ФЭИ-1579

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. К. АРТЕМЬЕВ

Достаточные условия сходимости для одного класса неявных схем неполной факторизации

Обнинск — 1984

УДК 518.12

В. К. Артемьев.

Достаточные условия сходимости для одного класса неявных схем неполной факторизации.

ФЭИ-1579. Обнинск: ФЭИ, 1984. — 12 с.

Теоретически исследуется сходимость для одного класса неявных схем неполной факторизации с периферийной компенсацией. Получены достаточные условия на параметры схемы, обеспечивающие сходимость. Приводится теорема сходимости.

В настоящее время метод неполной факторизации, предложенный Н.И.Булеевым в 1960 г. см.[1], получил широкое развитие. После первой явной схемы с диагональной компенсацией появились неявные схемы см.[2] и много вариантов явных и неявных схем: с диагональной и периферийной компенсацией, например, схема h - факторизации см.[3], схемы с регуляризатором и др. см.[4],[5].

Сходимость метода неполной факторизации исследовалась в основном экспериментально. Численные эксперименты и сравнение с другими методами на модельных задачах показали эффективность схем неполной факторизации.

На практике метод применяется для расчета реакторов, для решения гидродинамических, тепловых задач и др.

Опишем метод неполной факторизации в векторно-матричной форме. Пусть требуется решить уравнение

$$A\Phi = F, \tag{I.1}$$

где A - действительная $L \times L$ матрица, $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_L)^T$, $F = (f_1, \dots, f_L)^T$ - векторы в евклидовом пространстве R^L.

Идея метода заключается в следующем. К левой и правой частям равенства (I.1) добавляется вектор $C\Phi$

$$(A+C)\Phi = F + C\Phi, \tag{I.2}$$

при этом C выбирается такой, чтобы $B=A+C$ могла быть представлена в виде произведения трех матриц

$$B = \Gamma^{-1} R S . \tag{I.3}$$

Матрицы R и S - матрицы более простой структуры, чем A, Γ - диагональная матрица.

Уравнение (I.4) решается методом последовательных приближений

$$B\Phi^n = C\Phi^{n-1} + F \tag{I.4}$$

или, с учетом (I.3),

$$\begin{cases} RZ^n = \Gamma C\Phi^{n-1} + \Gamma F, \\ S\Phi^n = Z^n . \end{cases} \tag{I.5}$$

Для явной схемы неполной факторизации в работе [6] в случае симметричной матрицы $A = A^*$ было проведено теоретическое исследование сходимости. Было установлено, что $B = B^*$. Затем на...

дены оценки энергетической эквивалентности, т.е. для любого вектора $v \neq 0$

$$(Av, v)/(Bv, v) \in [\sigma_0, \sigma_1],$$

где $0 < \sigma_0 \leq \sigma_1$. В этом случае оператор $B^{-1}A$ самосопряжен в энергетическом пространстве, т.е. пространстве со скалярным произведением (Av, v) или (Bv, v), и его спектр лежит на отрезке $[\sigma_0, \sigma_1]$. Для явной схемы был построен оптимальный K - шаговый процесс:

$$B(\phi^k - \phi^{k-1}) = \tau_k (F - A\phi^{k-1}).$$

В случае неявных схем даже для $A = A^*$ факторизованный оператор $B \neq B^*$, поэтому доказывать сходимость надо в исходном пространстве векторов R^L, т.е. необходимо показать, что $\rho(B^{-1}C) < 1$. Сходимость метода (I.4) в зависимости от свойств элементов матриц A, B, C исследовалась многими авторами. В книге [7] доказана теорема сходимости, если

$$A^{-1} \geq 0, \tag{I.6}$$

$$B^{-1} \geq 0, \tag{I.7}$$

$$C \geq 0. \tag{I.8}$$

Как показано в работе [6] условия (I.6), (I.7) выполняются при несущественных ограничениях на элементы матриц и параметры схемы. Требование же (I.8) является очень сильным, что приводит к сильным ограничениям на параметры схемы. Так для схем с периферийной компенсацией нет ни одной теоремы сходимости. При этих значениях параметров метод неполной факторизации сходится медленно. В наиболее быстро сходящихся схемах C всегда содержит отрицательные элементы, т.е. периферийную компенсацию. Прайс в работе [8] доказал теорему, которую можно переформулировать так.

Теорема I.I. Если $B = A + C$, $B^{-1} \geq 0$, $B^{-1}C \geq 0$, то итерационный метод (I.4) сходится тогда и только тогда, когда $A^{-1} \geq 0$.

Условие $B^{-1}C \geq 0$ является более слабым. Так матрица C может содержать отрицательные элементы.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = A + C = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \geq 0, \quad B^{-1}C = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \geq 0.$$

В следующем разделе будет исследован один из вариантов неявных схем неполной факторизации с периферийной компенсацией.

2. Описание структуры матриц A , R , S в терминах сеточных функций. Свойства матриц A , B , R , S , Γ в явных и неявных схемах неполной факторизации .

Метод неполной факторизации был предложен для решения эллиптических сеточных уравнений

$$A\varphi_{ik} = -a_{ik}\varphi_{i-1k} - c_{ik}\varphi_{i+1k} - b_{ik}\varphi_{ik-1} - d_{ik}\varphi_{ik+1} + p_{ik}\varphi_{ik} = f_{ik}, \quad i=\overline{1,M}, \; k=\overline{1,N}, \tag{2.1}$$

$$a_{1k} = c_{Mk} = b_{i1} = d_{iN} = 0, \tag{2.2}$$

$$p_{ik} \geq a_{ik} + b_{ik} + c_{ik} + d_{ik}, \tag{2.3}$$

$$a_{ik} \geq 0, \; b_{ik} \geq 0, \; c_{ik} \geq 0, \; d_{ik} \geq 0, \; p_{ik} > 0 . \tag{2.4}$$

Будем предполагать, что строгое неравенство (2.3) выполнено хотя бы в одной точке сетки.

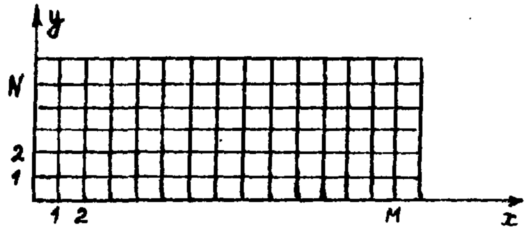

Рис. 2.I

Если мы занумеруем узлы сетки, изображенной на рисунке 2.I , слева направо и снизу вверх, то матрицу A можно записать в виде суммы

$$A = A_1 + A_2 . \tag{2.5}$$

В матрицу A_1 отнесем коэффициенты a_{ik}, c_{ik} , $p_{ik}/2$, в матрицу A_2 – b_{ik} , d_{ik} , $p_{ik}/2$. Матрица A_1 блочно-диагональная матрица, каждый диагональный блок у которой является трехдиагональной квадратной матрицей размерности M , а число блоков N ; A_2 – блочно-диагональная, у которой диагональные блоки и соседние к ним являются диагональными матрицами.

Нетрудно заметить, что диагональные элементы матрицы положительные, внедиагональные – отрицательные. Нетрудно показать, что матрица A имеет обратную и $A^{-1}\geqslant 0$ см.[7].

Методы неполной факторизации можно разделить на два больших класса: явные схемы и неявные. Различие сводится к структурным особенностям матриц R и S, т.е. к расположению ненулевых элементов. Покажем, что как в явных, так и в неявных схемах факторизованный оператор B обладает свойством $B^{-1}\geqslant 0$.

В явной схеме операторы R и S имеют вид (см.[I],[6])

$$\begin{cases} (Rz)_{ik} = z_{ik} - \alpha_{ik} z_{i-1k} - \beta_{ik} z_{ik-1}, \\ (S\varphi)_{ik} = \varphi_{ik} - \xi_{ik}\varphi_{i+1k} - \delta_{ik}\varphi_{ik+1} = z_{ik}, \end{cases} \tag{2.6}$$

при этом $\alpha_{ik}\geqslant 0$, $\beta_{ik}\geqslant 0$, $\xi_{ik}\geqslant 0$, $\delta_{ik}\geqslant 0$, $\gamma_{ik}>0$, где γ_{ik} элементы диагональной матрицы Γ. Очевидно, что матрицы R и S имеют вид (при выбранной нами нумерации узлов) $R=E-\bar{R}$, где $\bar{R}\geqslant 0$ и строго нижняя треугольная, $S=E-\bar{S}$, где $\bar{S}\geqslant 0$ и строго верхняя треугольная. Тогда $R^{-1}\geqslant 0$, $S^{-1}\geqslant 0$ и $B^{-1}=S^{-1}R^{-1}\Gamma\geqslant 0$ см.[7].

В неявных схемах операторы R и S имеют вид (см. [2] - [5])

$$\begin{cases} (Rz)_{ik} = z_{ik} - \alpha_{ik} z_{i-1k}, \\ (S\varphi)_{ik} = \varphi_{ik} - \beta_{ik}\varphi_{ik-1} - \delta_{ik}\varphi_{ik+1} - \xi_{ik}\varphi_{i+1k} = z_{ik}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Оператор ΓC будем записывать в следующем виде

$$\begin{aligned}(\Gamma C\varphi)_{ik} = {} & \alpha_{ik}\beta_{i-1k}\varphi_{i-1k-1} + \alpha_{ik}\delta_{i-1k}\varphi_{i-1k+1} - \\ & - z_{ik}\varphi_{i-1k} - q_{ik}\varphi_{i+1k} - l_{ik}\varphi_{ik-1} - t_{ik}\varphi_{ik+1} + \varepsilon_{ik}\varphi_{ik}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Выберем коэффициенты z_{ik}, q_{ik}, l_{ik}, t_{ik}, ε_{ik} в следующем виде

$$\begin{cases} z_{ik} = \varkappa_{ik}\alpha_{ik}, \\ l_{ik} = \theta_{ik}\beta_{ik}, \\ q_{ik} = \mu_{ik}\xi_{ik}, \\ t_{ik} = \nu_{ik}\delta_{ik}, \\ \varepsilon_{ik} = \gamma_{ik}\bar{\varepsilon}_{ik}, \end{cases} \tag{2.9}$$

где $0\leqslant \varkappa_{ik}$, θ_{ik}, μ_{ik}, $\nu_{ik} < 1$.

Для коэффициентов α_{ik}, β_{ik}, ξ_{ik}, δ_{ik} получим выражения

$$\begin{cases} \alpha_{ik} = \gamma_{ik} a_{ik}/(1-\varkappa_{ik}), \\ \beta_{ik} = \gamma_{ik} b_{ik}/(1-\theta_{ik}), \\ \xi_{ik} = \gamma_{ik} c_{ik}/(1-\mu_{ik}), \\ \delta_{ik} = \gamma_{ik} d_{ik}/(1-\nu_{ik}). \end{cases} \tag{2.10}$$

коэффициенты γ_{ik} определяются из рекуррентной формулы

$$1+\alpha_{ik}\xi_{i-1k}=\gamma_{ik}p_{ik}+\gamma_{ik}\bar{\varepsilon}_{ik} \qquad (2.11)$$

или

$$\gamma_{ik}=\left[p_{ik}+\bar{\varepsilon}_{ik}-a_{ik}(1-\varkappa_{ik})^{-1}\xi_{i-1k}\right]^{-1}, \qquad (2.12)$$

Докажем важное свойство коэффициентов γ_{ik}, β_{ik}, ξ_{ik}, δ_{ik}.

Лемма 2.I. Коэффициенты γ_{ik}, β_{ik}, ξ_{ik}, δ_{ik} удовлетворяют условиям

$$\gamma_{ik}>0 , \qquad (2.13)$$

$$0\le\beta_{ik}+\delta_{ik}+\xi_{ik}\le 1, \qquad (2.14)$$

если

$$\varepsilon_{ik}\geq\max\{\theta_{ik},\mu_{ik},\nu_{ik}\} \qquad (2.15)$$

и

$$\varkappa_{ik}\le 1-a_{ik}\xi_{i-1k}/(p_{ik}+\bar{\varepsilon}_{ik}), \qquad (2.16)$$

при этом строгое неравенство (2.14) выполнено для $i=\overline{2,M}$, $k=\overline{1,N}$.

Доказательство.

Докажем, что $\xi_{ik}<1$. Из равенства (2.11) следует, что

$$1-\varepsilon_{ik}>\xi_{ik}(1-\mu_{ik})+\alpha_{ik}(1-\xi_{i-1k}).$$

По индукции нетрудно показать, что если $\varepsilon_{ik}\geq\mu_{ik}$, то $\xi_{ik}<1$.

Теперь докажем основное утверждение леммы. Из (2.11) и неравенства (2.3) следует, что

$$1-\varepsilon_{ik}\geq(1-\theta_{ik})\beta_{ik}+(1-\mu_{ik})\xi_{ik}+(1-\nu_{ik})\delta_{ik}+\alpha_{ik}(1-\xi_{i-1k}).$$

Очевидно, что

$$\beta_{ik}+\xi_{ik}+\delta_{ik}\le\left(1-\varepsilon_{ik}-\alpha_{ik}(1-\xi_{i-1k})\right)/\left(1-\max\{\theta_{ik},\mu_{ik},\nu_{ik}\}\right). \qquad (2.17)$$

Из неравенства (2.17) вытекает утверждение леммы. Лемма доказана. Лемма 2.I доказывает тот факт, что матрица $\Gamma>0$, а матрица S является матрицей с преобладающей главной диагональю. Так как диагональные элементы матрицы S положительные, а внедиагональные отрицательные, то $S^{-1}\geq 0$ см.[7]. Лемма 2.I также позволяет утверждать, что метод прогонки для решения трехточечного разностного уравнения (2.7) будет устойчивым.

Очевидно, что коэффициенты $\alpha_{ik}\geq 0$ и, следовательно, $R^{-1}\geq 0$. Таким образом, для неявной схемы (2.7)-(2.12) $B^{-1}=S^{-1}R^{-1}\Gamma\geq 0$.

3. Исследование условий, обеспечивающих неотрицательность матрицы $B^{-1}C$.

Найдем условия для параметров $\varkappa_{ik}$, μ_{ik}, θ_{ik}, ν_{ik}, $\bar{\varepsilon}_{ik}$, при которых $B^{-1}C \geq 0$.

Возьмем в R^L базисный вектор $e_j = (0, \dots, 1, \dots 0)^T$, где $j = m + (n-1)M$, (m,n) – индексы фиксированного узла сетки. Очевидно, что $y_j = B^{-1}Ce_j$ есть j -столбец матрицы $B^{-1}C$. Покажем, что все $y_j \geq 0$, $j = 1, L$.

Перейдем к сеточным функциям. Вектору e_j соответствует сеточная функция

$$x_{mn} = 1$$

$x_{ik} = 0$ в остальных точках сетки.

Выпишем значения функции

$$\begin{cases} \Gamma C x_{m-1n} = -q_{m-1n}, \\ \Gamma C x_{mn+1} = -l_{mn+1}, \\ \Gamma C x_{mn} = \varepsilon_{mn}, \\ \Gamma C x_{mn-1} = -t_{mn-1}, \\ \Gamma C x_{m+1n+1} = d_{m+1n+1}\beta_{mn+1}, \\ \Gamma C x_{m+1n} = -r_{m+1n}, \\ \Gamma C x_{m+1n-1} = d_{m+1n-1}\delta_{mn-1}, \\ \\ \Gamma C x_{ik} = 0 \quad \text{в остальных точках.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Теперь воспользуемся тем, что оператор B факторизованный

$$\begin{cases} (RZ)_{ik} = \Gamma C x_{ik}, \\ (Sy)_{ik} = Z_{ik} \end{cases} \tag{3.2}$$

и выпишем значения сеточной функции Z_{ik}

$$Z_{mn} = -q_{m-1n},$$

$$Z_{mn+1} = -l_{mn+1},$$

$$Z_{mn} = \varepsilon_{mn} - d_{mn}q_{m-1n},$$

$$Z_{mn-1} = -t_{mn-1},$$

$$Z_{m+sn+1} = d_{m+sn+1} \dots d_{m+1n+1}(\beta_{mn+1} - l_{mn+1})\ 1 \leq s \leq M-m,\ m < M,$$

$$Z_{m+sn} = d_{m+sn} \dots d_{m+1s}(\varepsilon_{mn} - d_{mn}q_{m-1n}x_{m+1n})\ 1 \leq s \leq M-m,\ m < M,$$

$$Z_{m+sn-1} = d_{m+sn-1} \dots d_{m+1n-1}(\delta_{mn-1} - t_{mn-1}),\ 1 \leq s \leq M-m,\ m < M,$$

$Z_{ik} = 0$ для остальных узлов.

Исследуем соотношение $Sy_{ik} = z_{ik}$. Запишем его в следующем виде

$$\bar{S} y_{ik} \equiv y_{ik} - \beta_{ik} y_{ik-1} - \delta_{ik} y_{ik+1} = v_{ik}, \qquad (3.3)$$

где $v_{ik} = \xi_{ik} y_{i+1k} + z_{ik}$.

Для $\bar{S}$ существует неотрицательный обратный оператор. Рассмотрим $\bar{S}^{-1} v_{ik}$ при $i = \overline{m+1, M}$, $k = \overline{1, N}$, $m \le M-1$.

Очевидно, что $v_{Mk} = z_{Mk}$, при этом $z_{Mn-1} > 0$, $z_{Mn+1} > 0$, а $z_{Mn} \geq 0$, если

$$\varepsilon_{mn} - d_{mn} q_{m-1n} - \varkappa_{m+1n} \geq 0. \qquad (3.4)$$

Если выполняется условие (3.4), то $y_{Mk} \geq 0$, $k = \overline{1, N}$.

Далее по индукции нетрудно показать, что если выполнено неравенство (3.4), то $y_{ik} \geq 0$, $k = \overline{1, N}$, $i = \overline{m+1, M}$, $m \le M-1$.

Исследуем уравнения (3.3) для $i = m-1, m$ (в том числе случай $m = M$) $k = \overline{1, N}$.

Пусть $i = m$. Так как $\bar{S}^{-1} v \geq \bar{S}^{-1} z$, а при $m = M$ $\bar{S}^{-1} v \geq \bar{S}^{-1} z$, то покажем, что $u \equiv \bar{S}^{-1} z \geq 0$.

Оператор запишем в следующем виде, см. [9]

$$\tilde{z}_{ik} = \tilde{\beta}_{ik} z_{ik-1} + \tilde{\gamma}_{ik} z_{ik},$$
$$u_{ik} = \tilde{\delta}_{ik} u_{ik+1} + \tilde{z}_{ik},$$
$$\tilde{\beta}_{ik} = \tilde{\gamma}_{ik} \beta_{ik}, \quad \tilde{\delta}_{ik} = \tilde{\gamma}_{ik} \delta_{ik},$$
$$\tilde{\gamma}_{ik} = \left(1 - \beta_{ik} \tilde{\delta}_{ik-1}\right)^{-1}.$$

Выпишем значения функции $\tilde{z}_{ik}$

$$\tilde{z}_{mn-1} = -\tilde{\gamma}_{mn-1} t_{mn-1}, \quad n \geq 2,$$
$$\tilde{z}_{mn} = -\tilde{\beta}_{mn} \tilde{\gamma}_{mn-1} t_{mn-1} + \tilde{\gamma}_{mn} (\varepsilon_{mn} - d_{mn} q_{m-1n}) =$$
$$= \tilde{\gamma}_{mn} (\varepsilon_{mn} - d_{mn} q_{m-1n} - \beta_{mn} \tilde{\delta}_{mn-1} v_{mn-1}),$$
$$\tilde{z}_{mn+s} = \tilde{\beta}_{mn+s} \cdots \tilde{\beta}_{mn+1} \tilde{\gamma}_{mn} (\varepsilon_{mn} - d_{mn} q_{m-1n} - \beta_{mn} \tilde{\delta}_{mn-1} v_{mn-1}) -$$
$$- \tilde{\gamma}_{mn+1} \ell_{mn+1} = \tilde{\beta}_{mn+s} \cdots \tilde{\beta}_{mn+1} (\tilde{\gamma}_{mn} (\varepsilon_{mn} - d_{mn} q_{m-1n} - \beta_{mn} \tilde{\delta}_{mn-1} v_{mn-1}) -$$
$$- \theta_{mn+1}), \quad 1 \le s \le N-n, \quad n \le N-1,$$

$$\tilde{z}_{mk} = 0 \qquad \text{в остальных точках.}$$

Очевидно, что $u_{mn+s} \geqslant 0$, $0 \le s \le N-n$, если

$$\varepsilon_{mn} - \alpha_{mn} q_{m-1n} - \beta_{mn} \tilde{\delta}_{mn-1} v_{mn-1} \geqslant 0, \tag{3.5}$$

$$\tilde{\gamma}_{mn} (\varepsilon_{mn} - \alpha_{mn} q_{m-1n} - \beta_{mn} \tilde{\delta}_{mn-1} v_{mn-1}) - \theta_{mn+1} \geqslant 0. \tag{3.6}$$

При $k = n-1$

$$u_{mn-1} \geqslant \tilde{\tilde{\delta}}_{mn-1} \tilde{\gamma}_{mn} (\varepsilon_{mn} - \alpha_{mn} q_{m-1n} - \beta_{mn} \tilde{\tilde{\delta}}_{mn-1} v_{mn-1}) -$$
$$- \tilde{\gamma}_{mn-1} t_{mn-1} = \tilde{\delta}_{mn-1} (\tilde{\gamma}_{mn} (\varepsilon_{mn} - \alpha_{mn} q_{m-1n} - \beta_{mn} \tilde{\delta}_{mn-1} v_{mn-1} -$$
$$- v_{mn-1}) = \tilde{\tilde{\delta}}_{mn-1} \tilde{\gamma}_{mn} (\varepsilon_{mn} - \alpha_{mn} q_{m-1n} - v_{mn-1}).$$

Если

$$v_{mn-1} \le \varepsilon_{mn} - \alpha_{mn} q_{m-1n}, \tag{3.7}$$

то $u_{mn-1} \geqslant 0$, ,а также . $u_{mk} \geqslant 0$, $1 \le k \le n-2$.
Нетрудно заметить, что выполнено неравенство (3.7), то автоматически выполнется неравенство (3.5).

Для параметра θ_{mn} получаем рекуррентное соотношение

$$\theta_{mn+1} \le (\varepsilon_{mn} - \alpha_{mn} q_{m-1n} - \beta_{mn} \tilde{\delta}_{mn-1} v_{mn-1}) / (1 - \beta_{mn} \tilde{\tilde{\delta}}_{mn-1}), \tag{3.8}$$

при этом для $n = 1$

$$\theta_{m1} \le \varepsilon_{m1} - \alpha_{m1} q_{m-1\,1}.$$

При $i = m-1$ покажем, что $v_{m-1k} \geqslant 0$, $k = \overline{1,N}$. Если $k \neq n$, то

$$v_{m-1k} = \xi_{m-1k} y_{mk} \geqslant 0.$$

При $k = n$.

$$v_{m-1n} \geqslant \xi_{m-1n} (\varepsilon_{mn} - \alpha_{mn} q_{m-1n}) - q_{m-1n} \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon_{mn} - \alpha_{mn} q_{m-1n} - \mu_{m-1n} \geqslant 0 \tag{3.9}$$

или

$$\varepsilon_{mn} \geqslant \mu_{m-1n} (1 + \xi_{m-1n} \alpha_{mn}) \tag{3.10}$$

Из (3.10) и (2.11) следует, что

$$\bar{\varepsilon}_{mn} \gamma_{mn} \geqslant \mu_{m-1n} (\gamma_{mn} p_{mn} + \bar{\varepsilon}_{mn} \gamma_{mn})$$

и

$$\mu_{m-1n} \le \bar{\varepsilon}_{mn} / (p_{mn} + \bar{\varepsilon}_{mn}). \tag{3.11}$$

Суммируя все выкладки, можно сформулировать теорему сходимости.

Теорема 3.I

Если:

1. $0 \le \mu_{m-1n} \le \bar{\varepsilon}_{mn} / (\rho_{mn} + \bar{\varepsilon}_{mn}),\ \mu_{m-1n} < 1,\ m = \overline{1,M},\ n = \overline{1,N}$,

2. $0 \le \varkappa_{m+1n} \le \varepsilon_{mn} - d_{mn} q_{m-1n},\ m = \overline{1,M-1},\ n = \overline{1,N}$,

   $\varkappa_{mn} < 1 - a_{mn} \xi_{m-1n} / (\rho_{mn} + \bar{\varepsilon}_{mn})$,
   $m = \overline{1,M},\ n = \overline{1,N}$,

3. $0 \le \nu_{mn-1} \le \varepsilon_{mn} - d_{mn} q_{m-1n}$,
   $\nu_{mn-1} < 1,\ m = \overline{1,M},\ n = \overline{2,N}$,

4. $\theta_{mn+1} \le (\varepsilon_{mn} - d_{mn} q_{m-1n} - \beta_{mn} \tilde{\delta}_{mn-1} \nu_{mn-1}) / (1 - \beta_{mn} \tilde{\delta}_{mn-1})$,
   $\theta_{mn+1} < 1,\ m = \overline{1,M},\ n = \overline{1,N-1}$,

5. $\max\{\theta_{mn}, \nu_{mn}, \mu_{mn}\} \le \varepsilon_{mn}$,
   $m = \overline{1,M},\ n = \overline{1,N}$,

то неявная схема метода неполной факторизации (2.7) - (2.I2) сходится в пространстве R^L, $L = M \times N$ при любом начальном приближении. Опишем последовательность выбора параметров:

I. При $m = 1$, $n = \overline{1,N}$ выбираем $\bar{\varepsilon}_{mn}$, затем вычисляем γ_{mn}.
2. При $1 < m < M$, $n = \overline{1,N}$ выбираем $\bar{\varepsilon}_{mn}$, затем μ_{m-1n}, вычисляем ξ_{m-1n}. После этого можно выбирать $\varkappa_{mn}$ и вычислять коэффициенты γ_{mn}, d_{mn}.
3. После того как вычислены коэффициенты γ_{mn}, d_{mn}, ξ_{mn}, параметр ν_{mn} легко выбирается по формуле (3.7). Затем вычисляются коэффициенты δ_{mn}.
4. Так как $\beta_{m1} = 0$, $m = \overline{1,M}$, то $\gamma_{m1} = 1$. При $m = \overline{1,M}$, $2 \le n \le N$ выбираем θ_{mn} по формуле (3.8), вычисляем β_{mn} и затем $\gamma_{mn} = (1 - \beta_{mn} \tilde{\gamma}_{mn-1} \delta_{mn-1})^{-1}$.

Заметим, что параметр $\bar{\varepsilon}_{mn}$ в программе можно оставить свободным и за счет его выбора оптимизировать скорость сходимости итерационного процесса. Из теоремы 3.I вытекают важные следствия.

Следствие I.I. Если $\mu_{mn} = \varkappa_{mn} = 0$, $m = \overline{1,M}$, $n = \overline{1,N}$, т.е. выбирается компенсирующее выражение вида

$$(G\varphi)_{mn} = -\ell_{mn} \varphi_{mn-1} \qquad -t_{mn} \varphi_{mn+1} + \varepsilon_{mn} \varphi_{mn},$$

то метод сходится, если

I. $0 \le \nu_{mn-1} \le \varepsilon_{mn}$,

$\nu_{mn-1} < 1$,

$m = \overline{1,M}$, $n = \overline{2,N}$,

2. $0 \le \theta_{mn+1} \le (\varepsilon_{mn} - \beta_{mn}\tilde{\delta}_{mn-1}\nu_{mn-1})/(1 - \beta_{mn}\tilde{\delta}_{mn-1})$,

$\theta_{mn+1} < 1$,

$m = \overline{1,M}$, $n = \overline{1,N-1}$,

3. $\max\{\theta_{mn}, \nu_{mn}, \mu_{mn}\} \le \varepsilon_{mn}$,

$m = \overline{1,M}$, $n = \overline{1,N}$.

Следствие I.2. Пусть $\mu_{mn} = 0$.
Тогда компенсирующее выражение имеет вид

$$(Q\varphi)_{mn} = -z_{mn}\varphi_{m-1n} - \ell_{mn}\varphi_{mn-1} - t_{mn}\varphi_{mn+1} + \varepsilon_{mn}\varphi_{mn},$$

аналогичный по структуре в схеме h -факторизации см.[3].
Метод неполной факторизации сходится, если

I. $0 \le \varkappa_{m+1n} \le \varepsilon_{mn}$,

$m = \overline{1,M-1}$, $n = \overline{1,N}$,

$\varkappa_{mn} < 1 - a_{mn}\xi_{m-1n}/(\rho_{mn} + \tilde{\varepsilon}_{mn})$,

$m = \overline{1,M}$, $n = \overline{1,N}$,

2. $0 \le \nu_{mn-1} \le \varepsilon_{mn}$,

$\nu_{mn-1} < 1$,

$m = \overline{1,M}$, $n = \overline{2,N}$,

3. $0 \le \theta_{mn+1} \le (\varepsilon_{mn} - \beta_{mn}\tilde{\delta}_{mn-1}\nu_{mn-1})/(1 - \beta_{mn}\tilde{\delta}_{mn-1})$,

$\theta_{mn+1} < 1$,

$m = \overline{1,M}$, $n = \overline{1,N-1}$;

4. $\max\{\theta_{mn}, \nu_{mn}, \mu_{mn}\} \le \varepsilon_{mn}$,

$m = \overline{1,M}$, $n = \overline{1,N}$.

Выводы

I. В работе впервые получено доказательство сходимости некоторых схем неполной факторизации с периферийной компенсацией.

2. Теорема 3.I дает достаточные условия сходимости для одного класса неявных схем с периферийной компенсацией. Выбор параметров может быть программно реализован, при этом один параметр остается свободным. За счет выбора этого параметра можно оптимизировать скорость сходимости метода.

Литература

1. Булеев Н.И. Численный метод решения двумерных и трехмерных разностных уравнений типа диффузии.-Математ.сб.,1960,т.51, № 2,с.227-238 .
2. Булеев Н.И. Метод неполной факторизации для решения двумерных и трехмерных разностных уравнений типа диффузии.-Ж. вычисл.матем. и матем.физ.,1970, т.10,№4,с.1042-1044.
3. Гинкин В.П. Метод h-факторизации для решения двумерных уравнений эллиптического типа.-В кн. Вычислительные методы линейной алгебры,Новосибирск,ВЦ СО АН СССР,1977,с.123-132.
4. Булеев Н.И. Метод неполной факторизации для решения двумерных уравнений эллиптического типа.-В сб.:Вопросы атомной науки и техники.Сер.физика и техника реакторов.Обнинск,1980, вып. 4(13), с. 3-14 .
5. Булеев Н.И. Схема неполной факторизации с регуляризатором.-В сб.:Вопросы атомной науки и техники. Сер. физика и техника реакторов. Обнинск, 1980, вып. 4(13), с.15-26.
6. Артемьев В.К.,Булеев Н.И. О сходимости явной схемы неполной факторизации при решении двумерных уравнений диффузии.-В сб.: Вопросы атомной науки и техники. Сер. физика и техника реакторов. Москва НИКИЭТ, 1983,вып. 5(34), с.19-24.
7. Varga R.C. Matrix Iterative Analysis. New Jersey Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1962.
8. Price H. Monotone and Oscillation Matrices applied to Finite Difference Approximations, Math. Comp., 1968, 22, с. 489-516.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.:Наука,1977.

Технический редактор Н.П.Герасимова

Подписано к печати 19/VII-1984 г. Т-14894 Формат 60х90 1/16
Офсетная печать Усл. п.л. 0,7 Уч.-изд. л. 0,5 Тираж 78 экз.
Цена 6 коп. ФЭИ-1579 Индекс 3624 Заказ [illegible]

Отпечатано на ротапринте ФЭИ, г.Обнинск

8 коп. Индекс 3624

Достаточные условия сходимости для одного класса неявных схем неполной факторизации.
ФЭИ-1579, 1984, 1-12.