

**ÉLECTRICITÉ DE FRANCE**  
DIRECTOR DES ÉTUDES ET RECHERCHES

**Service Informatique  
 et Mathématiques Appliquées**

Le 29 Décembre 1981

DOCUMENT IDENTIFIÉ PAR  
 EXPLICATIONS ET RÉFÉRENCES **EDF-824335387**

Département **MECANIQUE ET MODELES  
 NUMERIQUES**

1, Avenue du Général de Gaulle  
 92141 CLAMART  
 TEL 765 43 21

I D

Ph. DESTUYNDER\*, M. DJAOUA\*\*, S. LESCURE\*

QUELQUES REMARQUES SUR LA MECANIQUE

DE LA RUPTURE ELASTIQUE

HI/4024-07

37 Pages

**Résumé**

Nous présentons dans cet article une approche thermodynamique des lois de propagation des fissures en milieux élastiques. Le choix d'un potentiel de dissipation de l'énergie particulier nous permet d'explicitier ces lois pour des chargements cycliques. Enfin une nouvelle méthode de calcul du taux de restitution de l'énergie est proposée et discutée sur le plan numérique.

- \* Division Mécanique Théorique et Calcul des Structures.  
 EDF, DER, 1 av. du Général de Gaulle, 92141 Clamart France
- \*\* Laboratoire MAP, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France.

ACCESSIBILITE  
 X Libre  
 = EDF-GDF  
 = Restreint  
 = Confidentiel

SOME REMARKS ON ELASTIC FRACTURE MECHANICS

**Abstract**

A thermodynamical approach of propagation law in elastic media is given in this paper. From a particular choice of an energy dissipation potential, we deduce some propagation laws corresponding to particular loading cases. Finally a new computational method of the energy release rate is suggested and discussed from a computational point of view.

## INTRODUCTION

L'analyse de la fissuration (initiation - propagation) dans les milieux élastiques est une branche relativement ancienne de la mécanique. Les travaux de A.A. Griffith [1] de 1920 font encore autorité en la matière.

Mais la recherche de la sûreté dans les structures métalliques notamment (plateformes pétrolières, avions, réacteurs nucléaires ...), a stimulé les ingénieurs et les chercheurs vers une analyse de plus en plus fine de ces phénomènes.

A ce jour, de nombreux cas ont été étudiés, soit par une approche phénoménologique basée sur une observation expérimentale (J. Lemaitre, J.L. Chaboche [2] et [2 bis] ), soit par une approche analytique ou numérique consistant à décrire le comportement de la fissure et à faire ressortir les grandeurs les plus importantes (H.D. Bui [3]); soit par une approche thermodynamique c'est-à-dire une étude théorique du phénomène de dissipation d'énergie à l'aide des principes de la thermodynamique (Nguyen Q.S [4]). Bien entendu, ces différentes approches sont complémentaires.

Il est vraisemblable que l'approche phénoménologique devra compter avec les méthodes d'homogénéisation qui permettent de décrire le comportement macroscopique d'un milieu à partir des mécanismes élémentaires apparaissant au niveau microscopique (Sanchez [5]). Ainsi l'interprétation des mécanismes de fissuration infinitésimaux (croissance de trous-coalescence des microvides ... etc.) devrait conduire à une meilleure connaissance de l'énergie dissipée dans la croissance d'une fissure, et à l'aide de l'analyse thermodynamique, fournir des lois de propagation plus représentatives des phénomènes.

L'approche numérique (méthode des éléments finis) est souvent sous-estimée dans la modélisation des problèmes de mécanique. Par exemple des formulations qui sont équivalentes pour les problèmes continus peuvent présenter des avantages (ou inconvénients) très distincts dans la modélisation numérique. Cette remarque générale s'applique en particulier à la mécanique de la rupture. Ainsi les facteurs d'intensité des contraintes sur lesquels, (en élasticité) une grande partie de l'analyse

de la propagation est fondée sont moins stables (numériquement) que l'intégrale de Rice [6] à laquelle ils sont explicitement reliés et qui, en outre, a une signification mécanique importante.

Loin d'être complète, cette classification rapide des travaux en mécanique de la rupture a seulement pour but de situer l'étude que nous proposons ici.

La première partie est consacrée au formalisme thermodynamique de Nguyen Q.S. pour la fissuration des matériaux.

Le chapitre 2 traite des chargements cycliques. En utilisant une forme particulière du potentiel de dissipation de l'énergie nous déduirons des lois de propagation en fatigue et fluage en supposant que l'évolution de la fissure soit lente vis-à-vis de celle du chargement.

Ces lois d'évolution font intervenir le taux de restitution de l'énergie qui est aussi la force d'avancement de la fissure, quantité qui est reliée de manière classique aux facteurs d'intensité des contraintes (en élasticité) et à l'intégrale de J. Rice [6]. Dans le chapitre 3, nous donnons une nouvelle méthode de calcul en utilisant la méthode de dérivation lagrangienne par rapport à un domaine. Nous donnons également l'expression de la dérivée seconde de l'énergie potentielle de la structure vis-à-vis d'une évolution de la fissure. Cette dernière quantité peut s'avérer utile dans le cas de fortes variations du taux de restitution de l'énergie avec la longueur de la fissure. Elle intervient par ailleurs dans l'étude de la stabilité du matériau fissuré.

Enfin une discussion numérique concernant les différentes méthodes de calcul en mécanique de la rupture est menée d'une manière théorique au chapitre 4 et sur un plan numérique au chapitre 5.

I. - LA PRESENTATION THERMODYNAMIQUE DE LA MECANIQUE DE LA RUPTURE  
ELASTIQUE D'APRES NGUYEN Q.S. [4]

Considérons un solide  $\mathcal{J}$  représentant une fissure de longueur  $l$ . Ce solide sera supposé bidimensionnel dans ce chapitre pour fixer les idées. Les forces appliquées sont notées symboliquement  $f = (f_1, f_2)$  qu'il s'agisse de forces de volume ou de forces de surface, et les déplacements  $u = (u_1, u_2)$ . Les déformations associées sont définies par :

$$(1) \quad \gamma_{ij}(u) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

pour  $i, j \in \{1, 2\}$ .

Le tenseur de rigidité est noté  $A$ . Il est tel que :

$$(2) \quad (A\gamma)_{ij} = a_{ijkl} \gamma_{kl}(u)$$

Le solide occupe dans l'espace (le plan) l'ouvert  $\Omega(l)$  (où  $l$  désigne la longueur de la fissure existante). Nous posons par convention :

$$(3) \quad \text{Tr}(A\gamma(u) \gamma(u)) = a_{ijkl} \gamma_{ij}(u) \gamma_{kl}(u).$$

L'énergie potentielle du système constitué par le solide et les charges auxquelles il est soumis est notée  $W$  et est définie par :

$$(4) \quad W = \frac{1}{2} \int_{\Omega(l)} \text{Tr}(A\gamma(u) \gamma(u)) - f(u).$$

Cette fonctionnelle apparaît comme une fonction de  $\gamma$  et de  $l$  que nous considérons comme les paramètres d'état. A l'équilibre de la structure, nous avons d'après le Principe des Travaux Virtuels pour tout champ de déplacements cinématiquement admissibles  $v$  :

$$(5) \quad \int_{\Omega(l)} \text{Tr}(A\gamma(u) \gamma(v)) = f(v).$$

Par conséquent, l'énergie potentielle du système à l'équilibre est égale à :

$$(6) \quad W = \frac{1}{2} \int_{\Omega(l)} \text{Tr}(A\gamma(u) \gamma(u)).$$

Cette quantité représente l'énergie mécanique puisée dans le milieu extérieur que le solide est susceptible de restituer de manière réversible ou non. La progression d'une fissure de longueur  $l$ , pourra se faire grâce à la variation d'énergie potentielle par unité de longueur de fissure créée. On pose :

$$(7) \quad G = - \frac{\partial W}{\partial l}$$

que l'on appelle force thermodynamique d'avancement de la fissure ou encore taux de restitution de l'énergie mécanique.

Ainsi le solide peut consacrer l'énergie :

$$(8) \quad D = G \dot{l} ,$$

pour faire propager la fissure, de longueur  $l$ , à la vitesse  $\dot{l}$ . On conçoit fort bien que le processus de rupture est irréversible et que l'évolution de la fissure ne saurait se faire spontanément en récupérant de l'énergie du milieu ambiant. Par conséquent, nous devons avoir :

$$(9) \quad D = G \dot{l} \geq 0$$

Cette inégalité a été obtenue par Nguyen Q.S. [4], de manière plus générale, à partir d'une analyse thermodynamique basée sur les travaux de P. Germain [7] et M. Gurtin [8]. L'inégalité (9) n'est rigoureusement valable que dans le cas d'une évolution isotherme.

Dans le cas général, le second principe de la thermodynamique permet seulement d'écrire :

$$G \dot{l} \geq - D_{th}$$

où  $D_{th}$  est l'énergie thermique dissipée.

Supposons maintenant qu'il existe une fonction  $\phi$  appelée potentiel de dissipation ne dépendant que de la vitesse de propagation, que nous supposons convexe et semi-continue inférieurement et en outre telle que :

$$(10) \quad G = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{l}} (\dot{l})$$

ou encore :

$$(11) \quad G \in \partial\phi(\dot{\epsilon}),$$

si  $\phi$  n'est pas dérivable,  $\partial\phi$  désignant le sous-gradient de  $\phi$  en  $\dot{\epsilon}$ .

La théorie des fonctions convexes [10] nous permet d'inverser la relation (10) (ou (11)) à l'aide de la fonction polaire de  $\phi(\dot{\epsilon})$ , soit  $\phi^*(G)$ . Nous obtenons ainsi :

$$(12) \quad \dot{\epsilon} = \frac{\partial\phi^*}{\partial G}(G),$$

ou encore dans le cas non dérivable :

$$(13) \quad \dot{\epsilon} \in \partial\phi^*(G).$$

Un cas particulier correspond au potentiel de dissipation du type Norton [10]:

$$\phi(\dot{\epsilon}) = \frac{C}{p} |2 \gamma \dot{\epsilon}|^p, \quad p \geq 1$$

où  $\gamma$  est l'énergie nécessaire pour créer une aire unitaire dans le solide et  $C$  une constante d'homogénéité. Dans ce cas, les relations (12) et (13) conduisent respectivement à la loi d'évolution

$$(14) \quad 1^\circ) \text{ si } p > 1, \quad \dot{\epsilon} = \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{G}{\gamma C}\right)^{q-1}$$

$$\text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ou

$$(15) \quad 2^\circ) \text{ si } p = 1, \quad G \dot{\epsilon} = \max H \dot{\epsilon} \\ |H| \leq 2 \gamma C,$$

qui n'est autre que le principe de Griffith [1].

Nous nous proposons dans la suite de cet article de déduire des relations (14) et (15), des critères de propagation des fissures dans des structures soumises à des chargements cycliques.

II. - COMPORTEMENT D'UNE FISSURE EN MILIEU ELASTIQUE SOUMIS A UN CHARGEMENT CYCLIQUE

Nous proposons ici quelques calculs fort simples basés sur la relation (14) et permettant de déduire quelques renseignements pratiques lorsque la structure est soumise à un chargement quasi-statique de la forme :

$$(16) \quad f(t) = f_0 \lambda(t),$$

où  $\lambda(t)$  est une fonction du temps  $t$ , périodique (de période  $T$ ), et  $f_0$  une charge fixée.

Le taux de restitution de l'énergie défini en (7) est proportionnel au carré du chargement et donc à  $\lambda^2(t)$ . Nous poserons donc :

$$(17) \quad G = G_0 \lambda^2(t)$$

$G_0$  étant le taux de restitution de l'énergie potentielle de la structure soumise au chargement  $f_0$ .

La loi d'évolution (14) permet donc d'écrire :

$$(18) \quad \dot{z} = \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{G_0}{2\gamma C} \right)^{q-1} \lambda(t)^{2(q-1)}$$

En intégrant cette relation sur une période  $T$  nous obtenons une relation similaire à celle donnée par exemple par J. Lemaitre ([2 bis] p. 436) :

$$(19) \quad 2\gamma \int_{z(a)}^{z(T)} \left( \frac{2\gamma C}{G_0(z)} \right)^{q-1} dz = \int_0^T \frac{2(q-1)}{\lambda(t)} dt$$

On remarquera que le premier membre de cette égalité est une caractéristique du chargement  $f_0$  et du matériau constituant la structure tandis que le second membre ne dépend que de l'évolution du chargement dans le temps.



En imaginant un processus d'évolution de la fissure relativement lent vis-à-vis de la période T, on peut supposer que  $G_0(l)$  est constant sur un nombre N de périodes de chargement.

De l'équation (19) nous déduisons donc que :

$$(20) \quad \frac{l(T) - l(0)}{T} = \frac{1}{2 \gamma T} \left( \frac{G_0(l(0))}{2 \gamma C} \right)^{q-1} \int_0^T \lambda(t)^{2(q-1)} dt.$$

On pose symboliquement

$$\frac{dl}{dN} = \frac{l(T) - l(0)}{T}$$

La relation (20) que l'on obtient est très similaire aux lois de Paris [9] pour la propagation des fissures en fatigue. On notera cependant que cette expression ne dépend pas uniquement des variations de charge mais aussi de la valeur moyenne; il apparaît donc un phénomène de fluage.

Nous nous proposons de détailler la formule (20) pour quelques cas particuliers.

### 2.1. - Cas d'un chargement de moyenne nulle

Nous choisirons dans ce paragraphe un chargement (i.e. une fonction  $\lambda_0(t)$ ), du type de celle de la figure 2.1.

Un simple calcul conduit à l'expression :

$$(21) \quad \frac{dl}{dN} = \frac{1}{8\gamma} \left( \frac{G_0(l(0))}{2 \gamma C} \right)^{q-1} \frac{\Delta \lambda}{2} \frac{2(q-1)}{q-1}$$

où  $\Delta \lambda$  est défini sur la figure 2.1.

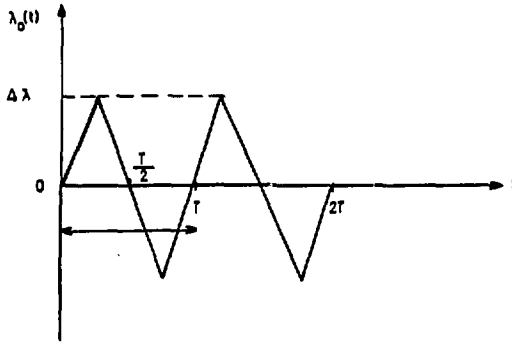


Figure 2.1

Dans ce cas, nous avons un phénomène de fatigue pure au sens où seule intervient la variation du chargement. L'analogie avec les lois de Paris traditionnelles est donc évidente mais soulignons qu'il s'agit d'un chargement de moyenne nulle.

A titre de comparaison nous remarquerons que pour un chargement à palier, comme celui de la figure 2.2, nous avons la loi de propagation

$$(22) \quad \frac{d\ell}{dN} = \frac{1}{4\gamma} \left( \frac{G_0(\ell(0))}{2 - \gamma C} \right)^{q-1} \Delta\lambda^{2(q-1)}$$

La vitesse de propagation est donc supérieure d'un facteur  $2(2 - q - 1)$ .

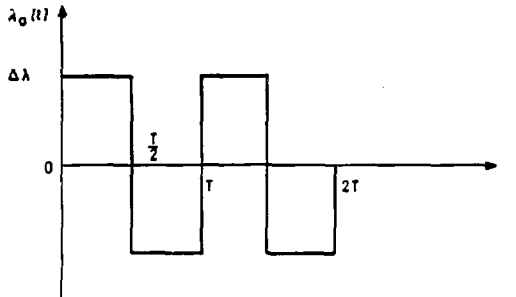


Figure 2.2

2.2. - Cas d'un chargement de moyenne non nulle

Nous poserons dans ce paragraphe :

$$\lambda_m = \frac{1}{T} \int_0^T \lambda(t) dt,$$

et nous supposons par exemple que  $\lambda_m > 0$ . Le chargement considéré est de la forme (cf. figure 2.3) :

$$\lambda(t) = \lambda_m + \lambda_0(t).$$

Un simple calcul nous conduit cette fois à l'expression :

$$(23) \quad \frac{dz}{dN} = \frac{1}{4\gamma} \left( \frac{G_0(z_0)}{2\gamma C} \right)^{q-1} \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda(2^{2q-1})} \left[ \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m}\right)^{2q-1} - \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m}\right)^{2q-1} \right].$$

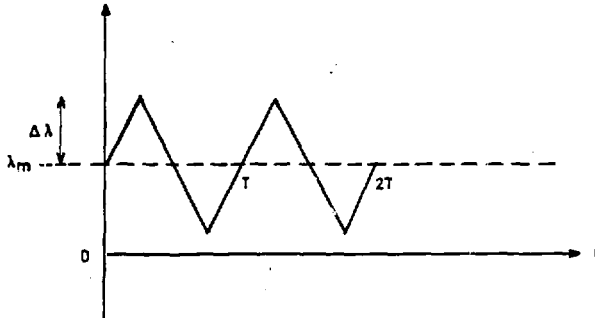


Figure 2.3

Supposons maintenant que la variation relative  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_m}$  soit faible devant l'unité. En utilisant le développement limité :

$$(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \dots \text{etc.}$$

nous obtenons une expression approchée de la vitesse de propagation d'une fissure à partir de la formule (23) :

$$(24) \quad \frac{d\dot{\epsilon}}{dN} = \left( \frac{G_o(\dot{\epsilon}(o))}{2 \gamma C} \right)^{q-1} \frac{\lambda_m}{2\gamma} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m} \right)^2 (q-1)(2q-3) \right]$$

Contrairement à l'expression (21), nous voyons apparaître ici une contribution de fluage; c'est-à-dire un terme de vitesse de propagation indépendant des variations de chargement, défini par :

$$(25) \quad v_{f\dot{\epsilon}} = \left( \frac{G_o(\dot{\epsilon}(o))}{2 \gamma C} \right)^{q-1} \frac{\lambda_m}{2\gamma}$$

tandis que la vitesse de fatigue est définie dans ce cas par :

$$(26) \quad v_{fa} = v_{f\dot{\epsilon}} \frac{(q-1)(2q-3)}{3} \left( \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m} \right)^2$$

REMARQUE 2.1 - Le coefficient q est une caractéristique du potentiel de dissipation relié à p par la formule :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

il est d'autant plus grande que l'on choisit p voisin de l'unité, c'est-à-dire que le potentiel est voisin de celui de Griffith :

$$\phi(\dot{\epsilon}) = |2 \gamma \dot{\epsilon}|$$

Dans ce cas nous pouvons donner une autre expression approchée de la formule (23). En utilisant la relation :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x,$$

nous obtenons pour q grand :

$$\frac{d\dot{\epsilon}}{dN} = \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{G_o(\dot{\epsilon}(o))}{2 \gamma C} \right)^{q-1} \frac{\lambda_m}{2\gamma} \frac{\text{sh} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m} (2q-1)}{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_m} (2q-1)}$$

REMARQUE 2.2 - Considérons une structure soumise à plusieurs chargements distincts et simultanés. Posons par exemple :

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) f_i$$

Le taux de restitution de l'énergie est une forme quadratique symétrique du chargement. Nous pouvons donc écrire :

$$G(\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) f_i) = \sum_{i,j=1,n} \lambda_i(t) \lambda_j(t) g_{ij}$$

où  $g_{ii} = G(f_i)$ , et  $g_{ij}$  sont des coefficients de corrélation des chargements  $i$  et  $j$ ).

Désignons par  $G_{\max}$  la plus grande valeur propre du tenseur  $g_{ij}$  (qui est réelle car  $g_{ij} = g_{ji}$ ). La formule (20) nous conduit alors à l'estimation suivante sur la vitesse de propagation de la fissure :

$$\frac{d\ell}{dN} \leq \frac{1}{2 \gamma T} \left( \frac{G_{\max}}{2 \gamma C} \right)^{q-1} \int_0^T \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(t) \right)^{q-1} dt$$

En outre cette borne supérieure est optimale au sens où elle est atteinte pour une combinaison particulière des chargements. On remarquera que cette borne est supérieure à la somme des vitesses de propagation dues aux chargements appliqués indépendamment.

### III. - UNE NOUVELLE METHODE DE CALCUL DU TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la connaissance de  $G$ , appelé taux de restitution de l'énergie, permet d'évaluer la vitesse de propagation de la fissure.

Une nouvelle méthode de calcul de cette quantité est proposée ci-après, basée sur la notion de dérivée par rapport à un domaine en repérage de Lagrange. Cette notion relativement ancienne a été formulée de manière générale dans P. Germain [7]. Il existe en effet deux façons de dériver une fonctionnelle définie sur un ouvert variable :

- la méthode Lagrangienne qui consiste à travailler sur une configuration de référence occupée par le solide à un instant donné.

- la méthode eulérienne où l'on observe le mouvement du domaine dans un repère global. Des difficultés considérables apparaissent dans la deuxième méthode, dues à la nécessité de prolonger des fonctions définies sur les ouverts variables sur un ouvert plus grand de façon à pouvoir les

comparer. Au contraire, la méthode lagrangienne nous permet de travailler directement sur un ouvert fixe et de contourner ces difficultés.

### 3.1. - La formulation Lagrangienne

Considérons un solide occupant dans l'espace l'ouvert  $\Omega$  (considéré comme milieu tridimensionnel). Ce solide présente une fissure similaire à la figure 1.

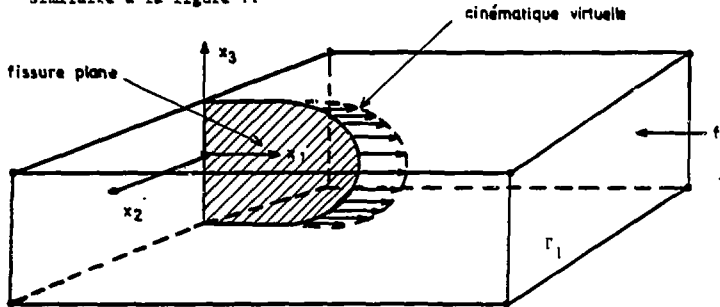


Figure 3.1

Imaginons une suite d'ouverts indexés par le paramètre  $\epsilon > 0$  tels que :

$$\Omega^\epsilon = F^\epsilon(\Omega)$$

où  $F^\epsilon$  est l'application de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même, définie par :

$$\forall M \in \Omega ; M^\epsilon = F^\epsilon(M) = M + \epsilon \theta(M),$$

$\theta$  désignant un champ de vecteurs défini sur  $\Omega$  vérifiant les propriétés suivantes :

- (i)  $\theta$  est parallèle au plan de fissure.
- (ii)  $F^\epsilon(\Omega) \subset \Omega$
- (iii) le support de  $\theta$  est limité à un voisinage de la fissure où aucune force n'est appliquée.

(iv) les composantes du vecteur sont au moins lipschitziennes.

$$(v) \int_{\Omega} \operatorname{div} \theta = 1.$$

Le champ  $\theta$  est par définition la cinématique virtuelle de fond de fissure. La condition (v) assure que l'aire créée dans une telle cinématique est unitaire, le mouvement étant considéré comme infinitésimal.

A chacun des ouverts  $\Omega^{\varepsilon}$ , correspond un problème d'élasticité que nous formulerons ainsi :

$$(27) \left\{ \begin{array}{l} \forall \tau \text{ champ de contraintes virtuel } \int_{\Omega^{\varepsilon}} \operatorname{Tr} (A \sigma^{\varepsilon} \tau) = \int_{\Omega^{\varepsilon}} \operatorname{Tr} (\tau \frac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial M^{\varepsilon}}) \\ \forall v \text{ cinématiquement admissible } \int_{\Omega^{\varepsilon}} \operatorname{Tr} (\sigma^{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial M^{\varepsilon}}) = \int_{\Gamma_1} \bar{f} v \end{array} \right.$$

où  $A$  est le tenseur d'élasticité,  $M^{\varepsilon}$  un point générique de  $\Omega^{\varepsilon}$  et  $(\sigma^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})$  les champs de contraintes et de déplacements solutions des équations (27), et  $\Gamma_1$  la portion de frontière où  $f$  est appliquée.

Nous supposons, pour simplifier cet exposé (cf. iii) qu'il n'y a pas de forces appliquées dans la partie variable (avec  $\varepsilon$ ) de  $\Omega^{\varepsilon}$ .

Posons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^* = \sigma^{\varepsilon} \circ F^{\varepsilon}, \\ u^* = u^{\varepsilon} \circ F^{\varepsilon}, \end{array} \right.$$

qui sont les variables de Lagrange définies sur  $\Omega$  et associées à  $\sigma^{\varepsilon}$  et  $u^{\varepsilon}$ .

Un simple calcul nous permet d'écrire les relations (27) sous la forme :

$$(28)1 \left\{ \begin{array}{l} \forall \tau \quad \int_{\Omega} \text{Tr}(A \sigma^* \tau) - \int_{\Omega} \text{Tr}(\tau \frac{\partial u^*}{\partial M} (I + \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial M})^{-1}), \\ \\ \forall v \text{ cinématiquement} \\ \text{admissible sur } \Omega \quad \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^* \frac{\partial v}{\partial M} (I + \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial M})^{-1} \det (I + \epsilon \frac{\partial \theta}{\partial M})) = \int_{\Gamma_1} \bar{f} v. \end{array} \right.$$

Le théorème des fonctions implicites [11] nous permet alors d'écrire [12] :

$$(28)2 \quad (\sigma^*, u^*) = (\sigma^0, u^0) + \epsilon(\sigma^1, u^1) + \epsilon^2(\sigma^2, u^2) + \epsilon^2 O(\epsilon),$$

où  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} O(\epsilon) = 0$ ,  
quand  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

et où les termes  $(\sigma^p, u^p)$  sont définis de la façon suivante ( $u^p$  étant un champ de déplacements cinématiquement admissible, en abrégé c.d.c.a.) :

$(\sigma^0, u^0)$ , qui est la solution du problème d'élasticité posé sur  $\Omega$ , vérifie donc :

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} \forall \tau \quad \int_{\Omega} \text{Tr}(A \sigma^0 \tau) - \int_{\Omega} \text{Tr}(\tau \frac{\partial u^0}{\partial M}) = 0, \\ \\ \forall v \text{ c.d.c.a.}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^0 \frac{\partial v}{\partial M}) = \int_{\Gamma_1} \bar{f} v. \end{array} \right.$$

$(\sigma^1, u^1)$  est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \tau \quad \int_{\Omega} \text{Tr}(A \sigma^1 \tau) - \int_{\Omega} \text{Tr}(\tau \frac{\partial u^1}{\partial M}) = - \int_{\Omega} \text{Tr}(\tau \frac{\partial u^0}{\partial M} \frac{\partial \theta}{\partial M}), \\ \\ \forall v \text{ c.d.c.a.}, \quad \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^1 \frac{\partial v}{\partial M}) = - \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^0 \frac{\partial v}{\partial M}) \text{div } \theta + \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^0 \frac{\partial v}{\partial M} \frac{\partial \theta}{\partial M}). \end{array} \right.$$



$(\sigma^2, u^2)$  est défini par :

$$(30) \left\{ \begin{aligned} & \forall \tau \quad \int_{\Omega} \text{Tr} (A \sigma^2 \tau) - \int_{\Omega} \text{Tr}(\tau \frac{\partial u^2}{\partial M}) = \int_{\Omega} \text{Tr}(\tau \frac{\partial u^0}{\partial M} (\frac{\partial \theta}{\partial M})^2) - \\ & \quad \quad \quad 2 \int_{\Omega} \text{Tr}(\tau \frac{\partial u^1}{\partial M} \frac{\partial \theta}{\partial M}) \\ & \forall v \text{ c.d.c.a.}, \int_{\Omega} \text{Tr} (\sigma^2 \frac{\partial v}{\partial M}) = - \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^0 \frac{\partial v}{\partial M} \frac{\partial \theta}{\partial M})^2 + \\ & \quad \quad \quad 2 \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^1 \frac{\partial v}{\partial M} \frac{\partial \theta}{\partial M}) - 2 \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^1 \frac{\partial v}{\partial M}) \text{div } \theta - \\ & \quad \quad \quad \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^0 \frac{\partial v}{\partial M}) \det(\frac{\partial \theta}{\partial M}). \end{aligned} \right.$$

### 3.2. - Calcul des dérivées de l'énergie potentielle

Par définition, l'énergie potentielle du système - solide et forces appliquées - est égale à (cf. introduction et chapitre 1) :

$$(31) \quad W = - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \bar{f} u^E$$

Nous définissons les dérivées de cette quantité par rapport au domaine  $\Omega$  et dans une cinématique virtuelle  $\theta$  par :

$$(32) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \Omega}(\theta) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{W(\Omega^\epsilon) - W(\Omega)}{\epsilon} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \Omega^2}(\theta, \theta) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial W(\Omega^\epsilon)}{\partial \Omega}(\theta) - \frac{\partial W(\Omega)}{\partial \Omega}(\theta)}{\epsilon} \end{aligned} \right.$$

Compte tenu de l'expression (28)2 nous obtenons donc :

$$(33) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \Omega}(\Omega)(\theta) &= - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \bar{f} u^1, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \Omega^2}(\Omega)(\theta, \theta) &= - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \bar{f} u^2, \\ &\text{etc.} \end{aligned} \right.$$

Un simple jeu d'égalité nous permet d'écrire à l'aide des relations (29), (30), (32), (33)

$$(34) \quad \frac{\partial W}{\partial \Omega}(\Omega)(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^0 \frac{\partial u^0}{\partial M}) \text{div } \theta - \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^0 \frac{\partial u^0}{\partial M} \frac{\partial \theta}{\partial M}),$$

$$(35) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \Omega^2}(\Omega)(\theta, \theta) &= \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^0 \frac{\partial u^0}{\partial M} \frac{\partial \theta}{\partial M} \frac{\partial \theta}{\partial M}) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^0 \frac{\partial u^0}{\partial M}) \det \frac{\partial \theta}{\partial M} - \\ &\int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^0 \frac{\partial u^0}{\partial M} \frac{\partial \theta}{\partial M}) \text{div } \theta - \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^0 \frac{\partial u^1}{\partial M} \frac{\partial \theta}{\partial M}) - \\ &\int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^1 \frac{\partial u^0}{\partial M} \frac{\partial \theta}{\partial M}) + \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma^1 \frac{\partial u^0}{\partial M}) \text{div } \theta. \end{aligned} \right.$$

REMARQUE 3.1 - Les expressions établies ci-dessus sont valables aussi bien en bidimensionnel qu'en tridimensionnel.

### 3.3. - Relations entre les dérivées de l'énergie, les intégrales de Rice et les facteurs d'intensité des contraintes

Dans le cas d'un problème tridimensionnel, la nature exacte de la solution au voisinage du fond de fissure n'est pas connue. On se limitera donc, dans ce cas, aux expressions (34) et (35) des dérivées de l'énergie pour estimer le taux de restitution de l'énergie (qui est une grandeur vectorielle). C'est la connaissance de cette expression qui nous a permis par exemple dans [15], d'en déduire une loi originale de propagation des fissures pour les plaques minces en flexion, qui ne pouvait être obtenue à l'aide de considérations bidimensionnelles (théorie classique des plaques).

On notera cependant que les mécanismes de propagation admissibles, c'est-à-dire les champs de déplacements  $\theta$  sont tels que les hypothèses (i), (ii), (iii), (iv) et (v) doivent être vérifiées. Ainsi on ne peut construire de champ  $\theta$  conduisant à un branchement de fissure.

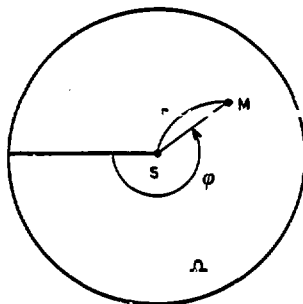


Figure 3.2

Dans le cas bidimensionnel, le comportement de la solution, au voisinage du fond de fissure est beaucoup mieux connu. On sait ainsi que le champ de déplacement  $u^0$  solution du problème d'élasticité plane (28) est de la forme :

$$(36) \quad u^0 = \kappa_1^0 \sqrt{r} S_1(\varphi) + \kappa_2^0 \sqrt{r} S_2(\varphi) + u^{0,R}$$

où  $(r, \varphi)$  désignent les coordonnées polaires autour du fond de fissure (cf. figure 3.2),  $S_1(\varphi)$  et  $S_2(\varphi)$  deux vecteurs dont les composantes sont des fonctions de l'angle  $\varphi$ . Le déplacement  $u^{0,R}$  est lui "régulier", au sens où il est au moins de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage du fond de fissure. Dans le cas d'un matériau homogène de module de Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ , un simple calcul [12] permet de montrer que :

$$(37) \quad \frac{\partial W}{\partial \Omega}(\Omega)(\theta) = \begin{cases} -\frac{1}{E} [(K_1^0)^2 + (K_2^0)^2] & \text{en contrainte plane,} \\ -\frac{1-\nu^2}{E} [(K_1^0)^2 + (K_2^0)^2] & \text{en déformation plane.} \end{cases}$$

L'utilisation de la formule de Stokes [14], permet de donner une autre expression du taux de restitution de l'énergie à l'aide d'une intégrale de contour, connue sous le nom d'intégrale de Rice [6] (cf. figure 3.3).

$$(38) \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{n}}(\bar{n})(\theta) = + \frac{1}{2} \int_C \text{Tr}(\sigma^o \frac{\partial u^o}{\partial \bar{M}}) \bar{\theta} \cdot \bar{n} - \int_C \bar{n} \sigma^o \frac{\partial u^o}{\partial \bar{M}} \theta,$$

dans l'expression ci-dessus,  $\bar{n}$  est la normale unitaire rentrante à la courbe C qui entoure le fond de fissure. La courbe C par ailleurs est intérieure à un voisinage  $v$  du fond de fissure où  $\theta$  est constant. Avec les axes de la figure 3.3 nous avons :

$$(39) \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'expression (38) de  $\frac{\partial W}{\partial \bar{n}}(\bar{n})(\theta)$  est en outre indépendante du contour C pourvu que celui-ci satisfasse aux conditions précédentes. L'indépendance vis-à-vis de  $\theta$  découle de l'égalité (36).

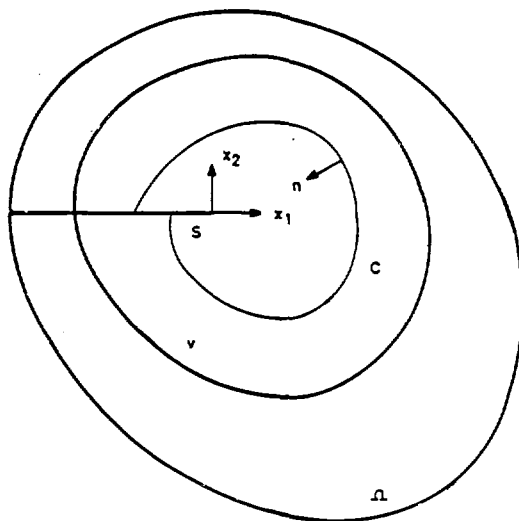


Figure 3.3

REMARQUE 3.2 - L'expression de la dérivée seconde de l'énergie potentielle explicitée en (35), montre que cette quantité ne dépend pas uniquement de l'état des contraintes dans la structure fissurée, mais aussi des variations de cet état des contraintes lors de l'évolution de la fissure (termes  $\sigma^l$  et

u<sup>1</sup>). Si l'on définit la stabilité du matériau (du système) par la positivité de la dérivée seconde de l'énergie, nous devons avoir :

$$(40) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \Omega^2}(\Omega)(\theta, \theta) > 0.$$

Il peut donc être intéressant de disposer de cette quantité (numériquement) pour étudier la stabilité d'une fissure. Lorsque la condition (40) est satisfaite, nous pouvons donner une vitesse de propagation instantanée de la fissure en théorie de Griffith de la façon suivante.

Reprenons le critère de Griffith formulé en (15). La fissure peut se propager si et seulement si  $G = 2 \gamma C$ . Nous en déduisons en particulier que :

$$\dot{G} \dot{\lambda} = 0$$

par un raisonnement similaire à celui fait en plasticité [7].

D'où compte tenu de (9) et de :

$$(\dot{\lambda})^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \Omega^2}(\Omega)(\theta, \theta) + \frac{\partial^2 W}{\partial \Omega \partial u}(\Omega)(\theta) \dot{u} \dot{\lambda} = 0$$

nous déduisons :

$$(41) \quad \dot{\lambda} = \left[ \frac{-\frac{\partial^2 W}{\partial \Omega \partial u}(\Omega)(\theta) \dot{u}}{\frac{\partial^2 W}{\partial \Omega^2}(\Omega)(\theta, \theta)} \right]^+.$$

Si nous choisissons un chargement de la forme

$$f(t) = f_0 \lambda(t)$$

et si nous supposons que, sur un intervalle de temps T, nous avons un chargement croissant tel que, à chaque instant :

$$(42) \quad G = 2 \gamma C$$

alors l'incrément de longueur de la fissure est obtenu en intégrant (41) sur [0, T] ; soit :

$$(43) \quad \Delta l = C \operatorname{Log} \left| \frac{\lambda(T)}{\lambda(o)} \right|$$

où C est une constante que l'on peut déterminer à l'aide de  $\frac{\partial^2 W}{\partial \Omega \partial u}(\Omega)(\theta)$  à et  $\frac{\partial^2 W}{\partial \Omega^2}(\Omega)(\theta, \theta)$ . On pourrait être tenté d'utiliser la formule (43) pour étudier la propagation en fatigue des matériaux. En effet, l'incrément de fissure ne dépend que de l'incrément de charge. Mais la condition (42) implique en posant :

$$G = G_o(l) \lambda^2(\epsilon)$$

que nous ayons à chaque instant

$$G_o(l) \lambda^2(\epsilon) = 2 \gamma C,$$

et par conséquent :

$$G_o(l(T)) \lambda^2(T) = 2 \gamma C.$$

Lors d'une décharge, sauf instabilité du matériau, on ne peut conserver la valeur du taux de restitution de l'énergie. Ainsi l'initiation de la propagation qui avait eu lieu pour l'amplitude  $\lambda(o)$  du chargement ne pourra plus se faire que pour l'amplitude  $\lambda(T)$ . On ne saurait donc envisager des phénomènes cycliques. Nous conviendrons de dire qu'à moins d'une instabilité du matériau, la structure fissurée obéissant à une loi de Griffith s'adapte en un cycle de chargement. Cette dernière remarque, due à J.J. MARIGO, montre que la théorie de Griffith ne permet pas d'analyser les phénomènes de fatigue.

#### IV. - LES METHODES NUMERIQUES DE CALCUL DU TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE

De nombreux travaux ont été publiés sur ce sujet. Nous distinguerons deux familles de méthodes. La première d'entre elles regroupe les modélisations numériques utilisant explicitement la connaissance des fonctions singulières au fond de fissure, c'est-à-dire le comportement de la solution du problème d'élasticité au voisinage du fond de fissure. Dans la seconde famille, nous engloberons les schémas de calculs numériques n'utilisant pas ces fonctions singulières.

4.1. - Famille des méthodes utilisant la singularité

- (i) La méthode d'identification locale préconisée par de nombreux codes de construction ou de réglementation, est la plus célèbre. Elle consiste à identifier un calcul numérique de la solution du problème (21) avec un développement au voisinage du fond de fissure de la forme de celui donné en (35). On en déduit une valeur approchée des coefficients d'intensité des contraintes; soient  $K_1^h$  et  $K_2^h$  ces valeurs. En utilisant des résultats théoriques d'estimation d'erreur en éléments finis, on établit que pour des éléments finis du premier degré, l'erreur entre  $(K_1, K_2)$  et  $(K_1^h, K_2^h)$  est en  $O(h^{1/3})$  où  $h$  désigne la taille des éléments utilisés. Les résultats théoriques en question sont dus à Schatz et Wahlbin [14], [15], [16], et sont très utiles pour établir les résultats que nous mentionnerons dans la suite de ce chapitre.
- (ii) L'idée la plus répandue parmi les analystes numériques et qui est due à P. Grisvard, consiste à ajouter à l'espace des fonctions générées par la méthode des éléments finis, deux fonctions (vectorielles) représentant le comportement singulier de la solution  $u$  du problème (21). Cette méthode a été testée numériquement dans [17]. On y démontre également que l'estimation d'erreur sur les facteurs d'intensité des contraintes est en  $O(\sqrt{h})$ , lorsque l'espace d'éléments finis est généré à l'aide d'éléments finis du premier degré.
- (iii) L'introduction d'éléments finis singuliers, qui ne semble pas conduire aux résultats escomptés par leur promoteur, consiste à entourer le fond de fissure d'éléments finis dont les fonctions de base sont sensées représenter le comportement local de la solution. Il semble que parmi les différentes propositions, seul l'élément triangulaire du second degré isoparamétrique, dit des noeuds aux quarts, [18] (p. 672) soit encore considéré.
- (iv) C'est encore la connaissance du comportement local de la solution qui a permis à Raugel [19], de proposer des lois de raffinement de maillage conduisant à une meilleure approximation de la solution, et par conséquent des facteurs d'intensité des contraintes. Cette méthode a été reprise par I. Babuska [20] et fait l'objet de nombreuses publications par cet auteur. Son originalité consiste à

remplacer la connaissance a priori de la solution par une estimation a posteriori, idée déjà ancienne et due à notre connaissance à P. Ladevèze [21], [22].

#### 4.2. - Famille de méthodes n'utilisant pas la singularité

- (i) La plus connue de ces méthodes est incontestablement l'intégrale de Rice [6] appelée aussi intégrale J. C'est l'intégrale donnée en (38), c'est-à-dire :

$$(44) \quad J = \frac{1}{2} \int_C \text{Tr}(\sigma^o \frac{\partial u^o}{\partial M}) \bar{\theta} n - \int_C \bar{n} \sigma^o \frac{\partial u^o}{\partial M} \theta,$$

$\theta$  désignant le champ de vecteur (39).

L'indépendance de cette intégrale vis à vis du contour C lui donne une indiscutable souplesse d'emploi. Mais la réalité numérique est légèrement différente. Pour avoir une bonne approximation de J, on doit en effet disposer d'une bonne approximation locale des contraintes  $\sigma^o$  et des dérivées du déplacement u. L'expérience numérique aussi bien que la théorie de l'erreur en éléments finis nous apprennent que ces quantités sont mal approchées par une méthode d'éléments finis, ou du moins que la qualité de l'approximation est nettement inférieure à celle obtenue pour ces mêmes grandeurs, mais en tant que fonctions distribuées sur un ouvert; c'est-à-dire au sens de l'espace  $L^2(\Omega)$ , en utilisant la terminologie mathématique.

Pour surmonter cette difficulté, il s'est avéré pratiquement indispensable de moyenner les contraintes et les déformations avant de calculer J par la formule (44). Les règles de conception qui préconisent l'emploi de cette méthode sont d'ailleurs très évasives sur l'utilisation pratique pourtant fondamentale.

- (ii) La seconde approche que nous proposons dans cet article a déjà été annoncée dans d'autres publications [12], [23]. C'est ce que nous baptiserons la méthode de l'intégrale G. Elle consiste à calculer le taux de restitution de l'énergie à l'aide de la formule (34). Sans entrer dans les détails techniques des démonstrations données dans [12] et [23], soulignons quelques résultats théoriques d'analyse numérique qui justifient notre méthode.



Supposons tout d'abord que le problème (21) soit résolu par une méthode d'éléments finis linéaires par morceaux. Désignons par  $G^h$  l'expression approchée associée par la formule (34). Nous avons alors l'estimation :

$$|G - G^h| = O(h),$$

et ce, pour tout champ  $\theta$  vérifiant les conditions (i) (ii) (iii) (iv) et (v) du chapitre III.

REMARQUE 4.1 - Contrairement aux autres méthodes de calcul, aucun traitement spécial du modèle numérique n'est nécessaire. ■

REMARQUE 4.2 - Le champ  $\theta$  retenu dans la formule (34) est arbitraire pourvu qu'il satisfasse les conditions mentionnées ci-dessus. Pratiquement on le prendra constant sur un voisinage du fond de fissure délimité par des arêtes de la triangulation de  $\Omega$ , affine sur la couronne suivante d'éléments finis et nul sur le reste de  $\Omega$ , (cf. figure 4.1). On choisira la couronne à laquelle se réduit le calcul de l'intégrale (34), suffisamment éloignée de  $S$  pour bénéficier d'une bonne précision de la solution continue à l'aide de la méthode d'éléments finis. ■

Cette méthode peut être améliorée de la façon suivante : désignons par  $D_1$  une couronne autour de  $S$  strictement incluse dans une autre couronne  $D$  entourant également  $S$  (cf. figure 4.2). Nous utiliserons l'espace d'approximation suivant. Les fonctions seront des polynômes du premier degré sur tous les éléments du maillage de  $\Omega$ , sauf sur la couronne  $D$  (dont la frontière coïncidera avec les arêtes du maillage) où nous choisirons des polynômes du second degré (cf. figure 4.2). On démontre alors dans [23] que l'erreur entre  $G$  et  $G^h$  calculée par la formule (34) est cette fois en  $O(h^{3/2})$ ,  $h$  désignant la taille des éléments de la triangulation de  $\Omega$ , le champ  $\theta$  étant choisi constant hors de la couronne  $D_1$ . Le calcul de  $G^h$  se limite donc à celui d'une intégrale sur  $D_1$ .

REMARQUE 4.3 - On peut se poser la question suivante : "pourquoi faut-il une méthode de calcul précise de  $G$  alors que dans le critère de propagation interviennent des données expérimentales entachées de fortes erreurs ?".

Il y a plusieurs réponses.

Tout d'abord il serait contraire au bon sens de ne pas utiliser une méthode précise qui est simple à mettre en oeuvre (sur un plan informatique) et permet de ne pas faire intervenir des raffinements de maillages toujours coûteux et complexes à manipuler lors d'une évolution de fissure.

Mais si, de plus, on utilise cette valeur de  $G$  dans une loi de propagation du type Paris (cf. chapitre 2) :

$$(45) \quad \frac{dL}{dN} = C (G)^m$$

il apparaît que l'erreur relative sur la vitesse de propagation de la fissure est  $m$  fois l'erreur relative sur  $G$ . Ainsi pour la valeur  $m = 4$  (valeur supérieure relevée dans les codes de construction des matériaux nucléaires), une erreur de 10% sur  $G$  (ou de 5% sur les facteurs d'intensité des contraintes car  $G \sim K^2$ ) conduit à une erreur relative de 40% sur la durée de vie du matériau estimée à l'aide de la loi (45). ■

Ces résultats de convergence, que nous avons seulement mentionnés ici, sont incontestablement en faveur de la méthode de calcul proposée. Dans le prochain chapitre nous nous proposons de montrer la validité numérique de cette nouvelle méthode.

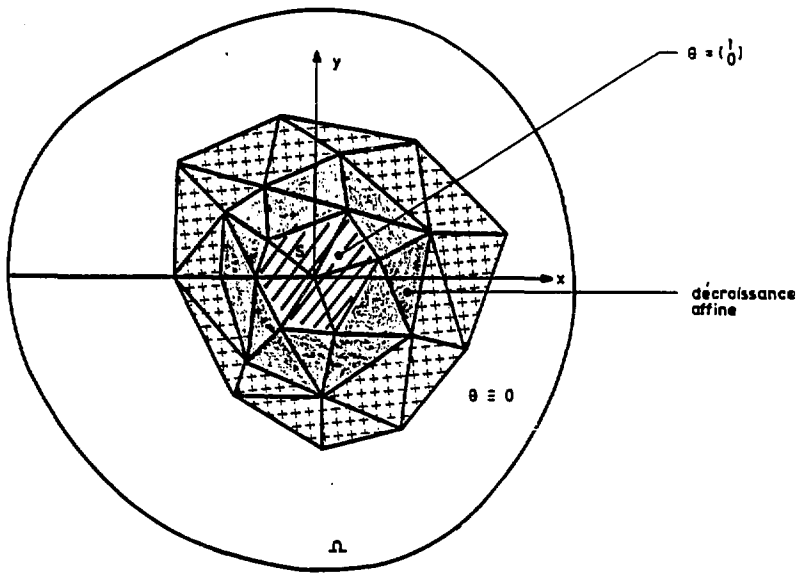


Figure 4.1

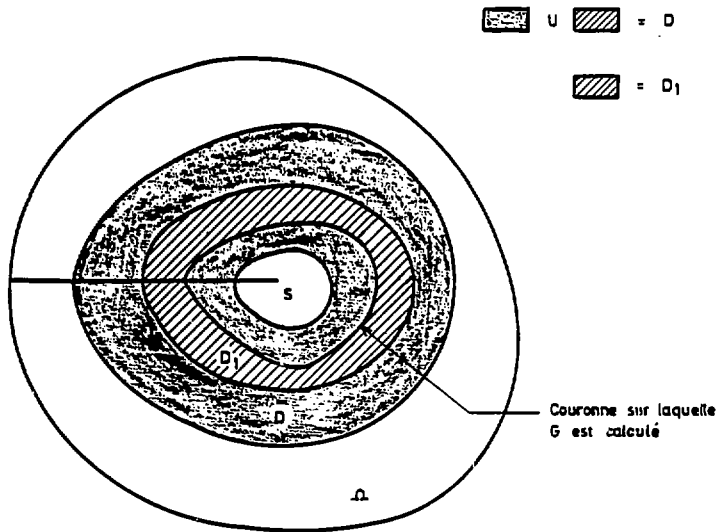


Figure 4.2

## V. - ETUDE NUMERIQUE DE LA METHODE PROPOSEE

Ce chapitre est consacré à des résultats d'essais numériques. Nous nous proposons de comparer différentes méthodes de calcul du taux de restitution de l'énergie G, mentionnées au chapitre IV. Nous avons retenu trois méthodes. La méthode d'identification locale et l'intégrale de Rice qui sont actuellement les plus utilisées, et bien entendu la méthode de calcul de G que nous proposons.

Les calculs ont été effectués sur une éprouvette plane (en contraintes planes), et à l'aide du programme de calcul par éléments finis ASKA (Université de Stuttgart).

### V.1. - Modélisation de l'éprouvette (cf. figure 5.1).

. Géométrie : 60 mm × 60 mm × 1 mm  
(fissure 6 mm)

. Caractéristiques mécaniques :

$$E = .2 \cdot 10^5 \text{ daN/mm}^2$$
$$\nu = .3$$

. Trois cas de charge sont étudiés :

. Ce sont des tractions sur le bord latéral de l'éprouvette :

- 1\*) chargement sur toute la longueur d'une densité  $d = 1000 \text{ daN/mm}$ ,
- 2\*) chargement sur la demi-longueur côté fissure ;  $d = 467 \text{ daN/mm}$ ,
- 3\*) chargement sur la longueur de la fissure ;  $d = 100 \text{ daN/mm}$ .

. Conditions aux limites :

En raison de la symétrie de l'éprouvette et de son chargement, nous n'avons modélisé qu'une demi-éprouvette. Les conditions aux limites sont mentionnées sur la figure 5.1.

. Maillage et éléments finis :

L'éprouvette a été découpée en plusieurs sous-structures conformément aux figures (5.1) et (5.2). Quatre raffinements de maillage ont été

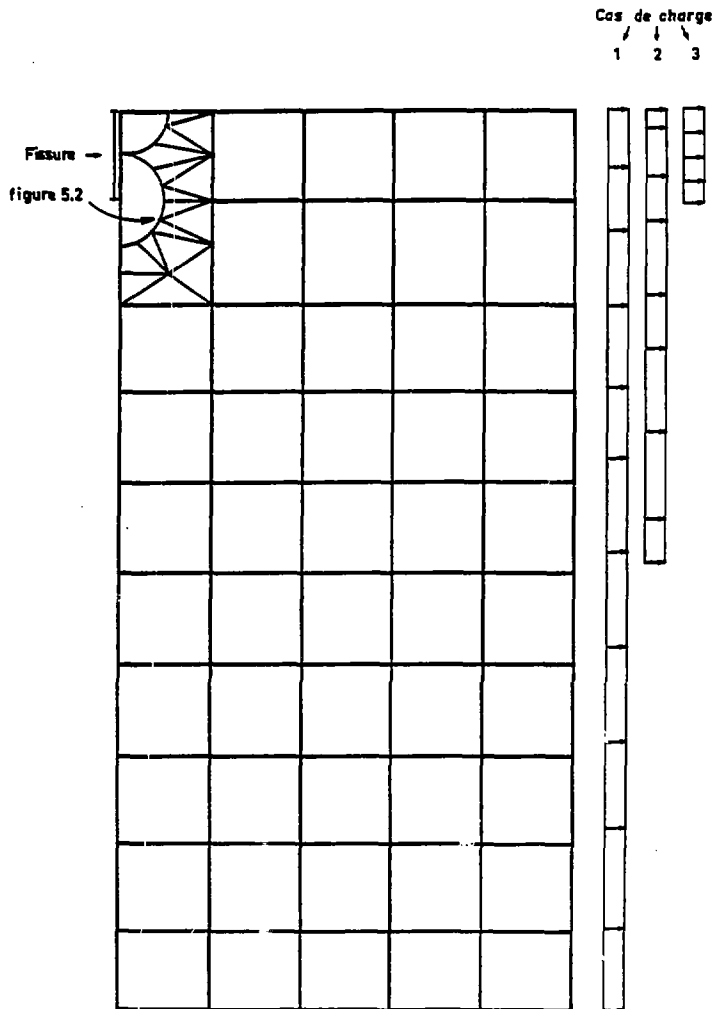


Fig. 5.1. (  $\frac{1}{2}$  éprouvette )

considérés en fond de fissure (cf. figure 5.2).

Nous avons aussi testé l'influence des éléments triangulaires ou quadrangulaires, linéaires ou quadratiques.

### 5.2. - Validation du programme

Nous avons choisi de valider notre programme à l'aide des résultats de BOWIE [24]. Ce dernier donne un tableau de résultats dans lequel on lit pour différents rapports: longueur de fissure/longueur de l'éprouvette et: longueur de chargement/longueur de l'éprouvette, la valeur du coefficient d'intensité des contraintes. Dans les trois cas de charge mentionnés précédemment, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{premier cas de charge } K_1 = 5.35 \cdot 10^3 \text{ daN (mm)}^{-3/2} ; \\ \text{deuxième " " " } K_1 = 6.65 \cdot 10^3 \text{ daN (mm)}^{-3/2} ; \\ \text{troisième " " " } K_1 = 2.45 \cdot 10^3 \text{ daN (mm)}^{-3/2} ; \end{array} \right.$$

soit en utilisant la relation (cf. chapitre 3) :

$$G = - \frac{1}{E} K_1^2 ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{premier cas de charge } G = - 1431 \text{ daN/mm} ; \\ \text{deuxième " " " } G = - 1830 \text{ daN/mm} ; \\ \text{troisième " " " } G = - 299,8 \text{ daN/mm} . \end{array} \right.$$

Ces résultats étant entachés d'une erreur de l'ordre de 1 % compte tenu de la troncature sur la valeur de  $K_1$ .

Nous avons obtenu les valeurs suivantes pour le maillage n°4 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{premier cas de charge } G = - 1444.5 \text{ daN/mm} ; \\ \text{deuxième " " " } G = - 1841. \text{ daN/mm} ; \\ \text{troisième " " " } G = - 300.8 \text{ daN/mm} , \end{array} \right.$$

ce qui conduit à une différence de l'ordre de 1 % avec les valeurs de Bowie conforme avec la précision de ses résultats.

Raffinement n° 2 (moyen)

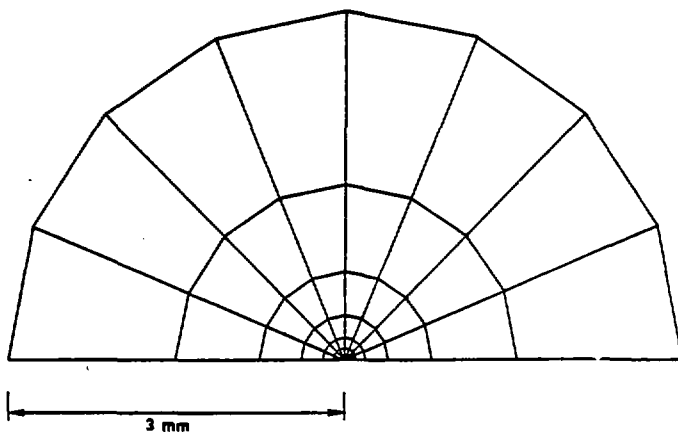


Fig. 5.2 (2)



Raffinement n° 3 (grand)

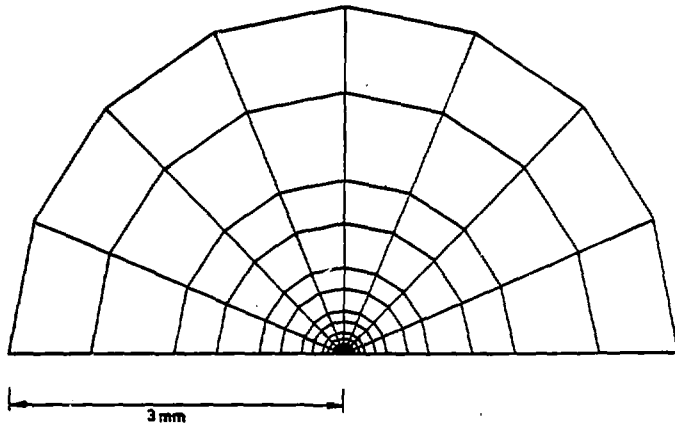


Fig. 5.2 (3)

Raffinement n°4 (très grand)

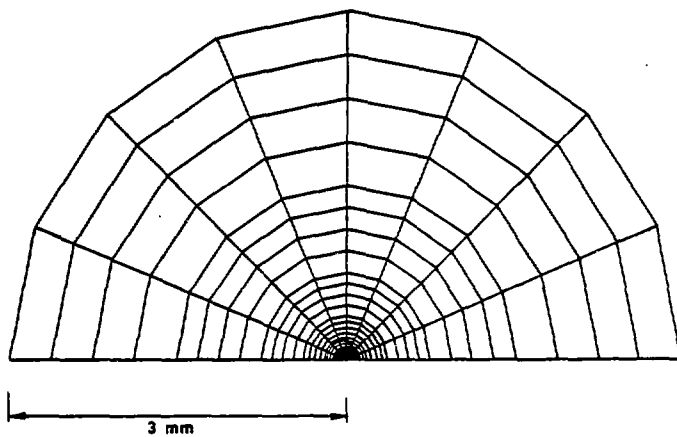


Fig. 5.2 (4)

### V.3. - Résultats de calcul

#### . Etude de la convergence

A l'aide de chacune des trois méthodes testées, nous avons calculé le taux de restitution de l'énergie pour les quatre raffinements de maillage. Nous avons également étudié l'influence du type d'éléments. Ces résultats sont regroupés dans les tableaux 5-1 et 5-2. On notera que les plus mauvais résultats sont obtenus avec l'intégrale de Rice qui converge très lentement. La convergence de la méthode d'identification locale est aussi mauvaise, mais la valeur de départ est meilleure. Enfin la méthode de l'intégrale G. converge très rapidement tout en partant d'une bonne valeur pour un maillage grossier.

#### . Etude de l'indépendance du contour d'intégration

Nous avons démontré au chapitre III l'indépendance vis-à-vis de  $\theta$  de l'expression donnant G ou J (formules (34) et (38)). Ce résultat rigoureux pour les solutions exactes n'est qu'approché au niveau numérique.

Nous en avons également vérifié le degré de validité sur le plan numérique dans le tableau 5-2 et ce pour plusieurs types d'éléments finis.

Tableau 5-1  
 Eléments quadratiques quadrangulaires à 8 noeuds.  
 Premier cas de charge

Raffinement : (cf. figure 5.1)	1 (petit)	2 (moyen)	3 (grand)	4 (très grand)
J calculé (contour à 1.5 mm de la fissure),	656.4	1086.2	1122.	1260.
G calculé : (couronne 1-2)	1495 de R = 3 mm à R = 1.5 mm	1443.2 de R = 3 mm à R = 1.5 mm	1444.15 de R = 3 mm à R = 2.25 mm	1444.5 de R = 3 mm à R = 2.625 mm
$\frac{1}{E} K_1^2$ (par identification)	1352.	1356.7	1378.1	1388.6

ETUDE DE LA CONVERGENCE AVEC LE RAFFINEMENT DE MAILLAGE

TABLEAU 5-2

## ETUDE DE L'INVARIANCE DU CONTOUR D'INTEGRATION

Premier cas de charge ; raffinement n°4

Contour * ou couronne d'intégration (cf. figure 5-2)	1-2 $2.625 \text{ mm} \leq R \leq 3 \text{ mm}$	1-10 $0.656 \text{ mm} \leq R \leq 3 \text{ mm}$	8-12 $0.46 \text{ mm} \leq R \leq 0.94 \text{ mm}$	26-27 $0.023 \text{ mm} \leq R \leq 0.047 \text{ mm}$	1-27 $0.023 \text{ mm} \leq R \leq 3 \text{ mm}$
J Eléments quadra- tiques à 8 noeuds	1402.8	1151.8	1159.8	1165.2	1220.
G Eléments quadra- tiques à 8 noeuds	1444.544	1444.540	1444.519	1434.489	1434.466
G Eléments quadra- tiques à 6 noeuds	1444.501	1444.754	1444.734	1437.705	1444.625
G Eléments liné- aires à 4 noeuds	1309.6	1310.6	1313.1	1307.9	1311.6
G Eléments liné- aires à 3 noeuds	1318.4	1308.1	1293.1	1231.8	1301.3

\* Dans le cas de l'intégrale G, le calcul est effectué sur la couronne indiquée sachant que ces bandes (à frontières polygonales), sont telles que la couronne 1-2 s'étend entre 2.625 mm et 3 mm du fond de fissure ; 1-10 entre .656 mm et 3 mm ; 8-12 entre .4687 mm et .937 mm ; 26-27 entre .0234 mm et .0352 mm ; 1-27 entre 0.234 mm et 3 mm.

Pour l'intégrale J, les calculs sont effectués sur les contours (lignes d'arêtes) intérieurs aux couronnes respectives (frontières comprises), et moyennés.

## VI. - CONCLUSION

Dans ce travail nous nous sommes efforcés de dégager d'une part les grandeurs fondamentales permettant d'évaluer l'initiation ou la propagation d'une fissure, et d'autre part de donner les moyens de calcul performant pour l'étude numérique de ces problèmes (dans le cadre de l'élasticité).

Ainsi nous avons souligné à l'aide d'exemples que la véritable grandeur énergétique à prendre en compte est, non pas le facteur d'intensité des contraintes, mais le taux de restitution de l'énergie. Une hypothèse classique sur la forme de l'énergie dissipée nous a permis de retrouver les lois du type Paris, sans pour autant faire la distinction entre les modes de chargement. Une expression originale du taux de restitution de l'énergie est ensuite proposée, ce qui nous conduit à une méthode numérique très performante comparée aux méthodes classiques.

L'approche que nous avons présentée ne prend pas en compte des forces de volume comme une pression mécanique sur les lèvres de la fissure ou une dilatation due à un champ thermique. Si l'approche thermodynamique de ces situations a été résolue récemment [25], des difficultés numériques demeurent, tout particulièrement en propagation rapide. C'est l'un de nos sujets de préoccupation actuelle.

## REMERCIEMENTS

Les auteurs expriment ici toute leur gratitude H.D. BUI et Q.S. NGUYEN qui, depuis plusieurs années, leur ont apporté une aide amicale et efficace, dans le domaine de la Mécanique de la Rupture.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.A. GRIFFITH - Phil. Trans. Roy. Soc. London. ser. A221 (1920).
- [2] J. LEMAITRE et J.L. CHABOCHE - Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement, J. Mech. Appl. (1978).
- [2 bis] J. LEMAITRE - Prévission de la croissance des fissures de fatigue dans les structures. Chapitre 13 dans la fatigue des matériaux et des structures. Collection Université de Compiègne. Malainé SA Editeur Paris (1980).
- [3] H.D. BUI - Mécanique de la rupture fragile. Masson Paris (1978).
- [4] NGUYEN Q.S. - Méthodes Energétiques en Mécanique de la Rupture. J. Mécanique, 19, 363,  
et : A thermodynamic description of the running crack problem in three dimensional constitutive relations and ductile fracture North Holland Publishing Company (1981) 315-330.
- [5] E. SANCHEZ-PALENCIA - Non-Homogeneous Media and Vibration theory. Springer Verlag : Lectures notes in Physics n° 127, Berlin.
- [6] J. RICE - Fracture, Vol. III, edited by Lifshovitz. Academic Press 1968, p. 191.
- [7] P. GERMAIN - Cours de Mécanique des Milieux Continus. Masson Paris (1973).
- [8] M. GURTIN - Thermodynamics and the Griffith criterion for Brittle Fracture. Int. J. Solids Struct 15.553.
- [9] P. PARIS, F. ERDOGAN - Trans. ASME. 528-534, décembre 1962.
- [10] J. FRIIAA - Thèse d'état Université P.M. Curie (1980).
- [11] CARTAN - Calcul différentiel. Hermann Collection Méthodes, Paris (1967).
- [12] Ph. DESTUUNDER, M. DJAOUA - Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile. Math. Meth in the Appl. Sci. 3 (1981) 70.87.

- [13] Ph. DESTUYNDER - Sur la propagation des fissures dans les plaques minces en flexion. A paraître dans le Journal de Mécanique théorique et appliquée.
- [14] A.H. SCHATZ, L.B. WAHLBIN - Interior Maximum Norm Estimates for finite element methods. Mathematics of computation Volume 31, number 138, april 1977, pages 414-442.
- [15] A.H. SCHATZ, L.B. WAHLBIN - Maximum Norm Estimates in the Finite Element Method on Plane Polygonal Domains. Part. 1. Mathematics of Computation. Volume 32, number 141 (1978), pp. 73-109.
- [16] A.H. SCHATZ, L.B. WAHLBIN - On a local asymptotic error estimate in finite elements and its use : Numerical examples to be published.
- [17] M. AMARA, Ph. DESTUYNDER, M. DJAOUA - On a finite element scheme for plane crack problems in Numerical Methods in Fracture Mechanics. D.R. JOWEN and A.R. LUXMOORE (eds), Pineridge Press, Swansea, 1980.
- [18] O.C. ZIENKIEWICZ - The finite element method. 3<sup>rd</sup> edition. Mc Graw-Hill (1978).
- [19] G. RAUGEL - Thèse de troisième cycle. Université de Rennes I (1978).
- [20] I. BABUŠKA, W.C. RHEINBOLT - Adaptive approaches and reliability estimations in finite element analysis in Fenomech 78. Part III North-Holland publishing company. Amsterdam.
- [21] P. LADEVEZE - Comparaison de modèles de mécanique des milieux continus. Thèse d'Etat, Université P.M. Curie, Paris VI (1975).



- [22] P. LADEVEZE, D. LE GUILLON - Error computation in finite element method and applications in numerical methods for Engineering. GAMNI 2. Edité par DUNOD (1980).
- [23] Ph. DESTUYNDER, M. D'AGUA, S. LESCURE - Une nouvelle méthode de calcul de la singularité pour un problème elliptique posé sur un ouvert avec fente.  
CR. Acad. Sc. Paris t 293 Série I pp. 343-347.
- [24] O.L. BOWIE - Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems edited by G.L. SIH, Noordhoff International Publishing Leyden 1973.
- [25] H.D. BUI, A. EHLACHER, Q.S. NGUYEN - Propagation de fissure en thermo-élasticité dynamique.  
Journal de Mécanique. Vol. 19 n°, 1980.