NOTA TÉCNICA
CTA - IEAv/ NT-027/83
30 NOV 1983

ÁLGEBRAS DE GRASSMANN

por

R.L.Garcia

Centro Técnico Aeroespacial
Instituto de Estudos Avançados
Rodovia dos Tamoios, Km 5,5
12.200 - São José dos Campos - SP
Brasil

RESUMO

É feita uma apresentação sucinta da álgebra de Grassmann. As funções exponencial e logaritmo de matrizes, cujos elementos pertencem a esta álgebra, são estudadas com auxílio dos manipuladores algébricos SCHOONSCHIP e REDUCE 2.

ABSTRACT

The Grassmann algebra is presented briefly. Exponential and logarithm of matrices functions, whose elements belong to this algebra are studied with the help of the SCHOONSCHIP and REDUCE 2 algebraic manipulators.

I - INTRODUÇÃO

Este trabalho tem três objetivos. O primeiro é o de apresentar as álgebras de Grassmann. Estas são essenciais para o estudo de partículas de spin semi-inteiro, os férmions, através de métodos funcionais. Nesta parte seguimos a referência padrão que é o livro de F.A.Berezin[1]. Nosso segundo objetivo é o de estudar funções cujas variáveis são elementos de uma álgebra de Grassmann. Aqui vamos nos restringir ao estudo da exponencial e do logaritmo, funções que têm um papel relevante no estudo do potencial efetivo para férmions. Finalmente, nosso terceiro objetivo é o de divulgar aplicações dos manipuladores algébricos SCHOONSCHIP[2] e REDUCE 2,[3] implantados no nosso CDC 170/750, embora o segundo ainda apresente alguns problemas. Assim, nos apêndices são apresentados programas completos nestas linguagens.

II - APRESENTAÇÃO DA ÁLGEBRA

Uma álgebra cujos geradores $x_1 \dots x_n$ satisfazem as relações

$$\{ x_i , x_k \} \equiv x_i x_k + x_k x_i = 0 \tag{1}$$

é chamada álgebra de Grassmann com n geradores. Em particular, $x_i^2 = 0$. A álgebra de Grassmann com n geradores será denotada por G_n. Segue-se da equação (1) que G_n, considerado como um espaço vetorial, tem dimensão 2^n. É conveniente considerar como uma base em G_n os monômios

$$1,\ x_1, \dots, x_n,\ x_1 x_2, \dots,\ x_{n-1} x_n, \dots, x_1 \dots x_n. \tag{2}$$

O monômio $x_{i_1} \dots x_{i_p}$ será chamado monômio de grau p.

Todo elemento f(x) da álgebra G_n é representável na forma de uma combinação linear de monômios

$$f(x) = f_0 + \sum_k f(k) x_k + \sum_{k_1 k_2} f_2(k_1, k_2) x_{k_1} x_{k_2}$$

$$+ \dots + \sum_{k_1 \dots k_n} f_n(k_1 \dots k_n) x_{k_1} \dots x_{k_n} \, . \tag{3}$$

Para evitar ambigüidades vamos sempre supor que os coeficientes $f_n(k_1 \dots k_n)$ são funções completamente anti-simétricas.

Em G_n distinguimos dois tipos de elementos. Os primeiros, pertencentes ao conjunto G''_n, são elementos de G_n que são representáveis na forma de combinações lineares de monômios de grau par:

$$f = f_0 + \sum_{k_1 k_2} f_2(k_1, k_2) x_{k_1} x_{k_2} + \dots \tag{4}$$

Os elementos de G''_n serão chamados pares. Note-se que os elementos pares comutam com qualquer elemento de G_n. O conjunto G'_n de todos os elementos que são combinações lineares de monômios de grau ímpar serão chamados ímpares. Elementos de G'_n têm a forma

$$f = \sum_k f_1(k) x_k + \sum_{k_1 k_2 k_3} f_3(k_1 \dots k_3)\, x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} + \dots \tag{5}$$

Evidentemente, qualquer elemento de G_n é representado de maneira única pela forma

$$f = f' + f'' \ , \quad f' \varepsilon\, G' \quad e \quad f'' \varepsilon G'' \tag{6}$$

Por outro lado, a álgebra de Grassmann usada para definir integrais funcionais é associativa. Vamos mostrar que nesse caso não pode haver inverso dos geradores. Com efeito, suponhamos que exista o inverso à direita:

$$a\, a^{-1} = 1. \tag{7}$$

A anticomutatividade então implica

$$a^{-1}\, a = -1. \tag{8}$$

Como vale a propriedade associativa do produto, podemos escrever

$$a(a^{-1} a) = -a \tag{9}$$

$$(a a^{-1}) a = a \tag{10}$$

em contradição com a propriedade associativa.

III - DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARITMO

A exponencial é definida pela sua série:

$$e^f = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^j}{j!} . \tag{11}$$

É claro que se $f \in G_n$ e $f_o = 0$ então

$$e^f = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^j}{j!} . \tag{12}$$

Além disso, o produto de exponenciais não dá a exponencial da soma dos expoentes mas a identidade de Baker - Hausdorff[4]

$$e^{a_1} e^{a_2} = e^{a_1 + a_2} e^{\frac{1}{2}[a_1, a_2]} \tag{13}$$

onde a_1, a_2 ε G_n e não contêm monômios de grau zero.

Consideremos em seguida a soma a + x, onde x é um nº complexo $\neq 0$ e a é tal que $a^2 = 0$. Por definição,

$$\log (a + x) = \log x + \frac{a}{x} . \tag{14}$$

Esta definição corresponde à usual, pois

$$e^{\log(a+x)} = e^{\log x} e^{\frac{a}{x}} = x(1 + \frac{a}{x} + 0 + \ldots) = a + x. \tag{15}$$

De maneira geral, se valer a relação $a^n = 0$, o logaritmo é definido por

$$\log(x+a) = \log x + \frac{a}{x} - \frac{1}{2} \frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{3} \frac{a^3}{x^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)} \frac{a^{n-1}}{x^{n-1}} . \tag{16}$$

Uma conseqüência importante, decorrente das equações (13) e (16), é que, em geral,

$$\log (AB) \neq \log A + \log B. \tag{17}$$

Com efeito, sejam

$$A = a + x$$
e $$\qquad (18)$$
$$B = b + y ,$$

com

$$a^2 = b^2 = 0, \qquad (19)$$

teremos:

$$\log (AB) = \log (ab + ay + bx + xy). \qquad (20)$$

Por outro lado, a definição (16) nos dá

$$\log(AB) = \log (xy) + \frac{ab + ay + bx}{xy} - \frac{1}{2} \frac{(ab + ay + bx)^2}{x^2 y^2}, \qquad (21)$$

o que implica

$$\log (AB) = \log (a+x) + \log (b+y) + \frac{1}{2xy} [a,b]. \qquad (22)$$

IV- SOBRE A RELAÇÃO DET M' = EXP (TR LOG M') NUMA ÁLGEBRA DE GRASSMANN

Vamos estudar vários casos onde ora é válida,ora não o é, a relação

$$\mathrm{Det}\ M' = \exp (\mathrm{Tr} \log M'). \qquad (23)$$

Para simplificar, consideremos a matriz M' da forma

$$M' = I + M, \qquad (24)$$

onde I é a matriz identidade e M é uma matriz cujos elementos M(i,j) pertencem a uma álgebra de Grassmann.

a) M é uma matriz 2 x 2 e os elementos M(i,j) são geradores, isto é

$$\{M(i,j), M(a,b)\} = 0 . \qquad (25)$$

Neste caso valem as relações

$$\log M' = M - \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{3} M^3 - \frac{1}{4} M^4 \tag{26}$$

e

$$\exp(\mathrm{Tr}\log M') = 1 + \mathrm{Tr}\log M + \frac{1}{2}(\mathrm{Tr}\log M')^2$$

$$+ \frac{1}{3!}(\mathrm{Tr}\log M')^3 + \frac{1}{4!}(\mathrm{Tr}\log M')^4 . \tag{27}$$

A expressão (27) é de cálculo longo e deve levar em conta o caráter não comutativo dos produtos dos termos envolvidos. Por estas razões ela é calculada com o manipulador algébrico SCHOONSCHIP[2], cujo programa se encontra no apêndice A.

A expressão resultante é

$$\exp(\mathrm{Tr}\log M') = 1 + M(1,1) + M(2,2)$$

$$+ M(1,1)\, M(1,2)\, M(2,1) - M(1,2)\, M(2,1)\, M(2,2), \tag{28}$$

a qual, comparada com

$$\mathrm{Det}\, M' = 1 + M(1,1) + M(2,2) + M(1,1)\, M(2,2) - M(1,2)\, M(2,1), \tag{29}$$

nos permite escrever

$$\exp(\mathrm{Tr}\log M') = \mathrm{Det}\, M' + \frac{1}{2}[M(1,2), M(2,1)]$$

$$- [M(1,1), M(2,2)]\, \mathrm{Det}\, M' . \tag{30}$$

Neste caso, portanto não vale a relação (23).

b) M é uma matriz 2 x 2 e os elementos M(i,j) são pares verificando as relações

$$M(i,j)^2 = 0 \tag{31}$$

e

$$M(i,j)M(\ell,m) = + M(\ell,m)\ M(i,j). \tag{32}$$

Aqui ainda são válidas as relações (26) e (27) e portanto ainda temos expressões de cálculos longos que, conforme o apêndice B, podem ser realizados com o manipulador algébrico SCHOONSCHIP.[2]

Aqui vale a relação (23), isto é,

$$\text{Det } M' = \exp(\text{Tr} \log M'). \tag{33}$$

c) M é uma matriz 4 x 4 e os elementos M(i,j) são pares verificando as relações

$$M(I_1,I_2)\ M(I_3,I_4) = M(I_3,I_4)\ M(I_1,I_2) \tag{34}$$

e

$$M(I_1,I_2)\ M(I_3,I_4)\ M(I_5,I_6)\ M(I_7,\ I_8)\ M(I_9,\ I_{10}) = 0. \tag{35}$$

Este exemplo ocorre numa álgebra G_8, quando os elementos M(I,J) são formados por somas de produtos de dois geradores. Em teoria quântica de campos encontramos este exemplo num cálculo de potencial efetivo para férmions na Eletrodinâmica quadridimensional.

Os cálculos são bem mais longos do que os precedentes. Envolvem potências de matrizes 4 x 4, que são facilmente calculadas com o manipulador algébrico REDUCE.[3] Infelizmente por falta de espaço no nosso computador, o CDC 170/750, só podemos fazer uma parte dos cálculos nesta linguagem. A parte restante deve ser feita com o manipulador SCHOONSCHIP.[2] Os programas detalhados estão no apêndice C. O resultado é a validade da relação (23):

$$\text{Det } M' = \exp\ (\text{Tr} \log M'). \tag{36}$$

OBSERVAÇÃO: para evitar ambigüidades, o determinante deve ser definido por

$$\text{Det } M \equiv \sum_{i,j,k,\ell} \varepsilon_{ijk\ell}\ M(1,i)\ M(2,j)\ M(3,k)\ M(4,\ell), \tag{37}$$

onde $\varepsilon_{ijk\ell}$ é o tensor completamente anti-simétrico.

V - DERIVADAS

As derivadas à direita $\frac{\partial}{\partial x_k} f$ e à esquerda $f \frac{\partial}{\partial x_k}$ de um elemento $f(x) \in G_n$ são definidas como operadôres lineares em G_n cuja ação sobre os elementos da base (2) é dada pelas fórmulas

$$\frac{\partial}{\partial x_p} x_{i_1} \dots s_{i_s} = \delta_{i_1 p} x_{i_2} \dots x_{i_s} - \delta_{i_2 p} x_{i_1} x_{i_3} \dots x i_s$$

$$+ \dots + (-1)^{s-1} \delta_{i_s p} x_{i_1} \dots x_{i_{s-1}} \tag{38}$$

e

$$x_{i_1} \dots x_{i_s} \frac{\partial}{\partial x} = \delta_{i_s p} x_{i_1} \dots x_{i_{s-1}} - \delta_{i_{s-1} p} x_{i_1} \dots x_{i_{s-2}} x_{i_s}$$

$$+ \dots + (-1)^{s-1} \delta_{i_1 p} x_{i_2} \dots x_{i_s} . \tag{39}$$

Segue-se destas definições a validade da regra da cadeia da derivação. Consideremos os casos mais simples.

Sejam

$$x_k = \sum_p a_{kp} y_p \tag{40}$$

e

$$f(x) = f[x(y)]. \tag{41}$$

Temos

$$\frac{\partial}{\partial y_p} f[x(y)] = \sum_k \left[\frac{\partial}{\partial x_k} (f(x) \right]_{x=x(y)} a_{kp} \tag{42}$$

e

$$f[x(y)] \frac{\partial}{\partial y p} = \sum_k \left[f(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \right]_{x=x(y)} a_{kp} . \tag{43}$$

Vejamos alguns exemplos:

a) $f(x) = x^2$,

$$\frac{\partial}{\partial yp} f[x(y)] = \Sigma_k (x_k - x_k) a_{kp} = 0, \tag{44}$$

b) $f(x) = x^2 x_k$,

$$\frac{\partial}{\partial yp} f[x(y)] = \Sigma_{\rho,\ell}(\delta_{\rho\ell} x_\ell x_k - \delta_{\rho\ell} x_\ell x_k + \delta_{\rho k}\, x_\ell x_\ell) . a_{\rho p} = x^2 a_{kp} \,. \tag{45}$$

Mostremos como ficam algumas outras propriedades da derivada.

Seja t um parâmetro real e

$$x_k(t) = \sum_p a_{kp}(t) y_p \,.$$

Então

$$\frac{d}{dt} f[x(t)] = \sum_k \frac{dx_k}{dt} \frac{\partial}{\partial x_k} f = \sum_k \left(f \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \frac{dx_k}{dt} \,. \tag{46}$$

Para escrever a derivada do produto é conveniente distinguir elementos pares e ímpares da álgebra. Assim, seja $f_1 \in G''_n$ um elemento par e $f_2 \in G_n$ um elemento arbitrário; então

$$\frac{\partial}{\partial x_p}(f_1 f_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x_p} f_1\right) f_2 + f_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_p} f_2\right) \tag{47}$$

e

$$(f_2 f_1) \frac{\partial}{\partial x_p} = f_2 \left(f_1 \frac{\partial}{\partial x_p}\right) + \left(f_2 \frac{\partial}{\partial x_p}\right) f_1 \,. \tag{48}$$

Se $f_1 \in G'_n$ for um elemento ímpar e $f_2 \in G_n$ um elemento arbitrário, as fórmulas adquirem a forma

$$\frac{\partial}{\partial x_p}(f_1 f_2) = (\frac{\partial}{\partial x_p} f_1) f_2 - f_1 (\frac{\partial}{\partial x_p} f_2) \tag{49}$$

e

$$(f_2 f_1) \frac{\partial}{\partial x_p} = f_2 (f_1 \frac{\partial}{\partial x_p}) - (f_2 \frac{\partial}{\partial x_p}) f_1 . \tag{50}$$

Finalmente explicitemos as propriedadades das derivadas segundas, úteis em integração por partes:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial}{\partial x_2} f) = -\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial}{\partial x_1} f), \tag{51}$$

$$(f \frac{\partial}{\partial x_1})\frac{\partial}{\partial x_2} = -(f \frac{\partial}{\partial x_2})\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{52}$$

e

$$(\frac{\partial}{\partial x_1} f) \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(f \frac{\partial}{\partial x_2}) . \tag{53}$$

VI - INTEGRAIS

Conforme vimos nos exemplos anteriores muitas funções devem ter a derivada nula. Por esta razão a integração não será introduzida como o inverso da derivação. Definamos os símbolos $dx_1 \ldots dx_n$, os quais satisfazem as relações de anti-comutação:

$$\{dx_i, dx_k\} = \{x_k, dx_i\} = 0 . \tag{54}$$

As integrais serão então dadas por

$$\int dx_i = 0 \quad \text{e} \quad \int x_i dx_i = 1, \tag{55}$$

onde, por definição $\int$ é um operador linear.

A integração por partes deve ser vista com cuidado. Ela vale apenas quando a integração se realiza sobre toda a álgebra, isto é quando a integral não depende de parâmetros livres pertencentes a álgebra de Grassmann:

$$\int f(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_p} g(x)\right) dx_n \dots dx_1 = \int \left(f(x) \frac{\partial}{\partial x_p}\right) g(x) dx_n \dots dx_1 , \tag{56}$$

$$\int f(x) \left(g(x) \frac{\partial}{\partial x_p}\right) dx_n \dots dx_1 = (-1)^{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial x_p} f(x)\right) g(x) \, dx_n \dots dx_1 \tag{57}$$

mas, em geral

$$\int f(x) \left(g(x,y) \frac{\partial}{\partial x_p}\right) dx_n \dots dx_1 \neq (-1)^{n+1} \int \left(\frac{\partial}{\partial x_p} f(x)\right) g(x,y) dx_n \dots dx_1 . \tag{58}$$

Finalmente observemos que nas integrais na álgebra de Grassmann ainda vale a fórmula da mudança de variáveis. Vejamos o caso mais simples das substituições lineares:

$$x_i = \sum_k a_{ik} y_k \tag{59}$$

e

$$dx_i = \sum_k a^{-1}_{ik} \, dy_k , \tag{60}$$

onde a^{-1} é a matriz inversa de a. Para esta mudança de variáveis vale a seguinte fórmula

$$\int f(x) dx_n \dots dx = \det(a^{-1}_{ik}) \int f[x(y)] dy_n \dots dy_1 , \tag{61}$$

a qual é conseqüência das igualdades

$$x_1 \ldots x_n = \det(a_{ik}) y_1 \ldots y_n \tag{62}$$

e

$$dx_n \ldots dx_1 = \det(a_{ik}^{-1}) dy_n \ldots dy_1 . \tag{63}$$

Estas duas últimas secções, que encerram este trabalho, foram introduzidas por completeza. Maiores detalhes sobre análise numa álgebra de Grassmann devem ser vistos no F.A.Berezin[1].

VII - CONCLUSÕES

Apresentamos aspectos essenciais da álgebra de Grassmann finita, necessários à aplicação da análise funcional ao estudo dos férmions. O estudo de funções específicas de variaveis de Grassmann mostrou que se deve ser extremamente cuidadoso na sua manipulação. Como subproduto mostramos como os manipuladores algébricos SCHOONSCHIP[2] e REDUCE 2 [3] podem ser combinados na resolução de um problema.

REFERÊNCIAS

(1) F.A.Berezin, The Method of Second Quantization, Academic Press, New York, 1966.

(2) H.Strubbe, Manual for SCHOONSCHIP, Comput.Phys. Commun. 8 (1974) 1 .

(3) A.C.Hearn, REDUCE 2 User's Manual, University of Utah, 1973 .

(4) I. Bialynicki - Birula e Z. Bialynicka - Birula, Quantum Electrodynamics, Pergamon Press, New York, 1975.

APÊNDICE A

```
 AQUI USA-SE SCHOONSCHIP PARA CALCULAR A EXPRESSAO
 EXP ( TR LOG M )
 ONDE M E UMA MATRIZ 2X2 CUJOS ELEMENTOS M(I,J)
 SAO GERADORES DE UMA ALGEBRA DE GRASSMANN
Z M2(I,J)=DS(L1,1,2,(M(I,L1)*M(L1,J)))
PRINT NLIST
PRINT NSTATI
PRINT NOUTPUT
KEEP M2
*NEXT
Z M3(I,J)=DS(L2,1,2,(M(I,L2)*M2(L2,J)))
PRINT NLIST
PRINT NSTAT
PRINT NOUTPUT
KEEP M2,M3
*NEXT
Z M4(I,J)=DS(L3,1,2,(M(I,L3)*M3(L3,J)))
ID,AINBE,M(X+,Y+)*M(X+,Y+)=0
PRINT NLIST
PRINT NSTAT
PRINT NOUTPUT
KEEP M2,M3,M4
*NEXT
C PARA CALCULAR OS TRACOS DEFINAMOS
Z TM=DS(R1,1,2,(M(R1,R1)))
Z TM2=DS(L4,1,2,(M2(L4,L4)))
Z TM3=DS(L5,1,2,(M3(L5,L5)))
Z TM4=DS(L6,1,2,(M4(L6,L6)))
ID,AINBE,M(X+,Y+)*M(X+,Y+)=0
ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=-M(1,1)*M(X,Y)
ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=-M(1,1)*M(X,Y)
ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=-M(1,1)*M(X,Y)
ID,M(2,1)*M(1,2)=-M(1,2)*M(2,1)
ID,M(2,1)*M(1,2)=-M(1,2)*M(2,1)
ID,M(2,2)*M(1,2)=-M(1,2)*M(2,2)
ID,M(2,2)*M(1,2)=-M(1,2)*M(2,2)
ID,M(2,2)*M(2,1)=-M(2,1)*M(2,2)
KEEP TM,TM2,TM3,TM4
*NEXT
C AGORA PODEMOS CALCULAR O TRACO DO LOG PELA EXPR.
Z TLM=TM-1/2*TM2+1/3*TM3-1/4*TM4
KEEP TLM
*NEXT
C EM SEGUIDA CALCULAMOS A EXPONENCIAL DO TR DO LOG:
Z EXTLM=1+TLM+1/2*TLM*TLM+1/6*TLM*TLM*TLM+
 1/24*TLM*TLM*TLM*TLM
N R
ID,AINBE,M(X+,Y+)*M(X+,Y+)=0
ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=-M(1,1)*M(X,Y)
ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=-M(1,1)*M(X,Y)
ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=-M(1,1)*M(X,Y)
ID,M(2,1)*M(1,2)=-M(1,2)*M(2,1)
ID,M(2,1)*M(1,2)=-M(1,2)*M(2,1)
ID,M(2,2)*M(1,2)=-M(1,2)*M(2,2)
ID,M(2,2)*M(1,2)=-M(1,2)*M(2,2)
ID,M(2,2)*M(2,1)=-M(2,1)*M(2,2)
```

```
N R
*BEGIN
*END
```

APÊNDICE B

```
 AQUI SE USA SCHOONSCHIP PARA CALCULAR A EXPRESSAO
 EXP (TR LOG M )
 ONDE M E UMA MATRIZ 2X2 CUJOS ELEMENTOS M(I,J)
 SAO ELEMENTOS PARES DE UMA ALGEBRA DE GRASSMANN
Z M2(I,J)=DS(L1,1,2,(M(I,L1)*M(L1,J)))
PRINT NLIST
PRINT NSTATI
PRINT NOUTPUT
KEEP M2
*NEXT
Z M3(I,J)=DS(L2,1,2,(M(I,L2)*M2(L2,J)))
PRINT NLIST
PRINT NSTAT
PRINT NOUTPUT
KEEP M2,M3
*NEXT
Z M4(I,J)=DS(L3,1,2,(M(I,L3)*M3(L3,J)))
ID,AINBE,M(X+,Y+)*M(X+,Y+)=0
PRINT NLIST
PRINT NSTAT
PRINT NOUTPUT
KEEP M2,M3,M4
*NEXT
C PARA CALCULAR OS TRACOS DEFINAMOS
Z TM=DS(R1,1,2,(M(R1,R1)))
Z TM2=DS(L4,1,2,(M2(L4,L4)))
Z TM3=DS(L5,1,2,(M3(L5,L5)))
Z TM4=DS(L6,1,2,(M4(L6,L6)))
ID,AINBE,M(X+,Y+)*M(X+,Y+)=0
ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=M(1,1)*M(X,Y)
ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=M(1,1)*M(X,Y)
ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=M(1,1)*M(X,Y)
ID,M(2,1)*M(1,2)=M(1,2)*M(2,1)
ID,M(2,1)*M(1,2)=M(1,2)*M(2,1)
ID,M(2,2)*M(1,2)=M(1,2)*M(2,2)
ID,M(2,2)*M(1,2)=M(1,2)*M(2,2)
ID,M(2,2)*M(2,1)=M(2,1)*M(2,2)
KEEP TM,TM2,TM3,TM4
*NEXT
C AGORA PODEMOS CALCULAR O TRACO DO LOG PELA EXPR.
Z TLM=TM-1/2*TM2+1/3*TM3-1/4*TM4
KEEP TLM
*NEXT
C EM SEGUIDA CALCULAMOS A EXPONENCIAL DO TR DO LOG:
Z EXTLM=1+TLM+1/2*TLM*TLM+1/6*TLM*TLM*TLM+
 1/24*TLM*TLM*TLM*TLM


N R
ID,AINBE,M(X+,Y+)*M(X+,Y+)=0


ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=M(1,1)*M(X,Y)


ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=M(1,1)*M(X,Y)
```

```
ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=M(1,1)*M(X,Y)
 ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=M(1,1)*M(X,Y)

 ID,M(X+,Y+)*M(1,1)=M(1,1)*M(X,Y)

 ID,M(2,1)*M(1,2)=M(1,2)*M(2,1)

 ID,M(2,1)*M(1,2)=M(1,2)*M(2.1)


 ID,M(2,2)*M(1,2)=M(1,2)*M(2,2)

 ID,M(2,2)*M(1,2)=M(1,2)*M(2,2)

 ID,M(2,2)*M(2,1)=M(2,1)*M(2,2)

 N R
 *BEGIN
 *END
```

APÊNDICE C

```
AQUI SE USA REDUCE 2 PARA SE REALIZAR PARTE DOS
CALCULOS NECESSARIOS A COMPARACAO DAS EXPRESSOES
DET M  E  EXP (TR LOG M )
ONDE M E UMA MATRIZ 4X4 CUJOS ELEMENTOS M(I,J)
SAO PARES;
OFF NAT;
OPERATOR M;
FOR ALL I1,I2,I3,I4,I5 LET
M(I1)*M(I2)*M(I3)*M(I4)*M(I5)=0;
MATRIX DEL(4,4),MM(4,4)$
DEL:=MAT((1,0,0,0),
         (0,1,0,0),
         (0,0,1,0),
         (0,0,0,1))$
MM:=MAT((M(11),M(12),M(13),M(14)),
       (M(21),M(22),M(23),M(24)),
       (M(31),M(32),M(33),M(34)),
       (M(41),M(42),M(43),M(44)))$
COMMENT TEMOS POR DEFINICAO;
CAR:=DET(DEL+MM);
TM:=TRACE(MM)$
TM2:=TRACE(MM**2)$
TM3:=TRACE(MM**3)$
TM4:=TRACE(MM**4)$
TLML:=TM-1/2*TM2+1/3*TM3-1/4*TM4;
COMMENT DEFINAMOS AS GRANDEZAS AUXILIARES;
COMMENT POR FALTA DE ESPACO NO CDC 170/750
AS PASSAGENS LISTADAS A SEGUIR NAO PODEM
REALIZADAS NESTA LINGUAGEM. OS CALCULOS RE-
ALIZADOS ATE ESTE PONTO SERAO USADOS COMO
ENTRADA PARA UM NOVO PROGRAMA EM SCHOONSCHIP;
TL2:=TLML**2;
TL3:=TLML*TL2;
TL4:=TLML*TL3;
TEST1:=CAR-1-TLML-1/2*TL2;
COMMENT FINALMENTE O TESTE;
TEST:=TEST1-1/6*TL3-1/24*TL4;
```

```
 ESTE PROGRAMA USA A SAIDA DO ANTERIOR, ESCRITO
 EM REDUCE 2, COMO ENTRADA EM SCHOONSCHIP PARA
 COMPARAR AS EXPRESSOES
 DET M  E  EXP (TR LOG M)
 ONDE M E UMA MATRIZ 4X4  CUJOS ELEMENTOS M(I,J)
 SAO PARES
S M11,M12,M13,M14,M21,M22,M23,M24,M31,M32,M33,M34,
 M41,M42,M43,M44,A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8
F M,A,B,CCC,EE
I AA,I1,I2,I3
V MM
```

```
Z CAR = M(44)*M(33)*M(22)*M(11)+M(44)*M(33)*M(22)-M(44)*M(33)*
 M(21)*M(12)+M(44)*M(33)*M(11)+M(44)*M(33)-M(44)*M(32)*M(23)
 *M(11)-M(44)*M(32)*M(23)+M(44)*M(32)*M(21)*M(13)+M(44)*M(31
 )*M(23)*M(12)-M(44)*M(31)*M(22)*M(13)-M(44)*M(31)*M(13)+M(
 44)*M(22)*M(11)+M(44)*M(22)-M(44)*M(21)*M(12)+M(44)*M(11)
 +M(44)-M(43)*M(34)*M(22)*M(11)-M(43)*M(34)*M(22)+M(43)*M(
 34)*M(21)*M(12)-M(43)*M(34)*M(11)-M(43)*M(34)+M(43)*M(32)*M
 (24)*M(11)+M(43)*M(32)*M(24)-M(43)*M(32)*M(21)*M(14)-M(43)*
 M(31)*M(24)*M(12)+M(43)*M(31)*M(22)*M(14)+M(43)*M(31)*M(14)
 +M(42)*M(34)*M(23)*M(11)+M(42)*M(34)*M(23)-M(42)*M(34)*M(21
 )*M(13)-M(42)*M(33)*M(24)*M(11)-M(42)*M(33)*M(24)+M(42)*M(
 33)*M(21)*M(14)+M(42)*M(31)*M(24)*M(13)-M(42)*M(31)*M(23)*M(
 14)-M(42)*M(24)*M(11)-M(42)*M(24)+M(42)*M(21)*M(14)-M(41)
 *M(34)*M(23)*M(12)+M(41)*M(34)*M(22)*M(13)+M(41)*M(34)*M(13)
 +M(41)*M(33)*M(24)*M(12)-M(41)*M(33)*M(22)*M(14)-M(41)*M(33
 )*M(14)-M(41)*M(32)*M(24)*M(13)+M(41)*M(32)*M(23)*M(14)+M(
 41)*M(24)*M(12)-M(41)*M(22)*M(14)-M(41)*M(14)+M(33)*M(22)*M
 (11)+M(33)*M(22)-M(33)*M(21)*M(12)+M(33)*M(11)+M(33)-M(
 32)*M(23)*M(11)-M(32)*M(23)+M(32)*M(21)*M(13)+M(31)*M(23)*M
 (12)-M(31)*M(22)*M(13)-M(31)*M(13)+M(22)*M(11)+M(22)-M(
 21)*M(12)+M(11)+1
Z TLML=(-12*M(44)*M(43)*M(34)*M(33)+12*M(44)*M(43)*M(34)-12*M(44)*
 M(43)*M(32)*M(24)- 12*M(44)*M(43)*M(31)*M(14)- 12*M(44)*M(42)*
 M(34)*M(23)- 12*M(44)*M(42)*M(24)*M(22) + 12*M(44)*M(42)*M(24)
 - 12*M(44)*M(42)*M(21)*M(14)- 12*M(44)*M(41)*M(34)*M(13)- 12*
 M(44)*M(41)*M(24)*M(12)- 12*M(44)*M(41)*M(14)*M(11) + 12*M(44)*
 M(41)*M(14) + 12*M(44)- 12*M(43)*M(42)*M(34)*M(24)- 12*M(43)*M
 (41)*M(34)*M(14) + 12*M(43)*M(34)*M(33)- 12*M(43)*M(34)*M(32)*M
 (23)- 12*M(43)*M(34)*M(31)*M(13)- 12*M(43)*M(34)*M(44)*M(44)
 - 12*M(43)*M(34)*M(33)*M(33)- 12*M(43)*M(34)- 12*M(43)*M(33)*
 M(32)*M(24)- 12*M(43)*M(33)*M(31)*M(14)- 12*M(43)*M(32)*M(24)*
 M(22) + 12*M(43)*M(32)*M(24)- 12*M(43)*M(32)*M(21)*M(14)- 12*M
 (43)*M(31)*M(24)*M(12)- 12*M(43)*M(31)*M(14)*M(11) + 12*M(43)*M
 (31)*M(14)- 12*M(42)*M(41)*M(24)*M(14)- 12*M(42)*M(34)*M(33)*M
 (23)- 12*M(42)*M(34)*M(23)*M(22) + 12*M(42)*M(34)*M(23)- 12*M(
 42)*M(34)*M(21)*M(13)- 12*M(42)*M(32)*M(24)*M(23)- 12*M(42)*M(
 31)*M(23)*M(14) + 12*M(42)*M(24)*M(22)- 12*M(42)*M(24)*M(21)*M(
 12)- 12*M(42)*M(24)*M(44)*M(44)- 12*M(42)*M(24)*M(22)*M(22)-
 12*M(42)*M(24)- 12*M(42)*M(22)*M(21)*M(14)- 12*M(42)*M(21)*M(
 14)*M(11) + 12*M(42)*M(21)*M(14)- 12*M(41)*M(34)*M(33)*M(13)-
 12*M(41)*M(34)*M(23)*M(12)- 12*M(41)*M(34)*M(13)*M(11) + 12*M(
 41)*M(34)*M(13)- 12*M(41)*M(32)*M(24)*M(13)- 12*M(41)*M(31)*M(
 14)*M(13)- 12*M(41)*M(24)*M(22)*M(12)- 12*M(41)*M(24)*M(12)*M(
 11) + 12*M(41)*M(24)*M(12)- 12*M(41)*M(21)*M(14)*M(12) + 12*M(
 41)*M(14)*M(11)- 12*M(41)*M(14)*M(44)*M(44)- 12*M(41)*M(14)*M(
 11)*M(11)- 12*M(41)*M(14)- 12*M(33)*M(32)*M(23)*M(22) + 12*M(
 33)*M(32)*M(23)- 12*M(33)*M(32)*M(21)*M(13)- 12*M(33)*M(31)*M(
 23)*M(12)- 12*M(33)*M(31)*M(13)*M(11) + 12*M(23)*M(31)*M(13) +
 12*M(33)- 12*M(32)*M(31)*M(23)*M(13) + 12*M(32)*M(23)*M(22)-
 12*M(32)*M(23)*M(21)*M(12)- 12*M(32)*M(23)*M(33)*M(33)- 12*M(
 32)*M(23)*M(22)*M(22)- 12*M(32)*M(23)- 12*M(32)*M(22)*M(21)*M(
 13)- 12*M(32)*M(21)*M(13)*M(11) + 12*M(32)*M(21)*M(13)- 12*M(
 31)*M(23)*M(22)*M(12)- 12*M(31)*M(23)*M(12)*M(11) + 12*M(31)*M(
 23)*M(12)- 12*M(31)*M(21)*M(13)*M(12) + 12*M(31)*M(13)*M(11)-
```

```
12*M(31)*M(13)*M(33)*M(33)- 12*M(31)*M(13)*M(11)*M(11)- 12*M(
31)*M(13)- 12*M(22)*M(21)*M(12)*M(11) + 12*M(22)*M(21)*M(12) +
12*M(22) + 12*M(21)*M(12)*M(11)- 12*M(21)*M(12)*M(22)*M(22)-
12*M(21)*M(12)*M(11)*M(11)- 12*M(21)*M(12) + 12*M(11)- 3*M(44)
*M(44)*M(44)*M(44)- 3*M(33)*M(33)*M(33)*M(33)- 3*M(22)*M(22)*M
(22)*M(22)- 3*M(11)*M(11)*M(11)*M(11) + 4*M(44)*M(44)*M(44) + 4
*M(33)*M(33)*M(33) + 4*M(22)*M(22)*M(22) + 4*M(11)*M(11)*M(11)
- 6*M(44)*M(44)- 6*M(43)*M(34)*M(43)*M(34)- 6*M(42)*M(24)*M(
42)*M(24)- 6*M(41)*M(14)*M(41)*M(14)- 6*M(33)*M(33)- 6*M(32)*
M(23)*M(32)*M(23)- 6*M(31)*M(13)*M(31)*M(13)- 6*M(22)*M(22)-
6*M(21)*M(12)*M(21)*M(12)- 6*M(11)*M(11))/12

N R
PRINT NOUTPUT
PRINT NLIST
KEEP CAR,TLML
*NEXT
Z TEST1=CAR-1-TLML-1/2*TLML*TLML
Z TL2=TLML*TLML
ID,AINBE,M(A1+)*M(A2+)*M(A3+)*M(A4+)*M(A5+)=0
N R
PRINT NOUTPUT
KEEP TLML,TEST1,TL2
*NEXT
Z TL3=TLML*TL2
ID,AINBE,M(A1+)*M(A2+)*M(A3+)*M(A4+)*M(A5+)=0
N R
PRINT NOUTPUT
KEEP TEST1,TLML,TL2,TL3
*NEXT
Z TL4=TLML*TL3
ID,AINBE,M(A1+)*M(A2+)*M(A3+)*M(A4+)*M(A5+)=0
N R
PRINT NOUTPUT
KEEP,TEST1,TL3,TL4
*NEXT
Z TEST=TEST1-1/6*TL3-1/24*TL4
ID,AINBE,M(32)=MM(1)
AL,AINBE,M(33)=MM(2)
AL,AINBE,M(34)=MM(3)
AL,AINBE,M(41)=MM(4)
AL,AINBE,M(42)=MM(5)
AL,AINBE,M(43)=MM(6)
AL,AINBE,M(44)=MM(7)
ID,AINBE,M(AA+)=MM(AA)
N R
*BEGIN
*END
```