E^i(\eta_j) T^i L^i S + Y_E^i(\eta_j) T_F^i L_R^i F_R + (Y_E^i(\eta_j) T_F^i \bar{L}^i \bar{F} + y_E^i(\eta_j)) = 0 \quad (5)$$

$$i = 1, \dots, n_e \quad j = 1, \dots, n_{eq}$$

onde foram escolhidos n_{eq} pontos em cada elemento, de coordenadas nos quais é imposta exatamente a condição de equilíbrio. Isto é, talos aplicando o método de colocação para tratar esta equação.

As $n_{eq} \times n_c$ equações anteriores são agora escritas em forma matricial como

$$B^T S + H F_R + \alpha \bar{F} = 0 \quad (59)$$

Finalmente deverão ser impostas condições de contorno apropriadas para os parâmetros globais de interpolação g_1^i e g_2^i nas extremidades do meridiano (ver referência [2]), para completar as condições de equilíbrio.

6.2. Admissibilidade plástica

A condição de que o campo de tensões generalizadas $Q(s)$ seja plasticamente admissível, isto é, que o ponto que representa este campo seja interior ao convexo de plasticidade, para uma casca sandwi- che de material tipo Tresca (equação (14)) é

$$N^T Q(s) \leq R \quad (61)$$

Para o campo de aproximação (43)

$$\bar{Q} = Y_Q^i(n) a^i + \alpha Q^i(n)$$

não é possível garantir a desigualdade (61) para todo ponto. No intuito de impor uma condição similar, mas que seja viável, escolhem-se n_p pontos por elemento, de coordenadas n_j ($j = 1, \dots, n_p$) para os quais a admissibilidade plástica é imposta mediante restrições sobre os valores dos parâmetros de interpolação.

Substituindo em (61) as relações de transformação (50) e incidência (56) e (57) obtem-se as restrições de admissibilidade plástica em coordenadas globais

$$\begin{aligned} N^T Y_Q^i(n_j) \gamma^i L^i S + N^T Y_Q^i(n_j) T_F^i L_R^i F_R + \\ + (N^T Y^i(n_j) T^i \bar{L}^i \bar{F} + N^T \bar{Q}^i(n_j) \alpha) \leq R \end{aligned} \quad (62)$$

$$i = 1, \dots, n_e \quad j = 1, \dots, n_p$$

que constituem um sistema de $12 \times n_e \times n_p$ desigualdades que é escrito em forma matricial como

$$N^T S + M F_R + \alpha \bar{Q} \leq R \quad (63)$$

6.3. Cálculo da carga limite

Aplicando o teorema estático da análise limite vem que o fator de amplificação de cargas $\bar{\alpha}$ correspondente ao colapso plástico da casca submetida a forças \bar{F} e pressões \bar{p} prescritas se encontra resolvendo o problema de programação linear

$$\bar{\alpha} = \max_{\alpha, S, F_R} \alpha \quad (64)$$

com as restrições

$$N^T s + M F_R + \alpha \bar{Q} \leq R \quad \begin{array}{l} \text{admissibilidade plástica,} \\ 12 \times n_e \cdot n_p \text{ desigualdades (63)} \end{array} \quad (65)$$

$$B^T S + H F_R + \alpha \bar{F} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{equilíbrio,} \\ n_e \cdot n_{eq} \text{ igualdades (59)} \end{array} \quad (66)$$

$$C_1 S + C_2 F_R + C_3 \bar{F} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{condições de contorno,} \\ \text{igualdades} \end{array} \quad (67)$$

Este problema [14] é resolvido por qualquer rotina de programação linear baseada no método simplex. Este é um algoritmo de enumeração e não estritamente de aproximações sucessivas.

7. Pressão Limite de Bocal Cilindro-Esférico

O método desenvolvido é aplicado agora no cálculo da pressão de colapso plástico de um bocal que constitui a junção entre uma tubulação e um vaso de pressão que é esférico pelo menos na vizinhança da junção (Figuras 7 e 8)

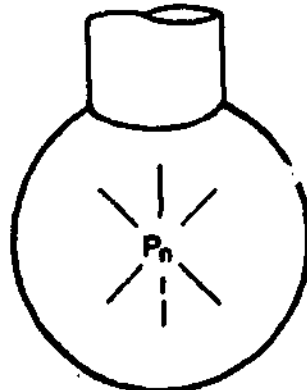


Figura 7 - Bocal cilíndrico em vaso de pressão esférico

método	carga limite $10^3 \times \bar{\alpha}$	diferença com valor médio %	número de elementos n_0	posição dos nós	
				cilindro ϕ^1	calota ϕ^1
E	,55024	-13,4	4	0,; 3,; 5,83	23,6°; 30°; 45°
E	,55030	-13,4	5	0,; 3,; 5,83	23,6°; 30°; 36°; 45°
E	,56838	-10,5	4	0,; 4,5; 5,83	23,6°; 33°; 45°
E	,55712	-12,4	8	0,; 1,5; 3,; 4,5; 5,83	23,6°; 28°; 33°; 38°; 55°
E	,56441	-11,2	8	0,; 1,5; 3,; 4,5; 5,83	23,6°; 26°; 30°; 36°; 45°
v. médio	,63563	0,	-		
C	,70685	11,2	8	0,; 1,5; 3,; 4,5; 5,83	23,6°; 27°; 30°; 36°; 45°
C	,73648	15,9	4	0,; 1,5; 5,83	23,6°; 33°; 45°
C	,75401	18,6	5	0,; 3,; 5,83	23,6°; 30°; 36°; 45°

Tabela 4 - Pressões limites para o bocal. E: método estático, C: método cinemático

O vaso de pressão é modelado por uma esfera de raio R_e na região próxima ao bocal e está submetido a pressão interna constante P_n . O bocal consiste num tubo cilíndrico de raio R_c conectado diretamente na casca cilíndrica, ficando então submetido também a pressão interna. Como a tubulação poderá eventualmente estar livre para deformar axialmente supõe-se que a pressão agindo sobre o fechamento do tubo carrega também o bocal na direção axial, com uma força por unidade de comprimento de circunferência

$$F_z = - 0.5 R_c P_n$$

Esperando que a região plástica efetiva do mecanismo de colapso esteja localizada em torno da junção, apenas uma porção de cilindro e de esfera será utilizada no modelo. Se a solução obtida não apresentar regiões rígidas perto das extremidades do meridiano significa que a região representada é insuficiente. De acordo com isto as condições de apoio a impor são de apoio (duas direções) e engastamento, na extremidade da esfera que se supõe permanece rígida (ou elástica). O modelo processado representa-se na Figura 8.

8. Conclusões

A pressão de colapso para o bocal mostrada na Tabela 4 foi calculada pelo método estático apresentado neste trabalho assim como pelo método cinemático tratado em outro trabalho [1] deste Simpósio. O mesmo problema é considerado por Gill [10] e Dang Hung et alli [4] mostrando resultados próximos ao apresentado.

Algumas relações, de desigualdade, entre a carga crítica real e as encontradas mediante o modelo de casca sandwiche e as aproximações dadas pela técnica de elementos finitos, podem ser demonstradas [2]. Por exemplo, a hipótese de casca sandwiche tipo Tresca, isoladamente, conduz ao cálculo de uma carga limite menor ou igual que a da real (homogênea de limite de escoamento qualquer), seja pelo método estático ou cinemático. Em quanto à aproximação por elementos finitos, quando maior o número de elementos e o número de pontos de verificação da admissibilidade plástica, maior será a chance de que o valor limite aproximado pelo método estático seja menor ou igual ao da casca sandwiche, como corresponde ao princípio de máximo sobre o qual se baseia. O método cinemático [1] tende a dar valores maiores que a carga limite da casca sandwiche e mais próximos a esta, a medida que o número de elementos e pontos de verificação cresce. Des

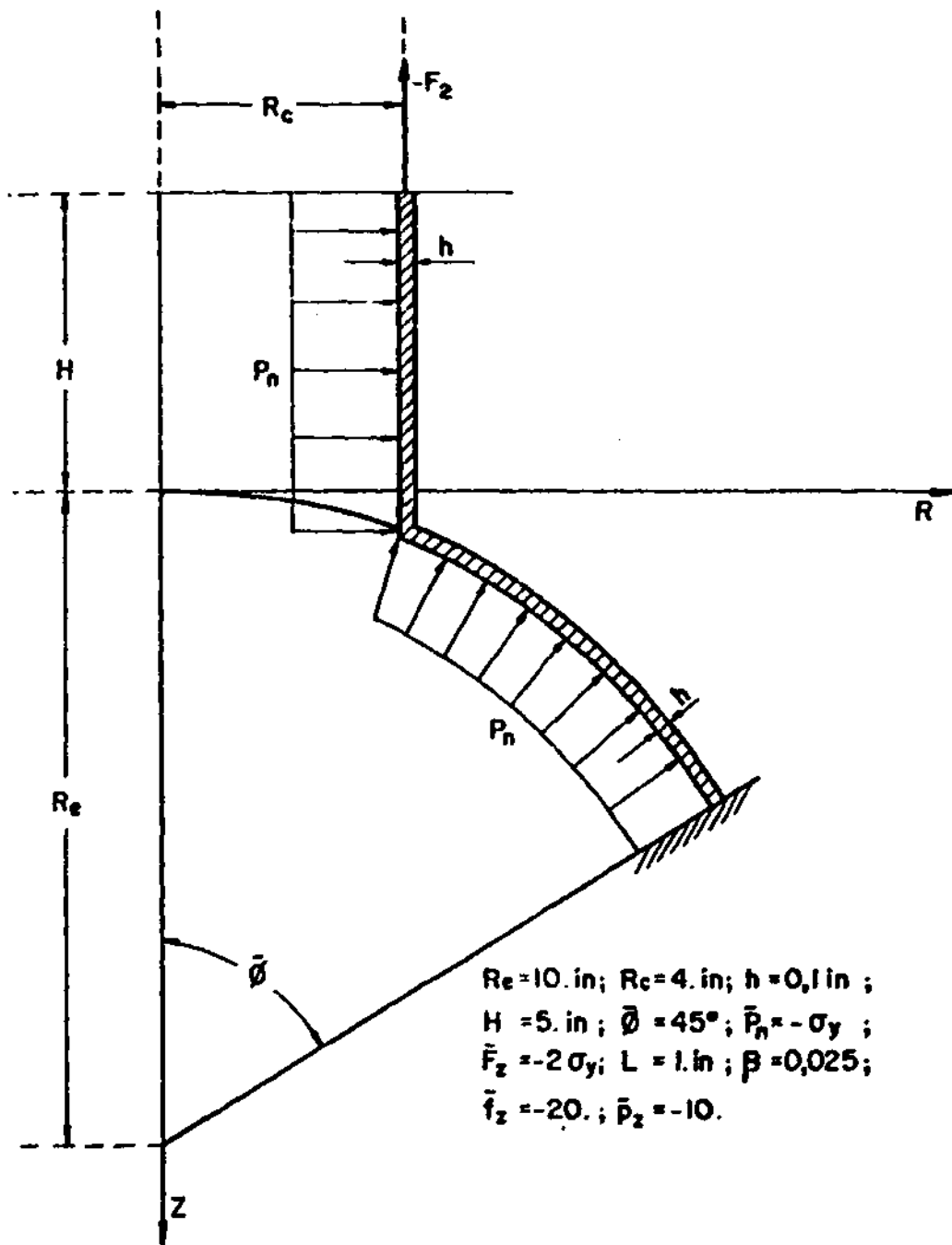


Figura 8. Modelo de bocal cilíndrico em vaso de pressão esférico

ta forma, ambos métodos fornecem aproximações da carga crítica e ao mesmo tempo uma estimativa do erro no cálculo da mesma.

É importante ressaltar aqui a importância que uma formulação aparentemente teórica teve na resolução de um problema de caráter puramente prático.

Dentro das hipóteses planteadas a formulação teórica do problema se limita à determinação do mínimo de uma função linear com restrições lineares. O emprego do método dos Elementos Finitos por sua vez nos permitiu transformar o problema anterior num clássico problema de programação linear de dimensão finita.

Desta maneira foi possível preparar um programa de cálculo automático que reduz o problema de carga limite em bocais a um problema facilmente abordável por engenheiros ainda que não suficientemente treinados nesta área.

Bibliografia

- [1] ZOUAIN, N.; TAROCO, T. y FEIJÓO, R.A. "Carga Limite em Vasos de Pressão Toricsféricos", II SIBRAT, Bahia, 1982.
- [2] ZOUAIN, N. "Análise Limite de Cascas via Otimização", Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1982.
- [3] COHN, M.Z.; MAIER, G. "Engineering Plasticity by Mathematical Programming", Proc. of the NATO Advanced Study Institute, University of Waterloo, Ontario, Canada, agosto de 1977.
- [4] DANG HUNG, N.; TRAPLETTI, M.; RANSART, D. "Bornes quasi-inferieures et bornes superieures de la pression de ruine des coques de revolution par la methode des elements finis et par la programmation non-lineaire", Int. J. Non-Linear Mechanics, v. 13, pp. 79-102, 1978.
- [5] DEL PIERO, G. "Variational Methods in Limit Analysis", II Escola de Matemática Aplicada, Laboratório de Cálculo Científico (LCC), CBPF, Rio de Janeiro, Brasil, janeiro de 1978.
- [6] DEMIR, H.H. "Cylindrical Shells under Ring Loads", J. of the Structural Div., Proc. of the ASCE, ST3, pp. 71-98, junho de 1965.
- [7] DRUCKER, D.C.; SHIELD, R.T. "Limit Analysis of Symmetrically Loaded Thin Shells of Revolution", J. of Appl. Mechanics, Trans. of ASME, março de 1959.

- [8] FLÜGGE, W. "Stresses in Shells", Springer-Verlag, 1973.
- [9] FEIJÓO, R.A.; TAROCO, E. "Introducción a plasticidad y su formulación variacional", II E.M.A. sobre Métodos Variacionais em Mecânica dos Sólidos, v. 2, janeiro de 1980.
- [10] GILL, S.A. "The Stress Analysis of Pressure Vessels and Pressure Vessels Components", Pergamon Press, London, 1970.
- [11] GRIERSON, D.E. "Collapse Load Analysis", Engineering Plasticity by Mathematical Programming, Proc. of the NATO Advanced Study Institute, University of Waterloo, Ontario, Canada, agosto de 1977.
- [12] HODGE, P.G. Jr. "Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells", Prentice Hall, New York, 1963.
- [13] KOITER, W.T. "General Theorems for Elastic-Plastic Solids", Progress in Solids Mechanics, Ed. Sneddon y Hill, North Holland, v. 1, pp. 154, 1960.
- [14] LUENBERGER, D.G. "Optimization by Vector Space Methods", John Wiley, 1969.
- [15] _____. "Introduction to Linear and Non-Linear Programming", Addison-Wesley, 1973.
- [16] MARTIN, J.B. "Plasticity", Cambridge, Massachusetts, England, MIT Press, 1975.
- [17] MAIER, G. "Shakedown Analysis", Engineering Plasticity by Mathematical Programming, Proc. of the NATO Advanced Study Institute, University of Waterloo, Ontario, Canada.
- [18] _____. "A Quadratic Programming Approach for Certain Classes of Non-Linear Structural