

## PROPRIÉTÉS SPECTRALES POUR DES HAMILTONIENS PRESQUE-PÉRIODIQUES (n)

R. LINA\*

**Abstract :** We give a description of some spectral properties of almost-periodic hamiltonians. We put the stress on some particular points of the proofs of the existence of absolutely continuous or pure point spectrum

**Résumé :** Nous présentons une description de quelques propriétés spectrales d'hamiltoniens presque-périodiques. Nous soulignons les points délicats des démonstrations qui concernent l'existence de spectre absolument continu ou purement ponctuel.

CPT-83/P.1560

Décembre 1983

\* Adresse postale : CENTRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE  
CNRS Luminy Case 907  
F-13288 MARSEILLE CEDEX 9 - FRANCE

(n) Conférence donnée aux "Ithas Rencontres entre Mathématiciens-Physiciens de R.F.A. et de France", Marseille-Luminy, 1983.

FR 84018 25

2

1. Nous présentons dans ce travail une étude, [1], des propriétés spectrales des opérateurs de la forme

$$H_x^{(\mu)} \psi(n) = \psi(n+1) + \psi(n-1) + \mu V(x - n\theta) \psi(n) \quad (1)$$

Dans (1) l'opérateur  $H_x^{(\mu)}$  agit sur  $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ,  $V$  est une fonction périodique sur  $\mathbb{R}$  de période 1 (le potentiel),  $\theta$  est un nombre réel,  $x \in \mathbb{R}$  et  $\mu$  est une constante (de couplage) réelle positive.

Étant donnée la périodicité de la fonction  $V$  on peut considérer  $x$  et  $x - n\theta \pmod{1}$  comme des points du cercle  $\mathbb{T}$ .

Cet opérateur doit être pensé comme une approximation d'un opérateur de Schrödinger où les deux premiers termes correspondent au Laplacien. Le potentiel est donc périodique si  $\theta$  est rationnel et presque-périodique, si  $\theta$  est irrationnel ; ceci relie ce problème à de nombreuses situations physiques.

Le cas du potentiel périodique est maintenant bien connu et conduit à un spectre continu de bandes.

Nous traiterons donc exclusivement le cas presque-périodique.

Dès 1933, Peierls [2] montrait qu'un électron soumis au champ périodique d'un réseau cristallin (un électron de Bloch) qui se déplace dans un champ magnétique constant est décrit par un tel opérateur de Schrödinger, si on néglige les contributions d'interbande. L'étude heuristique et numérique du spectre de cet opérateur a été fait par de nombreux auteurs [3], [4], [5] par exemple.

Les chaînes organiques conductrices fournissent un autre exemple d'application du modèle. Dans ce cas il existe une distorsion périodique de la chaîne qui est incommensurable avec la période des éléments de la chaîne eux-mêmes. Un électron se déplaçant le long de la chaîne est alors soumis à un potentiel effectif presque-périodique. C'est exactement dans ce cas que l'on peut s'attendre à une transition métal-isolant, dont le sens est précisé plus loin dans ce travail.

Cette transition de phase a été conjecturée, sur une base heuristique, dans les travaux d'Aubry et André, [6], [7]. Dans ces travaux les auteurs utilisant une relation de dualité qui permet, dans le cas de potentiels d'une forme par-

ticulière, de relier un hamiltonien avec petite constante de couplage à un hamiltonien de la même forme mais avec une grande constante de couplage. Dans cette transformation, les états non localisés correspondant au spectre continu sont envoyés en des états localisés correspondant au spectre ponctuel de l'opérateur.

2. Dans ce qui suit nous commençons par traiter le problème de la petite constante de couplage. Dans ce cas le terme de potentiel est traité comme une petite perturbation au Laplacien et nous utilisons une méthode de changement de variable inspiré, à travers [8], de la démonstration d'un célèbre théorème due à Kolmogorov [9], Arnold [10] et Moser [11] dont il est instructif de donner une rapide idée maintenant.

La principale difficulté dans ce problème est l'apparition de petits dénominateurs quand on applique un schéma perturbatif, [12], [13], [14], [15].

Supposons un problème de mécanique régi par un hamiltonien suffisamment régulier de la forme suivante :

$$H(A, \theta) = H_0(A) + P_0(A, \theta) \quad (2)$$

où nous avons exprimé  $H$  dans les variables action  $A \in \mathbb{R}^d$  et angle  $\theta \in \mathbb{T}^d$  qui montrent que la partie  $H_0$  est intégrable. Si  $P_0 = 0$  chaque trajectoire resterait sur un tore  $d$ -dimensionnel dans l'espace des phases. Si  $P_0$  est petit (dans un sens précis) beaucoup de ces tores persistent, bien que déformés, alors que certains autres sont détruits.

Nous cherchons donc des transformations canoniques sous la forme de l'exponentielle d'un champ de vecteurs  $\vec{U}$  telles que

$$H(A, \theta) \circ e^{\vec{U}} = H_1(A_1) + P_1(A_1, \theta_1) \quad (3)$$

avec  $P_1$  plus petit que  $P_0$ . On voit immédiatement que ceci n'est possible que pour un sous-ensemble de l'espace de phases.

On a

$$\begin{aligned} H_0 \circ e^{\vec{U}} &= e^{L_{\vec{U}}} H_0 \\ &= (H_0 + P_0 + L_{\vec{U}} H_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{\vec{U}}^n}{n!} \left( \frac{1}{n+1} L_{\vec{U}} H_0 + P_0 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

où  $L_{\vec{U}}$  désigne la dérivée de Lie du champ de vecteurs  $\vec{U}$ . Cette transformation

conduit à une expression comme (3) dès que

$$H_1 = H_0 + P_0 + L_G^* H_0 \quad (5)$$

ne dépend pas de  $\theta$ , et

$$P_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_G^n}{n!} \left( \frac{1}{n+1} L_G^* H_0 + P_0 \right) \quad (6)$$

est petit.

La condition sur (5) fournit alors une expression formelle par  $G$  :

$$G(A, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_k^d} i \frac{P_{0,k}(A)}{k \cdot \omega(A)} e^{i k \cdot \theta} \quad (7)$$

avec

$$P_{0,k}(A) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} e^{-i k \cdot \theta} P_0(A, \theta) d\theta \quad (8)$$

et 
$$\omega(A) = \frac{dH_0(A)}{dA} \quad (9)$$

On voit ainsi que la série (7) sera convergente si la divergence introduite par les petits dénominateurs  $k \cdot \omega(A)$  peut être compensée par la décroissance que la régularité de la perturbation implique sur  $P_{0,k}(A)$ .

Dans cette optique on fixe un ensemble de  $\omega \in \mathbb{R}^d$  par une condition diophantienne, par exemple

$$\left\{ \omega : \forall k \neq 0 \quad |k \cdot \omega|^{-1} \leq \frac{\pi}{|k|^{\nu}} \right\} \quad (10)$$

où  $|k| = \frac{d}{2} |k_c|$ .

On peut donc réaliser le programme (3) sur l'ensemble des  $A$  avec  $\omega(A)$  dans (10), dit ensemble de non-résonance.

Sous des conditions précises, qui deviendront claires par la suite, on peut itérer cette procédure et la faire converger de telle façon que, à la limite, on obtient un hamiltonien  $H_{\infty}$  qui, dans un sous-ensemble de l'espace des phases ne dépend que des nouvelles coordonnées d'action  $A_{\infty}$ .

Les équations du mouvement se liront, dans cet ensemble :

$$e^{iHt} \begin{pmatrix} A \\ \hat{0} \end{pmatrix} = F_{\infty} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ \hat{0}_2 + i\epsilon(A)t \end{pmatrix} \quad (11)$$

où  $F_{\infty}$  désigne le produit infini des transformations de variables effectuées.

Nous utilisons dans notre problème une méthode très proche de celle-là qui conduit à un changement de variables ramenant l'opérateur (1) au Laplacien. Comme pour le Théorème K.A.M., ce changement de variables ne s'applique que sur un certain sous-ensemble d'énergies et pour un ensemble (non-résonnant) de nombres irrationnels  $\theta$ .

Le sous-ensemble du spectre sur lequel on peut appliquer le changement de variables se trouve être un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue strictement positive ; sur cet ensemble la mesure spectrale est absolument continue.

3. Pour traiter le cas de grande constante de couplage  $\mu$ , nous utilisons essentiellement la dualité déjà mentionnée.

La méthode n'est cependant applicable que pour certains modèles particuliers. Nous nous restreignons donc au modèle où, dans (1) on a (équation presque-Mathieu) :

$$V(y) = 2\cos 2\pi y \quad (12)$$

Dans ce cas nous obtenons un ensemble dénombrable de valeurs propres, dont la fermeture topologique a une mesure de Lebesgue positive et les vecteurs propres correspondants ont une décroissance exponentielle.

4. Pour terminer nous présenterons quelques autres exemples d'équations de Schrödinger où des résultats peuvent être obtenus avec les mêmes techniques, ou indirectement, à partir des résultats obtenus sur d'autres modèles.

## 2 - SPECTRE ABSOLUMENT CONTINU A PETITE CONSTANCE DE COUPLAGE

1. Quand la constante de couplage  $\mu$  est petite on peut considérer le terme de potentiel comme une petite perturbation au Laplacien dont on sait qu'il a un spectre absolument continu.

Au besoin, après renormalisation on peut supposer que le spectre de l'opérateur  $H_x^{(\mu)}$  se trouve dans l'intervalle  $[-2, 2]$  et à l'aide d'un changement de variable

$$x = 2 \cos \pi \phi \quad (1)$$

on peut écrire l'équation aux valeurs propres sous la forme

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} + \mu V(x-n\theta) = 2(\cos \pi \phi) \psi_n \quad (2)$$

Cette équation s'écrit encore, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \pi \phi - \mu V(x-n\theta) & -1 \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} \quad (3)$$

La matrice  $2 \times 2$  qui apparaît dans cette équation joue un rôle important dans la suite ; elle est notée  $M(\phi, y = x-n\theta, \mu)$ . La forme la plus simple de relier l'équation (3) à l'équation libre (sans potentiel) serait donnée par une conjugaison à la matrice  $M_0$  qui correspond au potentiel  $V = 0$  :

$$M(\phi, y, \mu) = G(\phi, y, \mu) M_0 G(\phi, y, \mu)^{-1} \quad (4)$$

où  $G(\phi, y, \mu)$  est une matrice  $2 \times 2$  inversible.

L'énoncé du théorème suivant montre que le programme de conjugaison n'est pas réalisable sous cette forme simple, mais qu'il l'est, si on le modifie sur deux points :

1. La conjugaison se fait avec torsion de la fonction  $y \rightarrow G(\phi, y, \mu)$ .

2. La conjugaison relie une valeur de l'énergie pour le modèle libre à une énergie différente du modèle perturbé. Bien que ce décalage de l'énergie

-la fonction  $\alpha$  dans l'énoncé du Théorème- soit parfaitement continu des paramètres, sa valeur explicite n'est pas connue. De plus, la conjugaison n'est pas réalisable pour toute valeur de l'énergie.

**Théorème 1.** Supposons que  $V$  est holomorphe dans  $\mathbb{T}_r \times \mathbb{T} + i[-r, +r]$ ,  $x > 0$  et que  $\theta$  vérifie la condition diophantienne ( $\Omega$ ) spécifiée plus bas.

Alors il existe des constantes  $\lambda > 0$ ,  $0 < \rho < r$  et  $D_{\rho, \lambda}$  telles que si  $\phi$  appartient à un ensemble de Cantor  $K$ ,  $y \in \mathbb{T}_{r-\rho}$  et  $|\mu| < \lambda$  avec

$$\|V\| \leq \rho_{\rho, \lambda}$$

on a

$$N(\phi, y, \mu) + \begin{pmatrix} N(\phi, \mu) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = G(\phi, y - \theta, \mu) M_0 G(\phi, y, \mu)^{-1} \quad (5)$$

Les fonctions

$$G : K \times \mathbb{T}_{r-\rho} \times D_{\lambda} \longrightarrow M_2(\mathbb{C}) \quad (6)$$

$$\alpha : K \times D_{\lambda} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (7)$$

sont Lipschitz continues et  $\det G = 1$ .

De plus, l'application

$$E_{\mu} : \phi \in K \cap \mathbb{T} \longrightarrow 2\cos \pi \phi + \alpha(\phi, \mu) \quad (8)$$

est un Lipschitz-héoméomorphisme qui transforme  $K \cap \mathbb{T}$  en un sous-ensemble fermé du spectre de  $H_x^{|\mu|}$  qui a une mesure de Lebesgue strictement positive.

La restriction de la mesure spectrale à  $E_{\mu}(K \cap \mathbb{T})$  est absolument continue.

**Remarques :**

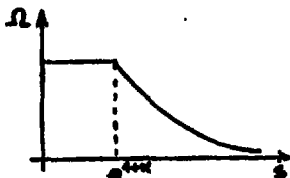
1.1- La condition diophantienne sur  $\theta$  est fixée à l'aide d'une certaine fonction  $\Omega$ , voir [16].

Bien que cette fonction puisse être choisie avec une certaine latitude, nous prenons ici une fonction de la forme :

$$\Omega(s) = \Omega(e^{1+\alpha}) \quad , \quad \text{si } s \leq e^{1+\alpha}$$

$$\Omega(s) = C \exp \left\{ -s / \log s \right\}^{1+\alpha} \quad \text{si } s \geq e^{1+\alpha} \quad (9)$$

où  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  et  $C$  est choisie de façon à rendre  $\Omega$  continue (voir fig.)



La condition  $(\Omega)$  sur le nombre  $\theta$  s'écrit alors

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \neq 0: \|n\theta\| \geq \Omega(|n|) \quad (10)$$

On rappelle que l'ensemble des nombres  $\theta$  vérifiant (10) pour un  $\Omega$  a un complément de mesure de Lebesgue nulle.

1.2 - Cette fonction  $\Omega$  permet aussi de construire l'ensemble de Cantor  $K$  des énergies pour lesquelles la conjugaison a lieu. Observons que nous avons étendu  $M$  à un domaine complexe.  $D_\lambda$  désigne le cercle  $\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq \lambda\}$ .

Pour  $\phi \in \mathbb{T} + i\mathbb{R}$  nous définissons

$$\|\phi\| = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |\phi + n| \quad (11)$$

L'ensemble  $K$  est alors défini par

$$K = \{\phi \in \mathbb{T}_r, \forall n \in \mathbb{Z} \quad \|\phi + n\theta\| \geq \Omega(|n|)\} \quad (12)$$

L'intersection  $K \cap \mathbb{T}$  est le complément d'une union d'intervalles centrés sur  $n\theta \pmod{1}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et de rayon  $-\Omega(|n|)$ . Comme  $-\Omega$  est suffisamment décroissante et  $-\Omega(0)$  petite, l'ensemble  $K \cap \mathbb{T}$  a une mesure de Lebesgue strictement positive, même si les points  $n\theta \pmod{1}$  sont denses dans le tore.

1.3 - La recherche de continuités Lipchitziennes utilisent, pour les fonctions qui apparaissent dans le problème, la norme suivante

$$\|F\| = \sup_x \|F(x)\| + \sup_{\substack{x, x' \\ x \neq x'}} \frac{\|F(x) - F(x')\|}{\|x - x'\|}$$

où  $x, x'$  sont pris dans les domaines respectifs des variables, qui sont sous-ensembles de  $\mathbb{T} + i\mathbb{R}$ .



1.4 - La norme  $\|V\|$  du potentiel est prise sur un domaine complexe de largeur  $\epsilon$  autour de l'axe réel. La constante  $B_{\mu, \lambda}$  est inversement proportionnelle à  $\lambda$  - c'est à dire que la taille de la perturbation admise est mesurée par  $\lambda V$  - et proportionnelle à une fonction de  $\mu$  calculée à partir de la fonction  $\Omega$ , [1]. Elle fait donc intervenir la condition diophantienne imposée à  $\theta$ .

Utilisant une méthode plus sophistiquée, due initialement à Moser, on pourrait considérer des potentiels seulement suffisamment différentiables.

1.5 - En écrivant explicitement les équations correspondantes à la relation (5), on voit aisément que  $\alpha(\phi, \mu)$  joue un rôle de décalage de l'énergie propre dans la relation entre la solution du modèle libre,  $V = 0$ , et celle du modèle perturbé.

1.6 - Remarquons enfin que, bien que l'ensemble des énergies  $\phi$  pour lesquelles la conjugaison (5) s'applique soit un ensemble de Cantor, ceci n'implique pas que le spectre de  $Hx$  soit un spectre de Cantor, car d'une part on ne peut rien affirmer sur les  $\phi \notin KAT$  et, d'autre part, la translation par  $\alpha(\phi, \mu)$  peut détruire la propriété de Cantor de  $E_{\mu}(KAT)$ .

2. La démonstration du Théorème 1 consiste en une récurrence sur le même principe que celle du théorème KAM invoquée dans l'introduction.

On prend la matrice  $M(\phi, y, \mu)$  comme point de départ, que l'on écrit

$$M(\phi, y, \mu) = N_0(\phi, y, \mu) + \mu P_0(y) \quad (13)$$

Ici on a explicité la dépendance de  $N_0$ , comme fonction de  $\phi$ .

Nous cherchons tout d'abord un "changement de variables", proche de l'identité -en fait une conjugaison- pour transformer  $N_0(\phi, y, \mu)$ . Cette conjugaison se faisant avec torsion, nous cherchons une matrice  $W_1$ , de norme petite et nous notons  $\theta W_1(\phi, y, \mu) = W_1(\phi, y - \theta, \mu)$ . On voit immédiatement, par intégration sur  $\theta$  qu'il est impossible d'obtenir une nouvelle équation de la forme (13). En posant  $Z_K = 0$ ,  $G_K = 1$  nous prenons comme équation à l'ordre  $(K)$  de la récurrence la relation

$$N_K = N_0 + P_K + G_K^{-1} Z_K G_K \quad (14)$$

On voit simplement que si l'on pose (on supprime les variables pour simplifier les notations) :

$$N_{K+1} \cong (1 + \theta_{K+1})^{-1} N_K (1 + \theta_K) \quad (15)$$

$$G_{K+1} \cong G_K (1 + \theta_K) \quad (16)$$

$$Z_{K+1} \cong Z_K - A_{K+1} \quad (17)$$

$$P_{K+1} \cong (1 + \theta_{K+1})^{-1} (P_K + \theta_K^{-1} A_{K+1} G_K) \theta_{K+1} \quad (18)$$

les équations (15)-(18) permettent d'écrire la même équation que (14) mais à l'ordre  $(K+1)$ , à condition de pouvoir trouver les matrices  $\theta_K$  et  $A_K$  qui vérifient l'équation linéarisée :

$$\theta_{K+1} N_0 - N_0 \theta_{K+1} = P_{K+1} + \theta_K^{-1} A_{K+1} G_K \quad (19)$$

Remarquons que, d'après (18)  $P_{K+1}$  ne fait intervenir que des termes d'ordre  $(K)$ ,  $\theta_{K+1}$  et  $A_{K+1}$ . Ces deux dernières matrices doivent être petites si  $\mu$  est petit.

Si (19) possède une telle solution la récurrence peut recommencer.

Supposons que cela est possible et, sans regarder pour l'instant le problème de convergence de la récurrence, on obtiendrait à la limite :

$$N_\infty = \theta_\infty^{-1} N_0 \theta_\infty \quad (20)$$

$$G_\infty = \prod_{K=1}^{\infty} (1 + \theta_K) \quad (21)$$

$$Z_\infty = - \sum_1^{\infty} A_K \quad (22)$$

et on espère

$$P_\infty = 0 \quad (23)$$

L'équation reliant  $N_\infty$ ,  $G_\infty$  et  $Z_\infty$  n'est alors autre que l'expression (5) dans l'énoncé du théorème, si la matrice  $Z_\infty$  est de la forme figurant dans (5).

3. Sans entrer dans le détail de la démonstration du Théorème 1, voir [1] nous voulions seulement ici souligner deux points importants.

Le premier est l'apparition du problème des petits dénominateurs dans la résolution de l'équation linéarisée (19). On voit que, par transformée de Fourier, chaque terme  $W_{\phi\psi}$  de la matrice  $W_{K+1}$  est majoré par une expression du type

$$\|W_{\phi\psi}\|_r \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\tilde{H}(\phi, n)}{2|\phi - n\phi^K|} e^{2\pi|n|r} \quad (24)$$

où la norme serait prise dans le domaine  $T_r$ . Dans cette expression  $\tilde{H}(\phi, n)$  désigne le  $n^{\text{ème}}$  coefficient de Fourier du second membre de (19). La divergence des petits dénominateurs ne serait pas alors compensée par la convergence des numérateurs. C'est pourquoi on diminue légèrement le domaine des  $\phi$  en choisissant  $0 < \eta < r$  de façon à avoir

$$\begin{aligned} \|W_{\phi\psi}\|_{r-\eta} &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\tilde{H}(\phi, n)}{2|\phi - n\phi^K|} e^{2\pi|n|r} e^{-2\pi|n|\eta} \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\Omega(n)|^K} \|H\|_{\infty, r} e^{-2\pi|n|\eta} \end{aligned} \quad (25)$$

Cette fois-ci la convergence est assurée et l'équation linéarisée possède une solution  $W_{K+1}$  donnée par le développement de Fourier, chaque fois que  $\phi \in K$ .

La matrice  $A_{K+1}$  est obtenue par une application de Théorème de point fixe et sa norme est contrôlée de la même façon.

Le deuxième point à souligner est la convergence de la récurrence, liée à la taille  $\|V\|_r$  permise pour la perturbation.

Pour cela on veut que

$$G_{\infty} = \prod_{K=0}^{\infty} (1 + W_K) \quad (26)$$

soit un produit convergent.

En jouant sur le paramètre  $\mu$  ("méthode du paramètre artificiel, [16]), c'est à dire en diminuant à chaque étape de la récurrence ce paramètre par un facteur  $d_K > 0$  on obtient

$$\|V_{\phi\psi}\|_{r-\eta, d} \leq C(\eta) \|P_{K+1}\|_{r-\eta} \left(\frac{|\mu|}{d}\right)^{2K}$$

$$\| \varphi_{K+1} \left( \frac{|p|}{d} \right) \| 2^K \quad (27)$$

où nous avons omis les indices  $K$  dans  $\mathcal{G}$  et  $d$  pour ne pas alourdir la notation. Le facteur  $\left( \frac{|p|}{d} \right) 2^K$  apparaît comme conséquence de l'application du Lemme de Schwarz's sur les fonctions holomorphes.

On voit alors que la convergence de (26) est assurée si

$$q_K \approx q^{2^K} \quad \text{avec } q < 1 \quad (28)$$

ou encore,

$$\left( \frac{|p|}{d^K} \right) 2^K \leq \frac{q^{2^K}}{q_K} \quad (29)$$

L'égalité qui définit  $q_{K+1}$  impose donc la norme :

$$\| P_{K+1} \|_{r-g, d} \quad (30)$$

et puisque  $q < 1$  on obtient la condition du Théorème

$$\lambda \| v \|_r \leq \varepsilon \quad (31)$$

On remarque aussi, d'après (18), que si  $\| P_n \|$  est d'ordre  $\varepsilon$  alors  $\| P_K \|$  sera d'ordre  $\varepsilon^{2^K}$ .

4. Le lien avec l'hamiltonien libre garantit alors l'existence de spectre absolument continu en restriction à  $K$  et un contrôle de la norme de  $\mathcal{A}$  montre que la mesure de l'image par  $E_\mu$ , voir (8), de l'ensemble  $K$  est de mesure de Lebesgue strictement positive.

### 3. SPECTRE PUREMENT PONCTUEL A GRANDE CONSTANTE DE COUPLAGE

1. Pour considérer le cas de grande constante de couplage on nécessite une condition plus précise sur  $\theta \in T$ , qui s'ajoute à la condition (Q) indiquée dans (10). On demande que  $\theta$  vérifie :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists c_\epsilon > 0 \quad \text{t.q.} \quad \left| \theta - \frac{p}{q} \right| \frac{c_\epsilon}{q^{2+\epsilon}} \quad \forall p, q \in \mathbb{N} \quad (1)$$

De plus, pour des raisons techniques on impose que

$$\limsup_n a_n \geq 10 \quad (2)$$

où les  $a_n$  constituent le développement en fraction continue de  $\theta$  :

$$\theta = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \quad (3)$$

L'essentiel de la démonstration de ce résultat, concernant l'existence de spectre ponctuel avec des fonctions propres exponentiellement décroissantes, consiste en l'utilisation d'une dualité du modèle de presque-Mathieu, [6], qui a été généralisée en une transformation de Fourier algébrique dans [17].

**Théorème 2 :** Sous les conditions énoncées plus haut concernant  $\theta$ , il existe  $\bar{\lambda} > 0$ , telle que si  $\mu \geq \bar{\lambda}$  l'opérateur  $H_x^\mu$  avec  $V(y) = 2\cos(2\pi y)$  a, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  - par rapport à la mesure de Lebesgue - un ensemble infini de valeurs propres, dont la fermeture a une mesure de Lebesgue strictement positive. Les fonctions propres correspondantes sont exponentiellement localisées. La mesure de la fermeture de ce spectre ponctuel approche la mesure de tout le spectre si  $\mu \rightarrow +\infty$ .

**Remarques :**

1. La conjugaison démontrée dans le Théorème 1 permet d'écrire les solutions fondamentales, fonctions généralisées propres de  $H_x^\mu$ , si  $\mu < \bar{\lambda}$  et  $\phi \in \mathbb{K}$ , sous la forme

$$\Psi_\pm(n) = f_\pm(\phi, x + n\theta, \mu) e^{\pm i\pi n\phi} \quad (4)$$

où les fonctions  $f_\pm$  sont données par la matrice  $G_\infty$ .

Pour  $n = 0$ , on obtient, par exemple dans le cas  $\Psi_+(0)$

$$e^{i\pi\phi} f_+(x-\theta) + e^{-i\pi\phi} f_+(x+\theta) + 2\mu \cos(2\pi\phi) f_+(x) = E(\phi, \mu) f_+(x) \quad (5)$$

Et une simple transformée de Fourier fournit :

$$H_{\phi/2}^{1/\mu} \tilde{f}_+ = -\frac{1}{\mu} E(\phi, \mu) \tilde{f}_+ \quad , \quad \phi \in \mathbb{K} \quad (6)$$

Mais  $H_{\phi/2}^{1/p}$  et  $H_{\phi/2}^{1/q}$  sont unitairement équivalentes si  $\phi - \phi' \in 2\mathbb{Z}$ , l'équation (6) étant l'équation aux valeurs propres cherchée. Les propriétés de  $C_{\infty}$  impliquent la décroissance exponentielle de  $\int_{\mathbb{T}}^+$  et le résultat est vrai si  $1/p > 1/q = \bar{\lambda}$ .

2. Utilisant l'ergodicité on montre que l'ensemble  $K \cap \{\phi + 2\mathbb{Z}\}$  a un nombre infini de points, ce qui assure l'existence d'un nombre infini de valeurs propres mais implique aussi que le résultat n'est plus assuré pour  $\forall x \in \mathbb{R}$ , car  $\phi/2$  apparaît aussi comme indice dans  $H_{\phi/2}^{1/p} = H_x^{1/p}$ .

3. Pour estimer la fermeture de l'ensemble des valeurs propres déterminées plus haut, i.e.  $\overline{K \cap \{\phi + 2\mathbb{Z}\}}$  nous devons chercher une estimation uniforme en  $\epsilon$  des ensembles

$$U_{\epsilon}(\phi) = \{ \psi \in K : d(\psi, \text{Orb}\phi) \leq \epsilon \} \quad (7)$$

Désignant la suite d'approximants rationnels de  $\theta$  par  $\left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ , comme pour  $n \geq n_{\epsilon}(\theta)$  on a

$$\|q_n \theta\| \leq \epsilon \quad (8)$$

On voit que la longueur des intervalles  $I_j^n$ ,  $0 \leq j < q_{n+1}$ , définis par

$$I_j^n = [j\theta, j\theta + q_n \theta - p_n] \pmod{1} \quad (9)$$

est inférieure à  $\epsilon$ .

Maintenant, on sait, [18], que les intervalles de la famille

$$J^n = \left\{ \left\{ I_j^n \right\}, 0 \leq j < q_{n+1} \cup \left\{ I_j^{n+1} \right\}, 0 \leq j < q_n \right\} \quad (10)$$

sont d'intérieur deux à deux disjoints et recouvrent  $\mathbb{T}$ .

Considérons les intervalles ouverts dans  $\mathbb{T}$  définis par

$$B_m = \{ x \in \mathbb{T} : |x - m\theta| < \Omega \pmod{1} \} \quad (11)$$

On voit que :

$$(K \cap \mathbb{T})^c = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} B_m \quad (12)$$

On voit que les  $B_n$  correspondant à de grands  $n$  ont une mesure de Lebesgue petite. En choisissant  $q_n$  suffisamment grand, l'union des intervalles  $B_n$ ,  $|n| > q_n$  aura aussi une mesure de Lebesgue petite.

Considérons donc l'ensemble des  $B_n$ , pour  $n$  petit. Pour cela on définit :

$$\mathcal{C}_n = \{ I \in \mathcal{J}^n \text{ et tels que } I \cap \bigcup_{|m| \leq q_n} B_m = \emptyset \} \quad (13)$$

On voit immédiatement que si  $I \in \mathcal{J}_n$  et  $I \cap B_m = \emptyset$  pour un certain  $m \in \mathbb{Z}$  alors  $B_m$  est suffisamment petit pour que  $I \cap B_m$  soit contenu dans un des deux intervalles centrés sur les extrémités de  $I$  et de rayon  $\Omega(q_n)$ .

Comme les  $B_n$  contenus dans  $I$  ont une mesure petite, l'intersection de  $I \in \mathcal{C}_n$  avec  $K$  a une mesure très proche de celle de  $I$  (en fait aussi proche que l'on veut en choisissant une fonction  $\Omega$  appropriée, ce qui ne serait pas sans conséquences sur la taille de la perturbation  $\|V\|$  admise), disons

$$|I \cap K| \geq (1 - \delta) |I| \quad (14)$$

Mais, puisque  $|I| \leq \epsilon$  on a  $\{I \cap K\} \subset U_\epsilon(\phi)$ .

Les intervalles dans  $\mathcal{C}_n$  étant deux à deux disjoints, on obtient

$$|U_\epsilon(\phi)| \geq (1 - \delta) \sum_{I \in \mathcal{C}_n} |I| \quad (15)$$

L'estimation de  $\sum_{I \in \mathcal{C}_n} |I|$  se fait alors en utilisant des résultats de la théorie des fractions continues, mais (13) montre bien que cette estimation est uniforme en  $\epsilon$ .

#### 4. AUTRES MODELES

1. Dans [19], nous avons traité le cas du modèle quasi-périodique dont la version périodique est le modèle de Krönig-Penny, [20].

Il s'agit de l'hamiltonien auto-adjoint sur  $L^2(\mathbb{R})$  définie par

$$H(g, \alpha, x) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - g \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos 2\pi(x - n\alpha) \delta(x - n) \quad (1)$$

Il se trouve que les équations (3) de la section 2 qui correspondent au modèle de presque-Mathieu et au modèle (1) sont conjuguées par un changement de variable matricielle simple.

Ce changement de variable permet l'analyse du modèle (1) à partir des résultats énoncés dans les sections précédentes.

Mais dans le cas présent la structure du spectre peut être beaucoup plus compliquée car le changement de variable dépend de la valeur de l'énergie considérée.

Par exemple on a

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{E}} \sin \sqrt{E} z \quad (2)$$

2. Dans [21] nous avons étudié des modèles  $V$ -dimensionnels qui, pour des valeurs suffisamment grandes de la constante de couplage, n'ont que du spectre ponctuel avec les états propres correspondants exponentiellement localisés.

Les cas de potentiel étudiés dans [22] et l'exemple fourni par [23] sont des cas particuliers de la famille d'opérateurs que nous traitons, mais dans [21], les auteurs obtiennent une forme explicite des solutions de l'équation de Schrödinger.

La classe de potentiels que nous avons étudiée est stable par perturbation, car elle contient les fonctions  $V$  de période 1, méromorphes dans un domaine

$$\mathcal{D}_R = \{ z \in \mathbb{C}, |\Im z| < R \} \quad (3)$$

pour  $R > 0$  et telles que

$$|V(z) - V(z + a)| \geq c \inf_{m \in \mathbb{Z}} |z + m|, \quad a \in \mathbb{R}, z \in \mathcal{D}_R \quad (4)$$

Les potentiels

$$V(x) = c_1 \pi x \quad (5)$$

voir [22], et

$$V(x) = c_1 \pi x + \alpha c_2^3 \pi x^3 \quad (6)$$

sont de tels exemples.



3. En utilisant la méthode exposée dans les sections précédentes, M. Serra, [24], a traité le cas d'une équation de Schrödinger sur la surface de révolution dont le rayon est modulé presque-périodiquement ; exprimé en coordonnées cylindriques  $(\varrho, \alpha, Z)$ , ceci veut dire que l'on prend

$$\varrho = F(Z) \quad (7)$$

avec  $F$  presque-périodique,  $F(Z) \neq 0, \forall Z$ .

Une façon équivalente d'envisager ce problème est de prendre la variété  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  munie de la métrique Riemannienne

$$dl^2 = \frac{dZ^2 + d\alpha^2}{F(Z)} \quad (8)$$

Ce qui est intéressant dans cet exemple c'est que seul un ensemble fini de modes intervient pour chaque valeur de l'énergie  $E$ .

## REFERENCES

- [1] J. BELLISSARD, R. LIMA, D. TESTARD : "A metal-insulator transition for the almost Mathieu model", *Comm. math. Phys.* 88, 207-234 (1983).
- [2] R.E. PEIERLS : *Z. Phys.* 80, 763 (1933).
- [3] M. Ya AZBELL : "Energy spectrum for a conducting electron in a magnetic field", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 46, 929 (1964).
- [4] D.R. HOFSTADTER : "Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields", *Phys. Rev.* B14, 2239 (1976).
- [5] J.B. SOKOLOFF : *Phys. Rev.* B22, 5283 (1980) ;  
*Phys. Rev.* B23, 6422 (1980).
- [6] S. AUBRY in *Solid State Sciences : Solitons and Condensed Matter Physics*, edited by A.P. BISHOP and T. SCHNEIDER, vol. 8, p. 264, Springer 1978.
- [7] S. AUBRY, G. ANDRE, *Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*, Kiryat Anavim, Israel, 1979.
- [8] E. DINABURG, Ya. SINAI : "The one dimensional Schrödinger equation with a quasi-periodic potential", *Func. Anal. App.* 9, 279 (1975).
- [9] A.N. KOLMOGOROV : "On conservation of conditionally periodic motion for a small change in Hamilton's functions", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 98, 527 (1954).
- [10] V.I. ARNOLD : "Small divisor problems in classical and celestial mechanics", *Usp. Mat. Nauk.* 18, n°6 (114) 91-192 (1963).
- [11] J. MOSER : "Convergent series expansion for quasi-periodic motions", *Math. Ann.* 169, 136-176 (1967).
- [12] M. BERRY : "Semi classical Mechanics of Regular and Irregular Motion", Les Houches Summer School 1981.
- [13] N.N. BOGOLJUBOV, J.A. MITROPOLISKII, A.M.S. "Methods of Accelerated Convergence in Nonlinear Mechanics", Springer-Verlag, 1976.

- [14] G. GALLAVOTTI, "Meccanica Elementare", ed. Boringhieri, Roma, 1980.
- [15] J. BELLISSARD, Cours de Troisième Cycle, Marseille 1982-83.
- [16] H. RUSSMANN : "On the one-dimensional Schrödinger equation with a quasi-periodic potential", Ann. New York Acad. Sci. 357, 90 (1980).
- [17] J. BELLISSARD, D. TESTARD : "Almost periodic Hamiltonians : an algebraic approach", Preprint Marseille 1981.
- [18] N.B. SLATER : "Gaps and steps for the sequence  $n\theta$ , mod 1", Proc. Camb. Philos. Soc. 63, 1115-1123 (1967).
- [19] J. BELLISSARD, A. FOMOSO, R. LIMA, D. TESTARD : "Quasiperiodic interaction with a metal-insulator transition", Phys. Rev. B, vol. 26, 6 (1982).
- [20] R.L. KRONIG, W.G. PENNY, Proc. R. Soc. London 130, 499 (1931).
- [21] J. BELLISSARD, R. LIMA, E. SCOPPOLA : "Localization in  $\nu$ -dimensional incommensurate structures", Commun. Math. Phys. 88, 465-477 (1983).
- [22] S. FISHMAN, D.R. GREMPER, R.E. PRANGE : "Localization in an incommensurate potential : an exact solvable model". Univ. Maryland, 1982.
- [23] P. SARNAK : "Spectral behaviour of quasi-periodic potentials", Comm. Math. Phys. 84, 377-409 (1982).
- [24] M. SERRA : "Opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété quasi-périodique", Thèse de 3ème cycle, Marseille 1983.