

Laboratório de
Computação
Científica



BR 8512 176

PEDIDOS DE COPIAS DEVEM SER ENVIADOS AO:
REQUEST FOR FREE COPIES SHOULD BE ADDRESSED TO

Laboratório de Computação Científica
Departamento de Informação e Documentação
Rua Laura Mulier, 455
C. P. 56018
22290 - Rio de Janeiro, RJ
Brasil



ISSN 0101 6113

LABORATÓRIO DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - LCC
NOVEMBRO DE 1984

LCC- 027/84

UM MODELO DE ELEMENTOS FINITOS EM VORTICIDADE
E FUNÇÃO DE CORRENTE PARA A SOLUÇÃO NUMÉRICA
DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES*

Frederico da Cunha Furtado**

Augusto Cesar Galeão**

* Apresentado no 59 Congresso Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, Salvador, Bahia, outubro, 1984.

**Laboratório de Computação Científica, Caixa Postal 56018, 22290, Rio de Janeiro, RJ.

RESUMO

~~Neste trabalho,~~ ^A apresenta-se um procedimento numérico para a integração das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis, bidimensionais, quando representadas pelas equações de transporte de vorticidade e de Poisson para a função de corrente. Esse procedimento compreende: a obtenção da forma fraca dessas equações, a utilização do método dos elementos finitos para a construção dos espaços de aproximação e a obtenção da forma discretizada via o método de Galerkin. Nos problemas estacionários, o sistema de equações algébricas não-lineares resultante da discretização é resolvido pelo algoritmo de Newton-Raphson. Finalmente, nos problemas transientes, a solução do sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares resultante da discretização espacial é conseguida através de um esquema de diferenças finitas do tipo Crank-Nicolson. (Autor)

ABSTRACT

~~In this work,~~ ^A a numerical procedure for the integration of the incompressible Navier-Stokes equations, when expressed in terms of a stream function equation and a vorticity transport equation, is presented. This procedure comprises: the variational formulation of the equations, the construction of the approximation spaces by the finite element method and the discretization via the Galerkin method. For the stationary problems, the system of non-linear algebraic equations resulting from the discretization is solved by the Newton-Raphson algorithm. Finally, for the transient problems, the solution of the non-linear ordinary differential equations resulting from the spatial discretization is accomplished through a Crank-Nicolson scheme. (Author)

1. INTRODUÇÃO

Na obtenção de soluções numéricas das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis bidimensionais, pelo método dos elementos finitos, o uso de formulações que utilizam a vorticidade e a função de corrente como variáveis básicas apresenta, como forte atrativo frente àquelas que empregam como variáveis a velocidade e a pressão, a satisfação em forma exata da condição de incompressibilidade [1].

Se se utiliza uma formulação variacional clássica, do tipo Galerkin, para a construção do modelo de elementos finitos em vorticidade e função de corrente [2-4], enfrenta-se o problema do tratamento adequado de condições de contorno mistas, (especificação simultânea da função de corrente e de sua derivada normal e ausência de condições em vorticidade), que ocorrem sempre que superfícies sólidas limitam a região de escoamento. Com uma formulação mista [5] esse problema não existe; o seu inconveniente é a matriz não-definida, resultante da discretização que exige técnicas especiais para sua inversão.

Adotando-se a formulação clássica é preciso definir uma expressão aproximada para o cálculo da vorticidade no contorno. Nos trabalhos [2,3], definida essa aproximação, força-se, por intermédio da variável "tempo", o desacoplamento das equações de transporte de vorticidade e de Poisson para a função de corrente. Com isso, mesmo soluções estacionárias devem ser obtidas como limites de soluções transientes, quando o tempo tende a infinito; e o procedimento é bastante sensível ao número de Reynolds. Já em [4], embora a vorticidade no contorno seja igualmente avaliada de forma aproximada, mantém-se, no processo de solução, o acoplamento das equações. A resolução simultânea dessas equações tende a estabilizar o esquema numérico, permitindo: a abordagem de escoamentos para Reynolds mais elevados e a obtenção de soluções estacionárias como tal, o que representa um ganho em eficiência em relação ao esquema desacoplado.

Neste trabalho apresenta-se a formulação variacional clássica em vorticidade e função de corrente. O problema das condições de contorno é tratado segundo o procedimento sugerido em [4]. Soluções estacionárias são obtidas através de um esquema incremental e iterativo do tipo Newton-Raphson. Para o cálculo de

soluções transientes utiliza-se um algoritmo de diferenças finitas do tipo Crank-Nicolson. Finalmente, o sistema de equações algébricas é resolvido ou pelo método de Gauss, com armazenamento em banda, ou pela técnica de resolução frontal [6], para matrizes não-simétricas.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma região simplesmente conexa qualquer do plano xy , limitada por uma curva suave Γ de normal exterior \underline{n} . Um escoamento incompressível, laminar, de um fluido newtoniano se efetuando no interior dessa região pode ser modelado pelo sistema de equações diferenciais parciais

$$\begin{aligned} \dot{\omega} + \underline{v} \cdot \nabla \omega &= \nu \Delta \omega \quad \text{em } \Omega \times [0, T] \quad (\text{eq. de transporte de vorticidade}) \\ \Delta \psi &= -\omega \quad \text{em } \Omega \times [0, T] \quad (\text{eq. de Poisson}), \end{aligned} \quad (1a, b)$$

onde as funções escalares ω (vorticidade), ψ (função de corrente), e o campo vetorial \underline{v} (velocidade) dependem do ponto $\underline{x} \equiv (x, y) \in \Omega$ e do tempo $t \in [0, T]$. Nas expressões anteriores: ν é a viscosidade de cinemática, (\cdot) denota produto escalar de vetores, e $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$. Além disso $\nabla \omega$ é o gradiente de vorticidade e $\Delta(\cdot) = \text{div } \nabla(\cdot)$ é o operador laplaciano.

No sistema ortogonal de coordenadas cartesianas empregado, ω é a componente, normal ao plano do escoamento, do vetor vorticidade, e as componentes do vetor velocidade, nesse plano, são definidas por

$$\underline{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \underline{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \longrightarrow \text{div } \underline{v} = 0, \quad (2)$$

garantindo, automaticamente, a satisfação da condição de incompressibilidade.

A caracterização de um escoamento particular pressupõe o conhecimento de condições iniciais e das condições de contorno. As primeiras estão dadas através de

$$\omega(\underline{x}, 0) = \omega_0(\underline{x}) \quad ; \quad \psi(\underline{x}, 0) = \psi_0(\underline{x}) \quad ; \quad \forall \underline{x} \in \Omega. \quad (3a, b)$$

Com relação às condições de contorno admitiremos, por en-

quanto, que as mesmas são do tipo:

$$\omega|_{\Gamma_1} = \bar{\omega}(s,t) \quad ; \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma_1} = \bar{\omega}_n(s,t) \quad ; \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \quad ; \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \quad (4a,b)$$

$$\psi|_{\Gamma_2} = \bar{\psi}(s,t) \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n}|_{\Gamma_2} = \bar{\psi}_n(s,t) \quad ; \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma \quad , \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \quad (4c,d)$$

onde $\frac{\partial}{\partial n} (\cdot) = \underline{\nabla}(\cdot) \cdot \underline{n}$ é a derivada direcional segundo a normal ao contorno Γ , que é parametrizado no plano xy , pela coordenada s .

2.1. Formulação Variacional

Como o objetivo deste trabalho é a obtenção de soluções fracas do problema anteriormente abordado, torna-se necessário formular variacionalmente o problema em questão, o que pode ser conseguido exigindo-se que

$$\int_{\Omega} [\dot{\omega} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \omega - \nu \Delta \omega] \bar{\omega} d\Omega = 0 \quad ; \quad V\bar{\omega} \in V_{\omega} \quad \text{e para cada } t \in [0, T]$$

$$\int_{\Omega} [\omega + \Delta \psi] \bar{\psi} d\Omega = 0 \quad , \quad V\bar{\psi} \in V_{\psi} \quad (5a,b)$$

onde

$$V_{\omega} = \{ \bar{\omega} \in L_2(\Omega) ; \underline{\nabla} \bar{\omega} \in [L_2(\Omega)]^2 ; \bar{\omega}|_{\Gamma_1} = 0 \} \quad (6a,b)$$

$$V_{\psi} = \{ \bar{\psi} \in L_2(\Omega) ; \underline{\nabla} \bar{\psi} \in [L_2(\Omega)]^2 ; \bar{\psi}|_{\Gamma_2} = 0 \}$$

e $L_2(\Omega)$ é o espaço das funções quadrado-integráveis em Ω .

A partir das definições dos espaços de variações admissíveis V_{ω} e V_{ψ} , e aplicando-se o teorema da divergência às equações (5a,b), a formulação variacional do problema de escoamento consiste agora em determinar o par $(\omega(\underline{x}, t), \psi(\underline{x}, t))$ de funções admissíveis que satisfaz as condições iniciais (3a,b), e que para cada tempo $t \in [0, T]$, verifica as relações:

$$\int_{\Omega} [(\dot{\omega} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \omega) \bar{\omega} + \nu \underline{\nabla} \omega \cdot \underline{\nabla} \bar{\omega}] d\Omega = \int_{\Gamma - \Gamma_1} \nu \bar{\omega}_n \bar{\omega} d\Gamma \quad ; \quad V\bar{\omega} \in V_{\omega}$$

$$\int_{\Omega} (\underline{\nabla} \psi \cdot \underline{\nabla} \bar{\psi} - \omega \bar{\psi}) d\Omega = \int_{\Gamma - \Gamma_2} \bar{\psi}_n \bar{\psi} d\Gamma \quad ; \quad V\bar{\psi} \in V_{\psi} \quad (7a,b)$$

com: $\omega - \bar{\omega} \in V_{\omega}$, $\psi - \bar{\psi} \in V_{\psi}$; onde $\bar{\omega}$ e $\bar{\psi}$ são funções arbitrárias que

satisfazem as condições de contorno essenciais (4a) e (4c).

A presença do termo convectivo ($\underline{v} \cdot \nabla \omega$), na forma variacional (7a), requer, dada a sua não-linearidade, algum tipo de linearização que possibilite a obtenção de soluções. Neste trabalho, essa linearização é realizada diferentemente para os problemas estacionários e os problemas transientes.

2.1.1. Problemas Estacionários ($\dot{\omega}=0$)

Neste caso a forma linearizada é obtida através de um esquema incremental iterativo. Sejam então as relações incrementais:

$$\omega_{k+1} = \omega_k + \omega ; \psi_{k+1} = \psi_k + \psi ; \underline{v}_{k+1} = \underline{v}_k + \underline{v} . \quad (8a,c)$$

onde o índice (k+1) refere-se a grandezas a serem determinadas na (k+1)-ésima iteração, e o índice (k) indica grandezas conhecidas na iteração anterior. Obviamente, ω , ψ , \underline{v} são respectivamente os incrementos de vorticidade, função de corrente e velocidade da iteração k para a seguinte.

Particularizando-se a forma variacional (7a,b), (com $\dot{\omega}=0$), para a iteração (k+1), utilizando-se as relações incrementais (8a,c), e desprezando-se os termos quadráticos nos incrementos, chega-se finalmente à forma incremental linearizada:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\underline{v} \cdot \nabla \omega_k + \underline{v}_k \cdot \nabla \omega] \bar{\omega} + \underline{v} \cdot \nabla \omega_k \cdot \nabla \bar{\omega} d\Omega &= \int_{\Gamma-\Gamma_1} \bar{v} \bar{\omega}_n \bar{\omega} d\Gamma - \\ &= \int_{\Omega} [(\underline{v}_k \cdot \nabla \omega_k) \bar{\omega} + \underline{v} \cdot \nabla \omega_k \cdot \nabla \bar{\omega}] d\Omega ; \bar{v} \bar{\omega} \in V_{\omega} \\ \int_{\Omega} [\underline{v} \psi \cdot \nabla \bar{\psi} - \omega \bar{\psi}] d\Omega &= \int_{\Gamma-\Gamma_1} \bar{v}_n \bar{\psi} d\Gamma - \int_{\Omega} [\underline{v} \psi_k \cdot \nabla \bar{\psi} - \omega_k \bar{\psi}] d\Omega ; \bar{v} \bar{\psi} \in V_{\psi} . \end{aligned} \quad (9a,b)$$

Essa forma linear é então resolvida para os incrementos ω e ψ , e o processo iterativo se repete até que um certo critério de convergência, previamente fixado, seja alcançado.

2.1.2. Problemas Transientes

Neste caso, procede-se inicialmente a uma discretização no tempo, utilizando-se para tanto o esquema de diferenças finitas de Crank-Nicolson. Assim, para cada passo de integração (Δt), por

exemplo, entre os instantes $t_n = n\Delta t$ e $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$, todas as grandezas são tomadas no instante intermediário, de forma que:

$$\dot{\omega}_{n+1/2} = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\Delta t} \quad ; \quad \omega_{n+1} = \omega(t_{n+1}) \quad ; \quad (10a,b)$$

as demais grandezas sendo avaliadas por uma média aritmética dos valores nos instantes t_n e t_{n+1} .

Com essas definições a forma integral (7a,b) passa a ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{\Delta t} \right) \bar{\omega} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\underline{v}_{n+1} \cdot \underline{\nabla} \omega_{n+1}) \bar{\omega} + \underline{v}_{n+1} \cdot \underline{\nabla} \bar{\omega}] d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\underline{v}_n \cdot \underline{\nabla} \omega_n) \bar{\omega} + \underline{v}_n \cdot \underline{\nabla} \bar{\omega}] d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Gamma-\Gamma_1} \underline{v} [(\bar{\omega}_n)_{n+1} + (\bar{\omega}_n)_n] \bar{\omega} d\Gamma; \\ \underline{v} \bar{\omega} \in \underline{v}_{\omega} \\ \int_{\Omega} [\underline{\nabla} \psi_{n+1} \cdot \underline{\nabla} \bar{\psi} - \omega_{n+1} \bar{\psi}] d\Omega = \int_{\Gamma-\Gamma_1} (\bar{\psi}_n)_{n+1} \bar{\psi} d\Gamma \quad ; \quad \underline{v} \bar{\psi} \in \underline{v}_{\psi} \quad , \quad (11a,b) \end{aligned}$$

onde em (11b) usou-se o fato da equação ser satisfeita no instante anterior t_n .

Finalmente, essa forma é linearizada realizando-se iterações em cada incremento de tempo, e atrasando-se, em cada iteração, a velocidade no termo convectivo. Procedendo-se dessa maneira chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{\omega_{n+1}^t - \omega_n^t}{\Delta t} \right) \bar{\omega} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\underline{v}_{n+1}^{t-1} \cdot \underline{\nabla} \omega_{n+1}^t) \bar{\omega} + \underline{v}_{n+1}^{t-1} \cdot \underline{\nabla} \bar{\omega}] d\Omega = \\ = - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\underline{v}_n \cdot \underline{\nabla} \omega_n) \bar{\omega} + \underline{v}_n \cdot \underline{\nabla} \bar{\omega}] d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma-\Gamma_1} \underline{v} [(\bar{\omega}_n)_{n+1} + (\bar{\omega}_n)_n] \bar{\omega} d\Gamma = 0 \\ \underline{v} \bar{\omega} \in \underline{v}_{\omega} \\ \int_{\Omega} (\underline{\nabla} \psi_{n+1}^t \cdot \underline{\nabla} \bar{\psi} - \omega_{n+1}^t \bar{\psi}) d\Omega = \int_{\Gamma-\Gamma_1} (\bar{\psi}_n)_{n+1} \bar{\psi} d\Gamma = 0 \quad ; \quad \underline{v} \bar{\psi} \in \underline{v}_{\psi} \quad , \quad (12a,b) \end{aligned}$$

onde o índice t indica a iteração que está sendo realizada. Assim, fixado o instante de tempo, repete-se o processo iterativo até que a convergência desejada seja alcançada, quando, então, um novo instante de tempo é considerado.

2.2. Análise das Condições de Contorno

Se as condições de contorno do problema físico a ser abordado enquadram-se naquelas admitidas em (4a-d), a formulação variacional clássica, como apresentada no item anterior, encaixa-se perfeitamente. Em outras palavras, com essa formulação só é possível tratar escoamentos em que não sejam prescritos simultaneamente, numa mesma parte do contorno, o valor da função e da sua derivada normal. No entanto, é justamente este tipo de condição que ocorre se o contorno é uma superfície sólida, pois, neste caso, em termos de velocidade, a condição de contorno seria:

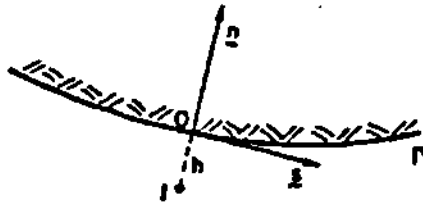


Fig. 1

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{v} \cdot \underline{\underline{n}}|_{\Gamma} = \bar{v}_n \text{ (condição de não-interpenetração)} \longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial s} \Big|_{\Gamma} = \bar{v}_n(s,t) \\ \mathbf{v} \cdot \underline{\underline{s}}|_{\Gamma} = \bar{v}_s \text{ (condição de não-escorregamento)} \longrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = -\bar{v}_s(s,t) \end{array} \right. \quad (13a,b)$$

onde \bar{v}_n e \bar{v}_s representam as componentes no sistema local $(\underline{\underline{n}}, \underline{\underline{s}})$ da velocidade com a qual a superfície sólida está se deslocando. Fica claro assim, que nestas situações, para uma mesma parte do contorno, tem-se condições simultâneas em ψ e sua derivada normal, e nenhuma em vorticidade. E portanto, da forma como foi deduzida, a formulação variacional é incapaz de reproduzir este problema.

A maneira tradicional de contornar este problema [2-4], e que foi a adotada neste trabalho, consiste em: usar uma expansão em série de Taylor de ψ no entorno do ponto do contorno, na direção normal a esse, retendo termos até 2ª ordem; admitir que a equação de Poisson é válida no contorno; utilizar as relações (13a,b), obtendo-se dessa forma uma aproximação para a vorticidade no contorno. Se a superfície está parada, ($\bar{v}_n = \bar{v}_s = 0$), chega-se a uma relação do tipo

$$\omega_0 = \frac{2}{h^2} [\psi_0 - \psi_1] + O(h) \quad (14)$$

conhecida como fórmula de Thom.

3. MODELO DISCRETO

Para o problema abordado anteriormente a discretização espacial do domínio Ω foi realizada utilizando-se elementos triangulares. Localmente, em cada elemento finito, a função de corrente foi aproximada usando-se uma interpolação polinomial quadrática, e a vorticidade uma interpolação via polinômios lineares. O elemento finito empregado está mostrado na figura 2.

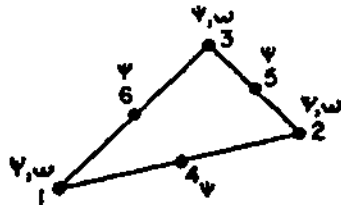


Fig. 2. Elemento finito empregado

Globalmente a solução aproximada é expressa por:

$$\omega^h(\underline{x}, t) = \bar{\omega}^h(\underline{x}, t) + \sum_{i=1}^P \phi_i(\underline{x}) W_i(t) \quad ; \quad \bar{\omega}^h(\underline{x}, t) = \sum_{r=1}^R \phi_{P+r}(\underline{x}) \bar{W}_r(t) \quad (15a, b)$$

$$\psi^h(\underline{x}, t) = \bar{\psi}^h(\underline{x}, t) + \sum_{i=1}^Q \theta_i(\underline{x}) V_i(t) \quad ; \quad \bar{\psi}^h(\underline{x}, t) = \sum_{r=1}^S \theta_{Q+r}(\underline{x}) \bar{V}_r(t) \quad (15c, d)$$

onde as interpolantes globais $\phi_i(\underline{x})$ ($i=1, \dots, P+R$), $\theta_i(\underline{x})$ ($i=1, \dots, Q+S$) são construídas a partir das funções de interpolação local, definidas em cada elemento. R e S representam, respectivamente, o número de nós nos trechos do contorno onde ω e ψ são prescritos; $\bar{W}_r(t)$ ($r=1, \dots, R$) e $\bar{V}_r(t)$ ($r=1, \dots, S$) sendo os valores dessas funções nesses nós. $W_i(t)$ ($i=1, \dots, P$) e $V_i(t)$ ($i=1, \dots, Q$) são as incógnitas nodais do problema, e $\omega^h - \bar{\omega}^h \in V_\omega^h$; $\psi^h - \bar{\psi}^h \in V_\psi^h$, onde V_ω^h e V_ψ^h são sub-espacos de V_ω e V_ψ de dimensão P e Q respectivamente.

Para simplificar a apresentação, assumir-se-á que ω e ψ são prescritos nulos no contorno $\Rightarrow \bar{\omega}^h$ e $\bar{\psi}^h \equiv 0$. Posteriormente, no item 3.3, outras condições de contorno serão analisadas.

Usando-se as aproximações (15a-d) e o método de Galerkin na forma variacional (7a,b) chega-se a um sistema de equações diferenciais não-lineares de 1ª ordem, que pode ser escrito matricialmente como:

$$\begin{aligned} [M]\{\dot{W}\} + [N(\psi) + vK_\omega]\{W\} &= \{F_\omega\} \\ [K_\psi]\{\psi\} + [D]\{W\} &= \{F_\psi\} \end{aligned} \quad (16a,b)$$

onde os vetores $\{\psi\}$, $\{W\}$ e $\{\dot{W}\}$ contêm respectivamente os valores nodais (incógnitas) da função de corrente, vorticidade e taxa de vorticidade. Os demais elementos das matrizes e vetores são dados por:

$$\begin{aligned} [M]_{ij} &= \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega ; [K_\omega]_{ij} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) d\Omega ; i, j=1, \dots, P \\ [N(\psi)]_{ij} &= \int_{\Omega} \left[\phi_i \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \psi^h}{\partial y} - \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \psi^h}{\partial x} \right) \right] d\Omega ; i, j=1, \dots, P \\ [K_\psi]_{ij} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x} \frac{\partial \theta_j}{\partial x} + \frac{\partial \theta_i}{\partial y} \frac{\partial \theta_j}{\partial y} \right) d\Omega ; i, j=1, \dots, Q \\ [D]_{ij} &= - \int_{\Omega} \theta_i \phi_j d\Omega ; i=1, \dots, Q ; j=1, \dots, P \\ \{F_\omega\}_i &= \int_{\Gamma-\Gamma_1} v \bar{\omega}_n \phi_i d\Gamma ; i=1, \dots, P ; \{F_\psi\}_i = \int_{\Gamma-\Gamma_1} \bar{\psi}_n \theta_i d\Gamma ; i=1, \dots, Q \end{aligned} \quad (17a,b)$$

3.1. Soluções Estacionárias - Algoritmo de Newton-Raphson

Se nas equações (16a,b) elimina-se a dependência no tempo, chega-se a um sistema de equações algébricas não-lineares. Para a resolução deste sistema utiliza-se o algoritmo de Newton-Raphson. Esse algoritmo é construído discretizando-se, de maneira análoga à apresentada na seção anterior, a forma incremental iterativa (9a,b), e tendo-se em conta que, neste caso, as expressões (15a-d), (eliminando-se obviamente a dependência no tempo), representam aproximações para os incrementos de vorticidade e função de corrente. Procedendo-se desta forma, chega-se ao sistema de equações algébricas lineares

$$\begin{bmatrix} [K_{\omega\omega}] & [K_{\omega\psi}] \\ [K_{\psi\omega}] & [K_{\psi\psi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{W\} \\ \{V\} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \{R_{\omega}\} \\ \{R_{\psi}\} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Na equação anterior, as sub-matrizes que compõem a matriz tangente, que opera sobre o vetor de incrementos nodais da vorticidade e função de corrente, são dadas por:

$$\begin{aligned} [K_{\omega\omega}] &= [N(\psi_k) + \nu K_{\omega}] \quad ; \quad [K_{\psi\omega}] = [D] \quad ; \quad [K_{\psi\psi}] = [K_{\phi}] \\ [K_{\omega\psi}]_{ij} &= \int_{\Omega} \phi_i \left(\frac{\partial \omega_k}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} - \frac{\partial \omega_k}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) d\Omega \quad ; \quad i=1, \dots, P; \quad j=1, \dots, Q \end{aligned} \quad (19a-d)$$

onde ψ_k e ω_k representam a função de corrente e a vorticidade conhecidas da iteração anterior k .

O vetor de resíduos é calculado através da expressão:

$$\begin{bmatrix} \{R_{\omega}\} \\ \{R_{\psi}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [N(\psi_k) + \nu K_{\omega}] & [0] \\ [D] & [K_{\psi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{W_k\} \\ \{V_k\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \{F_{\omega}\} \\ \{F_{\psi}\} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Uma vez resolvido o sistema (18), a solução para a iteração $(k+1)$ é obtida a partir da relação incremental:

$$\{W_{k+1}\}^T \{V_{k+1}\}^T = \{W_k\}^T \{V_k\}^T + \{W\}^T \{V\}^T \quad (21)$$

O processo iterativo se repete até que a norma do vetor de incrementos seja menor que uma tolerância pré-estabelecida, quando então (21) é assumido como a solução procurada.

3.2. Soluções Transientes - Algoritmo de Crank-Nicolson

Neste caso, o sistema de equações diferenciais não-lineares (16a,b) é resolvido por um esquema de diferenças finitas do tipo Crank-Nicolson. Isso é equivalente a discretizar a forma iterativa (12a,b). Procedendo-se dessa forma, para o instante $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ e para a iteração i , chega-se ao sistema de equações diferenciais ordinárias lineares:

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{w_{n+1}^l\} \\ \{\psi_{n+1}^l\} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [N(\psi_{n+1}^{l-1}) + v[K_w] & [0] \\ [D] & [K_\psi] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{w_{n+1}^l\} \\ \{\psi_{n+1}^l\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{R_w\}_{n+1} \\ \{R_\psi\}_{n+1} \end{bmatrix} \quad (22a,b)$$

$$\begin{bmatrix} \{R_w\}_{n+1} \\ \{R_\psi\}_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{w_n\} \\ \{\psi_n\} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [N(\psi_n) + v[K_w] & [0] \\ [D] & [K_\psi] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{w_n\} \\ \{\psi_n\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{F_w\}_{n+1} \\ \{F_\psi\}_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Conhecidos $\{w_n\}$ e $\{\psi_n\}$ (valores nodais no instante $t_n = n\Delta t$) e ψ_{n+1}^{l-1} (função de corrente no instante t_{n+1} e iteração $(l-1)$), o sistema (22a,b) pode ser resolvido para $\{w_{n+1}^l\}$ e $\{\psi_{n+1}^l\}$ (incógnitas nodais no instante t_{n+1} e iteração l), começando-se com:

$$\{ \{w_{n+1}^0\}^T \{ \psi_{n+1}^0 \}^T \} = \{ \{w_n\}^T \{ \psi_n \}^T \}. \quad (23)$$

O processo iterativo se repete até que a convergência desejada se ja conseguida quando, então,

$$\{ \{w_{n+1}^l\}^T \{ \psi_{n+1}^l \}^T \} = \{ \{w_{n+1}^{l-1}\}^T \{ \psi_{n+1}^{l-1} \}^T \} \quad (24)$$

é tomado como a solução do problema para o instante t_{n+1} , e portanto, condição inicial para o próximo incremento de tempo.

3.3. Introdução das Condições de Contorno

Segundo o procedimento usual do M.E.F., as equações resultantes da discretização são montadas a partir da "soma" das contribuições de todos os elementos. Em outras palavras, as matrizes e vetores assim construídos têm as mesmas definições apresentadas nos dois últimos itens. A única diferença é que agora o sistema resultante tem (P-R) equações para a vorticidade e (Q-S) equações para a função de corrente. Posteriormente, no processo de resolução, esse sistema é modificado, de forma que nas expressões (15a-d) os valores nodais conhecidos, que definem as funções \bar{u}^h e \bar{v}^h , sejam verificados. No caso de superfícies sólidas, os valores nodais da vorticidade no contorno não são conhecidos de antemão. Para essas situações o procedimento adotado [4] consiste em substituir a equação associada com a vorticidade no nó

do contorno pela equação aproximada (14), particularizada para este nó.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Analisa-se a seguir o escoamento bidimensional ao redor de um cilindro; o problema físico consistindo de um cilindro "infinitamente" longo, imerso em um escoamento uniforme. Para este exemplo, busca-se apenas a identificação de soluções estacionárias. Dessa forma, fenômenos dependentes do tempo, como o lançamento alternado de vórtices, não podem ser caracterizados.

Os resultados que serão apresentados a seguir referem-se a valores adimensionais da vorticidade (ω') e da função de corrente (ψ'). A adimensionalização sendo dada por:

$$\omega' = \frac{r}{U} \omega ; \quad \psi' = \frac{\psi}{Ur} ; \quad Re = \frac{2rU}{\nu} ,$$

onde r é o raio do cilindro, U é o módulo da velocidade do escoamento uniforme, e $Re = \rho U r / \mu$ de Reynolds.

Na figura 3, mostra-se a região considerada para a análise, onde obviamente fez-se uso da simetria do problema estacionário.

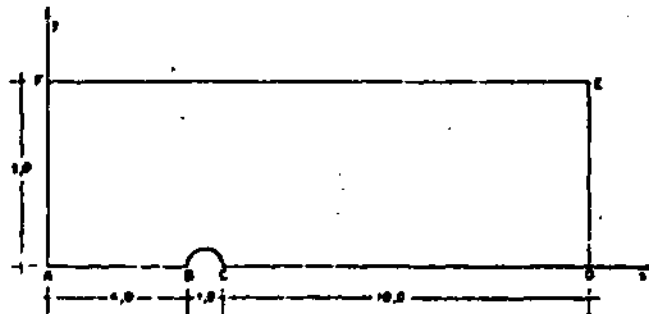


Fig. 3. Região de análise

Para a especificação das condições de contorno assume-se que à esquerda de AF e acima de FE o escoamento é uniforme ($U=1$) e paralelo ao eixo x , com o que a função de corrente fica determinada a menos de uma constante arbitrária, tomada igual a zero. Portanto: $\psi = y$ e $\omega = 0$ em AF e $\psi = 5.0$ e $\omega = 0$ em FE. Além disso, condições de simetria são assumidas em AB e CD, o que conduz a: $\psi = 0$ e

$\omega=0$ em AB e CD.

Devido à sua relativa proximidade do cilindro, em DE o escoamento não é considerado uniforme. Preferiu-se, neste caso, adotar condições de contorno do tipo naturais, o que corresponde a exigir que $\partial\psi/\partial x=0$ e $\partial\omega/\partial x=0$ em DE. A primeira delas equivale a dizer que o escoamento em DE é horizontal, mas não necessariamente uniforme. A segunda, apesar de não possuir um significado físico, é compatível com a primeira.

Finalmente, na superfície do cilindro têm-se: $\psi=0$ e $\partial\psi/\partial n=0$, onde n é a direção normal a essa superfície (contorno BC). Como visto no item (2.2) essa última condição será usada para a determinação da vorticidade no cilindro.

A malha de elementos finitos utilizada está mostrada na figura 4, onde apresenta-se também um detalhe da discretização no contorno do cilindro. Foram utilizados 212 elementos, perfazendo um total de 477 nós empregados para a aproximação de ψ , e 133 para ω .

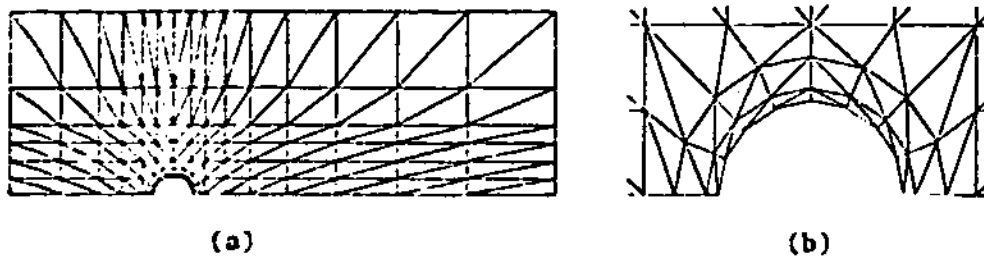


Fig. 4. Malha de elementos finitos

A vorticidade adimensional na superfície do cilindro, para vários valores do número de Reynolds, é apresentada na figura 5, juntamente com os resultados fornecidos por Dennis e Chang [7]. A concordância é boa, tendo-se em mente que aqueles autores utilizaram uma malha de diferenças finitas de 3000 pontos.

Na figura 6 mostra-se a distribuição de vorticidade na região de escoamento, para o número de Reynolds 40, comparando-se com o resultado de diferenças finitas apresentado por Apelt [8].

A visualização do campo de escoamento, para este mesmo número de Reynolds, é possível a partir da figura 7, onde são mostrados os vetores velocidade nos baricentros dos elementos. Essa

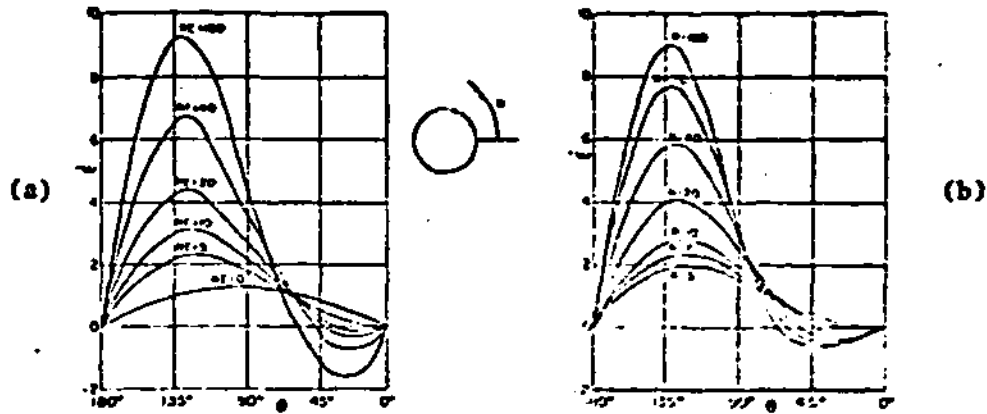


Fig. 5. Distribuição da vorticidade na superfície do cilindro. Valores adimensionais: a) este trabalho; b) referência [7]

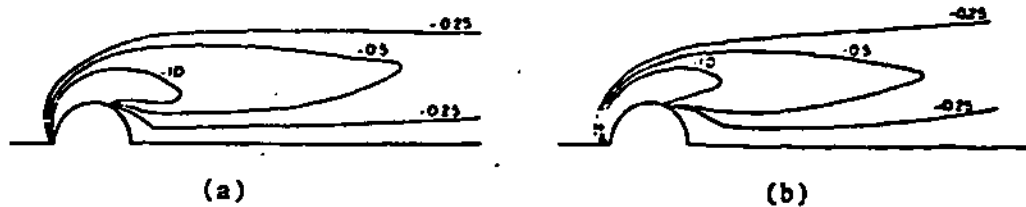


Fig. 6. Linhas de equi-vorticidade ($Re=40$). Valores adimensionais: a) este trabalho; b) referência [8]

figura é conclusiva para a comprovação das condições de contorno adotadas. Verifica-se, por exemplo, que para a região de análise considerada, o escoamento em DE ainda não é uniforme, justificando as condições de contorno naturais aí assumidas.

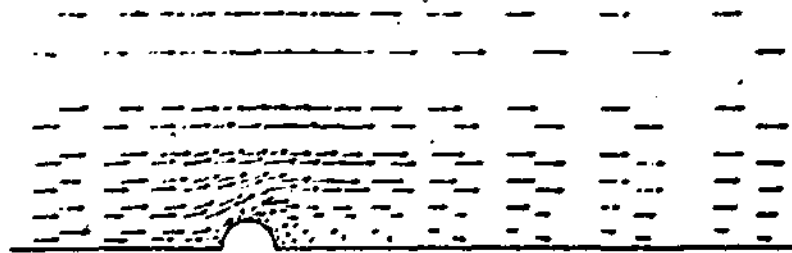


Fig. 7. Vetores velocidade nos baricentros dos elementos

Linhas de corrente do escoamento são apresentadas na figura 8, para números de Reynolds 40 e 100, mostrando a separação do escoamento na região posterior do cilindro e a conseqüente formação

de vórtices, representados pelas linhas de corrente fechadas. Po-
de-se observar o alongamento da região de vórtices, descrito an-
teriormente, à medida que se aumenta o número de Reynolds.

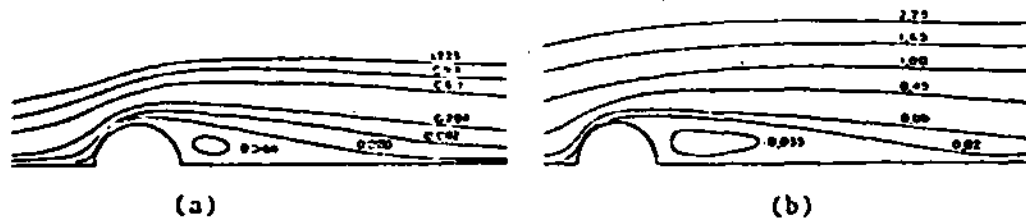


Fig. 8. Linhas de corrente do escoamento. Valores adimensionais:
a) $Re=40$; b) $Re=100$

Quando comparados com os resultados de Dennis e Chang, es-
ses vórtices mostram-se menores, e a diferença cresce com o núme-
ro de Reynolds. Atribui-se essa diferença a duas razões. A pri-
meira delas, um tanto óbvia, é a discretização relativamente gros-
seira adotada, quando comparada com a daqueles autores. A segun-
da, mais séria, provém do fato de que a condição de não-escorre-
gamento, $\partial\psi/\partial n=0$, não é imposta diretamente, mas sim usada para o
cálculo do valor da vorticidade na superfície do cilindro. Assim,
a componente tangencial da velocidade do fluido nessa superfície,
embora pequena, é diferente de zero, e seu valor aumenta com o
número de Reynolds. Como uma das condições necessárias para a se-
paração do escoamento, (aderência do fluido ao cilindro), não é
exatamente representada, é de se esperar que os vórtices forma-
dos sejam menores.

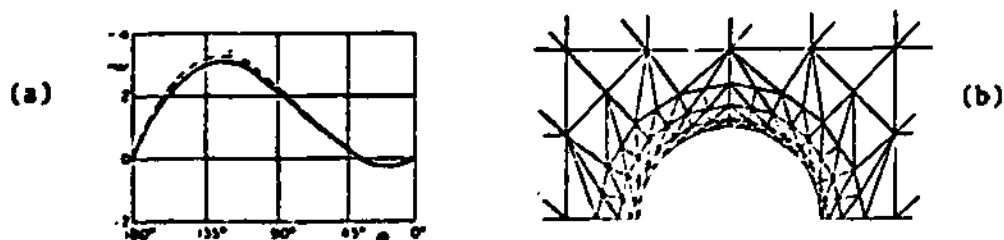


Fig. 9. Distribuição da vorticidade no cilindro ($Re=10$)
----- malha da figura 4b; — malha desta figura

Por último, a influência da discretização próxima ao cilin-
dro é mostrada na figura 9, onde compara-se a distribuição de vor-

ticidade na superfície do cilindro para duas discretizações diferentes: discretização da figura 4b e discretização da figura 9b.

Quanto à eficiência do procedimento numérico, (incremento do número de Reynolds até o valor desejado), sempre um número pequeno de iterações foi suficiente para que a convergência exigida fosse atingida, mesmo com valores grandes do incremento. Por exemplo, na pior situação, a solução para Reynolds 100 foi obtida diretamente a partir da solução de Stokes ($Re=0$) \rightarrow (incremento $\Delta Re=100$) em 4 iterações e com precisão $|(X_i^{k+1}-X_i^k)/X_i^{k+1}| < 10^{-6}$, onde, genericamente, X_i^{k+1} está representando a i -ésima componente do vetor de incógnitas nodais na $(k+1)$ -ésima iteração.

Finalmente, a tabela abaixo tem por objetivo fornecer alguns indicadores, no intuito de estabelecer comparações entre os dois métodos de resolução do sistema de equações algébricas, implementados no programa elaborado. A sigla BG significa armazenamento em banda e resolução por Gauss; e RF denota a técnica de resolução frontal [6]. Todos os dados são relativos a um computador IBM 370/158.

	nº de equações	posições de memória ocupadas	Re	ΔRe	nº de resoluções	espaço de memória utilizado (páginas-minuto)
BG	610	≈ 89.000	10	5	7	≈ 4700
RF	610	1.600	10	5	7	≈ 370
BG	1185	Insuficiente	-	-	-	-
RF	1185	3.600	10	5	7	≈ 2000

As duas primeiras linhas referem-se à malha adotada na figura 3, onde para o método BG um certo cuidado foi tomado para a minimização da largura de banda=145. A diferença demonstrada na última coluna representa um custo total de processamento aproximadamente 5 vezes menor, quando se utiliza a resolução frontal. As duas últimas linhas correspondem à mesma discretização do caso anterior, quando não se usa a condição de simetria (malha dobrada). Com o armazenamento em banda, a área de memória requerida ultrapassa a memória disponível neste computador. No entanto, para a resolução frontal, necessita-se de um espaço máximo de apx

nas 60x60 posições de memória.

O segundo exemplo considerado consiste no escoamento entre duas placas paralelas sujeitas a um estrangulamento abrupto e simétrico da seção [2,4]. Acima de um determinado número de Reynolds, que depende da forma e extensão do estrangulamento, ocorre a formação de vórtices na região posterior do estrangulamento.

As soluções estacionárias, para diferentes valores do número de Reynolds, são obtidas aqui pela evolução das soluções transientes, o que permite a apreciação das principais características do esquema numérico de integração no tempo. Para tal, a solução estacionária para um dado número de Reynolds é obtida a partir de uma solução conhecida para um Reynolds inferior e que é usada como condição inicial. Fisicamente, isso representa o processo de evolução do escoamento de um estado estacionário para um outro, quando a velocidade do escoamento é subitamente alterada.

Na figura 10, onde fez-se uso da simetria do problema, estão mostradas a região de análise e a malha de elementos finitos empregada, constituída de 54 elementos, num total de 131 nós para a função de corrente e 39 para a vorticidade.

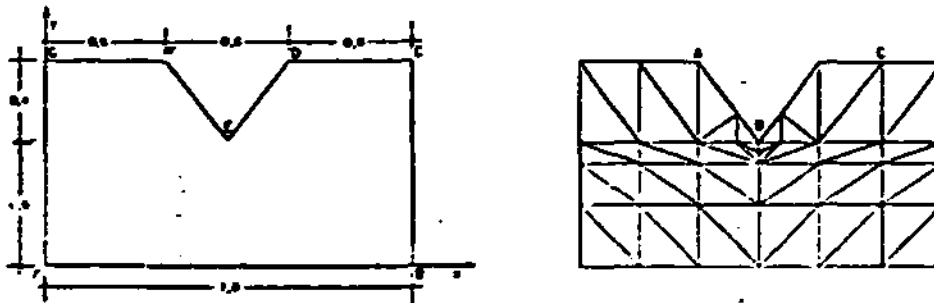


Fig. 10. Região de análise e modelo discreto

Assume-se um escoamento do tipo Poiseuille nas regiões "afastadas" do estrangulamento, com o que as condições de contorno são dadas por: $\psi=1.5(y-1/3y^3)$ e $\omega=3y$ em AG e BC; $\psi=0$ e $\omega=0$ em AB; $\psi=1.0$ e $\partial\psi/\partial n=0$ na placa GFED, n sendo a direção normal.

Os resultados [1] apresentados a seguir, adimensionalizados em termos da velocidade média do escoamento, $U=1$, e da meia distância L entre as placas ($Re=UL/\nu$), referem-se à solução para

o número de Reynolds 25, tendo como condição inicial a solução do problema de Stokes. Na figura 11a mostra-se a evolução da vorticidade no ponto C da figura 10. A linha pontilhada representa a solução estacionária, alcançada num tempo total igual a 4.5, com um passo de integração de 0.1 e definida pela condição $|(X_i^{n+1} - X_i^n) / (\Delta t X_i^{n+1})| < 10^{-6}$, onde X_i^{n+1} representa, esquematicamente, a i -ésima incógnita nodal no instante t_{n+1} .

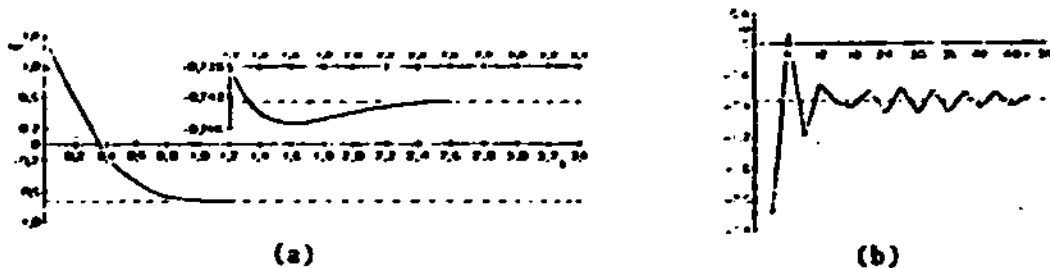


Fig. 11. Evolução da vorticidade no ponto A. Valores adimensionais. (----) solução estacionária ($Re=25$, $\Delta t=0.1$). a) $\Delta t=0.1$; b) $\Delta t=3.0$

Apesar de incondicionalmente estável, o esquema de integração no tempo fornece soluções oscilatórias, quando o intervalo de tempo é aumentado em densidade. Esse comportamento é bem caracterizado na figura 11b, obtida com $\Delta t=3.0$.

O desenvolvimento global do escoamento pode ser observado na figura 12 onde mostram-se as linhas de corrente e de equi-vorticidades correspondentes à solução estacionária.

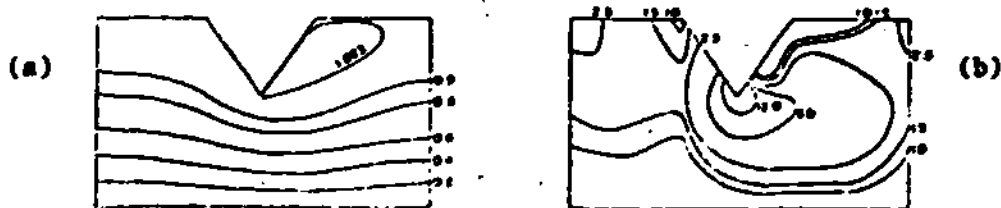


Fig. 12. Solução estacionária ($\Delta t=0.1$). Valores adimensionais. a) linhas de corrente; b) equi-vorticidades

5. CONCLUSÕES

A utilização da formulação em vorticidade e função de corrente evita os problemas impostos à solução numérica das equações de Navier-Stokes pela condição de incompressibilidade. Evi-

ta, ainda, a dificuldade relacionada com a escolha adequada dos espaços de aproximação, quando se emprega a formulação em velocidade e pressão. Além do mais, a conservação de massa é satisfeita exatamente.

Em contrapartida, essa escolha limita o campo de análise a problemas bidimensionais. Além disso, se se está interessado na determinação dos campos de velocidade e pressão, esses são calculados a partir de derivadas da função de corrente, o que reduz a precisão dos resultados.

Com o uso da formulação variacional clássica enfrenta-se o problema da ausência de condições de contorno para a vorticidade. No entanto, com o procedimento adotado para a introdução da aproximação dessa condição de contorno, que exige a resolução simultânea das equações, retém-se, no processo numérico de solução, uma característica básica dessas equações - seu acoplamento, quer pelo termo não-linear de transporte convectivo de vorticidade, quer pelas condições de contorno.

Em todos os casos analisados, soluções estacionárias, rapidamente convergentes, foram obtidas com a técnica incremental de evolução do número de Reynolds em conjunto com o algoritmo de Newton-Raphson. Entretanto, como mostrado, devido à aproximação da condição de contorno, a solução esperada tende a se deteriorar à medida que cresce o número de Reynolds.

Embora não tenha sido apresentado neste trabalho, é possível, mediante a introdução de multiplicadores de Lagrange [9,10], representar corretamente as condições de contorno em superfícies sólidas, com o que elimina-se a necessidade de aproximações para a condição em vorticidade.

O esquema de integração no tempo, do tipo Crank-Nicolson, apresenta estabilidade incondicional. Porém, quando se aumenta em densidade o intervalo de tempo de integração, as soluções obtidas são oscilantes. Por se tratar de um esquema implícito e as equações serem não-lineares, no processo de resolução passo-a-passo, a matriz do sistema tem que ser remontada a cada iteração. Se se adotasse um esquema explícito, o de Euler por exemplo, a matriz seria montada uma única vez, mas, em compensação, a limitação imposta ao intervalo de tempo de integração, dada a estabilidade condicional do esquema, seria extremamente restri-

tiva [1].

Finalmente, para as dimensões dos problemas analisados, a técnica de resolução frontal se mostrou bem mais eficiente que o esquema de armazenamento em banda.

BIBLIOGRAFIA

- [1] FURTADO, F.C., Aplicação do método dos elementos finitos às equações de Navier-Stokes, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1984.
- [2] CHENG, R.T., Numerical solution of the Navier-Stokes equations by the finite element method, *The Physics of Fluids*, vol. 15 (2098-2105), 1972.
- [3] SMITH, S.L. and BREBBIA, C.A., Improved stability techniques for the solution of Navier-Stokes equations, *Appl. Math. Modelling*, vol. 1 (226-234), 1977.
- [4] DHATT, G.; KANGA FOMO, B. and BOURQUE, C., A ψ - ω finite element formulation for the Navier-Stokes equations, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 17 (199-212), 1981.
- [5] CAMPION-RENSON, A. and CROCHET, M.J., On the stream function-vorticity finite element solutions of Navier-Stokes equations, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 12 (1809-1818), 1978.
- [6] TAYLOR, C. and HUGHES, T.G., *Finite element programming of the Navier-Stokes equations*, Pineridge Press, Swansea, 1981.
- [7] DENNIS, S. and CHANG, G., Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100, *J. Fluid Mech.*, vol. 42 (471-489), 1970.
- [8] BATCHELOR, G.K., *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, pg. 258, 1967.
- [9] FIX, G.J., Finite element approximations to flow problems, *Adv. Water Resources*, vol. 5 (17-20), 1982.
- [10] GALEÃO, A.C., Introdução de condições de contorno em vorticidade e função de corrente via multiplicadores de Lagrange, Seminário Interno, LCC/CNPq, 1984.



1984

1984