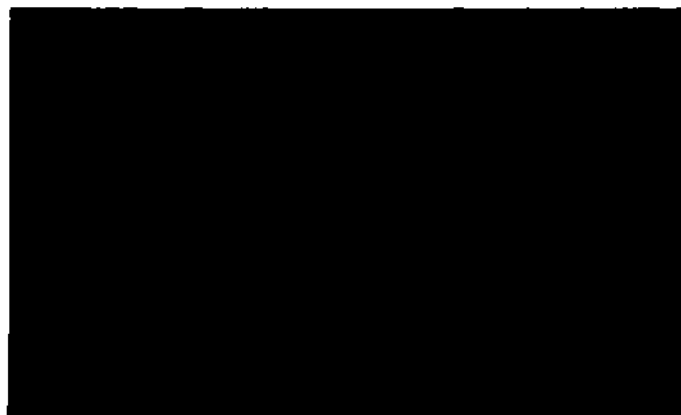
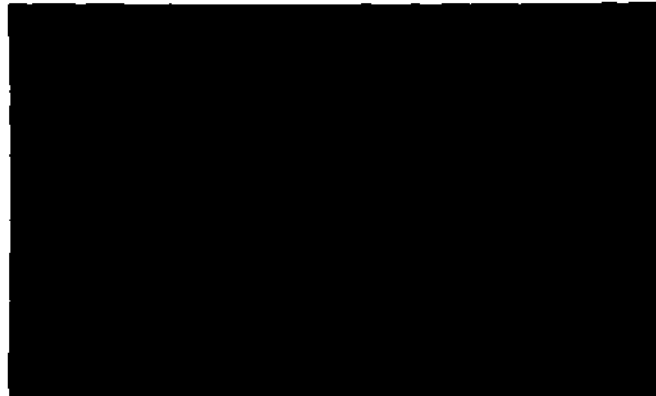


Laboratório de  
Computação  
Científica



**PEDIDOS DE CÓPIAS DEVEM SER ENVIADOS AO:**  
**REQUEST FOR FREE COPIES SHOULD BE ADDRESSED TO:**

Laboratório de Computação Científica  
Departamento de Informação e Documentação  
Rua Lauro Müller, 455  
C. P. 56018  
22290 - Rio de Janeiro, RJ  
Brasil



LABORATÓRIO NACIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - LNCC  
ABRIL DE 1985

Lcc -- 012/85

UM MODELO PARA ESCOAMENTO DE UM  
FLUIDO NEWTONIANO ATRAVÉS DE UM  
MEIO POROSO INSATURADO E INFINITO

Rogério Saldanha da Gama\*  
Rubens Sampaio\*\*

\* Pesquisador Visitante do LNCC/CNPq.

\*\*Departamento de Eng. Mecânica, PUC/RJ, R. Marquês de S. Vicente,  
225, 22453 Rio de Janeiro, RJ.

## RESUMO

Neste trabalho é analisado o escoamento de um fluido Newtoniano incompressível através de um meio poroso rígido, homogêneo, isotrópico e infinito que, no instante inicial, possui uma certa distribuição do referido fluido. É proposto um modelo que leva em conta o fato do movimento ser causado por gradientes de concentração de fluido, porém não considera o atrito entre o meio poroso e o fluido. É resolvido um caso unidimensional onde o problema matemático se reduz à solução de um sistema hiperbólico não linear de equações diferenciais, sujeito a uma condição inicial do tipo "degrau", chamado "Problema de Riemann".

## ABSTRACT

In this work we analyse the flow of an incompressible Newtonian fluid through a rigid, homogeneous, isotropic and infinite porous medium which has a given initial distribution of the mentioned fluid. It is proposed a model that assumes that the motion is caused by concentration gradient, but it does not consider the friction between the porous medium and the fluid. We solve an onedimensional case where the mathematical problem is reduced to the solution of a non-linear hyperbolic system of differential equations, subjected to an inicial condition given by a step function, called "Riemann Problem".

# UM MODELO PARA O ESCOAMENTO DE UM FLUIDO NEWTONIANO ATRAVÉS DE UM MEIO POROSO INSATURADO E INFINITO

Rogério Martins Saldanha da Gama  
Rubens Sampaio  
Departamento de Engenharia Mecânica  
PUC/RJ

## RESUMO

Neste trabalho é analisado o escoamento de um fluido Newtoniano incompressível através de um meio poroso rígido, homogêneo, isotrópico e infinito que no instante inicial possui uma certa distribuição do referido fluido. É proposto um modelo que leva em conta o fato do movimento ser causado por gradientes de concentração de fluido, porém não considera o atrito entre o meio poroso e o fluido. É resolvido um caso unidimensional onde o problema matemático se reduz à solução de um sistema hiperbólico não-linear, de equações diferenciais, sujeito a uma condição inicial do tipo "degrau", chamado "Problema de Riemann".

## 1 - INTRODUÇÃO

Seja um meio poroso infinito, rígido, homogêneo e isotrópico, o qual está em repouso, possuindo porosidade " $\phi$ " (volume de vazios / volume total). Suponhamos que exista um plano imaginário (de equação " $z=0$ "), dividindo o meio poroso em dois, e que

$$z > 0 \quad \phi = \phi_0 < \phi \quad (1)$$

$$x < 0 \quad \phi = \phi_L \leq \phi \quad (2)$$

onde " $\phi$ " é uma função da posição " $x$ " e do tempo " $t$ ". Esta função representa a fração de fluido, sendo definida como a razão entre o volume de fluido, que é sempre menor ou igual ao volume de vazios, e o volume total

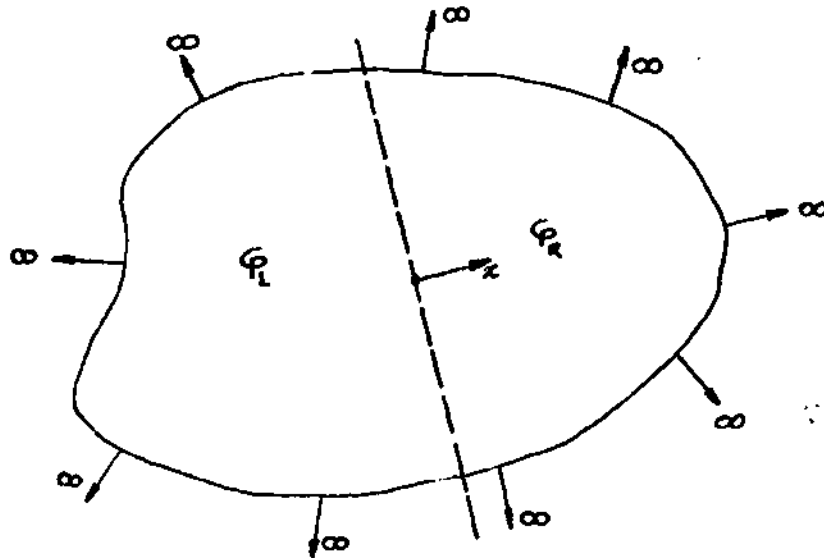


Figura 1 - Um Esquema da Condição Inicial .

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo que permita determinar, para um certo fluido e um certo meio poroso, a fração de fluido e a velocidade do fluido, para cada ponto " $x$ " e cada tempo " $t$ ", tendo como condição inicial as equações (1) e (2) e velocidade nula.

Ao ser "retirado" o plano imaginário é de se esperar que exista uma tendência à uniformização da distribuição de fluido. Esta tendência forçará o surgimento de um movimento o qual, neste trabalho, será suposto livre de atrito.

O problema será modelado, à luz da Teoria Contínua de Misturas, como sendo o movimento de uma mistura binária sólido - fluido. O primeiro constituinte desta mistura será o sólido,

que compõe a matriz porosa , e o segundo o fluido Newtoniano incompressível , que escoo através desta matriz . Existe , na verdade , também um terceiro constituinte , que ocupa os vazios quando lá não está o referido fluido . Não estudaremos o movimento deste constituinte , supondo para isto que ele é idealmente compressível e de inércia desprezível .

Sob o ponto de vista de Teoria de Misturas se supõe que os constituintes da mistura ocupam todo o seu volume simultaneamente , sendo dotados de cinemática independente , com sua interação considerada nas equações da dinâmica .

O modelo a ser aqui proposto é um primeiro passo para um estudo mais rigoroso do fenômeno de enchimento de um meio poroso onde devem ser considerados os efeitos de atrito e de forças externas de corpo .

Neste trabalho , para a obtenção dos campos de velocidade e de fração de fluido , numa situação unidimensional , é necessário se resolver um " Problema de Riemann " .

## 2 - TEORIA DE MISTURAS

Vamos apresentar sumariamente as equações de balanço provenientes da Teoria Contínua de Misturas , restringindo nossa discussão a misturas binárias , sem reações químicas [1] . Nesta situação a equação da continuidade , para o i-ésimo constituinte , é dada por

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div}(\rho_i v_i) = 0 \quad (3)$$

onde " $\rho_i$ " representa uma relação local entre a massa do constituinte " $i$ " e o volume da mistura e " $v_i$ " o campo de velocidades para este mesmo constituinte .

A equação da quantidade de movimento , para o i-ésimo constituinte , é dada por

$$\rho_i \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\text{grad } v_i) v_i \right] = \text{div } T_i + \underline{u}_i + \rho_i g \quad (4)$$

onde " $g$ " é uma força de corpo por unidade de massa, " $T_i$ " é o tensor parcial de tensões para o constituinte " $i$ " e " $\underline{u}_i$ " uma força, por unidade de volume, exercida sobre " $i$ " pelo outro constituinte da mistura. Neste trabalho suporemos que os tensores parciais de tensão são simétricos, o que garante que o balanço de momento angular, para cada constituinte e para a mistura, será satisfeito.

A ausência de reações químicas faz com que a massa de cada constituinte seja preservada, o que garante que a massa da mistura é conservada.

A força de interação " $\underline{u}_i$ ", por ser uma força interna à mistura, deve satisfazer à seguinte equação, no caso de uma mistura binária

$$\underline{u}_1 = - \underline{u}_2 \quad (5)$$

o que garante que o balanço de momentum linear é satisfeito para a mistura como um todo.

Não discutiremos a equação da energia, supondo que ela será sempre satisfeita, com uma escolha adequada de uma fonte externa de calor.

A mistura binária aqui considerada é formada por um constituinte sólido e um fluido. O primeiro representa a matriz porosa e o segundo o fluido que por ela escoa. O sólido que compõe a matriz porosa será suposto rígido, homogêneo e isotrópico e o fluido será Newtoniano e incompressível. Desta forma as equações de balanço para o sólido serão automaticamente satisfeitas e, para o fluido, podem ser escritas na seguinte forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}(\phi v) = 0 \quad (6)$$

$$\rho \phi \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + (\text{grad } v) v \right] = \text{div } T_f + \underline{u}_f + \rho \phi g \quad (7)$$



onde " $\rho$ " é a densidade real do fluido, " $\underline{v}$ " o campo de velocidades, " $\phi$ " a fração local (em volume) ocupada pelo fluido na mistura, " $\underline{T}_f$ " seu tensor parcial de tensões e " $\underline{m}_f$ " a força exercida sobre o fluido (por efeito da interação com o sólido).

### 3 - HIPÓTESES CONSTITUTIVAS

São necessárias equações constitutivas para o tensor parcial de tensões e para a força de interação sólido-fluido.

Como primeira aproximação suporemos que o tensor parcial de tensões é um múltiplo da identidade

$$\underline{T}_f = -\phi \bar{p} \underline{1} \quad (8)$$

onde a fração de fluido " $\phi$ " aparece pelo fato de que o fluido age sobre uma certa superfície de mistura em função da região de mistura ocupada por ele. Na equação (8) " $\bar{p}$ " é uma pressão e será aqui suposta linear em " $\phi$ ", ou seja

$$\bar{p} = \phi P_f \quad (9)$$

onde " $P_f$ " é chamada "pressão do poro", suposta constante.

Para a força de interação, suporemos a seguinte relação constitutiva [2], baseada na lei de Fick

$$\underline{m}_f = \frac{-\phi \eta D}{K} \text{grad } \phi \quad (10)$$

onde " $\eta$ " é a viscosidade do fluido, " $D$ " o coeficiente de difusão e " $K$ " a permeabilidade específica da matriz porosa. Tal equação poderia levar em conta também termos provenientes da lei de Darcy.

Aplicando (8), (9) e (10) em (6) e (7) temos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div}(\varphi \underline{v}) = 0 \quad (11)$$

$$\rho \varphi \left[ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\text{grad} \underline{v}) \underline{v} \right] = - \left( 2P_3 + \gamma \frac{D}{K} \right) \varphi \text{grad} \varphi + \rho \varphi \underline{g} \quad (12)$$

#### 4 - O PROBLEMA DE RIEMANN

Se agora supusermos que o escoamento é na direção "x", que só existe dependência espacial na variável "x" e que as forças externas de corpo são desprezíveis, podemos reescrever (11) e (12) como

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi \\ G \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} G \\ \frac{G^2}{\varphi} + c \varphi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde

$$c = \frac{2P_3 + \frac{\eta D}{K}}{\rho} \quad (14)$$

$$G(x,t) = \varphi(x,t) v(x,t) \quad (15)$$

sendo " $v(x,t)$ " a componente do campo de velocidades na direção "x".

O sistema (13) é hiperbólico e não linear e desejamos obter soluções para ele sob as seguintes condições iniciais

$$\varphi = \varphi_R, \quad G = 0 \quad x > 0, \quad t = 0 \quad (16)$$

$$\varphi = \varphi_L, \quad G = 0 \quad x < 0, \quad t = 0 \quad (17)$$

O sistema (13), sujeito a (16) e (17), é chamado "PROBLEMA DE RIEMANN" [3].

Podemos reescrever (13) na seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi \\ G \end{bmatrix} + \tilde{A}(\varphi, G) \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \varphi \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

onde

$$\tilde{A}(\varphi, G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{G^2}{\varphi^2} + 2c\varphi & \frac{2G}{\varphi} \end{bmatrix} \quad (19)$$

## 5 - CURVAS DE RAREFAÇÃO E OS INVARIANTES DE RIEMANN

Os autovalores da matriz " $\tilde{A}(\varphi, G)$ " são dados por (em ordem crescente)

$$\lambda_1(\varphi, G) = \frac{G}{\varphi} - \sqrt{2c\varphi} \quad (20)$$

$$\lambda_2(\varphi, G) = \frac{G}{\varphi} + \sqrt{2c\varphi} \quad (21)$$

sendo distintos sempre, nos casos a serem considerados.

Os autovetores associados podem ser expressos como

$$R_1 = \left( 1, \frac{G}{\varphi} - \sqrt{2c\varphi} \right) \quad (22)$$

$$R_2 = \left( 1, \frac{G}{\varphi} + \sqrt{2c\varphi} \right) \quad (23)$$

Os invariantes de Riemann são funções que possuem a seguinte propriedade

$$\left( \frac{\partial R_i}{\partial \varphi}, \frac{\partial R_i}{\partial G} \right) \cdot \left( 1, \frac{G}{\varphi} \pm \sqrt{2c\varphi} \right) \quad (24)$$

ou seja , são tais que

$$\frac{\partial R_i}{\partial \varphi} + \left( \frac{G}{\varphi} \mp \sqrt{2c\varphi'} \right) \frac{\partial R_i}{\partial G} = 0 \quad (25)$$

Neste caso então temos " $R_1(\varphi, G)$ " e " $R_2(\varphi, G)$ " dados por

$$R_1(\varphi, G) = \frac{G}{\varphi} + \sqrt{8c\varphi'} \quad (26)$$

$$R_2(\varphi, G) = \frac{G}{\varphi} - \sqrt{8c\varphi'} \quad (27)$$

As curvas , no plano  $(\varphi, G)$  , onde os invariantes de Riemann são constantes , são chamadas " Curvas de Rarefação "

Os estados à direita  $(\varphi_R, G_R)$  que puderem ser conectados a um estado à esquerda  $(\varphi_L, G_L)$  , por uma curva de rarefação , referente ao primeiro autovalor , serão dados pela seguinte relação

$$\frac{G_R}{\varphi_R} = \frac{G_L}{\varphi_L} + \sqrt{8c\varphi_L'} - \sqrt{8c\varphi_R'} \quad (\text{rarefação-1})(28)$$

Para a curva de rarefação associada ao segundo autovalor teremos a seguinte relação

$$\frac{G_R}{\varphi_R} = \frac{G_L}{\varphi_L} - \sqrt{8c\varphi_L'} + \sqrt{8c\varphi_R'} \quad (\text{rarefação-2})(29)$$

Uma curva de rarefação ( ou onda de rarefação ) é uma solução contínua de (18) . Uma vez que as soluções deste sistema dependem apenas da razão " $x/t$ " , é necessário , para a existência de uma curva de rarefação , que o autovalor associado a esta seja uma função crescente de " $x/t$ " . No caso desta condição não ser satisfeita não podemos conectar os estados pela curva de rarefação em questão .

## 6 - CURVAS DE CHOQUE E A CONDIÇÃO DE ENTROPIA

No caso de não ser possível ligar estados por soluções contínuas, precisamos estender o espaço de funções. Vamos buscar agora soluções constantes por partes. Uma solução deste tipo obedece à condição de salto de Rankine-Hugoniot generalizada, que neste caso fornece

$$\frac{[G]}{[\varphi]} = \frac{[G^2/\varphi + c\varphi^2]}{[G]} = S \quad (30)$$

onde "[ ]" denota o salto da respectiva quantidade e "S" é a velocidade do choque.

Dois estados  $(\varphi_R, G_R)$  e  $(\varphi_L, G_L)$ , conectados por um choque devem satisfazer à seguinte relação

$$\frac{G_R}{\varphi_R} = \frac{G_L}{\varphi_L} \pm \sqrt{(\varphi_R - \varphi_L)^2 c \left( \frac{1}{\varphi_R} + \frac{1}{\varphi_L} \right)} \quad (31)$$

Um estado à direita  $(\varphi_R, G_R)$  e um estado à esquerda  $(\varphi_L, G_L)$  podem ser conectados por um choque-1 se a seguinte condição for satisfeita

$$S < \lambda_1(\varphi_L, G_L) \quad (32)$$

$$\lambda_1(\varphi_R, G_R) < S < \lambda_2(\varphi_R, G_R) \quad (33)$$

e por um choque-2 se

$$S > \lambda_2(\varphi_R, G_R) \quad (34)$$

$$\lambda_1(\varphi_L, G_L) < S < \lambda_2(\varphi_L, G_L) \quad (35)$$

sendo estas desigualdades conhecidas como "Condição de Entropia".

## 7 - CONSTRUÇÃO DA SOLUÇÃO

Com o que foi discutido até aqui podemos determinar, a partir de um certo estado dado, quais os possíveis estados que podem ser conectados a ele por uma rarefação ou choque.

Vamos agora, partindo de dois estados dados, um à esquerda e outro à direita, construir a solução de um problema, como o que é mostrado abaixo

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi \\ G \end{bmatrix} + A(\varphi, G) \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \varphi \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$(\varphi, G) = (\varphi_R, G_R) = \text{constante} \quad t=0, x > 0 \quad (37)$$

$$(\varphi, G) = (\varphi_L, G_L) = \text{constante} \quad t=0, x < 0 \quad (38)$$

Precisamos buscar um estado intermediário  $(\varphi^*, G^*)$ , o qual seja conectado a  $(\varphi_R, G_R)$  por uma rarefação-1 ou choque-1, e seja conectado a  $(\varphi_L, G_L)$  por uma rarefação-2 ou choque-2.

A figura abaixo ilustra as curvas de choque e de rarefação, fornecendo uma visão qualitativa de como se ligar dois estados.

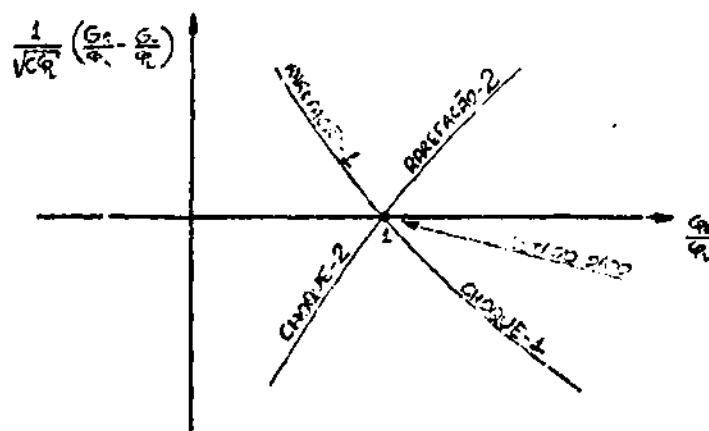


Figura 2 - As Curvas de Choque e de Rarefação.

Podemos construir também a seguinte tabela

$\varphi_L > \varphi^* > \varphi_R$	————→	RAREFAÇÃO-1/CHOQUE-2
$\varphi_L < \varphi^* < \varphi_R$	————→	CHOQUE-1/RAREFAÇÃO-2
$\varphi_L < \varphi^* > \varphi_R$	————→	CHOQUE-1/CHOQUE-2
$\varphi_L > \varphi^* < \varphi_R$	————→	RAREFAÇÃO-1/RAREFAÇÃO-2

Tabela 1 - As Soluções que ocorrem nas diversas situações , devendo ser observado que , no último caso , pode não existir solução .

## 8 - RESULTADOS

Vamos apresentar alguns resultados para o problema inicialmente proposto neste trabalho . Este problema consiste em se resolver (13) , sujeita a (16) e (17) .

Se supusermos que " $\varphi_L > \varphi_R$ " e que " $G_R = G_L = 0$ " , teremos que a solução será rarefação-1/choque-2 e o estado intermediário será determinado pelo sistema abaixo

$$\frac{G^*}{\varphi^*} = \frac{G_L}{\varphi_L} + \sqrt{8c\varphi_L} - \sqrt{8c\varphi^*} \quad (39)$$

$$\frac{G_R}{\varphi_R} = \frac{G^*}{\varphi^*} - (\varphi^* - \varphi_R)\sqrt{c} \sqrt{\frac{1}{\varphi^*} + \frac{1}{\varphi_R}} \quad (40)$$

Uma vez conhecido o tipo de solução podemos escrever as funções " $\varphi$ " e " $G$ " em termos de " $x$ " e " $t$ " , como é mostrado na tabela 2 .

$\varphi(x,t) = \varphi_2$ $G(x,t) = 0$	$\frac{x}{t} < \lambda_1(\varphi_2, 0)$
$\varphi(x,t) = \frac{1}{18} \left( \sqrt{8\varphi_2} - \frac{x}{t\sqrt{c}} \right)^2$ $G(x,t) = \frac{\varphi(x,t)\sqrt{c}}{27} \left( \frac{x}{t\sqrt{c}} + \sqrt{2\varphi_2} \right)$	$\lambda_1(\varphi_2, 0) < \frac{x}{t} < \lambda_1(\varphi_2, S)$
$\varphi(x,t) = \varphi^*$ $G(x,t) = G^*$	$\lambda_1(\varphi^*, G^*) < \frac{x}{t} < S$
$\varphi(x,t) = \varphi_2$ $G(x,t) = 0$	$S < \frac{x}{t}$

Tabela 2 - A Solução no Plano  $(x, t)$ .

Na tabela acima a velocidade do choque-2, "S", é dada por  
 a seguinte equação

$$S = \frac{G_R - G^*}{\varphi_R - \varphi^*} \quad (41)$$

Tomemos agora, como exemplo, a situação particular onde  
 " $\varphi_2 = 0,8$ " e " $\varphi_2 = 0,1$ ". Nesta situação temos que " $\varphi^* = 0,343$ " e  
 " $G^* = 0,30\sqrt{c}$ ".

Alguns resultados gráficos são apresentados nas figuras se-  
 guintes. Na figura 3 temos a solução no plano  $(x, t)$ , na  
 figura 4 as curvas de choque e rarefação no plano  $(\varphi, G)$ , nas  
 figuras 5, 6 e 7 temos " $\varphi$ ", " $G$ " e " $\psi$ " em função de " $x/t\sqrt{c}$ "  
 e na figura 8 a fração de fluido " $\varphi$ ", em função de " $x$ ", pa-  
 ra três instantes de tempo [4].



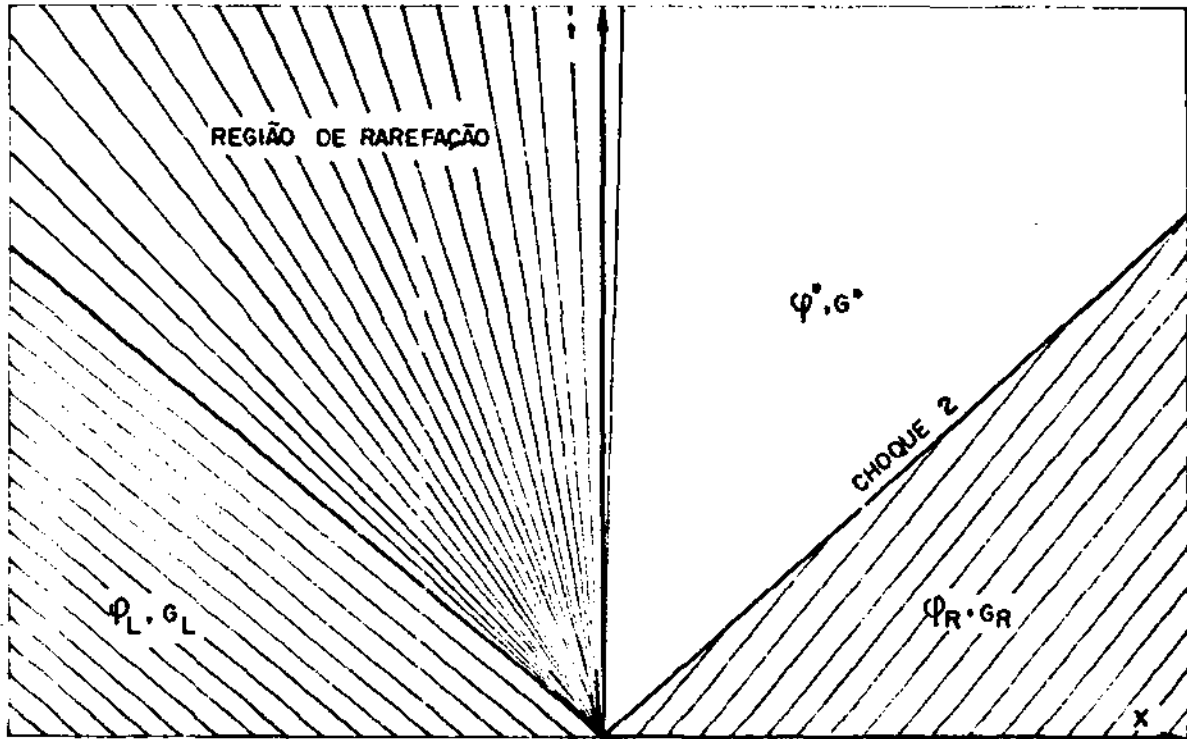


Figura 3 - A Solução no Plano  $(x, t)$  .

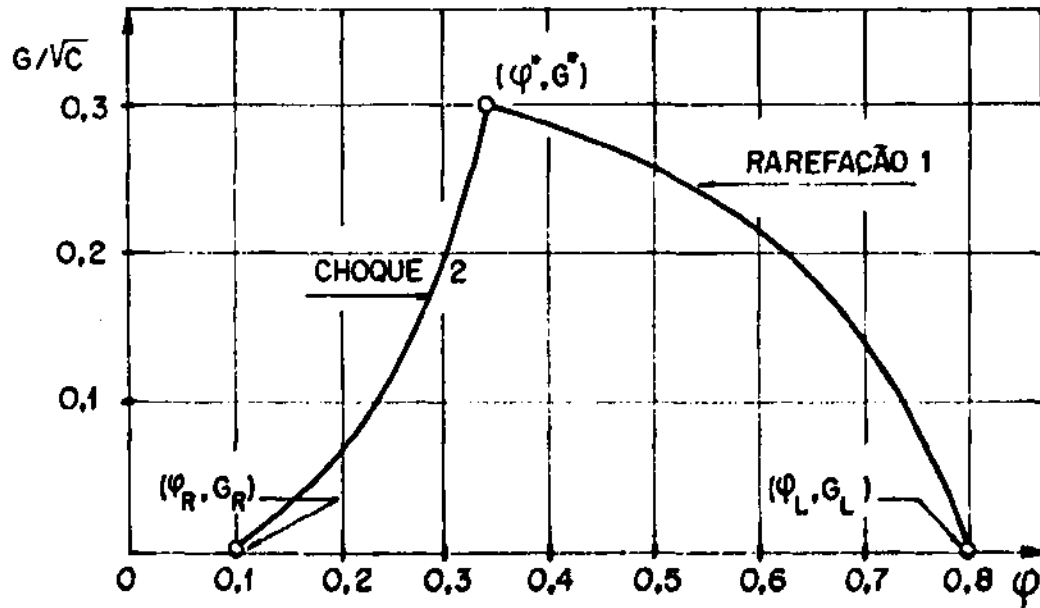


Figura 4 - As Curvas de Choque e Rarefação .

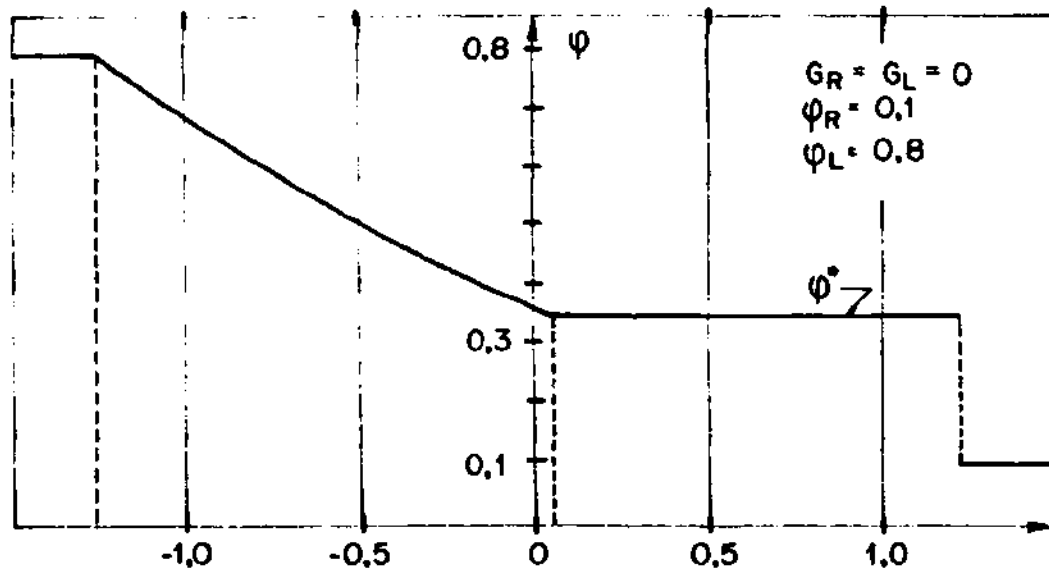


Figure 5 - A Fração de Fluido " $\phi$ " versus " $x/\sqrt{C}$ ".

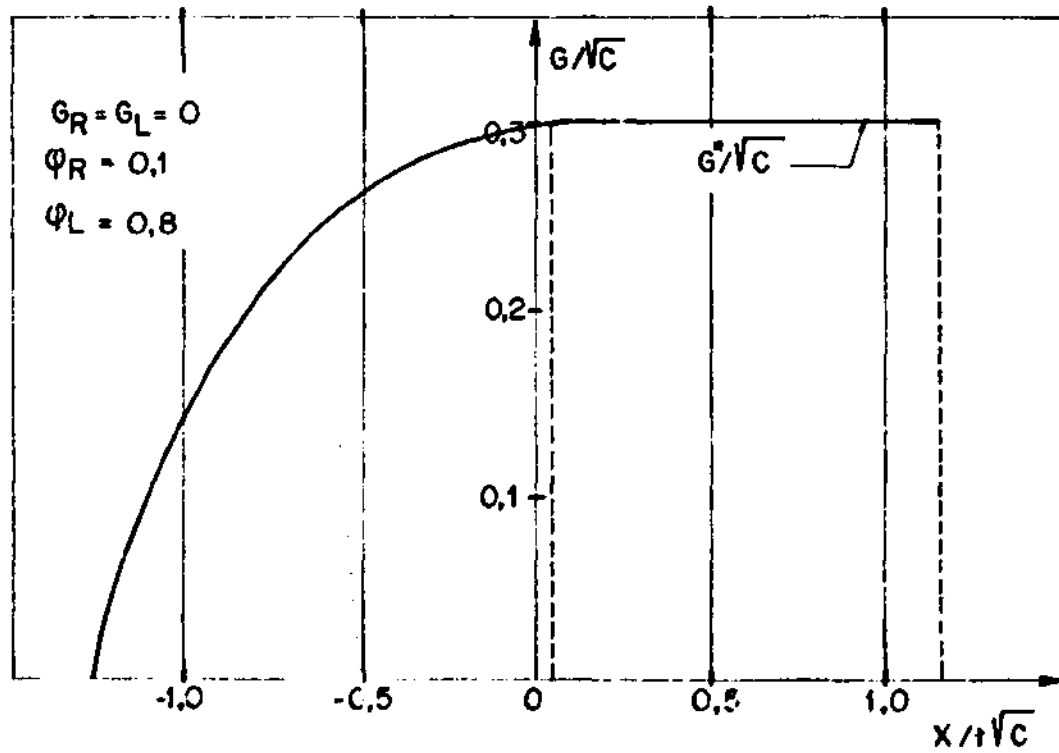


Figure 6 - B Fluxo " $G$ " versus " $x/\sqrt{C}$ ".

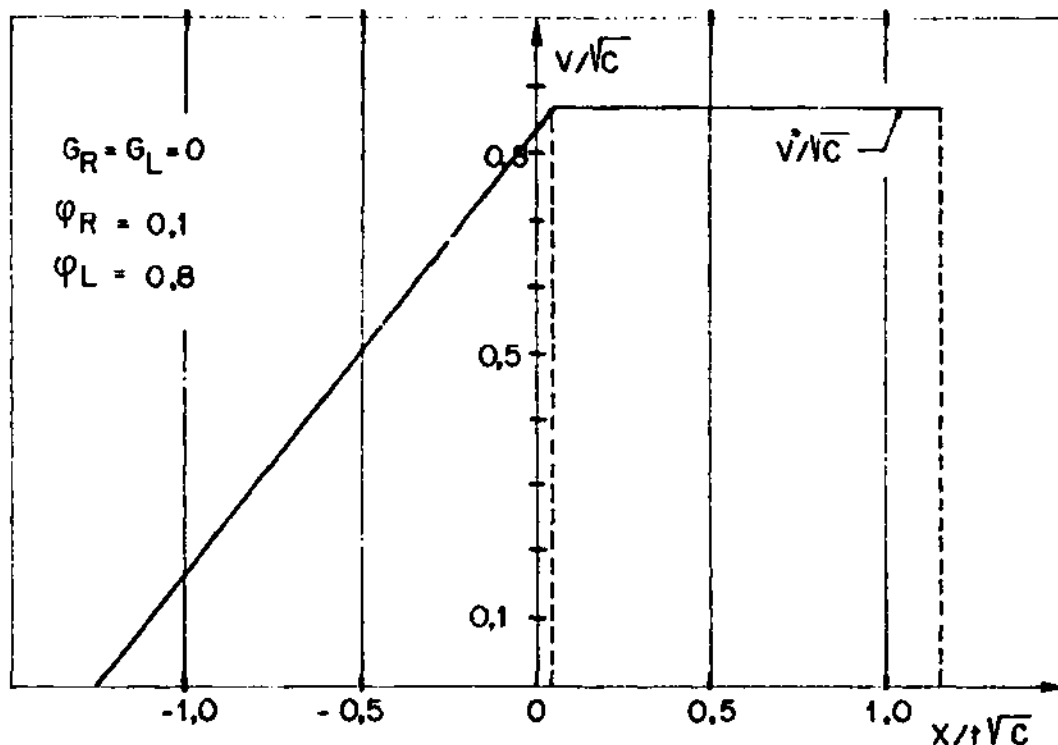


Figura 7 - O Campo de velocidades "v" versus "x/t√c".

## 9 - COMENTÁRIOS FINAIS

O modelo aqui proposto é um passo inicial para a construção de modelos mais gerais que simulem o movimento de fluidos através de meios porosos.

O tipo de problema matemático que surgiu aqui servirá também como base para a obtenção de soluções aproximadas de problemas mais complexos, onde tenhamos sistemas não homogêneos, condições iniciais quaisquer e condições de contorno. Nestes casos conhecendo a solução do problema de Riemann associado, podemos lançar mão do método de Glimm-Cherlin para a obtenção de soluções aproximadas.

Com relação aos resultados obtidos, consideramos o modelo satisfatório, uma vez que foi coerente com a realidade, onde o fluxo de fluido se dá no sentido oposto ao do gradiente de con-

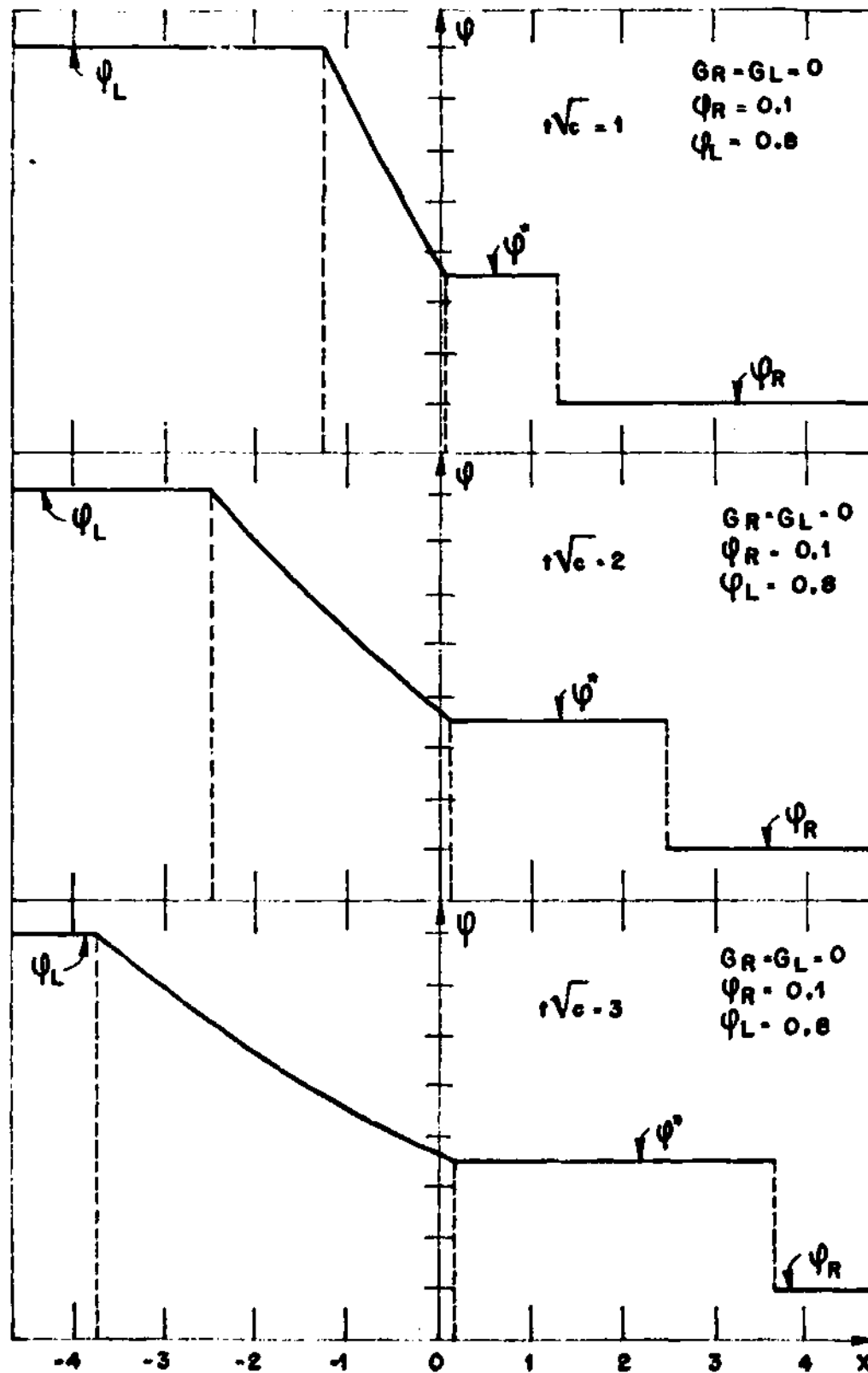


Figura B - A Distribuição de Fluido "φ" em Tres Instantes .

contração ( numa tendência à busca do equilíbrio ) e existe uma frente de " molhamento " que viaja neste mesmo sentido . O equilíbrio nunca é alcançado , já que o meio é infinito , mas pode ser notado que a quantidade de massa entre dois pontos ( um à esquerda e outro à direita da origem ) é a mesma , se estes pontos estiverem em regiões ainda não perturbadas . Este fato é uma forte ferramenta para checagem de resultados .

Deve ser notado que o tipo de fenômeno seria o mesmo se , ao invés de " $q_2 = q_8$ " e " $q_1 = q_1$ " , tivéssemos " $q_2 = q_1$ " e " $q_1 = q_8$ " , já que a orientação de " $x$ " não altera o fenômeno físico . No segundo caso teríamos uma solução do tipo " Choque-1/Rarefação-2.

#### REFERÊNCIAS

- [ 1 ] - Atkin,R.J. and Craine,R.E. - CONTINUUM THEORIES OF MIXTURES ; BASIC THEORY AND HISTORICAL DEVELOPMENT ; Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics vol. XXIX , part 2 , (1976) .
- [ 2 ] - Williams,W.O. - CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR FLOW OF AN INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLUID THROUGH A POROUS MEDIUM ; Quarterly of Applied Mathematics , pp 255-267 , (1978).
- [ 3 ] - Paes-Leme,P.J. - SISTEMAS HIPERBÓLICOS DE CONSERVAÇÃO: UMA ANÁLISE NUMÉRICA DE ONDAS DE CHOQUE ; 4º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional , IM-UFRJ , (1981) .
- [ 4 ] - Gama,R.M.S. - MODELAGEM PARA ESCOAMENTOS EM MEIOS POROSOS ; Tese de Doutorado , Departamento de Engenharia Mecânica PUC-RJ , (1985) .