

FR 8503422

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

CENTRE D'ETUDES DE LIMEIL

B.P. 27

94190 VILLENEUVE-SAINT-GEORGES

- CEA

1027 10

11 MAR. 85

Note CEA-N- 2430

RALENTISSEMENT DES PARTICULES CHARGÉES  
PAR DES METHODES PARTICULAIRES

B. MERCIER

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

- 1 -

CENTRE D'ETUDES DE LIMEIL

B.P. 27

94190 VILLENEUVE-SAINT-GEORGES

NOTES - CEA	
002730	11 MAR. 85
Note CEA-N-	

RALENTISSEMENT DES PARTICULES CHARGEES  
PAR DES METHODES PARTICULAIRES

B. MERCIER

RESUME

Après quelques rappels sur le principe des méthodes particulières en vue de la résolution d'une équation hyperbolique scalaire, nous montrons comment évaluer une quantité intégrale de la forme :

$$\int u(x,t) \zeta(x,t) dxdt$$

où  $u$  est la solution et  $\zeta$  une fonction poids quelconque. Ensuite, nous passons à l'application au ralentissement en ligne droite des particules chargées suprathermiques dans un plasma, en montrant comment évaluer les dépôts d'énergie sur les ions et sur les électrons d'un plasma.

ABSTRACT

We review some facts about particle methods for solving linear hyperbolic equations.

We show how one gets an evaluation of integral quantities like :

$$\int u(x,t) \zeta(x,t) dxdt$$

where  $u$  denotes the solution and  $\zeta$  an arbitrary weight function. Then, we apply the method to the equation describing charged particle transport in a plasma with emphasis on the evaluation of energy deposition on ions and electrons.

P L A N

RESUME

INTRODUCTION

I - RAPPEL SUR LES EQUATIONS DU RALENTISSEMENT

II - RAPPEL SUR LES METHODES PARTICULAIRES

III - APPLICATION AU RALENTISSEMENT DES PARTICULES

IV - CONSIDERATIONS PRATIQUES

REFERENCES

## INTRODUCTION

Dans de nombreux problèmes de physique des plasmas, en particulier ceux que l'on rencontre dans les expériences de fusion par confinement inertiel, le ralentissement de particules chargées suprathermiques joue un rôle important. Ces particules se ralentissent à la fois sur les ions et sur les électrons du plasma, par interaction coulombienne (voir par exemple Shkarowski [7]).

Ce phénomène peut être modélisé par l'équation de Fokker-Planck qui prend une forme particulièrement simple lorsqu'on néglige les termes de diffusion angulaire, ce qui revient à supposer que les particules se ralentissent en ligne droite. On obtient en effet une équation hyperbolique linéaire qui peut être résolue par de nombreuses méthodes.

Parmi elles, les méthodes particulières étudiées par Raviart [6] ont des caractéristiques avantageuses.

Nous passons en revue leur application aux équations du ralentissement, en montrant comment évaluer une approximation de quantités physiques utiles, comme le dépôt d'énergie sur les électrons ou sur les ions dans une maille.

I - RAPPEL SUR LES EQUATIONS DU RALENTISSEMENT

Si l'on néglige les termes de diffusion angulaire, l'équation décrivant le ralentissement de particules chargées suprathermiques dans un plasma peut s'écrire (réf. [1], [7]) :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z_i} (\omega_i v u) + \frac{\partial}{\partial v} (\beta(v) u) = f \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

où  $u \equiv u(\vec{z}, v, \omega, t)$ ,  $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ ,  $v \in \mathbb{R}_+$ ,  $\omega \in S^2$ ,  $t \geq 0$ , où  $S^2$  désigne la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ .

Le second membre  $f = f(\vec{z}, v, \omega, t)$  représente la source de particules suprathermiques.

Le coefficient  $\beta = \beta(v)$ , négatif, prend en compte le ralentissement.

La fonction  $u$  solution de l'équation (1) est reliée à la densité  $n$  des particules suprathermiques par la formule  $u = v^2 n$ .

La quantité

$$N(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{z} \int_0^\infty dv \int_{S^2} u(t) d\omega$$

représente donc le nombre total des particules suprathermiques à l'instant  $t$ .

En intégrant l'équation (1) en  $\vec{z}$ ,  $v$ ,  $\omega$ , on obtient :

$$\frac{dN}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{z} \int_0^\infty dv \int_{S^2} f d\omega$$

qui montre que  $f d\vec{z} dv d\omega dt$  est le nombre de particules créées par la source dans l'élément de volume  $d\vec{z} dv d\omega$  de l'espace des phases, pendant l'intervalle de temps  $dt$ .

Si  $m$  désigne la masse d'une particule, la quantité :

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{z} \int_0^\infty dv \int_{S^2} \left(\frac{1}{2} mv^2\right) u d\omega$$

représente l'énergie cinétique des particules à l'instant  $t$ .

En multipliant l'équation (1) par  $\frac{1}{2} mv^2$  et en intégrant en  $\vec{z}, v, \omega$ , on obtient, après intégration par parties du terme en  $\frac{\partial}{\partial v} (\beta(v)u)$  :

$$\frac{dE}{dt} = \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{z} \int_{S^2} d\omega \int_0^\infty mv \beta(v)u dv + \int_{\mathbb{R}^3} d\vec{z} \int_{S^2} d\omega \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} mv^2\right) f dv.$$

Le deuxième terme représente clairement l'énergie cinétique injectée par la source, par unité de temps.

Le premier terme représente donc l'énergie cinétique perdue par les particules, du fait de leur ralentissement : on vérifie qu'il est bien négatif si  $\beta(v) < 0$  (ralentissement). En particulier, si  $f \equiv 0$ , on vérifie que l'énergie cinétique  $E(t)$  est bien décroissante.

Par conservation de l'énergie, cette énergie cinétique perdue, correspond à une énergie déposée sur les ions et sur les électrons du plasma.

Le coefficient  $\beta(v)$  est donné sous la forme (réf. [1], [7]) :

$$\beta(v) = \beta_+(v) + \beta_-(v)$$

où  $\beta_+$  (resp.  $\beta_-$ ) représente la contribution des interactions des particules avec les ions (resp. électrons) du plasma.

Soit  $K \subset \mathbb{R}^3$  et  $C \subset [0, T]$  donnés, on s'intéressera particulièrement aux quantités :

$$(2) \quad \mathcal{E}_{K,C}^+ \equiv - \int_C dt \int_K d\vec{z} \int_{S^2} d\omega \int_0^\infty mv \beta_+(v) u dv.$$

Lemme 1 :

Soit  $X(t,y,s) \in \mathbb{R}^d$  la solution à l'instant t de l'équation différentielle (équation des caractéristiques)

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = a(X,t) \\ X|_{t=s} = y \end{cases}$$

où  $a : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  est le champ de vecteurs de composantes  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ .

Alors, si  $A \subset Y$  est un borélien quelconque, et u désigne la solution de (3), on a la relation :

$$(9) \quad \int_A u(x,t) dxdt = \int_Y f(y,s) q(A ; y,s) dyds + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) q(A ; y,0) dy$$

où

$$q(A ; y,s) = \int_S^T 1_A (X(t ; y,s), t) dt$$

et  $1_A$  désigne la fonction caractéristique de A.

Preuve :

Le résultat peut facilement être établi à partir de ceux de la référence [6].

Pour la commodité du lecteur, nous en donnons une démonstration plus "directe".

Considérons le problème adjoint.

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t} + a_i \frac{\partial u^*}{\partial x_i} + f^* = 0 \\ u^*|_{t=T} = 0 \end{cases}$$

où  $f^* \in \mathcal{B}(Y)$  est quelconque.



II - RAPPELS SUR LES METHODES PARTICULAIRES

Pour simplifier, nous nous placerons dans l'espace  $\mathbb{R}^d$ ,  $d$  entier positif quelconque, et nous nous limiterons à des équations du type :

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i u) = f, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

où les coefficients  $a_i \equiv a_i(x,t)$ ,  $1 \leq i \leq d$ , la fonction  $f \equiv f(x,t)$  et la fonction  $u_0 \equiv u_0(x)$  sont donnés.

L'idée fondamentale des méthodes particulières est d'"approcher" la donnée initiale  $u_0$  et la source  $f$  par des mesures  $\mu_h^0$  et  $\mu_h$  qui soient des sommes de mesures de Dirac :

$$(4) \quad \mu_h^0 = \sum_{i \in I} \alpha_i^0 \delta_{x_i},$$

$$(5) \quad \mu_h = \sum_{j \in J} \alpha_j \delta_{y_j, s_j};$$

si l'on se donne un maillage de  $\mathbb{R}^d$  et un autre de l'espace des phases  $Y \equiv \mathbb{R}^d \times [0, T]$ , on pourra choisir par exemple les points  $(x_i)_{i \in I}$  aux centres des mailles du premier maillage, et les points  $(y_j, s_j)_{j \in J}$  aux centres des mailles du second maillage.

Dans ce cas le paramètre d'indexation  $h$  pourra désigner le plus grand diamètre de toutes les mailles de ces deux maillages.

Il va de soi que  $h$  étant supposé borné les familles  $I$  et  $J$  comporteront nécessairement un nombre infini d'éléments.

Mais en pratique, quitte à rajouter une condition aux limites adéquate, on travaille non pas dans  $\mathbb{R}^d$  tout entier, mais dans un domaine  $X \subset \mathbb{R}^d$  borné, et les familles  $I$  et  $J$  peuvent être supposées finies.

Il est plus commode pour notre objet de rester dans l'espace  $\mathbb{R}^d$  tout entier, et c'est ce que nous ferons, en laissant au lecteur le soin de modifier les formules dans le cas où on se limiterait à un domaine  $X$ .

Nous ferons un usage intensif du cadre fonctionnel suivant ;  $X$  désignant maintenant soit  $\mathbb{R}^d$ , soit  $Y \equiv \mathbb{R}^d \times [0, T]$ , on désignera par  $\mathcal{B}(X)$  l'espace des fonctions boréliennes bornées, c'est-à-dire des fonctions mesurables et définies sur tout  $X$  (voir [4]).

On rappelle que l'espace  $\mathcal{M}(X)$  des mesures boréliennes bornées et définies sur  $X$  (voir [5]) est un espace de Banach pour la norme :

$$\|\mu\|_1 = \sup \left\{ \sum_{i \in I} |\mu(A_i)| \right\}$$

où le sup porte sur toutes les partitions dénombrables  $(A_i)_{i \in I}$  de  $X$ .

Si  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$  et  $f \in L^1(Y)$ , on désignera encore par  $\mu_0 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  et  $\mu_f \in \mathcal{M}(Y)$  les mesures qui admettent  $u_0$  et  $f$  pour densités par rapport à la mesure de Lebesgue.

Nous avons demandé que  $\mu_h^0$  et  $\mu_h$  soient des "approximations" de  $\mu_0$  et de  $\mu_f$ , mais on ne peut pas espérer que :

$$\|\mu_0^0 - \mu_h^0\|_1 \quad \text{et} \quad \|\mu_f - \mu_h\|_1$$

tendent vers zéro lorsque  $h \rightarrow 0$ .

(Pour s'en convaincre, on peut remarquer que si c'était le cas,  $\|\mu_h^0 - \mu_{h'}^0\|_1$  et  $\|\mu_h - \mu_{h'}\|_1$  devraient être également petits pour  $h$  et  $h'$  suffisamment petits, or ceci n'est pas vrai sauf si  $h = h'$ ).

On a donc besoin d'une notion d'approximation au sens faible.

Pour cela, on utilise la dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  entre  $\mathfrak{B}(X)$  et  $\mathcal{M}(X)$  définie par :

$$\begin{aligned} \langle \mu, \zeta \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \mu(dx) \zeta(x) && \text{si } X = \mathbb{R}^d \\ \langle \mu, \zeta \rangle &= \int_Y \mu(dxdt) \zeta(x,t) && \text{si } X = Y \equiv \mathbb{R}^d \times [0, T] \end{aligned}$$

On rappelle (voir [5]) que  $\mathcal{M}(X)$  est le dual de l'espace  $C^0(X)$  des fonctions continues et définies sur  $X$  qui est un sous-espace fermé de  $\mathfrak{B}(X)$ .

Nous dirons que la mesure  $\mu_h^0$  est une "approximation" de la mesure  $u_0$  si  $\forall \zeta \in C^0(\mathbb{R}^d)$

$$(6) \quad \langle \mu_h^0 - u_0, \zeta \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{quand } h \longrightarrow 0.$$

(On dit qu'il y a convergence faible de  $\mu_h^0$  vers  $u_0$ ).

Si les  $(x_i)_{i \in I}$  sont choisis aux centres des mailles  $(K_i)_{i \in I}$  du maillage choisi pour  $\mathbb{R}^d$ , et si l'on choisit dans (4)

$$\alpha_i^0 = u_0(x_i) \text{mes}(K_i)$$

la propriété (6) est vérifiée puisque  $\langle \mu_h^0, \zeta \rangle$  est une somme de Riemann.

De façon analogue, nous supposons que,  $\forall \zeta \in C^0(Y)$

$$(7) \quad \langle \mu_h - f, \zeta \rangle \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \longrightarrow 0.$$

Nous allons montrer à présent comment définir une solution à l'équation (3) lorsque  $f$  et  $u_0$  sont remplacés par des mesures. Pour cela, nous établissons le

Lemme 1 :

Soit  $X(t, y, s) \in \mathbb{R}^d$  la solution à l'instant t de l'équation différentielle (équation des caractéristiques)

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = a(X, t) \\ X|_{t=s} = y \end{cases}$$

où  $a : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  est le champ de vecteurs de composantes  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq d$ .

Alors, si  $A \subset Y$  est un borélien quelconque, et u désigne la solution de (3), on a la relation :

$$(9) \quad \int_A u(x, t) dx dt = \int_Y f(y, s) q(A ; y, s) dy ds + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) q(A ; y, 0) dy$$

où

$$q(A ; y, s) = \int_S^T 1_A (X(t ; y, s), t) dt$$

et  $1_A$  désigne la fonction caractéristique de A.

Preuve :

Le résultat peut facilement être établi à partir de ceux de la référence [6].

Pour la commodité du lecteur, nous en donnons une démonstration plus "directe".

Considérons le problème adjoint.

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t} + a_i \frac{\partial u^*}{\partial x_i} + f^* = 0 \\ u^*|_{t=T} = 0 \end{cases}$$

où  $f^* \in \mathcal{B}(Y)$  est quelconque.

Soit :

$$U(t) \equiv u^*(X(t ; y, s), t)$$
$$F(t) \equiv f^*(X(t ; y, s), t).$$

On a, d'après (8) :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial u^*}{\partial t} + a_i \frac{\partial u^*}{\partial x_i}$$

d'où

$$\frac{dU}{dt} + F(t) = 0$$

c'est-à-dire, en intégrant de  $s$  à  $T$ ,

$$U(T) - U(s) + \int_s^T F(t) dt = 0.$$

On en déduit que :

$$(11) \quad u^*(y, s) = \int_s^T f^*(X(t ; y, s), t) dt.$$

(Jusqu'ici, on s'est contenté de résoudre (10) par la méthode des caractéristiques).

Or on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} (uu^*) + \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i uu^*) = u^* f - uf^*$$

d'où, par intégration en  $(x, t) \in Y \equiv \mathbb{R}^d \times [0, T]$

$$\int_Y uf^* dx dt = \int_Y u^* f dy ds + \int_{\mathbb{R}^d} u^*(y, 0) u_0(y) dy.$$

On en déduit la relation (9) en choisissant  $f^* = 1_A$ .

C.Q.F.D.

Introduisons à présent les opérateurs :

$$P : \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$$

$$Q : \mathcal{M}(Y) \longrightarrow \mathcal{M}(Y)$$

définis par :

$$(12) \quad (P\mu)(A) = \int_{\mathbb{R}^d} q(A ; y, o) \mu(dy)$$

$$(13) \quad (Q\mu)(A) = \int_Y q(A ; y, s) \mu(dyds).$$

(On montrerait facilement que ces opérateurs sont bornés : voir [4, 5]).

D'après le Lemme 1, en désignant encore par  $u \in \mathcal{M}(Y)$  la mesure dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue  $dydt$  est  $u$  solution de (3), on voit que

$$u = Pu_o + Qf.$$

Tout naturellement, lorsque  $u_o$  est remplacé par  $\mu_h^o$  et  $f$  par  $\mu_h$ , la solution  $u$  sera remplacée par  $u_h = P\mu_h^o + Q\mu_h$  qui a bien un sens.

Considérons maintenant les opérateurs

$$P^* : \mathfrak{B}(Y) \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$$

$$Q^* : \mathfrak{B}(Y) \longrightarrow \mathfrak{B}(Y)$$

définis par :

$$(14) \quad (P^*\zeta)(y) = \int_Y q(dxdt ; y, o) \zeta(x, t)$$

$$(15) \quad (Q^*\zeta)(y, s) = \int_Y q(dxdt ; y, s) \zeta(x, t)$$

On vérifie aisément (voir [4, 5]) que

$$(16) \quad \langle P^* \zeta, \mu \rangle = \langle \zeta, P\mu \rangle, \quad \zeta \in \mathfrak{B}(Y), \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d);$$

autrement dit que les opérateurs  $P$  et  $P^*$  sont mutuellement adjoints. Il en est de même pour les opérateurs  $Q$  et  $Q^*$  qui vérifient

$$(17) \quad \langle Q^* \zeta, \mu \rangle = \langle \zeta, Q\mu \rangle, \quad \zeta \in \mathfrak{B}(Y), \mu \in \mathfrak{B}(Y).$$

Lemme 2 : On a :

$$(18) \quad (P^* \zeta)(y) = \int_0^T \zeta(X(t; y, 0), t) dt$$

et

$$(19) \quad (Q^* \zeta)(y, s) = \int_s^T \zeta(X(t; y, s), t) dt.$$

pour tout  $\zeta \in \mathfrak{B}(Y)$ .

Preuve :

On va montrer que  $Q^* \zeta$  est égal à la solution  $u^*$  du problème adjoint (10) avec  $f^* = \zeta$ .

On en déduira la formule (19) grâce à (11).

La formule (18) se déduit, quant à elle, de (19) en prenant  $s = 0$ .

Choisissons  $\zeta = 1_A$  dans (17), où  $A \subset Y$  est un borélien quelconque. On obtient :

$$(Q\mu)(A) = \int (Q^* 1_A)(y, s) \mu(dy ds)$$

Par comparaison avec la définition de Q, on en déduit que, nécessairement :

$$(Q^* 1_A)(y, s) = q(A ; y, s) = \int_s^T 1_A(X(t ; y, s), t) dt.$$

Par combinaison linéaire, on en déduit que (19) est vérifié pour toute fonction  $\zeta$  étagée, d'où à la limite pour tout  $\zeta \in \mathfrak{B}(Y)$ .

C.Q.F.D.

Les méthodes particulières permettent d'obtenir directement des approximations non pas de la solution u elle-même mais de quantités intégrales par exemple de la forme :

$$(20) \quad \int_{\mathbb{R}^d} u(x, t) \zeta(x) dx$$

où  $\zeta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$  et  $t > 0$  sont donnés, ou bien de la forme

$$(21) \quad \int_Y u(x, t) \zeta(x, t) dx dt$$

où  $\zeta \in \mathfrak{B}(Y)$  est donné.

En ce qui concerne les quantités intégrales du premier type, on renvoie le lecteur à [6].

Nous nous intéresserons ici à l'approximation de quantités intégrales du second type, c'est-à-dire de la forme  $\langle u, \zeta \rangle$  où  $\zeta \in \mathfrak{B}(Y)$ .

D'après les formules :

$$\begin{aligned} \langle u, \zeta \rangle &= \langle Pu_0 + Qf, \zeta \rangle \\ &= \langle u_0, P^* \zeta \rangle + \langle f, Q^* \zeta \rangle \end{aligned}$$

$$(22) \quad \begin{aligned} \langle u_h, \zeta \rangle &= \langle P\mu_h^0 + Q\mu_h, \zeta \rangle \\ &= \langle \mu_h^0, P^* \zeta \rangle + \langle \mu_h, Q^* \zeta \rangle \end{aligned}$$



on voit que

$$\langle u - u_h, \zeta \rangle = \langle u_0 - \mu_h^0, P^* \zeta \rangle + \langle f - \mu_h, Q^* \zeta \rangle.$$

Comme, d'après le Lemme 2,

$$\zeta \in C^0(Y) \Rightarrow P^* \zeta \in C^0(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad Q^* \zeta \in C^0(Y)$$

on en déduit que,  $\forall \zeta \in C^0(Y)$

$$\langle u - u_h, \zeta \rangle \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad h \rightarrow 0$$

ce qui montre la convergence faible de la mesure  $u_h$  vers la mesure  $u$ , d'où la convergence de la méthode.

La quantité  $\langle u_h, \zeta \rangle$  est donc évidemment une approximation de la quantité  $\langle u, \zeta \rangle$  pour  $\zeta \in C^0(Y)$ .

Ceci ne sera pas le cas en général pour  $\zeta \in \mathfrak{B}(X)$ .

Pendant, d'après Billingsley [2, pp. 11-12], ce sera vrai aussi pour  $\zeta = 1_A$  à condition que l'ensemble  $A \subset Y$  ait une frontière de mesure nulle.

Remarque 1 : Si  $\zeta$  est de la forme  $\zeta = 1_A \varphi$  avec  $\varphi \in C^0(Y)$  et  $A$  borné tel que sa frontière soit de mesure nulle, alors il est encore vrai que

$$\langle u - u_h, \zeta \rangle \rightarrow 0.$$

En effet,  $\varphi$  étant uniformément continue, on peut l'approcher dans un voisinage borné de  $A$  par une fonction étagée  $\varphi_\varepsilon$  du type :

$$\varphi_\varepsilon \equiv \sum_{i \in I} \varphi(x_i, s_i) 1_{A_i}$$

où  $(A_i)_{i \in I}$  est une partition finie de  $Y$  telle que les  $A_i$  aient une frontière de mesure nulle  $\text{diam}(A_i) \leq \varepsilon$ , et  $(x_i, s_i) \in A_i$ . On a en particulier :

$$|(\varphi - \varphi_\varepsilon)(x, t)| \leq C(\varepsilon) \quad \forall (x, t) \in A, \quad \text{où} \quad C(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

D'autre part,

$$\langle u - u_h, 1_{A_i \cap A} \rangle \rightarrow 0$$

lorsque  $h \rightarrow 0$ , d'où

$$\langle u - u_h, 1_A \varphi_\epsilon \rangle \rightarrow 0$$

lorsque  $h \rightarrow 0$ .

D'où le résultat par passage à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

■

Pour les applications pratiques, il est important d'indiquer comment on calcule la quantité  $\langle u_h, \zeta \rangle$  qui est une approximation de la quantité intégrale  $\langle u, \zeta \rangle$  que l'on cherche à évaluer. (Noter en effet que  $u_h$  n'est pas une somme de mesures de Dirac dans  $\mathcal{M}(Y)$ ).

On utilise pour cela les formules (20), (4) et (5) et le Lemme 2 qui nous donnent :

$$(23) \quad \langle u_h, \zeta \rangle = \sum_{i \in I} \alpha_i^0 \int_0^T \zeta(X(t; x_i, 0), t) dt + \\ + \sum_{j \in J} \alpha_j \int_{s_j}^T \zeta(X(t; y_j, s_j), t) dt.$$

Pour utiliser un langage proche de celui employé par les Monte-Carlistes, on dit pour résumer que la solution initiale  $u_0$  est (à l'aide de la formule (4)) "échantillonnée" par un certain nombre de "particules" de poids  $\alpha_i^0$  et situées en des points  $x_i$ .

La source  $f$  est quant à elle "échantillonnée" à l'aide d'un nombre (a priori différent) de "particules" de poids  $\alpha_j$  qui sont créées en des instants  $s_j$  en des points  $y_j$ .

Les "particules" suivent les caractéristiques (en effet  $X(t ; y_j, s_j)$  est bien sûr la caractéristique issue du point  $y_j$  à l'instant  $s_j$ ) et leur contribution à la quantité intégrale  $\langle u, \zeta \rangle$  est donnée par l'intégrale curviligne de la fonction  $\zeta$  le long de la trajectoire de la particule, affectée du poids de la particule (i.e.  $\alpha_j \int_{s_j}^T \zeta(X(t ; y_j, s_j), t) dt$  dans le cas qui nous intéresse).

III - APPLICATION AU RALENTISSEMENT DES PARTICULES

Nous revenons à l'équation (1) qui est bien de la forme (3) quitte à remplacer  $\mathbb{R}^d$  par  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \times S^2$  et à poser  $x = (\vec{z}, v, \omega)$ .

Soit  $X = (\vec{Z}, v, \vec{\Omega})$ , l'équation des caractéristiques (8) peut s'écrire :

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} = \vec{\Omega} v$$

$$\frac{dv}{dt} = \beta(v)$$

$$\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0$$

Les "particules" se déplacent donc en ligne droite comme les particules physiques qu'elles sont censées représenter, et elles sont bien ralenties si le coefficient  $\beta$  est négatif.

Pour obtenir une approximation des dépôts d'énergie  $\mathcal{E}_{K,C}^{\pm}$  définis en (2), on utilisera la formule (23) en choisissant :

$$\zeta(x,t) = - 1_K(z) 1_C(t) m v \beta_{\pm}(v)$$

pour  $x = (\vec{z}, v, \omega)$ .

La remarque 1 nous permet de conclure que la quantité  $\mathcal{E}_{K,C}^{\pm}$  est approchée par :

$$\begin{aligned} & - \sum_{i \in I} \alpha_i^0 \int_C 1_K(\vec{Z}(t ; x_i, 0)) m v(t ; x_i, 0) \beta_{\pm}(v(t ; x_i, 0)) dt + \\ & - \sum_{j \in J} \alpha_j \int_{C_j} 1_K(\vec{Z}(t ; y_j, s_j)) m v(t ; y_j, s_j) \beta_{\pm}(v(t ; y_j, s_j)) dt \end{aligned}$$

où  $C_j \equiv C \cap [s_j, T]$ .

Toutes les "particules" qui passent par la maille K pendant l'intervalle de temps C ont donc une contribution non nulle au dépôt d'énergie  $E_{K,C}^{\pm}$ .

D'après Raviart [6] la précision de cette estimation est d'autant meilleure que les fonctions  $P^* \zeta$  et  $Q^* \zeta$  sont plus régulières, c'est-à-dire que la maille K est plus grande ainsi que l'intervalle de temps C.

Ceci est contradictoire avec les impératifs de l'hydrodynamique qui imposent au contraire un maillage le plus fin possible.

A maillage donné, il convient donc soit d'utiliser un très grand nombre de "particules" (h petit), soit de procéder à un lissage des dépôts d'énergie.

Ce dilemme est bien connu pour les méthodes de Monte-Carlo (voir par exemple [4]).

#### IV - CONSIDERATIONS PRATIQUES

On trouvera des exemples d'application dans des références [1] [3].

En pratique l'équation (1) est résolue entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ . Les équations du ralentissement sont en effet couplées aux équations de l'hydrodynamique.

Les dépôts d'énergie  $\xi_{K,C}^+$  avec  $C = [t_n, t_{n+1}]$  sont utilisés comme termes de source dans les équations d'énergie ionique et électronique.

Le terme source  $f$  dépend quant à lui de la température matière (plus précisément de la température ionique si les particules chargées considérées sont issues de réactions de fusion thermonucléaire).

Selon le principe des directions alternées, on résout donc alternativement les équations du ralentissement et les équations de l'hydrodynamique.

En ce qui concerne le ralentissement, les particules présentes dans le système à l'instant  $t_n$  étant représentées par  $N$  "particules", c'est-à-dire  $u^n$  étant approché par une somme de mesures de Dirac de la forme :

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^n \delta_{x_i}$$

la prise en compte de la source  $f$  entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  aboutira à la création de  $M$  "particules" nouvelles.

De proche en proche, le nombre total des "particules" risque de croître linéairement.

Cependant deux phénomènes peuvent contribuer à une régulation du nombre total de particules.

Premièrement, le domaine spatial considéré n'est jamais  $\mathbb{R}^3$  tout entier mais un sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^3$ , et les particules sortant de

ce domaine sont considérées comme perdues. [L'équation (1) est alors complétée par une condition aux limites absorbantes].

C'est dans un souci de simplification que nous avons considéré  $\mathbb{R}^3$  tout entier au § III (et  $\mathbb{R}^d$  tout entier au § II), mais l'analyse que nous avons faite se généralise sans aucune difficulté. Sur le plan pratique, toutes les "particules" qui sortent sont abandonnées.

Deuxièmement, la physique nous dit qu'en-dessous d'un certain seuil de vitesses les particules sont thermalisées ; toutes les "particules" dont la vitesse descend au-dessous de ce seuil peuvent donc également être abandonnées.

Si malgré cela, le nombre de "particules" présentes dans le système croît trop vite, il ne restera plus qu'à les redistribuer, en "rééchantillonnant" la fonction constante par morceaux approchant  $u^n$  (voir [1] pour les détails).

REFERENCES

- [1] D. BESNARD  
Transport et Dépôt d'énergie des particules  $\alpha$ . Traitement de l'équation de Fokker-Planck. Note CEA n° 2338 de Décembre 1982.
- [2] P. BILLINGSLEY  
Convergence of probability measures, J. Wiley, 1968.
- [3] J. DEMURGER  
Résolution de l'équation de Fokker-Planck par une méthode particulière. Rapport de stage de DEA de Février 1984.
- [4] B. MERCIER  
Introduction à la méthode de Monte-Carlo, note CEA n° 2415, Août 84.
- [5] J. NEVEU  
Bases mathématiques du calcul des probabilités, Masson, 1970.
- [6] P.A. RAVIART  
An analysis of particle methods. Cime Course, Juillet 1983. Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Pierre et Marie Curie, n° 83036.
- [7] I.P. SHKAROVSKY, T.W. JOHNSTON, M.P. BACHYNSKI  
The Particle kinetics of plasmas.  
Addison Wesley, 1966.