

2 AT8500705

UWThPh-1985-19

STABILITÄT DER MATERIE

W. Thirring
Institut für Theoretische Physik
der Universität Wien

1.

ges
ist
wes
Ene
erg

nac
sol
nor
Ker
wir
heu
wol
gre
tur
imm
Näh
Zus
Eig
ph
Wie
lic

•)

KK

1. Einleitung

Die Materie um uns besteht aus Elektronen und Atomkernen; die Naturgesetze, welche sie beherrschen, sind wohlbekannt: Die relevante Kraft ist die Coulombkraft, und für große Körper wird auch die Schwerkraft wesentlich. Die entsprechenden potentiellen Energien plus der kinetischen Energie der Teilchen müssen die Gesamtenergie von gewöhnlicher Materie ergeben, so daß die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i>j} \frac{e_i e_j - \kappa m_i m_j}{|x_i - x_j|} \quad (1)^*$$

nach den Regeln der Quantenmechanik behandelt, das System beschreiben sollte. Natürlich gibt (1) nicht ein exaktes Naturgesetz an, aber unter normalen Umständen werden Verfeinerungen wie relativistische Korrekturen, Kernaushdehnung, andere Wechselwirkungen etc. unerheblich sein, und (1) wird das Wesentliche erfassen. Es wäre aber vermessen, aus (1) die ungeheure Vielfalt der Erscheinungen der Materie im Detail herauslesen zu wollen, dies übersteigt die menschliche Rechenkunst bei weitem. Deswegen greift man bei der theoretischen Behandlung spezieller Effekte zu Karikaturen von (1) mit adjustierbaren Parametern und, falls das Problem noch immer zu schwierig ist, zu unkontrollierbaren Näherungen, die man in die Nähe der experimentellen Daten hinbiegen kann. Dieser unbefriedigende Zustand ist vielleicht deswegen nicht so traurig, weil Theorien kurioser Eigenschaften von speziellen Substanzen zwar für die Schlagzeilen der physikalischen Boulevardblätter sorgen, aber kaum das Fundament der Wissenschaft bilden. Umso erfreulicher ist es, daß man aus (1) die wesentlichen Züge, die aller Materie gemeinsam sind, herauslesen konnte, und

-
- * Zur Notation: x_i = Koordinate des i-ten Teilchens
 - p_i = Impuls des i-ten Teilchens
 - m_i = Masse des i-ten Teilchens
 - e_i = elektrische Ladung des i-ten Teilchens
 - κ = Gravitationskonstante
 - N = Teilchenzahl.

zwar auf mathematisch makellose Weise. So wurden tiefere Zusammenhänge zwischen den Grundgesetzen der Quantenmechanik und der Thermodynamik aufgedeckt. Wenn auch für beweiskräftige Aussagen die anspruchsvollen Methoden der mathematischen Physik nötig sind, so lassen sich doch die meisten Resultate aufgrund von heuristischen Betrachtungen verstehen, was im folgenden erstrebt werden soll. Wir werden also in den Paragraphen 2 und 3 versuchen, die wesentlichen Eigenschaften von Systemen, die durch (1) beschrieben werden, durch Plausibilitätsbetrachtungen zu erraten und zu sehen, wie sensitiv sie gegenüber Veränderungen von (1) sind. In § 4 wird referiert, was davon durch die mathematische Analyse bestätigt werden konnte und wo offene Fragen sind. Schließlich werden wir in § 5 auf den Einfluß dieser Resultate auf Physik und Astrophysik eingehen.

2. Die Heuristik des Grundzustandes

Das stabile Verhalten eines großen Körpers setzt als wesentlich voraus, daß die Energie seiner einzelnen Teile nach unten beschränkt ist. Sonst könnte man ja einem Teil beliebig viel Energie entziehen und damit den Rest ohne Verletzung der Energieerhaltung, soviel man will, aufheizen. Für Coulomb-Systeme gibt es erst seit der Quantentheorie eine Grundzustandsenergie (= untere Schranke für die Energie), klassisch fällt ein Elektron in den Kern und strahlt dabei unendlich viel Energie ab. In der Quantenfolklore wird dies durch die Unschärferelation $\Delta x \Delta p > \hbar^2$ verhindert: In

$$H_1 = \frac{p^2}{2} - \frac{\alpha}{r} \quad (2)$$

setzt man $\langle p^2 \rangle \sim (\Delta p)^2$ (was streng ist) und $\langle \frac{1}{r} \rangle \sim \frac{1}{\Delta x}$ (was nicht ganz stimmt) und minimisiert $1/2\Delta x^2 - \alpha/\Delta x$ durch $\Delta x = 1/\alpha$. Dies gibt die Schranke

*) Wir verwenden natürliche Einheiten $\hbar = c = m_e = \kappa = 1$, da wir an den Abhängigkeiten von diesen Konstanten nicht interessiert sind. Die Protonmasse wird nur für die Gravitation relevant werden und soll dort in κ einbezogen sein. Wir verwenden dann die Kopplungskonstante α für (Ladung)² oder ν für Gravitationskonstante \times (Masse)².

$H_1 > -\alpha^2/2$, was genau die Grundzustandsenergie des Wasserstoffs ist. Das Verfahren ist nicht ganz exakt (wir haben gemogelt, es sollte genauer $\Delta x \Delta p \geq 1/2$ heißen), aber erfolgreich und soll nun auf die Vielteilchen-Hamiltonfunktion (1) angewandt werden. Zunächst liefert dieses Argument, daß H aus (1) tatsächlich nach unten beschränkt ist, man kann es ja

$$H = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \left\{ \frac{p_i^2}{2m_i(N-1)} + \frac{e_i e_j - \kappa m_i m_j}{2|x_i - x_j|} \right\}$$

schreiben. () ist von der Form von H_1 in (2), nur mit anderen Konstanten und dem Kraftzentrum verschoben. Dasselbe Argument gibt () $> -(N-1) \text{ const}$, also wegen der Doppelsumme $H > -N(N-1)^2/2 \text{ const}$. Daß wir so die Energie nach unten beschränkt haben, ist zwar erfreulich, aber eine Grundzustandsenergie $\sim -N^3$ ist eine herbe Enttäuschung, sagt uns doch die tägliche Erfahrung, daß die in zwei Liter Benzin aufgespeicherte Energie nur doppelt (und nicht achtmal) soviel ist wie die in einem. Wir hätten also $\sim N$ erwartet (oder, wie es in der Sprache der Gelehrten heißt, daß die Energie "extensiv" oder eine "homogene Funktion ersten Grades" in (N, V, S) ist). Man könnte jetzt glauben, daß unser Trick zu primitiv war, und wir deswegen eine so schlechte Abschätzung bekommen haben. Wir werden aber sehen, daß ohne weitere Annahmen hier nicht mehr herauszuwirtschaften ist.

Bei der kinetischen Energie ist zunächst zu unterscheiden, ob wir es mit Bosonen oder Fermionen zu tun haben. Sind die Teilchen in einem gemeinsamen Volumen mit Radius R eingesperrt, so haben Bosonen zunächst nichts dagegen, daß man für sie Δx mit R identifiziert. Fermionen bestehen wegen dem Ausschließungsprinzip auf ein Privatzimmer, wir müssen das Volumen in N Zellen teilen, in denen jeweils ein Fermion wohnt, so daß dann für sie $\Delta x = R/N^{1/3}$ wird. Somit setzen wir für die kinetische Energie K von N Teilchen im Volumen R^3

$$K = \begin{cases} N/R^2 & \text{für Bosonen} \\ N^{5/3}/R^2 & \text{für Fermionen} \end{cases} \quad (3)$$

an. Was die potentielle Energie V anlangt, so ziehen sich für Gravitation

allein alle Paare von Teilchen an, so daß wir

$$V = -\alpha \frac{N^2}{R} \quad (4)$$

erwarten. Ist $\kappa = 0$, dann neutralisieren sich die Ladungen, so daß jede Ladung im Abstand zum nächsten Nachbarn entgegengesetzte Ladungen sehen wird, aber die Ladungen weiter weg sind schon abgeschirmt. Also spürt ein Teilchen eine potentielle Energie $-\alpha/RN^{-1/3}$ oder alle zusammen

$$V = -\alpha \frac{N^{4/3}}{R} \quad (5)$$

Ein allein gelassenes System wird nun R so adjustieren, daß $H(R) = T + V$ ein Minimum annimmt. Dies geschieht nun in den einzelnen Fällen für folgende Werte:

Tabelle I

		K	V	R_{\min}	$H(R_{\min})$
Elektrisch	Bose	N/R^2	$-N^{4/3}/R$	$N^{-1/3}$	$-N^{5/3}$
	Fermi	$N^{5/3}/R^2$	$-N^{4/3}/R$	$N^{1/3}$	$-N$
Gravitation	Bose	N/R^2	$-N^2/R$	N^{-1}	$-N^3$
	Fermi	$N^{5/3}/R^2$	$-N^2/R$	$N^{-1/3}$	$-N^{7/3}$

Wir sehen, daß $H(R_{\min}) \sim -N$ ("Stabilität") die Ausnahme ist und nur für Fermionen mit elektrischer Wechselwirkung eintritt. In allen anderen Fällen geht die Energie mit einer höheren Potenz von N , wobei R_{\min} mit zunehmendem N schrumpft, das System also zur Implosion neigt. Sind alle Kräfte anziehend, so geben sogar nichtsinguläre, kurzreichweitige Potentiale eine Energie $\sim -N^2$, einfach wegen der Doppelsumme in V : Sind alle Teilchen innerhalb der Reichweite ihrer Kräfte, wird $V \sim -N^2$ und für große N kann dagegen nicht einmal K für Fermionen $\sim N^{5/3}$ aufkommen. Im elektrischen Fall, in dem man anziehende und abstoßende Kräfte hat, ent-

scheidet die Form des Potentials zwischen Stabilität und Instabilität. Nimmt man statt dem Potential $v = 1/r$ zwischen zwei Punktladungen ein $v(x)$, das der Wechselwirkung zweier glatten Ladungsverteilungen entspricht, so daß $v(0) < \infty$, ist das System sogar für Bosonen stabil:

$$\sum_{i>j} e_i e_j v(x_i - x_j) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_i e_j v(x_i - x_j) - v(0) \sum_i e_i^2 > -v(0) \sum_{i=1}^N e_i^2,$$

denn der erste Term ist die gesamte elektrostatische Energie der Summe aller Ladungsverteilungen und daher positiv. Sind alle $|e_i| < Z_{\max} e$, ist V allein, und daher H durch $-N v(0) Z e^2$ nach unten beschränkt. Aber sogar reguläre, kurzreichweitige Potentiale wie etwa $v(r) = (1+2r)e^{-r}$ können die Stabilität sogar für Fermionen zerstören. Wegen $v(1) = 3/e > v(0) = 1$ minimisieren wir $V = \sum_{i>j} e_i e_j v(x_i - x_j)$, indem wir alle positiven Ladungen auf einen Haufen mit Radius $\ll 1$ geben und alle negativen auf einen solchen im Abstand 1. Sind alle $|e_i| = e$ und das System neutral, ist die (positive) Energie jedes Haufens

$$\frac{1}{2} \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} - 1 \right) v(0),$$

während die Anziehung der Haufen $-\left(\frac{N}{2}\right)^2 v(1)$ beträgt. Insgesamt wird für große N

$$V = -N^2(v(1) - v(0))/4 = -N^2\left(\frac{3-e}{4e}\right)$$

und dagegen kommt wieder nicht einmal die kinetische Energie von Fermionen auf.

Da für die instabilen Fälle der Radius R mit wachsenden N schrumpft, wird bei zu großen Teilchenzahlen der Impuls so groß, daß die nichtrelativistische Form $p^2/2m$ der kinetischen Energie ihre Gültigkeit verliert und durch die relativistische Verallgemeinerung $\sqrt{m^2+p^2} - m$ ersetzt werden muß. Wir verwenden nur $\sqrt{m^2+p^2} - m$ gäbe nur eine zu N proportionale Konstante, und ersetzen p^2 wieder durch $(\Delta x)^{-2}$. Dann ergibt sich in den verschiedenen Fällen folgendes Bild:

Tabelle II: Der Grundzustand relativistisch von $H_{rel} = K_{rel} + V$

		K_{rel}	V	R_{min}	$H(R_{min})$	
elektrisch	Bose	$N\sqrt{m^2+1/R^2}$	$- \alpha N^{4/3}/R$	0	-	für $N > \alpha^{-3}$
	Fermi	$N\sqrt{m^2+N^{2/3}/R^2}$	$- \alpha N^{4/3}/R$	$\frac{N^{1/3}}{m\alpha} \sqrt{1-\alpha^2}$	$Nm \sqrt{1-\alpha^2}$	für $\alpha < 1$
Gravitation	Bose	$N\sqrt{m^2+1/R^2}$	$- \kappa N^2/R$	0	-	für $N > \kappa^{-1}$
	Fermi	$N\sqrt{m^2+N^{2/3}/R^2}$	$- \kappa N^2/R$	0	-	für $N > \kappa^{-3/2}$

Wir sehen, daß in den Fällen, die nichtrelativistisch instabil sind, relativistisch die Situation katastrophal wird. Die Energie geht bei genügend großer Teilchenzahl gegen $-\infty$, wobei sich das System auf einen Punkt zusammenzieht. Dabei verstehen wir hier unter Stabilität bloß, daß die Energie durch eine Konstante mal N nach unten beschränkt bleibt. Dieser Zusammenhang*: nichtrelativistisch instabil \Rightarrow relativistisch katastrophal ist eine direkte Folge der Ungleichungen

$$\sqrt{p^2+m^2} - 2m \leq |\vec{p}| - m \leq \sqrt{p^2+m^2} - m \leq p^2/2m. \quad (6)$$

Sie zeigen zunächst, daß die Stabilität nicht von m abhängt. Da

$$Nm + \sum_{i=1}^N |p_i| \geq \sum_{i=1}^N \sqrt{p_i^2+m^2} \geq \sum_{i=1}^N |p_i| \geq -Nm + \sum_{i=1}^N \sqrt{p_i^2+m^2},$$

können sich die Energien mit m und für $m = 0$ höchstens um Nm unterscheiden. Für $m = 0$ ist H aber cR^{-1} , und sobald $c < 0$, kann man H gegen $-\infty$ gehen lassen, indem man R beliebig klein wählt. Aus

$$\sum_{i=1}^N \sqrt{p_i^2+m^2} \leq \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + Nm$$

schließen wir dann: nichtrelativistische Instabilität $\Rightarrow H_{\text{rel}}(m)$ wird negativ $\Rightarrow H_{\text{rel}}(0)$ wird negativ $\Rightarrow H_{\text{rel}}(0)$ geht gegen $-\infty$ $\Rightarrow H_{\text{rel}}(m)$ geht gegen $-\infty$. Die umgekehrte Implikation: nichtrelativistische Stabilität \Rightarrow relativistische Stabilität gilt aber nicht. Fermionen mit elektrischer Wechselwirkung sind nichtrelativistisch für alle α stabil, relativistisch nur für $\alpha < 1$. Da für Protonen $\kappa \sim 10^{-38}$, entspricht für Fermionen mit Gravitation die kritische Protonenzahl $\kappa^{-3/2} = 10^{57}$ gerade der Chandrasekhar-Masse $\sim M_{\odot}$. Für Bosonen wäre die kritische Masse um $\kappa^{-1/2} = 10^{-19}$ mal kleiner, etwa die Masse eines Gebirges. Ein "Bosegebirge" würde also unter seinem eigenen Gewicht zusammenbrechen. Für Fermionen mit elektrischer Wechselwirkung verhindert die Bedingung $\alpha = Z e^2 < 1$ gerade die spontane Paarerzeugung für $Z > 137 = e^{-2}$: Auch wenn zunächst kein Elektron

*) \Rightarrow bedeute logische Implikation

vorhanden ist, sondern nur ein Kern mit $Z > 137$, wird es energetisch möglich, aus dem Vakuum ein Elektron-Positron-Paar zu entnehmen, das Elektron in den Kern fallen zu lassen, und mit der gewonnenen Energie die Ruhemasse des Paares zu bezahlen.

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir uns ansehen, was geschieht, wenn wir dem System keinen freien Spielraum lassen, also die Energie als Funktion des Volumens $V = R^3$ studieren (an unwesentlichen Zahl Faktoren wie $4\pi/3$ sind wir wieder nicht interessiert). Betrachten wir zunächst den "normalen" Fall von Fermionen mit elektrischer Wechselwirkung

$$H(V) = N \left(\left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} - \alpha \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} \right) . \quad (7)$$

Die Energie pro Volumeneinheit $\epsilon = H/V$ hängt hier nur von der Dichte $\rho = N/V$ ab:

$$\epsilon(\rho) = \rho^{5/3} - \alpha \rho^{4/3} . \quad (8)$$

Diese "Extensivität" oder "Homogenität" der Energie bedeutet folgendes: Wenn wir das System in zwei Subvolumina V_1, V_2 mit $V_1 + V_2 = V$ teilen und in jeden Teil N_1 (bzw. N_2) Teilchen füllen, so daß die Dichte gleich ist, $\rho = N_1/V_1 = N_2/V_2$, wird Energie additiv,

$$H = N_1 \left[\left(\frac{N_1}{V_1} \right)^{2/3} - \alpha \left(\frac{N_1}{V_1} \right)^{1/3} \right] + N_2 \left[\left(\frac{N_2}{V_2} \right)^{2/3} - \alpha \left(\frac{N_2}{V_2} \right)^{1/3} \right] .$$

Die Teile zeigen also keine Wechselwirkung, wie es durch die Neutralisierung der elektrischen Kräfte zu erwarten ist. Dennoch geschieht etwas Unphysikalisches. Berechnen wir den Druck

$$P = - \frac{\partial H}{\partial V} = - \epsilon + \rho \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \quad (9)$$

und die Kompressibilität

$$K = - \left[V \frac{\partial P}{\partial V} \right]^{-1} = \left[\rho^2 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho^2} \right]^{-1} , \quad (10)$$

so sehen wir, daß der Druck für $\rho < \frac{\alpha^3}{8}$, die Kompressibilität für $\rho < \frac{8\alpha^3}{125}$ negativ werden:

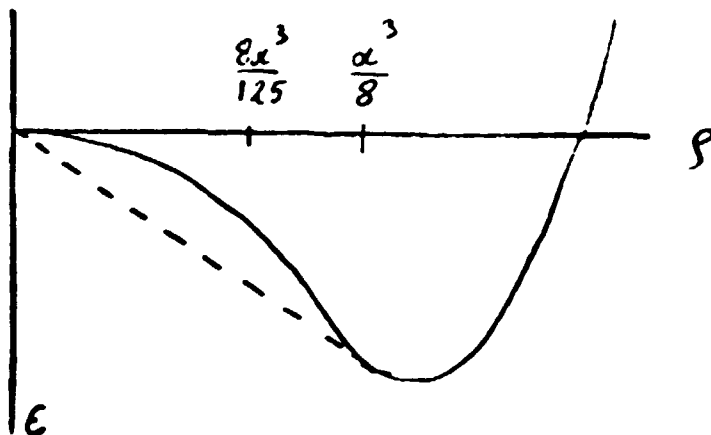


Fig. 1

Negative Kompressibilität bedeutet $\partial^2 \epsilon / \partial \rho^2 < 0$, also $\epsilon(\rho)$ ist dort nach unten gekrümmt (konkav). Für ein zerlegbares System, dessen Energie additiv von den einzelnen Teilen abhängt, ist dies aber unmöglich, da muß ϵ stets eine konvexe Funktion von ρ sein. Konvexität bedeutet

$$\sum_i \alpha_i \epsilon(\rho_i) \geq \epsilon\left(\sum_i \alpha_i \rho_i\right) \quad \text{für } \alpha_i > 0, \quad \sum_i \alpha_i = 1,$$

oder mit $\alpha_i = V_i/V$ in H ausgedrückt

$$\sum_i H(N_i, V_i) \geq H\left(\sum_i N_i, \sum_i V_i\right).$$

Ist diese Ungleichung verletzt, so könnten wir die Energie vermindern, indem wir die einzelnen V_i mit N_i Teilchen anfüllen. Die Summe der Energien wäre dann unter unserem H , und wir hätten nicht das wirkliche Minimum der Gesamtenergie gefunden. Physikalisch zeigt dies, daß zwei Teile mit negativer Kompressibilität nicht im Gleichgewicht koexistieren können. Ein Teil würde sich ausdehnen und dabei sein Druck zunehmen. Dabei preßt er den anderen zusammen, was dessen Gegendruck weiter vermindert. Gleichgewicht stellt sich erst wieder ein, wenn wir im Gebiet $\kappa > 0$ sind und

der Druck auf beiden Seiten gleich wird. Mathematisch heißt dies, daß wir von $\epsilon(\rho)$ die konvexe Hülle nehmen müssen, also in Fig. 1 die strichlierte Gerade zwischen $(a^3/8, \epsilon(a^3/8))$ und $(0,0)$. Für $\rho < a^3/8$ war $P < 0$ und bei negativem Druck kann man einfach die Energie vermindern. Es ist dann energetisch günstiger, das System in Teile zu zerlegen, wobei ein Teil $\rho = 0$, also $N_1 = 0$ hat, und die anderen $P = 0 = \partial H/\partial V$ haben, also in dem Zustand des Minimums der Energie sind, den wir eingangs berechnet haben. Dies gibt aber für $\epsilon(\rho)$ genau wieder die strichlierte Linie in Fig. 1, denn $P = -\epsilon + \rho \partial \epsilon / \partial \rho = 0$, wenn die Tangente an $\epsilon(\rho)$ in dem Nullpunkt zeigt.

In den drei anderen Fällen von Tabelle I ist die Volumsabhängigkeit dieselbe, nur die Koeffizienten haben andere N-Abhängigkeit. Daher ist die Situation bezüglich Druck und Kompressibilität, die ja Ableitungen nach V bei konstantem N sind, unverändert. Der einzige Unterschied ist, daß sich jetzt bei $P < 0$ das System im Inneren des Volumens zu einem einzigen Teil zusammenballt, während es für eine homogene Funktion $H(N,V)$ in verschiedene Teile zerbrechen kann. Dies gäbe in den anderen Fällen nicht das Minimum der Energie, denn für $P = 0$ ist sie dort $-cN^\delta$, $c > 0$, $\delta > 1$ und $-(N_1 + N_2)^\delta < -N_1^\delta - N_2^\delta$.

3. Die Heuristik für $T > 0$

Das thermodynamische Verhalten läßt sich auf gleiche Weise abschätzen, wir müssen nur zur quantenmechanischen Nullpunktsenergie die thermische Energie hinzufügen. Da wir an der thermischen Stabilität interessiert sind, müssen wir isolierte Systeme betrachten, ein instabiles System kann nicht im Gleichgewicht mit einem Reservoir sein. Daher fügen wir zu V und N als thermische Variable die Entropie S hinzu. Für unsere Zwecke ist der klassische Ausdruck für die thermische Energie freier Teilchen genau genug, vor der Quantenmechanik ist nur die Nullpunktsenergie wesentlich. Ohne sie ist die Energie nicht nach unten beschränkt und rein klassisch existiert keine der thermodynamischen Zustandssummen. Ferner müssen wir in der klassischen Rechnung die Ununterscheidbarkeit der Teil-

chen berücksichtigen. Wir erhalten $E(S, N, V)$ durch Umkehrung der Entropie-
definition*:

e^S = Volumen der Energieschale =

$$= \frac{1}{N!} \int d^{3N} x d^{3N} p \theta(E - \sum_i p_i^2) = \left(\frac{E}{N\gamma}\right)^{3N/2} \left(\frac{V}{N}\right)^N.$$

Dabei ist für $N \rightarrow \infty$ der Zahlfaktor $\gamma = 3/2\pi e^{2/3} < 1$, somit ist die thermi-
sche Energie

$$E_{th} = \gamma N \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} e^{2S/3N} \quad (11)$$

zur Nullpunktsenergie hinzuzufügen. Da sie, durch Dimensionsgründe bedingt,
dieselbe V -Abhängigkeit hat, scheint sich nichts Neues zu ergeben. Doch
werden wir sehen, daß die neue Dimension S den Unterschied zwischen stabil
und instabil verschärft.

Wir wollen also die Gesamtenergie für Fermionen

$$E(S, N, V) = \frac{N^{5/3}}{V^{2/3}} (1 + \gamma e^{2S/3N}) - \alpha \frac{N^{4/3}}{V^{1/3}} \quad (12)$$

oder

$$\epsilon(\sigma, \rho) = \rho^{5/3} (1 + \gamma e^{2\sigma/3\rho}) - \alpha \rho^{4/3}$$

diskutieren, $\alpha = e^2$ im elektrischen und $\alpha = \kappa N^{2/3}$ im gravitativen Falle.
In ersterem ist E eine homogene Funktion und das System ist zerlegbar,
im anderen hängt α von N ab. Letzteres hat zur Folge, daß E nicht die
Summe der Energien der einzelnen Teile ist und wir beim Versuch, E weiter
zu minimisieren, nur den Fall betrachten können, daß sich alle Teilchen
in einem Volumen $V_0 < V$ versammeln und der Rest leer ist (dann ist die
Energie natürlich additiv). Falls also für ein $V_0 < V$ der Druck $-P = -\partial E / \partial V = 0$
wird, ersetzen wir $E(S, N, V)$ durch $E(S, N, V_0)$ für $V_0 < V$. Der Druck ver-
schwindet für $V = N \left[\frac{2}{\alpha} (1 + \gamma e^{2S/3N}) \right]^{3/2}$ und wir bekommen als Verallgemeinerung

* $\theta(x)$ bezeichnet die Stufenfunktion = 1 für $x > 0$, 0 für $x < 0$.

der Situation von Fig. 1, falls $\rho < \rho_c = a^3/8$,

$$c(\sigma, \rho) = \begin{cases} \rho^{5/3} (1 + \gamma e^{2\sigma/3\rho}) - a\rho^{4/3} & \text{für } \sigma > \sigma_c = \frac{3\rho}{2} \ln\left(\frac{1}{\gamma}\left(\frac{a}{2\rho}\right)^{1/3} - 1\right) \\ -\rho \frac{a^2}{4} (1 + \gamma e^{2\sigma/3\rho})^{-1} & \text{für } \sigma < \sigma_c \end{cases} \quad (13)$$

Berechnen wir nun

$$T = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = \begin{cases} \frac{2}{3} \rho^{2/3} \gamma e^{2\sigma/3\rho} & \text{für } \sigma > \sigma_c \\ \frac{a^2}{6} \gamma \frac{e^{2\sigma/3\rho}}{(1 + \gamma e^{2\sigma/3\rho})^2} & \text{für } \sigma < \sigma_c \end{cases} \quad (14)$$

und

$$T/c_v = \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \sigma^2} = \begin{cases} \frac{9}{4} \rho^{-1/3} \gamma e^{2\sigma/3\rho} & \text{für } \sigma > \sigma_c \\ \frac{a^2}{27} \gamma \frac{e^{2\sigma/3\rho} (1 - \gamma e^{2\sigma/3\rho})}{(1 + \gamma e^{2\sigma/3\rho})^3} & \text{für } \sigma < \sigma_c \end{cases}, \quad (15)$$

so sehen wir, falls $\rho < a^3/64$, daß zwar stets $T \geq 0$, aber für $\frac{3\rho}{2} \ln \frac{1}{\gamma} < \sigma < \frac{3\rho}{2} \ln\left(\frac{1}{\gamma}\left(\frac{a}{2\rho}\right)^{1/3} - 1\right)$ die spezifische Wärme c_v negativ wird. Dort ist ϵ als Funktion von σ konkav, ϵ sieht so aus:

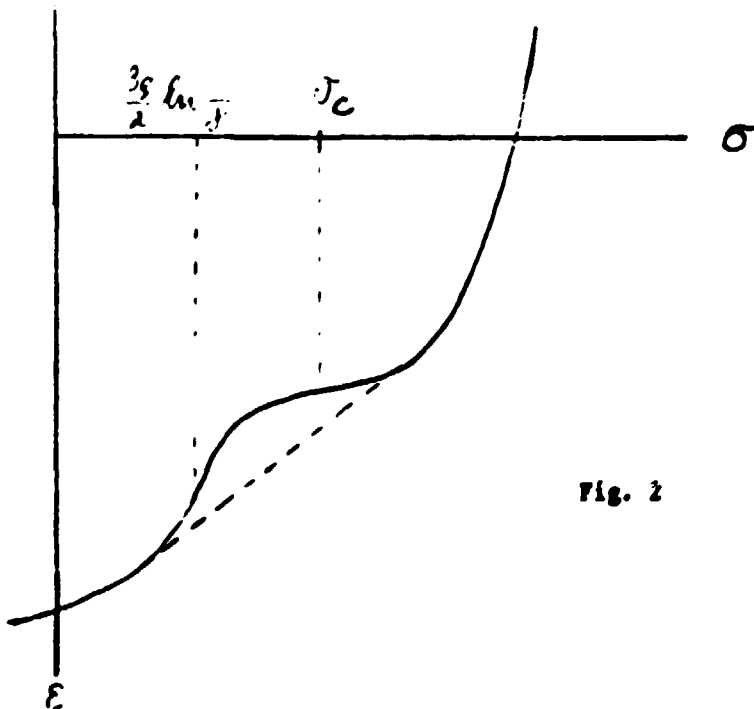


Fig. 2

Dabei muß betont werden, daß sich c_v auf die Wärmekapazität des Gesamtsystems bezieht, ein kleiner Teil herausgenommen verhält sich natürlich normal. Versuchen wir, physikalisch zu beschreiben, was geschieht, wenn wir von großer Energie (also großem S) ausgehen und dem System dann immer mehr Energie entziehen. Zunächst kühlt es sich ab, bis schließlich die thermische Energie gegen die Gravitation nicht mehr aufkommt und sich die Teilchen um ein Zentrum konzentrieren. Beim Fall zum Zentrum erhitzen sie sich wieder, so daß T mit abnehmendem E steigt, also $c_v < 0$. Schließlich gewinnt die Nullpunktsenergie die Oberhand und c_v wird wieder positiv. Hinter diesem Phänomen steht der Virialsatz, nach welchem bei Systemen mit $r^{-\gamma}$ -Potentialen in stationären Zuständen kinetische Energie = $-\text{(Gesamtenergie)} \left(\frac{2}{\gamma} - 1\right)^{-1}$. Setzt man nach dem Äquipartitionssatz kinetische Energie = $3NT/2$, wird für $0 < \gamma < 2$

$$T = - \frac{E}{N} \frac{2}{3(2/\gamma - 1)} \quad \text{und} \quad c_v = \frac{\partial T}{\partial E/V} = - \frac{2p}{3(2/\gamma - 1)} < 0 .$$

So allgemein kann natürlich $c_v < 0$ nicht gelten und der Grund dafür ist, daß bei großer Energie der Virialsatz einen Beitrag von der Wand des Kastens erhält, während bei kleiner Energie der Äquipartitionssatz durch die quantenmechanische Nullpunktsenergie verletzt wird. Aber für geeignete Werte von ρ und α eröffnet sich ein Zwischengebiet, in dem das einfache Argument für $c_v < 0$ stimmt.

Kehren wir zum elektrischen Fall ($\alpha = e^2$) zurück, so kann dort dieses Phänomen nicht eintreten, denn für ein zerlegbares System erhalte ich das Minimum der Energie, indem ich

$$\sum_i E(S_i, N_i, V_i)$$

unter den Bedingungen

$$\sum_i S_i = S, \quad \sum_i N_i = N, \quad \sum_i V_i = V,$$

minimiere. Dies bedeutet für c , daß man die konvexe Einhüllende \bar{c} nimmt, also in Fig. 2 die strichlierte Linie. Dadurch wird jedes konkave Gebiet überbrückt und

$$\bar{\epsilon}(\sigma, \rho) = \min_{\substack{\sum a_i = 1 \\ \sum a_i \sigma_i = \sigma \\ \sum a_i \rho_i = \rho}} \sum a_i \epsilon(\sigma_i, \rho_i) \quad (16)$$

ist stets konvex. Physikalisch heißt dies folgendes. $c_v < 0$ gibt es nur für ein isoliertes System als ganzes, in Kontakt mit einem Wärmebad würde es Energie abgeben und sich dabei aufheizen (oder umgekehrt), bis c_v wieder > 0 wird. Deswegen ist in der kanonischen Gesamtheit c_v stets ≥ 0 . In einem zerlegbaren System wirkt nun jeder Teil wie ein Wärmereservoir für den Rest und wenn eine Tendenz zu $c_v < 0$ spürbar wird, zerlegt sich das System in Phasen, die den Auflagepunkten der Geraden entsprechen, welche das konkave Gebiet in ϵ überbrücken. Die Instabilität wird also durch Phasenübergänge erstickt.

4. Die Resultate

Die Grundgesetze, welche Materie beherrschen, und Teile der Heuristik waren ab 1926 bekannt, aber erst nach einer Pionierarbeit von F.J. Dyson und A. Lenard (1967) wurden die meisten Aussagen aus den Paragraphen 2 und 3 direkt aus (1) abgeleitet. Wir können hier nicht auf die Details der Rechentechnik oder der geschichtlichen Entwicklung eingehen, sondern nur das Wesentliche zusammenfassen.

Die Heuristik der kinetischen Energie von Fermionen wird durch folgende Sätze untermauert:

Sei $\psi(x_1 \dots x_N)$ eine beliebige N -Teilchen-Wellenfunktion, der q Sorten von Fermionen angehören, und

$$\rho(x) = \sum_{j=1}^N \int dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_N |\psi(x_1 \dots x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots x_N)|^2$$

die zugehörige 1-Teilchen-Dichte, dann gilt für den Erwartungswert der kinetischen Energie [1]

$$\langle \psi | \sum_{i=1}^N p_i^2 | \psi \rangle \geq \frac{\gamma_1}{q^{2/3}} \int d^3x \rho^{5/3}(x) \quad (17)$$

bzw. [2]

$$\langle \psi | \sum_{i=1}^N |\vec{p}_i| | \psi \rangle \geq \frac{\gamma_2}{q^{1/3}} \int d^3x \rho, \quad (18)$$

die γ_i sind Zahlfaktoren der Ordnung 1. Für Elektronen trägt man dem Spin durch $q = 2$ Rechnung. Für $q = N$ unterliegt die Wellenfunktion keiner Symmetriebedingung und (17) und (18) gelten dann auch für Bosonen.

Die Plausibilitätsbetrachtungen über die potentielle Energie berücksichtigt keine feineren Korrelationen zwischen den Teilchen und diese können den Erwartungswert von $1/|x_i - x_j|$ natürlich beliebig vergrößern, aber nicht beliebig vermindern. Es gilt für eine beliebige Wellenfunktion ψ [3]:

$$\langle \psi | \sum_{i>j} \frac{1}{|x_i - x_j|} | \psi \rangle \geq \frac{1}{2} \int \frac{d^3x d^3x'}{|x - x'|} \rho(x) \rho(x') - \gamma_2 \int d^3x \rho^{4/3}(x). \quad (19)$$

Vermutlich gibt es eine Ungleichung in der umgekehrten Richtung, welche ausdrückt, daß Korrelationen, welche $1/|x_i - x_j|$ groß machen, auch viel kinetische Energie kosten, doch ist ihre genaue Form noch unbekannt. Den anziehenden Teil von V nach unten zu beschränken, erfordert daher diffizilere Überlegungen. Durch (17) bis (19) wird $\langle \psi | H | \psi \rangle$ nach unten durch eine Thomas-Fermi-Dirac-Theorie beschränkt, und die Stabilität für Fermionen und $\kappa = 0$ folgt aus einem Satz von Teller [4], nach dem in der Thomas-Fermi-Theorie Atome nicht binden. Mit strengen Aussagen dieser Natur konnte nun folgendes bewiesen werden:

Tabelle I

Bosonen mit $\kappa = 0$: Hier ist das N -Verhalten unbekannt, man weiß [5] nur $-N^{5/3} < E < -N^{7/5}$. Haben alle positiven (oder negativen) Teilchen $m = \infty$, so gibt es obere Schranken [6] $\sim -N^{5/3}$.

Fermionen mit $\kappa = 0$: Hier gibt es obere und untere Schranken $\sim -N$, sie klaffen um etwa eine Größenordnung auseinander [1].

Bosonen mit $\kappa > 0$: Man weiß [7] $-c_1 N^3 < E < -c_2 N^3$ mit $c_1/c_2 \sim 10$.

Fermionen mit $\kappa > 0$: Hier wird für $N \rightarrow \infty$ die Thomas-Fermi-Theorie exakt [8], also $\lim_{N \rightarrow \infty} E/N^{7/3}$ existiert und ist eine numerisch berechenbare Zahl.

Daß das N-Verhalten der Grundzustandsenergie von geladenen Bosonen (ohne Gravitation) ein noch ungelöstes Problem darstellt, zeigt, daß man nicht immer Plausibilitätsbetrachtungen in strenge Aussagen umsetzen kann. Man könnte $E \sim -N^{5/3}$ etablieren, wenn man eine Versuchsfunktion ψ fände, die $\langle \psi | H | \psi \rangle \sim -N^{5/3}$ ergibt, denn nach dem Variationsprinzip wäre dies eine obere Schranke für E. Versuchsfunktionen, welche die Coulombenergie aber voll ausnützen, müssen Korrelationen zwischen den positiven und negativen Teilchen enthalten. Diese kosten aber weitere kinetische Energie, welche wir bei unserer Betrachtung nicht berücksichtigt haben. Fügt man sie hinzu [7], wird das N-Verhalten zu $-N^{7/5}$ abgeschwächt. Allgemein wird nun dies als das richtige Resultat angesehen, aber bisher konnte niemand sehen, wie man die untere Schranke $-N^{5/3}$ zu $-N^{7/5}$ verbessern kann.

Bezüglich Tabelle II ist zu bemerken, daß die Unbeschränktheit nach unten von H_{rel} für die instabilen Fälle direkt aus den auch quantenmechanisch geltenden Ungleichungen (6) folgt. Die Beschränktheit nach unten für $\kappa > 0$, falls $N < \kappa^{-1}$ (bzw. $\kappa^{-3/2}$), ist nur mit größerem Aufwand beweisbar [9]. Für $\kappa = 0$ konnte die Stabilität für Fermionen (allerdings für $\alpha < 10^{-160}$) gezeigt werden [10].

Natürlich ist $p^2/2m \rightarrow \sqrt{m^2+p^2}$ nur eine relativistische Korrektur; wenn das System wirklich relativistisch wird, liefert diese Hamiltonfunktion sicher keine vollständige Beschreibung des Geschehens. Es ist eine Stärke der Stabilitätsbeweise [9], daß sie gleichzeitig zeigen, daß für $N \ll \kappa^{-1}$ (bzw. $N^{-3/2}$) das System nichtrelativistisch bleibt, so daß (1) eine adäquate Beschreibung sein sollte. Die Instabilitätsaussagen fordern aber eine breitere Basis.

Ist $E \sim -N^\gamma$ geklärt, erhebt sich die Frage, ob bei endlicher Temperatur der thermodynamische Limes

$$E_{\infty}(S, N, V) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\gamma} E(\lambda S, \lambda N, \lambda V) \quad (19)$$

existiert und was die Eigenschaften von E_{∞} sind. Nach Definition ist es eine homogene Funktion vom Grade γ , und unsere Überlegungen von § 3 werden durch folgenden Satz von P. Landsberg [11] scharf beleuchtet.

Sei $f(\vec{x})$ eine reelle Funktion von Variablen und $f(0) = 0$. Dann implizieren von den drei Eigenschaften

- (a) Homogenität ersten Grades: $f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$, $\lambda > 0$,
- (b) Konvexität: $f(\lambda \vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2) \leq \lambda f(\vec{x}_1) + (1-\lambda)f(\vec{x}_2)$, $0 < \lambda < 1$,
- (c) Subadditivität: $f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) \geq f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$,

je zwei die dritte.

Dieser leicht zu beweisende Sachverhalt hat, falls $f(\vec{x}) = E_{\infty}(S, N, V)$, folgende physikalische Deutung: Eigenschaft (a) war gerade unser Stabilitätskriterium und kann als Stabilität gegen Implosion bezeichnet werden. Man kann nämlich zeigen, daß $E \sim -N$ auch $V \sim N$ gewährleistet, die Energie wird positiv, wenn man das System mehr komprimiert. (b) ist die thermodynamische Stabilität. (Für homogene Funktionen ersten Grades ist Konvexität von $E(S, N, V) \Leftrightarrow$ Konvexität von $\epsilon(\sigma, \rho)$.) (c) ist schließlich eine Stabilität gegen Explosion, es sagt, daß wir beim Zusammenfügen zweier Systeme zumindest keine Energie verlieren. In unseren Beispielen ist (c) stets erfüllt, es wird nur verletzt, wenn Abstoßung dominiert. Der Satz besagt unter anderem, daß ein System, wenn es gegen Explosion und Implosion stabil ist, auch die thermodynamische Stabilität besitzt. Oder schärfer, da (c) bei uns stets erfüllt ist, die thermodynamisch stabilen Systeme sind genau die, bei denen die Energie extensiv ist. Das Phänomen

der negativen spezifischen Wärme ist also kein isoliertes Kuriosum, sondern tritt stets auf, außer bei Fermionen mit $\kappa = 0$.

Die Existenz des Limes (19) konnte für Fermionen gezeigt werden [12], wobei für $\kappa > 0$ wieder die (temperaturabhängige) Thomas-Fermi-Theorie exakt wird [8,13]. Dabei wurde der gravitationelle Phasenübergang sowohl numerisch [8] als auch analytisch [14] nachgewiesen und hat tatsächlich die in § 3 erratenen Eigenschaften. Für $\kappa = 0$ sind noch einige wesentliche Fragen an $\epsilon(\sigma, \rho)$ offen [IV]. Über Bosonen steht sonst wenig fest.

5. Schlußbetrachtungen

Das Verhalten der Materie wird durch die Fermistatistik der Elektronen geprägt. Wohl gehorchen manche Atomkerne der Bosestatistik, doch bleiben die Resultate über Stabilität gültig, auch wenn die Teilchen eines Ladungsvorzeichens unendliche Masse haben, so daß deren Statistik für die Stabilität unwesentlich wird. Was die Stabilität gefährdet, ist die Gravitation. Sie dominiert über die elektrische Energie, wenn $\kappa N^{2/3} > e^2$ oder $N > (e^2/\kappa)^{3/2} \sim 10^{54}$, was etwa der Masse von Jupiter entspricht. Für kleinere N herrscht Stabilität, für größere N Instabilität, und beides ist für unser Leben vonnöten. Das Leben und Sterben eines Sternes ist von der negativen spezifischen Wärme begleitet. Bei seiner Geburt ballen sich Gasmassen unter der Schwerkraft zusammen, beginnen zu glühen und werden durch Ausstrahlung nur noch heißer, bis die Kernmaterie zu brennen beginnt. Sie dient nicht zur Heizung, sondern zur Kühlung des Sternes, denn dadurch, daß in der Mitte des Sternes die Energie nachgeliefert wird, die er außen abstrahlt, wird verhindert, daß seine nicht-nukleare Energie weiter abnimmt und die Temperatur noch weiter ansteigt. Ist der Stern nuklear ausgebrannt und genügend groß, so geht es auf der Energieskala unaufhaltsam bergab, bis er schließlich zu einem schwarzen Loch implodiert. Auch aus diesem Grab heraus wirkt der Stern noch als thermodynamischer Störenfried. Nach einer Heuristik von Beckenstein [15] und Hawking [16] gleicht die Entropie eines schwarzen Loches seiner Oberfläche gemessen in (Plancklänge)². Da der Radius eines schwarzen Loches seiner Energie proportional ist, haben wir

$$S \sim E^2, \quad T = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)^{-1} \sim \frac{1}{E} \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial E} \sim -\frac{1}{E^2} < 0.$$

Das schwarze Loch hat also wieder negative spezifische Wärme und beginnt zu strahlen, wird dabei heißer und strahlt immer stärker, bis seine ganze Energie verstrahlt ist. Wenn auch für schwarze Löcher der Masse eines Sternes dieser Prozeß viel zu langsam ist, um physikalische Bedeutung zu erlangen, so zeigt er doch, wie schwer der Keim der Instabilität auszurotten ist. Dies gelingt nur für Materie auf der irdischen Größenskala, wo die Instabilität sofort durch Phasenübergänge gestoppt wird. So können sich stabile Verhältnisse entwickeln, die aber die Erstarrung und der Tod, nicht aber das Leben sind. Letzteres gedeiht durch Temperaturdifferenz zwischen Erde und Sonne, also dadurch, daß der Boltzmannsche Wärmetod nicht eingetreten ist. Dieser wird gerade durch die negative spezifische Wärme verhindert, sie macht die heißen Sterne noch heißer und die kalten noch kälter. Obgleich das Universum von einem thermischen Gleichgewicht ausgegangen ist, hat uns seine Expansion in das Gebiet der negativen spezifischen Wärme geführt, wo wir dem Wärmetod durch lebensspendende Instabilitäten entgehen.

LiteraturAllgemein

E.H. Lieb, Rev. Mod. Phys. 48, 553 (1976).

W.E. Thirring, Lehrbuch der Mathematischen Physik, Band IV, Springer Wien-New York (1980).

Im Text zitiert

- [1] E.H. Lieb, W. Thirring, Phys. Rev. Lett. 35, 687 (1975).
- [2] I. Daubechies, Commun. Math. Phys. 90, 511 (1983).
- [3] E.H. Lieb, S. Oxford, Int. J. Quantum Chem. 19, 427 (1981).
- [4] E.H. Lieb, B. Simon, Adv. Math. 23, 22 (1977).
- [5] F.J. Dyson, A. Lenard, J. Math. Phys. 8, 423 (1967); *ibid.* 9, 698 (1968).
- [6] E.H. Lieb, Phys. Lett. 70, 71 (1979).
- [7] J.M. Levy-Leblond, J. Math. Phys. 10, 806 (1969).
- [8] P. Hertel, W. Thirring, in: Quanten und Felder, ed. H. Dürr, Vieweg 1971.
- [9] E.H. Lieb, W. Thirring, Ann. of Phys. 155, 494 (1984).
- [10] J. Conlon, Commun. Math. Phys. 94, 439 (1984).
- [11] P. Landsberg, J. Stat. Phys. 35, 159 (1984).
- [12] J. Lebowitz, E.H. Lieb, Adv. Math. 9, 316 (1972).
- [13] P. Hertel, H. Narnhofer, W. Thirring, Commun. Math. Phys. 28, 159 (1972).
- [14] A. Pflug, Commun. Math. Phys. 78, 83 (1980).
J. Messer, J. Math. Phys. 22, 2910 (1981).
- [15] J. Beckenstein, Phys. Rev. D7, 2333 (1973).
- [16] S. Hawking, Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975).