FR8600690

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE
CENTRE D'ETUDES DE LIMEIL-VALENTON
Département de MATHEMATIQUES APPLIQUEES
Service de Mathématiques et Codes Numériques
B.P. n° 27

94190 VILLENEUVE St GEORGES

EQUATIONS STATIONNAIRES DU FLUX PAIR ET DE LA DIFFUSION

D. VERWAERDE

NOVEMBRE 1985

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE
CENTRE D'ETUDES DE LIMEIL-VALENTON
Département de MATHEMATIQUES APPLIQUEES
Service de Mathématiques et Codes Numériques
B.P. n° 27
94190 VILLENEUVE St GEORGES

EQUATIONS STATIONNAIRES DU FLUX PAIR ET DE LA DIFFUSION

D. VERWAERDE

NOVEMBRE 1985

RESUME

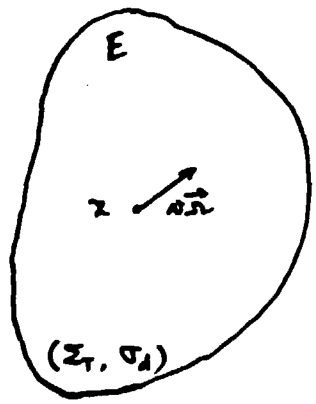
On présente ici quelques propriétés mathématiques de l'équation stationnaire du flux pair dans le formalisme variationnel. Ce cadre théorique permet d'étudier l'existence d'une solution et le comportement asymptotique de celle-ci dans les milieux opaques (i.e. le lien avec l'équation de la diffusion). Il permet enfin de qualifier la vitesse de convergence des procédés itératifs de résolution utilisés en pratique.

EQUATIONS STATIONNAIRES DU FLUX PAIR ET DE LA DIFFUSION

D. VERWAERDE

Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1$, 2 ou 3) et x un point de E. Considérons φ, un flux de particules neutres au point x, avec la vitesse v et la direction $\vec{\Omega}$ ($||\vec{\Omega}|| = 1$). Notons Σ_T la section efficace macroscopique en x (nous supposerons qu'en tout point de E, $\Sigma_T(x) > 0$) et S(x) la source de particules : cette source sera supposée isotrope (indépendante de $\vec{\Omega}$) et pourra être découpée en :

$$S(x) = \sigma_d(x) \,.\, \phi(x) + Q(x),$$



où Q(x) est la source externe,

$\sigma_d(x)$ est la section de passage ($\sigma_d(x) \geq 0$)

et $\phi(x) = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_S \varphi(x, \vec{\Omega})\, d\vec{\Omega}$

(S : sphère unité : domaine de $\vec{\Omega}$).

Notons enfin t le temps.

L'équation du transport des particules neutres s'écrit :

$$(1) \qquad \frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\Omega} \,.\, \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi + \Sigma_T \,.\, \varphi = S$$

Nous supposons ici que nous sommes en régime "asymptotique", ce qui se traduit soit :

- par l'annulation du terme $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ quand $t \longrightarrow +\infty$, en régime sous critique : on notera alors $\Sigma_T : \sigma_T$;

- par le flux $\varphi(x, t, v, \vec{\Omega})$ équivalent à $e^{\alpha t}\, \varphi_0(x, v, \vec{\Omega})$ quand $t \longrightarrow +\infty$: dans ce cas, nous supposerons que $Q(x) \equiv 0$. On divisera les deux membres de l'équation par $e^{\alpha t}$ et on posera $\sigma_T = \Sigma_T + \alpha/v$.

Dans tous les cas, on est ainsi amené à résoudre une équation dite "stationnaire" qui s'écrit :

$$(2) \qquad \vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi + \sigma_T \varphi = \sigma_d\, \phi + Q$$

Afin de préciser les conditions à la limite que nous associons à (2), notons :

. ∂E le bord du domaine spatial E,

. $\vec{n}$ la normale orientée vers l'extérieur en tout point de ∂E,

et partageons ∂E en ∂E_1 et ∂E_2 où l'on impose :

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{. un flux rentrant nul sur } \partial E_1 : \varphi(\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0)|_{\partial E_1} = 0 \; ; \\ \text{. la réflexion sur } \partial E_2 : \varphi(\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0)|_{\partial E_2} = \varphi(\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0)|_{\partial E_2} . \end{cases}$$

A partir des égalités (2) et (3), nous allons ici formuler le problème à l'aide du flux pair, afin de mener une étude formellement semblable à celles menées pour les équations du second ordre elliptiques : nous bâtirons un espace de Hilbert voisin des Sobolev, ce qui nous permettra d'étudier l'existence de solutions et de montrer le lien canonique entre la diffusion et le flux pair.

Ce travail n'aurait pu être réalisé sans les nombreux conseils de Messieurs B. Mercier, P. Lascaux, P. Raviart et L. Tartar. Nous tenons ici à les en remercier vivement.

I - L'EQUATION DU FLUX PAIR

I.1 - Etablissement

Considérons une direction de propagation $\vec{\Omega}$ et définissons la direction opposée $(-\vec{\Omega})$; on définit le flux pair, $\varphi^+(\vec{\Omega})$ par :

$$\varphi^+(\vec{\Omega}) = \frac{1}{2}\left[\varphi(\vec{\Omega}) + \varphi(-\vec{\Omega})\right] = \varphi^+(-\vec{\Omega})$$

et on lui associe le flux impair, que l'on définit par :

$$\varphi^-(\vec{\Omega}) = \frac{1}{2}\left[\varphi(\vec{\Omega}) - \varphi(-\vec{\Omega})\right] = -\varphi^-(-\vec{\Omega}) ,$$

en chaque point $(x, \vec{\Omega})$ de l'espace des phases $E \times S$.

De l'équation (2), on déduit facilement le système d'équations vérifié par φ^+ et φ^- :

$$(4) \quad \begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi^-(\vec{\Omega}) + \sigma_T \cdot \varphi^+(\vec{\Omega}) = S \\ \vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, \varphi^+(\vec{\Omega}) + \sigma_T \cdot \varphi^-(\vec{\Omega}) = 0 \end{cases}$$

Afin de déduire de (3), des conditions à la limite pour (4), définissons :

. $\Gamma_1^- = \{(x, \vec{\Omega}) \in (\partial E_1 \times S) : \vec{\Omega} \cdot \vec{n}(x) < 0\}$;

. $\Gamma_1^+ = \{(x, \vec{\Omega}) \in (\partial E_1 \times S) : \vec{\Omega} \cdot \vec{n}(x) > 0\}$;

. $Z_1 = \{(x, \vec{\Omega}) \in (\partial E_1 \times S) : \vec{\Omega} \cdot \vec{n}(x) = 0\}$;

. $Z_2 = \{(x, \vec{\Omega}) \in (\partial E_2 \times S)\}$.

On déduit alors :

$$(5)\quad \begin{cases} - \text{ sur } \Gamma_1^- : \varphi(\vec{\Omega}) = 0 \text{ et } \varphi(-\vec{\Omega}) \neq 0, \text{ donc :} \\ \qquad \varphi^+(\vec{\Omega}) = \frac{1}{2}\ \varphi(-\vec{\Omega}) = -\varphi^-(\vec{\Omega}). \\ - \text{ sur } \Gamma_1^+ : \varphi(\vec{\Omega}) \neq 0 \text{ et } \varphi(-\vec{\Omega}) = 0, \text{ donc :} \\ \qquad \varphi^+(\vec{\Omega}) = \frac{1}{2}\ \varphi(\vec{\Omega}) = +\varphi^-(\vec{\Omega}). \\ - \text{ sur } Z = Z_1 \cup Z_2, \text{ on a } (\vec{\Omega}\ .\ \vec{n} = 0) \text{ ou } (\varphi^- = 0). \end{cases}$$

Du système (4), on déduit finalement l'équation dite du flux pair et définie par :

Définition 1 : On appelle problème du flux pair le système :

$$(6)\quad \begin{aligned} &(a)\ -\vec{\Omega}\ .\ \overrightarrow{\text{grad}}\left[\frac{1}{\sigma_T}\ \vec{\Omega}\ .\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi^+\right] + \sigma_T\ \varphi^+ = S \quad \text{dans } E \\ &(b)\ \vec{\Omega}\ .\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi^+ - \sigma_T\ .\ \varphi^+ = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^- \\ &(c)\ \vec{\Omega}\ .\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi^+ + \sigma_T\ .\ \varphi^+ = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^+ \\ &(d)\ \vec{\Omega}\ .\ \overrightarrow{\text{grad}}\ \varphi^+ = 0 \quad \text{sur } Z_2 \end{aligned}$$

Pour des solutions classiques, cette dernière équation est bien évidemment équivalente au problème du transport défini par les équations (2) et (3).

I.2 - Formulation variationnelle

Considérons une fonction ψ^+ "suffisamment" régulière et intégrons sur $D = E \times S$ l'équation (6.a) multipliée par ψ^+, il vient :

$$\int_D \left(-\vec{\Omega}\ .\ \vec{\nabla}\left[\frac{1}{\sigma_T}\ \vec{\Omega}.\vec{\nabla}\ \varphi^+\right]\psi^+ + \sigma_T\ \varphi^+\ \psi^+ - S\psi^+\right) dx\ d\Omega = 0$$

Pour simplifier l'écriture revenons à la notation :

$$\varphi^- = -\frac{1}{\sigma_T}\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^+$$

et intéressons nous au terme :

$$C = \int_D \left(-\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\left[\frac{1}{\sigma_T}\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^+\right]\psi^+\right)dx\,d\Omega, \quad \text{soit :}$$

$$C = \int_D +\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^-\,\psi^+\,dx\,d\Omega.$$

En vue d'appliquer la formule de Green, nous allons supposer que :

$$(7) \qquad \int_{\Gamma_1^-\cup\Gamma_1^+} |\vec{\Omega}\cdot\vec{n}|\;|\varphi^-|^2\,d\Gamma < +\infty \text{ et } \int_{\Gamma_1^-\cup\Gamma_1^+} |\vec{\Omega}\cdot\vec{n}|\;|\psi^+|^2\,d\Gamma < +\infty$$

Notons (n_i) $(1 \leq i \leq 3)$ les composantes de la normale $\vec{n}$ et (Ω_i) $(1 \leq i \leq 3)$ celles du vecteur direction $\vec{\Omega}$.

Sous ces hypothèses et notacions, il vient :

$$C = \int_D (\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}\varphi^-)\,\psi^+\,dx\,d\Omega = \sum_{i=1}^{3}\int_{\partial E\times S}\Omega_i\,n_i\,\varphi^-\,\psi^+\,d\Gamma - \int_D \varphi^-\,\Omega_i\,\frac{\partial\psi^+}{\partial x_i}\,dx\,d\Omega$$

Examinons maintenant le terme de bord (C_1) :

$$C_1 = \int_S (\vec{\Omega}\cdot\vec{n})\int_{\partial E}\varphi^-\,\psi^+\,d\Gamma$$

On a partagé ∂E en $\partial E_1 \cup \partial E_2$ et $\partial E \times S$

$$\partial E \times S = \Gamma_1^- \cup \Gamma_1^+ \cup Z_1 \cup Z_2$$

. sur Γ_1^- : $\vec{\Omega}\cdot\vec{n} < 0$ et $\varphi^- = -\varphi^+$: $(\vec{\Omega}\cdot\vec{n})\,\varphi^- = +|\vec{\Omega}\cdot\vec{n}|\,\varphi^+$

. sur Γ_1^+ : $\vec{\Omega}\cdot\vec{n} > 0$ et $\varphi^+ = \varphi^-$: $(\vec{\Omega}\cdot\vec{n})\,\varphi^- = +|\vec{\Omega}\cdot\vec{n}|\,\varphi^+$

. sur Z_1 : $\vec{\Omega}\cdot\vec{n} = 0$ donc $(\vec{\Omega}\cdot\vec{n})\,\varphi^- = 0$

. sur Z_2 : $\varphi^- = 0$ donc $(\vec{\Omega}\cdot\vec{n})\,\varphi^- = 0$

On obtient finalement pour C_1 la valeur :

$$C_1 = \int_{\Gamma_1^- \cup \Gamma_1^+} |\vec{\psi} \,.\, \vec{n}|\, \varphi^+ \,.\, \psi^+ \, d\Gamma \,,$$

La condition (7) entrainant la propriété :

$$\int_{\Gamma_1^- \cup \Gamma_1^+} |\vec{\Omega} \,.\, \vec{n}|\; |\varphi^+|^2 \, d\Gamma < +\infty,$$

Le terme C_1 que nous venons d'écrire a alors un sens. Notons $B = \Gamma_1^- \cup \Gamma_1^+$ et $d\Gamma$ la mesure sur B. Le terme (C) s'écrit alors :

$$(C) = \int_B |\vec{\Omega} \,.\, \vec{n}|\, \varphi^+ \psi^+ \, d\Gamma + \int_D \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \,.\, \vec{\nabla} \varphi^+)(\vec{\Omega} \,.\, \vec{\nabla} \psi^+) \, dx \, d\Omega$$

■

Examinons maintenant les conditions que doivent vérifier φ^+ et ψ^+ pour que les équations écrites ci-dessus existent. Il faut, en plus de (7), que :

- $\displaystyle\int_D |\varphi^+|^2 \, dx \, d\Omega < +\infty$
- $\displaystyle\int_D |\vec{\Omega} \,.\, \vec{\nabla} \varphi^+|^2 \, dx \, d\Omega < +\infty.$

Ceci nous conduit à 1 énoncé suivant :

<u>Définition 2</u> : On appelle espace V, du flux pair, l'espace :

$$V = \{u \in L^2(D) \;:\; (\vec{\Omega} \,.\, \vec{\nabla} u) \in L^2(D),\; |\vec{\Omega} \,.\, \vec{n}|^{1/2}\, u \in L^2(B)\}$$

I.3 - Etude de l'espace V

Par définition, V est un espace vectoriel ; on le munit de la forme suivante, notée $(\, , \,)_V$ et définie par : $\forall (u, v) \in V^2$,

$$(u, v)_V = \int_D (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u)(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} v) \, dx \, d\Omega + \int_D u \, v \, dx \, d\Omega + \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, u \, v \, d\Gamma$$

. Par construction cette forme est bilinéaire et symétrique.

. Elle est également positive et définie, car :

soit $u \in V : (u, u)_V = 0$; alors $(u, u)_{L^2(D)} = 0$

et donc $u = 0$ car $L^2(D)$ est un espace de Hilbert.

V est donc un espace pré-hilbertien ; on note $|| \; ||_V$ la norme associée à $(\, , \,)_V$: $||u||_V = (u, u)_V^{1/2}$.

Montrons que V est complet pour le produit scalaire que nous venons de définir : soit u_n une suite de Cauchy de V :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} / \forall p > N, \forall q > N \quad ||u_p - u_q||_V < \varepsilon$$

donc
$$||u_p - u_q||_{L^2(D)} < \varepsilon$$
$$||\vec{\Omega}.\vec{\nabla} u_p - \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_q||_{L^2(D)} < \varepsilon$$
$$|| \, |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|^{1/2} (u_p - u_q)||_{L^2(B)} < \varepsilon$$

donc la suite u_n converge fortement dans $L^2(D)$ vers u, et la suite $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_n$ converge dans $L^2(D)$ vers v.

a) Montrons que $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u = v$:

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(D)$ on a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$|\langle \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u - v, \varphi \rangle| \leq |\langle \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u - \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_n, \varphi \rangle|$$

$$+ |\langle \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_n - v, \varphi \rangle|$$

Les deux termes majorants tendent vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$, car la dérivation est continue dans $\mathcal{D}'(D)$.

b) Définissons $V_1 = \{u \in L^2(D) \ : \ \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u \in L^2(D)\}$.

On sait que, pour tout compact K inclus dans B, on peut définir une trace γ_K :

$$\gamma_K : V_1 \longrightarrow L^2(K)$$

$$u \longrightarrow \gamma_K u = |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|^{1/2} u$$

qui est une application continue (autrement dit, pour tout élément u de V_1, la trace de u sur B appartient à $L^2_{loc}(B)$).

Pour tout compact $K \subset B$, la suite $\gamma_K u_n$ converge vers $\gamma_K u$ (puisque $u \in V_1$). Mais, la suite $|\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|^{1/2} u_n$ est de Cauchy dans $L^2(B)$; elle est donc majorée :

$$\exists C \in \mathbb{R} : \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \cdot |u_n|^2 \, d\Gamma \leq C \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Quel que soit le compact envisagé, cette majoration reste vraie, donc, à la limite :

$$\int_K |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \cdot |u|^2 \, d\Gamma \leq C \qquad \forall K \subset B$$

Puisque la constante C ne dépend pas de K, on déduit :

$$\int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \cdot |u|^2 \, d\Gamma \leq C$$

donc la trace de u sur B est un élément de $L^2(B)$ ce qui entraîne que $u \in V$.

En conclusion, on a le :

Lemme 1 : L'espace V du flux pair est un espace de Hilbert.

1.4 - Le problème variationnel du flux pair

Nous supposerons que la source $S \in L^2(D)$ et que $\sigma_T \in L^\infty(D)$ et $\sigma_d \in L^\infty(D)$. On impose de plus :

$$\exists \beta > 0 \quad : \quad \beta \leq \sigma_T(x) \leq M = \max_{x \in E} |\sigma_T(x)|$$

$$0 \leq \sigma_d(x) \leq \sigma_T(x)$$

afin que le problème suivant ait un sens

Définition 3 : On appelle problème variationnel du flux pair le problème défini par :

$$. \; L(\psi^+) = \int_D S \, \psi^+ \, dx \, d\Omega$$

(8) $$. \; a(\varphi^+, \psi^+) = \int_D \left[\frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \, \vec{\nabla} \varphi^+)(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\psi^+) + \sigma_T \, \varphi^+ \, \psi^+\right] dx \, d\Omega + \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, \varphi^+ \, \psi^+ \, d\gamma$$

Trouver $\varphi^+ \in V : \forall \psi^+ \in V, \quad a(\varphi^+, \psi^+) = L(\psi^+)$

Etudions l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème. Il reste à prouver que L est une forme linéaire continue et que a est continue et V-coercive.

. Continuité de L :

$$|L(\psi^+)| \leq ||S||_{L^2(D)} \cdot ||\psi^+||_{L^2(D)} \leq ||S||_{L^2(D)} \cdot ||\psi^+||_V$$

. Continuité de a :

$$|a(\varphi^+, \psi^+)| \leq \max(\frac{1}{\beta}, M) \cdot |(\varphi^+, \psi^+)_V| \leq \max(\frac{1}{\beta}, M) \; ||\varphi^+||_V \cdot ||\psi^+||_V$$

. a est une forme V - coercive :

$$|a(\varphi^+, \varphi^+)| \geq \min(\frac{1}{M}, \beta) \; (\varphi^+, \varphi^+)_V = \min(\frac{1}{M}, \beta) \; ||\varphi^+||_V^2$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, on a le :

> <u>Lemme 2</u> : Le problème variationnel du flux pair admet une solution unique pour $S \in L^2(D)$.

I.5 - <u>Réciproque du problème variationnel</u>

Notons que $\mathcal{D}(D) \subset V$. Prenons $\psi^+ \in \mathcal{D}(D)$ et interprétons (8) au sens des distributions :

$$< \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi^- + \sigma_T \varphi^+ - S, \psi^+ > = 0$$

donc, $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi^- + \sigma_T \varphi^+ = S,$ dans $\mathcal{D}'(D)$.

Comme φ^+ et S sont des éléments de $L^2(D)$, on en déduit que $\vec{\Omega} . \vec{\nabla}\varphi^- \in L^2(D)$, donc que :

$$\vec{\Omega} \quad \vec{\nabla}\varphi^- + \sigma_T \varphi^+ = S \quad \text{a lieu dans } L^2(D).$$

Comme $\varphi^+ \in V$, $\int_B |\vec{\Omega} . \vec{n}| . |\varphi^+|^2 \, d\Gamma < + \infty$, on peut appliquer la formule de Green :

$$\int_D (\vec{\Omega} . \vec{\nabla}\varphi^-) . \psi^+ \, dx \, d\Omega = \int_{\partial E x S} (\vec{\Omega} . \vec{n}) \varphi^- \psi^+ \, d\Gamma - \int_D \varphi^- \vec{\Omega} . \vec{\nabla} \psi^+ \, dx \, d\Omega$$

(Pour qu'elle soit justifiée, il faut supposer que :

$$\int_{\partial E x S} |\vec{\Omega} . \vec{n}| \; |\varphi^-|^2 \, d\Gamma < + \infty, \quad \text{ce qu'on fait)}$$

D'où, par application de cette formule et en tenant compte de l'équation (6) à l'intérieur de E, il vient :

$$- \int_B |\vec{\Omega} . \vec{n}| \varphi^+ \psi^+ \, d\Gamma + \int_{\partial E x S} (\vec{\Omega} . \vec{n}) \varphi^- \psi^+ \, d\Gamma = 0$$

d'où les conditions :

sur Γ_1^- : $|\vec{\Omega} . \vec{n}| = - (\vec{\Omega} . \vec{n})$ et $\varphi^+ = - \varphi^-$

sur Γ_1^+ : $|\vec{\Omega} . \vec{n}| = (\vec{\Omega} . \vec{n})$ et $\varphi^+ = \varphi^-$

sur Z_1 : $\vec{\Omega} . \vec{n} = 0$

sur Z_2 : $(\vec{\Omega} . \vec{n}) \varphi^- = 0$.

<u>Proposition 1</u> : Sous l'hypothèse que $(\varphi^-) . |\vec{\Omega} . \vec{n}|^{1/2}$ soit sommable sur $\partial E \times S$, il y a équivalence entre le problème du flux pair et sa formulation variationnelle.

<u>Remarque 1</u> : Sommabilité en $\vec{\Omega}$ de la solution φ^+ :

Puisque la fonction φ^+ est un élément de $L^2(D)$, on a

$$\int_E dx \int_S |\varphi^+|^2 \, d\Omega < +\infty.$$

Le théorème de Fubini affirme que, pour x fixé dans E, l'application : $\vec{\Omega} \in S \longrightarrow \varphi^+(x, \vec{\Omega}) \in L^2(S)$.

On déduit que la fonction $\phi^+ = \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi^+ \cdot d\Omega$ existe en tout point x et est de carré sommable sur E :

$$. \int_S |\varphi^+| \, d\Omega \leq \left(\int_S 1 \, d\Omega\right)^{1/2} \cdot \left(\int_S |\varphi^+|^2 \, d\Omega\right)^{1/2} < +\infty \; ;$$

$$. \int_E |\phi^+|^2 \, dx = \frac{1}{16\pi^2} \int_E \left(\int_S |\varphi^+| \, d\Omega\right)^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{4\pi} \int_E \int_S |\varphi^+|^2 \, d\Omega \, dx = \frac{1}{4\pi} \, ||\varphi^+||^2_{L^2(D)}$$

■

I.6 - <u>Etude du problème général du flux pair</u>

Jusqu'à présent, on a toujours supposé que la source S, élément de $L^2(D)$ était donnée fixée et isotrope, indépendante de φ^+ : on résolvait, pour S donné le problème : trouver $\varphi^+ \in V$, tel que pour tout $\psi^+ \in V$:

$$a(\varphi^+, \psi^+) = L(\psi^+).$$

En fait, dans le cas général, S est elle-même une fonction de φ^+. On a :

$$S(x) = \frac{\sigma_d}{4\pi} \int_S \varphi^+(x, \vec{\Omega}) \, d\Omega + Q(x)$$

avec Q, source hétérogène indépendante de φ^+.

Notons donc $\phi^+(x) = \frac{1}{4\pi}\int_S \varphi^+(x, \vec{\Omega})\, d\Omega$. On s'intéresse au problème :

$$(9) \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \varphi^+ \in V, \text{ tel que pour tout } \psi^+ \in V : \\ a(\varphi^+, \psi^+) = (\sigma_d \cdot \phi^+, \psi^+)_{L^2(D)} + (Q, \psi^+)_{L^2(D)} \end{cases}$$

L'étude de ce nouveau problème conduit à introduire une nouvelle forme bilinéaire a' sur V^2 :

$$(\varphi^+, \psi^+) \in V^2 \longrightarrow a'(\varphi^+, \psi^+) = a(\varphi^+, \psi^+) - (\sigma_d\, \phi^+, \psi^+)_{L^2(D)}$$

La forme bilinéaire a' est symétrique, car si on note :

$\bar{\psi}^+ = \frac{1}{4\pi}\int_S \psi^+(x, \vec{\Omega})\, d\Omega$, on a :

$$(\sigma_d\, \phi^+, \psi^+)_{L^2(D)} = (\sigma_d\, \phi^+, \bar{\psi}^+)_{L^2(D)}$$

Elle est bien sûr continue, car :

$$\begin{aligned} |a'(\varphi^+, \psi^+)| &\leq |a(\varphi^+, \psi^+)| + |(\sigma_d\, \phi^+, \psi^+)|_{L^2(D)} \\ &\leq M \cdot ||\varphi^+||_V \cdot ||\psi^+||_V + \sigma_d\, ||\varphi^+||_{L^2(D)} \cdot ||\psi^+||_{L^2(D)} \\ &\leq (M + \sigma_d)\, ||\varphi^+||_V \cdot ||\psi^+||_V \end{aligned}$$

Elle est enfin V-coercive, s'il existe une constante $\delta > 0$, telle que :

$$(10) \qquad \forall x \in E, \qquad \sigma_T(x) - \sigma_d(x) \geq \delta$$

En effet, par application de la remarque 1, on a, pour tout $\varphi^+ \in V$:

$$\begin{aligned}
a'(\varphi^+, \varphi^+) &\geq a(\varphi^+, \varphi^+) - (\sigma_d \varphi^+, \varphi^+)_{L^2(D)} \\
&\geq ((\sigma_T - \sigma_d) \varphi^+, \varphi^+)_{L^2(D)} + (|\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \varphi^+, \varphi^+)_{L^2(B)} \\
&\quad + (\frac{1}{\sigma_T} \cdot \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi^+, \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi^+)_{L^2(D)} \\
&\geq \min (1, \delta, \frac{1}{M}) \cdot ||\varphi^+||_V^2
\end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de Lax-Milgram, on a la :

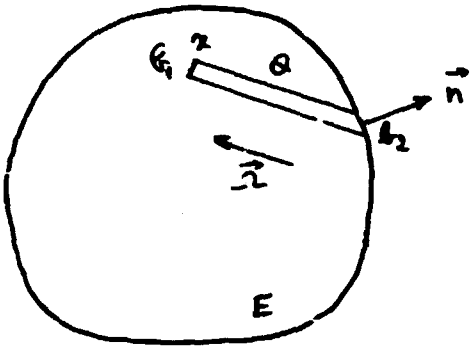
> <u>Proposition 2</u> : Le problème général du flux pair :
>
> Trouver $\varphi^+ \in V$, tel que pour tout $\psi^+ \in V$:
>
> $$a(\varphi^+, \psi^+) = (\sigma_d \phi^+, \psi^+)_{L^2(D)} + (Q, \psi^+)_{L^2(D)}$$
>
> admet une solution unique.

I.7 - <u>Amélioration de la condition (10) lorsque $\partial E_2 = \phi$</u>

Dans le cas où ∂E_2 est vide, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de condition de réflexion, on peut améliorer la condition (10) définie précédemment. On a en effet dans ce cas l'inégalité du type Poincaré suivante :

> <u>Théorème 1</u> : <u>Inégalité fondamentale</u>
>
> On suppose que le domaine E est borné et convexe et qu'il est entouré de vide (c'est-à-dire que $\partial E_2 = \phi$). Alors il existe une constante C, strictement positive et ne dépendant que de la géométrie du problème telle pour tout élément u de V.
>
> (11) $$\int_D \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla u})^2 \, dx \, d\Omega + \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, u^2 \, d\gamma \, d\Omega \geq C \cdot \int_D u^2 \, dx \, d\Omega$$

Puisque $\mathcal{D}(\bar{D})$ est inclus dans V, on va faire la démonstration pour $u \in \mathcal{D}(\bar{D})$; par adhérence, on la déduira sur V.



Soient x un point de E et $\vec{\Omega}$ une direction. Considérons le domaine élémentaire Q, de côtés parallèles à $\vec{\Omega}$ et de bases b_1 et b_2. Les normales extérieures à Q en b_1 et b_2 sont respectivement $\vec{\Omega}$ et $\vec{n}$.

Prenons maintenant $u \in \mathcal{D}(\bar{D})$; on remarque que $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u = \operatorname{div}(\vec{\Omega} \cdot u)$. Par application du théorème d'Ostrogradski, on a, en notant $\vec{m}$ la normale extérieure à Q sur tout ∂Q :

$$\int_Q \operatorname{div}(\vec{\Omega}\, u)\, dx = \int_{\partial Q} \vec{\Omega} \cdot \vec{m}\, u\, ds$$

or : - $\vec{\Omega} \cdot \vec{m} = 0$, sur tout ∂Q, sauf sur b_1 et b_2

- sur b_1 : $\vec{\Omega} \cdot \vec{m} = 1$ et
- sur b_2 : $\vec{\Omega} \cdot \vec{m} = \vec{\Omega} \cdot \vec{n}$

Soient ds_1 et ds_2 les aires de b_1 et b_2 (on a : $ds_1 = |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|\, ds_2$).

Il vient : $\displaystyle\int_Q (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u)\, dx = u(x) \cdot ds_1 + u(b) \cdot (\vec{\Omega} \cdot \vec{n})\, ds_2$

soit encore :

$$|u(b)|\, |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|\, ds_2 + \int_Q |\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u|\, dx \geq |u(x)|\, ds_1.$$

Par application de l'inégalité de Schwartz, il vient :

$$|u(b)|\, |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|\, ds_2 + \left[\int_Q \sigma_T\, dx\right]^{1/2} \cdot \left[\int_Q \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u)^2\, dx\right]^{1/2}$$

$$\geq |u(x)|\, ds_1$$

D'où, après élévation au carré :

$$2|u(b)|^2 \; |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \; ds_2 \cdot ds_1 + 2 \int_Q \sigma_T \, dx \cdot \int_Q \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u)^2 \, dx$$
$$\geq |u(x)|^2 \, (ds_1)^2$$

Soit $\delta(x)$ le nombre de libres parcours que contient le segment passant par x, de direction $\vec{\Omega}$ et d'extrémités les points de ∂E. Alors

$$\int_Q \sigma_T \, dx \leq ds_1 \cdot \delta(x)$$

On a alors :

$$2|u(b)|^2 \; |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \; ds_2 + 2 \, \delta(x) \int_Q \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u)^2 \, dx \geq |u(x)|^2 \, ds_1$$

On note encore $\bar{Q}$ la prolongation du domaine Q, dans la direction $\vec{\Omega}$, passant en x et de base b_1, et d'extrémité sur ∂E. Soit d le diamètre de E. On a alors, par intégration sur $\bar{Q}$ et majorations :

$$2d \; |u(b)|^2 \; |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \; ds_2 + 2d \cdot \delta(x) \int_{\bar{Q}} \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u)^2 \, dx \geq \int_{\bar{Q}} |u(x)|^2 \, dx$$

Comme le domaine E est convexe, il peut facilement être paramétré par des coordonnées (α, β, γ) sur les vecteurs de base $(\vec{\Omega}, \vec{t}, \vec{w})$. Le couple (β, γ) décrit un ouvert borné et convexe O de $\mathbb{R}^2$. On peut alors intégrer l'inégalité précédente par cet ouvert O. Il vient :

$$2d \int_{\partial E} |u(b)|^2 \; |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \; d\gamma + 2d \, \delta \int_E \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u)^2 \, dx$$
$$\geq \int_E |u(x)|^2 \, dx$$

Soit, en choisissant pour C : $1/\max(2d, 2d\delta)$, (avec $\delta = \max \delta(x)$) le résultat.

<u>Remarque 2</u>

On peut lever partiellement la condition $\partial E_2 = \phi$, à condition de restreindre l'espace du flux pair V à l'espace W des fonctions localement paires en $\vec{\Omega}$:

$$W = \{u \in L^2(D) : (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u) \in L^2(D), |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| u \in L^2(B)$$

$$\text{et} \quad \forall x \in E, \quad u(x, \vec{\Omega}) = u(x, -\vec{\Omega})\}$$

En fait, le flux pair est par définition un élément de W, qui est évidemment un espace de Hilbert. Soit en effet (u_n) une suite de Cauchy de W. En tant que suite de V, elle converge vers $u \in V$; montrons que $u \in W$: soit $n \in \mathbb{N}$, on a (u_n paire) :

$$||u(. , \vec{\Omega}) - u(., -\vec{\Omega})||_V \leq ||u(., \vec{\Omega}) - u_n(., \vec{\Omega})||_V +$$
$$||u_n(., -\vec{\Omega}) - u(., -\vec{\Omega})||_V$$

Par définition de u, le second membre peut être rendu aussi petit que l'on veut. Donc $u \in W$.

<u>Définition 4</u> : <u>Propriété de Poincaré</u> : On dit que le domaine E possède la propriété de Poincaré, si, pour tout point $x \in E$ et toute direction $\vec{\Omega}$ de S , la droite passant par x et dirigée par $\vec{\Omega}$ coupe la partie ∂E_1 de la frontière de E où le flux rentrant est nul.

Pour les fonctions de W, on peut dans la démonstration du théorème 1 relaxer la condition $\partial E_2 = \phi$ en supposant simplement que le domaine E possède la propriété de Poincaré : pour tout point x de E et toute direction $\vec{\Omega}$, on construira un domaine élémentaire Q soit dans le sens $(-\vec{\Omega})$ (comme c'est le cas pour les fonctions de V), soit dans le sens $(+\vec{\Omega})$ (et on s'intéressera alors à la fonction $u(x, -\vec{\Omega})$) de manière à ce que l'intersection de Q avec ∂E soit dans la partie ∂E_1.

On a donc le :

> **Corollaire 1 :**
>
> On suppose que le domaine borné et convexe E possède la propriété de Poincaré. Alors il existe une constante C, strictement positive et ne dépendant que de la géométrie du problème telle que, pour tout élément W la propriété (11) soit vérifiée.

Remarque 3 a) Existence de solution bornée lorsque $\sigma_d \to \sigma_T$

. Dans cette remarque, on va supposer que E est borné et convexe. Le fait que $\sigma_d \to \sigma_T$ met en défaut l'hypothèse (10) que nous avions faite précédemment, puisque $\delta \to 0$. Si on restreint le problème général du flux pair à l'espace W, la solution du problème du flux pair restera bornée quand $\sigma_d \to \sigma_T$, aussitôt que E vérifie la propriété de Poincaré, qui entraîne la V-coercivité de la forme a', même lorsque δ s'annule :

pour tout $\varphi^+ \in W$, $\exists C > 0$ indépendante de φ^+ :

$$\int_D \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi^+)^2 \, dx \, d\Omega + \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, (\varphi^+)^2 \, d\gamma \, d\Omega \geq C. \int_D (\varphi^+)^2 \, dx \, d\Omega$$

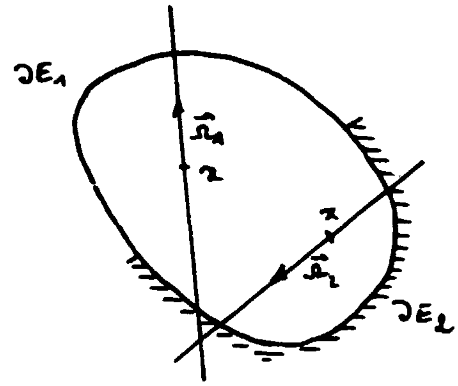
et donc (on a toujours $\sigma_T - \sigma_d \geq 0$) :

$$\begin{aligned} a'(\varphi^+, \varphi^+) &= a(\varphi^+, \varphi^+) - \sigma_d(\varphi^+, \varphi^+)_{L^2(D)} \\ &\geq \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi^+)^2_{L^2(D)} + \frac{1}{2} \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, \varphi^{+2} \, d\gamma \, d\Omega + \frac{C}{2} \int_D (\varphi^+)^2 \, dx \\ &\geq \frac{1}{2} \min \left(1, C, \frac{1}{M}\right) ||\varphi^+||^2_V \end{aligned}$$

Donc le théorème de Lax-Milgram est utilisable pour tout $\delta \geq 0$ et la solution $\varphi^+(\delta)$ reste bornée quand $\delta \to 0$, puisque $a'(\varphi^+, \varphi^+) \leq ||Q||_{L^2(D)} \cdot ||\varphi^+||_V$.

Remarque 3 b) La propriété de Poincaré est nécessaire et suffisante pour que l'espace W vérifie l'inégalité de Poincaré.

Preuve :



Supposons que E ne vérifie pas la propriété de Poincaré ; on va montrer qu'on peut construire une fonction f de W, telle que :

. $\displaystyle\int_D f^2 \, dx \, d\Omega = 1$;

. $\displaystyle\int_D (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} f)^2 \, dx \, d\Omega + \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, f^2 \, d\gamma \, d\Omega = 0.$

Soit $\bar{E}$, l'ensemble des points de E où la propriété n'est pas vérifiée. Alors mes$(\bar{E}) \neq 0$ (sinon la propriété serait vérifiée presque partout).

Soit $x \in \bar{E}$; soit $S(x)=\{\vec{\Omega} \in S$: la droite $D(x, \vec{\Omega}) \cap \partial E_1 = \phi\}$.

On a bien sûr, $\forall x \in \bar{E}$, mes$(S(x)) \neq 0$, sinon, x ne serait pas un élément de $\bar{E}$.

On construit f comme suit :

. $(x, \vec{\Omega}) \in E \times S$: $f(x, \vec{\Omega}) = 0$ si $D(x, \vec{\Omega}) \cap \partial E_1 \neq \phi$

. Soit $M = \displaystyle\int_{\bar{E}} dx \int_{S(x)} d\Omega \neq 0$ si $D(x, \vec{\Omega}) \cap \partial E_1 = \phi$

on pose $f(x, \vec{\Omega}) = M^{-1/2}$

alors :

. α) $\displaystyle\int_D f^2 \, dx \, d\Omega = \int_{\bar{E}} M^{-1} \, dx \int_{S(x)} d\Omega = 1$;

. β) Soit $(x, \vec{\Omega}) \in D$: $D(x, \vec{\Omega}) \cap \partial E_1 = \phi$; alors $\forall y \in E$,
$y \in D(x, \vec{\Omega}) \Rightarrow D(y, \vec{\Omega}) \cap \partial E_1 = \phi$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que λ est assez petite pour que $(x + \lambda\vec{\Omega}) \in E$; alors :

$$f(x, \vec{\Omega}) = f(x + \lambda\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = M^{-1/2} ;$$

et donc : $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} f = \lim\limits_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}\left[f(x + \lambda\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) - f(x, \vec{\Omega})\right] = 0.$

. γ) Soit $(x, \vec{\Omega}) \in D : D(x, \vec{\Omega}) \cap \partial E_1 \neq \phi$; alors :

$$f(x, \vec{\Omega}) = f(x + \lambda\vec{\Omega}, \vec{\Omega}) = 0,$$

et donc : $\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} f = 0$

<u>Conclusion</u> : $\int_D (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} f)^2 \, dx \, d\Omega = 0$

. δ) Enfin $\int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, f^2 \, dx \, d\Omega = 0$, car $B = \partial E_1 \times S_2$

et $\quad \forall x \in \partial E_1, \; f(x, \vec{\Omega}) = 0 \qquad (D(x, \vec{\Omega}) \cap \partial E_1 \neq \phi)$

ce qui achève la démonstration.

I.8 - <u>Positivité de la solution de l'équation du flux pair</u>

Comme pour l'équation du transport, l'équation du flux pair admet une solution positive (presque partout) sitôt que la source Q est positive (presque partout).

Supposant tout d'abord $\sigma_d \equiv 0$, on a le :

> <u>Lemme 3</u> : On reprend le problème du flux pair, posé par la définition 1 et on suppose que $S \geq 0$ pour tout x de E ; alors, la solution φ^+ est positive.

On a montré, à la définition 3, que le problème du flux pair pouvait être mis sous la forme variationnelle.

$\varphi^+ \in V$ est solution de :

$$a(\varphi^+, v) = (S, v)_{L^2(D)} \qquad \text{pour tout } v \in V$$

Définissons la partie positive $(\varphi^+)^+$ et négative $(\varphi^+)^-$ du flux pair par :

$$\forall x \in E, \forall \vec{\Omega} \in S \quad : \quad . \ (\varphi^+)^+ (x, \vec{\Omega}) = \max(0, \varphi^+(x, \vec{\Omega})),$$
$$. \ (\varphi^+)^- (x, \vec{\Omega}) = \max(0, -\varphi^+(x, \vec{\Omega})),$$

de sorte que $\varphi^+(x, \vec{\Omega}) = (\varphi^+)^+ (x, \vec{\Omega}) - (\varphi^+)^- (x, \vec{\Omega})$.

Les fonctions $(\varphi^+)^+$ et $(\varphi^+)^-$ sont des éléments de V et sont, par construction, positifs.

Par construction on a :

$. \ |(\varphi^+)^+ (x, \vec{\Omega})| \leq |\varphi^+(x, \vec{\Omega})|$ p.p. (resp. $(\varphi^+)^-$)

$. \ |\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}(\varphi^+)^+| \leq |\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi^+|$ p.p. (resp. $(\varphi^+)^-$)

$. \ |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|\,|(\varphi^+)^+| \leq |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|\,|\varphi^+|$ p.p. (resp. $(\varphi^+)^-$)

Notons encore que :

$$(\varphi^+)^+ \cdot (\varphi^+)^- \equiv 0 \quad \text{et que} \quad (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}(\varphi^+)^+)(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}(\varphi^+)^-) \equiv 0.$$

Dans la formulation variationnelle, faisons :

$. \ \varphi^+ = (\varphi^+)^+ - (\varphi^+)^-$

$. \ v = (\varphi^+)^- \geq 0$

Alors :

$$a((\varphi^+)^+, (\varphi^+)^-) - a((\varphi^+)^-, (\varphi^+)^-) = (S, (\varphi^+)^-)_{L^2(D)} \geq 0$$

D'après ce qui précède : $a((\varphi^+)^+, (\varphi^+)^-) \equiv 0$ d'où :

$$a((\varphi^+)^-, (\varphi^+)^-) \leq 0 \quad \text{d'où} \quad (\varphi^+)^- = 0 \quad \text{p.p.}$$

ce qui démontre le lemme 3. ∎

On déduit alors le :

> <u>Théorème 2</u> : On reprend le problème du flux pair dont on a montré l'existence d'une solution à la proposition 2. On suppose que le terme de source externe Q est positif. Alors la solution φ^+ est positive.

On procède comme précédemment, mais on prend, pour forme bilinéaire : $a(u, v) - (\sigma_d u, v)_{L^2(D)}$; alors, pour $u = (\varphi^+)^+ - (\varphi^+)^-$ et $v = (\varphi^+)^-$, on a encore :

$$\left[a((\varphi^+)^+, (\varphi^+)^-) - (\sigma_d(\phi^+)^+, (\varphi^+)^-)_{L^2(D)}\right]$$
$$- \left[a((\varphi^+)^-, (\varphi^+)^-) - (\sigma_d(\phi^+)^-, (\varphi^+)^-)_{L^2(D)}\right] \geq 0$$

(puisque $(Q, (\varphi^+)^-)_{L^2(D)} \geq 0$).

Cela entraîne encore que :

$$a((\varphi^+)^-, (\varphi^+)^-) - (\sigma_d(\phi^+)^-, (\varphi^+)^-)_{L^2(D)} \leq 0,$$

et donc, sous les hypothèses de la proposition 2, on a :

$$(\varphi^+)^- \equiv 0 \quad \text{p.p.}$$

II - EQUATION DE LA DIFFUSION

L'équation de la diffusion peut être obtenue à partir de l'équation du transport en supposant qu'en tout point x de E, le flux $\varphi(x, \vec{\Omega})$ est une fonction linéaire des coordonnées angulaires :

$$\varphi(x, \vec{\Omega}) = \phi(x) + \vec{\Omega} \cdot \vec{J}(x).$$

Sous cette hypothèse, les flux pairs et impairs s'écrivent :

$$\varphi^+(x, \vec{\Omega}) = \phi(x)$$
$$\varphi^-(x, \vec{\Omega}) = \vec{\Omega} \cdot \vec{J}(x)$$

II.1 - Problème variationnel

Considérons donc le problème (8) et supposons que le flux pair est indépendant de $\vec{\Omega}$. Sous cette hypothèse, on a :

$$\begin{aligned} . \ a(\varphi^+, \psi^+) &= \int_D \left(\frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi^+)(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\psi^+) + \sigma_T \varphi^+ \psi^+\right) dx\, d\Omega \\ &\qquad + \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \varphi^+ \psi^+ \, d\Gamma \\ &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \int_S \Omega_i \Omega_j \, d\Omega \int_E \frac{1}{\sigma_T} \frac{\partial\varphi^+}{\partial x_i} \frac{\partial\psi^+}{\partial x_j} dx \\ &\quad + \int_S 1 \, d\Omega \int_E \sigma_T \varphi^+ \psi^+ dx + \int_S |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, d\Omega \int_{\partial E_1} \varphi^+ \psi^+ d\gamma \end{aligned}$$

or : $\displaystyle\int_S \Omega_i \Omega_j \, d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}$ et $\displaystyle\int_S |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, d\Omega = \frac{4\pi}{2}$

$$. \ L(\psi^+) = \int_D S\psi^+ \, dx\, d\Omega = 4\pi \int_E S\psi^+ \, dx$$

d'où l'écriture de l'équation du flux pair sous l'hypothès... fusion :

$$(12)\quad \begin{cases} \mathcal{V} = \{\varphi^+ \in V,\ \varphi^+ \text{ indépendant de } \vec{\Omega}\} \\ a(\varphi^+, \psi^+) = \int_E \left(\frac{1}{3\sigma_T} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_i} \frac{\partial \psi^+}{\partial x_i} + \sigma_T \varphi^+ \psi^+ \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\partial E_1} \varphi^+ \psi^+ d\gamma \\ L(\psi^+) = \int_E S\psi^+ dx \end{cases}$$

II.2 - <u>Réciproque</u>

Etudions de quelle équation le problème précédent est la formulation variationnelle.

Prenons ψ^+ dans $\mathcal{D}(E)$. Il vient :

$$\sum_{i=1}^{3} < \frac{1}{3\sigma_T} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_i}, \frac{\partial \psi^+}{\partial x_i} > + < \sigma_T \varphi^+, \psi^+ > = < S, \psi^+ >$$

$$-\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} < \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\sigma_T} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_i}\right), \psi^+ > + < \sigma_T \varphi^+, \psi^+ > = < S, \psi^+ >$$

d'où l'équation, au sens des distributions :

$$-\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\sigma_T} \cdot \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_i}\right) + \sigma_T \varphi^+ = S \qquad \text{dans E}$$

Comme φ^+ et S sont des éléments de $L^2(D)$, $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\sigma_T} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_i}\right)$ est encore un élément de $L^2(D)$. On peut donc considérer que l'équation précédente est dans $L^2(D)$.

Cherchons quelle condition à la limite vérifie φ^+ prenons ψ^+ dans $\mathcal{V}$ et utilisons la formule de Green, il vient :

$$\int_{\partial E} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3\sigma_T} n_i \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_i} \psi^+ d\gamma + \int_{\partial E_1} \frac{1}{2} \cdot \varphi^+ \psi^+ d\gamma = 0$$

Soit, en définissant $\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i=1}^{3} n_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ (dérivation suivant la normale) :

. $\frac{1}{3\sigma_T} \cdot \frac{\partial \varphi^+}{\partial n} + \frac{1}{2} \varphi^+ = 0$ sur ∂E_1 (condition de Marshak)

. $\frac{\partial \varphi^+}{\partial n} = 0$ sur ∂E_2.

D'où la :

Proposition 3 : Le problème variationnel du flux pair projeté sur l'espace des fonctions constantes en angle n'est autre que la formulation variationnelle de l'équation de la diffusion couplée à une condition à la limite de Marshak.

II.3 - Identification de $\mathcal{V}$

Notons d'abord que $\varphi^+ \in L^2(D)$ est indépendante de $\vec{\Omega}$, donc $\varphi^+ \in L^2(E)$.

D'autre part, $(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi^+) \in L^2(D)$; puisque $\vec{\nabla}\varphi^+$ ne dépend pas de $\vec{\Omega}$, c'est que $\frac{\partial \varphi^+}{\partial x_i} \in L^2(E)$ $(i = 1, 2, 3)$, et donc $\varphi^+ \in H^1(E)$.

Du fait de la propriété des éléments de $H^1(E)$ de sommabilité sur ∂E ("théorème de trace"), la condition de sommabilité sur Γ imposée dans la définition de V est vérifiée, donc $\mathcal{V}$ est identifiable à $H^1(E)$.

Proposition 4 : La formulation variationnelle de l'équation de la diffusion s'écrit :

Trouver $\varphi^+ \in H^1(E)$: $\forall \psi^+ \in H^1(E)$: $a(\varphi^+, \psi^+) = L(\psi^+)$

. $a(\varphi^+, \psi^+) = \int_E \left(\frac{1}{3\sigma_T} \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_i} \frac{\partial \psi^+}{\partial x_i} + \sigma_T \varphi^+ \psi^+\right)dx + \int_{\partial E_1} \frac{1}{2} \varphi^+ \psi^+ \, d\gamma$

. $L(\psi^+) = \int_E S \, \psi^+ \, dx$

L'équation de la diffusion est une approximation interne de l'équation du flux pair ; considérons les 2 problèmes :

$$\varphi^+ \in V ? : \quad a(\varphi^+, \psi^+) = L(\psi^+) \qquad \text{(flux pair)}$$

$$\phi \in \mathcal{V} ? : \quad a(\phi, \psi^+) = L(\psi^+) \qquad \text{(diffusion)}$$

d'où, $\forall \psi^+ \in \mathcal{V} : a(\varphi^+ - \phi, \psi^+) = 0$

d'où le corollaire suivant :

> Corollaire 3 : La solution ϕ de l'équation de la diffusion est la projection a-orthogonale de la solution φ^+ de l'équation du flux pair sur $H^1(E)$.

II.4 - Comportement asymptotique de l'équation du flux pair en milieu opaque

On suppose que le milieu emplissant le domaine E va s'opacifier progressivement, en fonction du paramètre ε, et on va étudier le comportement de la solution de l'équation du flux pair. Plus précisément, le domaine E étant supposé fixé, on suppose que :

- les sections efficaces σ_T et σ_d croissent comme $1/\varepsilon$, et deviennent σ_T/ε et σ_d/ε ;

- la différence entre σ_T et σ_d, ainsi que la source Q se comporte comme $\varepsilon^2\gamma$ $(\gamma > 0)$ et ε^{1+n} Q $(n \in \mathbb{Z})$. L'équation du flux pair s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \varphi^+ \in V, \text{ tel que pour tout } \psi^+ \in V : \\ a_\varepsilon(\varphi^+, \psi^+) - \dfrac{\sigma_d}{\varepsilon} (\phi^+, \psi^+)_{L^2(D)} = \varepsilon^{1+n}(Q, \psi^+)_{L^2(D)} \end{cases}$$

ce que l'on peut encore écrire, en tenant compte de l'égalité $\sigma_d/\varepsilon = \sigma_T/\varepsilon - \varepsilon\gamma$:

$$(13)\quad \begin{cases} \text{Trouver } \varphi^+ \in V : \forall\psi^+ \in V : \\ \varepsilon \displaystyle\int_D \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi^+)(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\psi^+)\, dx\, d\Omega + \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|\, \varphi^+ \psi^+\, d\gamma \\ + \dfrac{1}{\varepsilon} \displaystyle\int_D \sigma_T(\varphi^+ - \phi^+)\, \psi^+\, dx\, d\Omega + \varepsilon\gamma \int_D \phi^+ \psi^+\, dx\, d\Omega = \int_D \varepsilon^{(1+n)}\, Q\psi^+\, dx\, d\Omega \end{cases}$$

On fait alors l'hypothèse, non justifiée pour le moment que le flux φ^+ peut être écrit, en fonction de ε :

$$(14)\qquad \varphi^+ = \varepsilon^n(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + R(\varepsilon))$$

On va alors chercher quelles équations vérifient u_0, u_1, u_2, u_3 et R en introduisant la formulation (14) dans le problème (13), puis en identifiant terme à terme, en fonction des puissances croissantes de ε :

Pour tout $\psi^+ \in V$ il vient, en notant $\bar{\rho} = \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int_S \rho\, d\Omega$:

$$(15)\quad \begin{cases} \text{a)}\ \displaystyle\int_D \sigma_T(u_0 - \bar{u}_0)\, \psi^+\, dx\, d\Omega = 0 \ ; \\ \text{b)}\ \displaystyle\int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|\, u_0\, \psi^+\, d\gamma + \int_D \sigma_T(u_1 - \bar{u}_1)\, \psi^+\, dx\, d\Omega = 0 \ ; \\ \text{c)}\ \displaystyle\int_D \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}u_0)(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\psi^+)\, dx\, d\Omega + \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|\, u_1\, \psi^+\, d\gamma + \\ \qquad + \displaystyle\int_D \sigma_T(u_2 - \bar{u}_2)\, \psi^+\, dx\, d\Omega + \int_D \gamma\, \bar{u}_0\, \psi^+\, dx\, d\Omega = \int_D Q\, \psi^+\, dx\, d\Omega \\ \text{d)}\ \displaystyle\int_D \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}u_1)(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\psi^+)\, dx\, d\Omega + \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}|\, u_2\, \psi^+\, d\gamma + \\ \qquad + \displaystyle\int_D \sigma_T(u_3 - \bar{u}_3)\, \psi^+\, dx\, d\Omega + \int_D \gamma\, \bar{u}_1\, \psi^+\, dx\, d\Omega = 0 \end{cases}$$

De la hiérarchie précédente (15), on peut tirer pas à pas des conditions que doivent vérifier les u_i :

. De (15.a), en faisant $\psi^+ = (u_0 - \bar{u}_0)$, on déduit que $u_0 = \bar{u}_0$ et donc $u_0 \in \mathcal{V}$.

. De (15.b), on déduit deux conditions :

- Prenons $\psi^+ = u_0$. Alors $\int_D \sigma_T(u_1 - \bar{u}_1)u_0 \, dx \, d\Omega = 0$ et donc $\int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, u_0^2 \, d\gamma = 0$, ce qui entraîne $u_0 = 0$ sur B.

- Prenons ensuite $\psi^+ = (u_1 - \bar{u}_1)$; il vient $u_1 = \bar{u}_1$, soit $u_1 \in \mathcal{V}$.

. De (15.c), on déduit trois conditions :

- Prenons d'abord $\psi^+ \in \mathcal{V}$ et $\psi^+ = 0$ sur B (ainsi que u_0 le vérifie) ; alors $\int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, u_1 \, \psi^+ \, d\gamma \equiv 0 \equiv \int_D \sigma_T(u_2 - \bar{u}_2) \, \psi^+ \, dx \, d\Omega$.

On déduit alors que u_0 est solution de :

$$\int_D \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0) \, (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi^+) \, dx \, d\Omega + \int_D \gamma u_0 \, \psi^+ \, dx \, d\Omega = \int_D Q \, \psi^+ \, dx \, d\Omega \, ,$$

soit encore :

$$\text{(16.a)} \begin{cases} \dfrac{1}{3} \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\sigma_T} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right) + \gamma u_0 = Q \\ u_0 = 0 \quad \text{sur} \quad B, \ (= \partial E_1 \times S), \quad \dfrac{\partial u_0}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial E_2 \times S \end{cases}$$

- Prenons maintenant $\psi^+ \in V$ et $\psi^+ = 0$ sur B, on déduit alors :

$$\text{(17.a)} \quad \sigma_T(u_2 - \bar{u}_2) = Q - \gamma \cdot u_0 + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \left[\frac{1}{\sigma_T} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0\right]$$

u_2 est donc défini à un élément $\bar{u}_2 \in \mathcal{V}$ près ; on fait $\bar{u}_2 \equiv 0$, puisqu'on recherche des conditions que doivent satisfaire u_0, u_1, u_2.

En utilisant maintenant (16.a) on obtient finalement :

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_T} \left[\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \left[\frac{1}{\sigma_T} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_0\right] - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\sigma_T} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right)\right]$$

- Prenons enfin ψ^+ quelconque dans $\mathcal{V}$ et supposons que u_2 est défini par (17.a). Par la formule de Green, il vient :

$$0 = \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial E_1} \left(\frac{1}{3\sigma_T} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_i} \cdot n_i\right) \psi^+ \, d\gamma \left(\equiv \frac{1}{3\sigma_T} \int_{\partial E_1} \frac{\partial u_0}{\partial n} \cdot \psi^+ \, d\gamma\right) +$$
$$+ \int_{\partial E_1} \frac{1}{2} u_1 \, \psi^+ \, d\gamma$$

c'est-à-dire :

$$\text{(16.b)} \quad \frac{1}{3\sigma_T} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial n} + \frac{1}{2} u_1 = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial E_1.$$

. De (15.d) on déduit trois conditions :

- Prenons d'abord $\psi^+ \in \mathcal{V}$ et $\psi^+ = 0$ sur B, alors $\int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| u_2 \, \psi^+ \, d\gamma \equiv 0$ ainsi que $\int_D \sigma_T(u_3 - \bar{u}_3) \, \psi^+ \, dx \, d\Omega$. Alors u_1 est solution de :

$$\int_D \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_1)(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\psi^+) \, dx \, d\Omega + \int_D \gamma u_1 \, \psi^+ \, dx \, d\Omega = 0,$$

soit encore :

$$\text{(16.c)} \begin{cases} -\dfrac{1}{3} \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\sigma_T} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right) + \gamma u_1 = 0 \\ u_1 = -\dfrac{2}{3\sigma_T} \cdot \dfrac{\partial u_0}{\partial n} \text{ sur B}, \quad \dfrac{\partial u_1}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial E_2 \times S \end{cases}$$

- Prenons maintenant $\psi^+ \in V$ et $\psi^+ = 0$ sur B ; on déduit alors :

$$\text{(17.b)} \quad \sigma_T(u_3 - \bar{u}_3) = -\gamma u_1 + \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \left[\frac{1}{\sigma_T} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_1\right]$$

u_3 est donc défini à un élément $\bar{u}_3 \in \mathcal{V}$ près ; on fait $\bar{u}_3 = 0$, puisqu'on recherche toujours des conditions suffisantes.

En utilisant (16.c) on obtient finalement :

$$u_3 = \frac{1}{\sigma_T} \left[\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{\sigma_T} \cdot \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_1\right) - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\sigma_T} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right)\right]$$

- Prenons enfin ψ^+ quelconque dans V et supposons que u_3 est défini par (17.b). Par la formule de Green, il vient :

$$0 = \int_B (\vec{\Omega} \cdot \vec{n})(\frac{1}{\sigma_T} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_1) \psi^+ \, d\gamma + \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, u_2 \, \psi^+ \, d\gamma$$

soit :

$$(16.d) \begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0 \ : \ u_2 = - \frac{1}{\sigma_T} \cdot \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_1 \\ \vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0 \ : \ u_2 = + \frac{1}{\sigma_T} \cdot \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} u_1 \end{cases}$$

. Intéressons nous maintenant à l'équation vérifiée par R :

$$\varepsilon \int_D \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}(\varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + R))(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\psi^+) \, dx \, d\Omega + \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, (\varepsilon^3 u_3 + R) \, \psi^+ \, d\gamma$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_D \sigma_T (R - \bar{R}) \, \psi^+ \, dx \, d\Omega + \varepsilon\gamma \int_D (\varepsilon^2 \bar{u}_2 + \varepsilon^3 \bar{u}_3 + \bar{R}) \psi^+ \, dx \, d\Omega = 0$$

u_2 et u_3 ayant été déterminés par les équations (17), on déduit l'équation, pour tout $\psi^+ \in V$:

$$\varepsilon \int_D \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} R)(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\psi^+) \, dx \, d\Omega + \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, R\psi^+ \, d\gamma$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_D \sigma_T (R - \bar{R}) \psi^+ \, dx \, d\Omega + \varepsilon\gamma \int_D \bar{R}\psi^+ \, dx \, d\Omega = \varepsilon^3 \cdot \int_D g \, \psi^+ \, dx \, d\Omega$$

avec $\int_D g \, \psi^+ \, dx \, d\Omega$, fonction bornée de ε lorsque $\varepsilon \to 0$:

$$\int_D g\psi^+ \, dx \, d\Omega = - \int_D \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}(u_2 + \varepsilon u_3))(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\psi^+) \, dx \, d\Omega - \int_B |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, u_3 \, \psi^+ \, d\gamma$$
$$- \gamma \int_D (\bar{u}_2 + \varepsilon \bar{u}_3) \psi^+ \, dx \, d\Omega$$

on déduit alors, en faisant $\psi^+ = R$:

$$\varepsilon \cdot \gamma \int_D R^2 \, dx \, d\Omega \lesssim \varepsilon^3 \int_D g \, R \, dx \, d\Omega$$

donc $||R||_{L^2(D)} \lesssim \varepsilon^2 \cdot C \cdot ||g||_{L^2(D)}$.

On peut conclure :

Proposition 5 : On suppose que les sections efficaces croissent comme σ_T/ε et σ_d/ε et que la différence $(\sigma_T - \sigma_d)/\varepsilon$ varie comme $\varepsilon\gamma$ (où γ est une fonction bornée) ; considérons alors φ_ε^+ la solution de l'équation flux pair (13) : Trouver $\varphi^+ \in V$, $\forall\psi^+ \in V$:

$$\begin{cases} \varepsilon \displaystyle\int_D \frac{1}{\sigma_T} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\varphi_\varepsilon^+)(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}\psi^+) \, dx \, d\Omega + \int_{\partial} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \, \varphi_\varepsilon^+ \, \psi^+ \, d\gamma \\ + \displaystyle\frac{1}{\varepsilon} \int_D \sigma_T (\varphi_\varepsilon^+ - \phi_\varepsilon^+)\psi^+ \, dx \, d\Omega + \varepsilon\gamma \int_D \phi_\varepsilon^+ \cdot \psi^+ \, dx \, d\Omega = \\ = \varepsilon^{(1+n)} \displaystyle\int_D Q\psi^+ \, dx \, d\Omega \end{cases}$$

ainsi que u_0, la solution de l'équation :

$$\begin{cases} -\displaystyle\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\sigma_T} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x_i}\right) + \gamma u_0 = Q \\ u_0 = 0 \quad \text{sur } B(= \partial E_1 \times S), \quad \displaystyle\frac{\partial u_0}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } (\partial E_2 \times S) \end{cases}$$

a) Si on suppose que $B = \phi$ (i.e. $\partial E_1 = \phi$) : on impose des conditions aux limites "réfléchissantes" au bord de E. On a alors la majoration :

$$||\varphi_\varepsilon^+ - \varepsilon^n \cdot u_0||_{L^2(D)} \leq C \cdot \varepsilon^{2+n} \cdot ||g||_{L^2(D)}$$

b) Dans le cas plus général où $B \neq \phi$ (i.e. $\partial E_1 \neq \phi$), on considère u_1, solution de l'équation :

$$\begin{cases} -\displaystyle\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\sigma_T} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right) + \gamma u_1 = 0 \\ u_1 = -\displaystyle\frac{2}{3\sigma_T} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial n} \quad \text{sur } B, \quad \frac{\partial u_1}{\partial n} = 0 \quad \text{ailleurs ;} \end{cases}$$

on a alors la majoration :

$$||\varphi^+ - \varepsilon^n u_0 - \varepsilon^{n+1} u_1||_{L^2(D)} \leq C \cdot \varepsilon^{2+n} ||g||_{L^2(D)}$$

Remarque 4 :

Lors de l'étude de l'accélération de la convergence par la diffusion synthétique, on utilisera la proposition précédente légèrement modifiée : l'étude de l'équation à résoudre conduit bien à chercher $\varepsilon^n(u_0 + \varepsilon u_1)$ solution du problème décrit dans cette proposition, mais la condition à la limite à prendre en compte, sur B s'écrit :

$u_0 + \varepsilon u_1 = - \frac{2\varepsilon}{3\sigma_T} \frac{\partial}{\partial n} (u_0 + \varepsilon u_1)$, ce qui revient à ajouter le terme :

$$\int_B \varepsilon^{2+n} \cdot \frac{1}{3\sigma_T} |\vec{\Omega} \cdot \vec{n}| \cdot \frac{\partial u_1}{\partial n} \psi \, d\gamma$$

à l'équation (15.c) et à, par exemple, le retrancher à (15.d).

Bien entendu, on a encore dans ce cas la majoration :

$$\underline{||\varphi_\varepsilon^+ - \varepsilon^n(u_0 + \varepsilon u_1)||_{L^2(D)} \leq \varepsilon^{2+n} \cdot C \cdot ||g||_{L^2(D)}}$$

III - ETUDE DE LA CONVERGENCE DES PROCESSUS ITERATIFS DE RESOLUTION

Les méthodes générales de résolution de l'équation du transport - et par conséquent du flux pair - utilisent généralement des processus itératifs qui, selon le cas convergent plus ou moins bien. Nous allons ici essayer de qualifier ces processus à l'aide du formalisme flux pair.

Considérons tout d'abord le processus que nous appellerons "classique" :

a) On se donne $\varphi_o^+ \in V$ et ϕ_o^+ son flux moyen associé :

$$\phi_o^+(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi_o^+(x, \vec{\Omega})\, d\Omega$$

b) Pour tout $n > 0$, on définit $\varphi_n^+ \in V$ (et ϕ_n^+) par :
φ_n^+ est solution du problème : $(\forall \psi^+ \in V)$

$$a(\varphi_n^+, \psi^+) = (\sigma_d\, \phi_{n-1}^+, \psi^+)_{L^2(D)} + (Q, \psi^+)_{L^2(D)}$$

et ϕ_n^+ est défini par : $\phi_n^+(x) = \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi_n^+(x, \vec{\Omega})\, d\Omega.$

Afin de simplifier l'écriture, on va supposer ici que $\sigma_T(x)$ et $\sigma_d(x)$ sont en fait des fonctions constantes sur tout E.

III.1 - Convergence du processus itératif "classique"

On va regrouper, dans les notations, les cas où le théorème 1 est vérifié (existence d'une constante $C > 0$ pour l'inégalité fondamentale) du cas où il ne l'est pas (on fera alors $C = 0$). On écrira donc toujours :

$$a(\varphi^+, \varphi^+) \geq (\sigma_T + C)\, ||\varphi^+||^2_{L^2(D)} \qquad \forall \varphi^+ \in V$$

On a alors le :

(18)

<u>Lemme 4</u> : Pour tout n > 0, on a les inégalités :
a) $\|\|\phi^+_{n+1} - \phi^+_n\|\|_{L^2(E)} \leq \frac{\sigma_d}{(\sigma_T + C)} \cdot \|\|\phi^+_n - \phi^+_{n-1}\|\|_{L^2(E)}$
b) $\|\|\varphi^+_{n+1} - \varphi^+_n\|\|_{L^2(D)} \leq \frac{\sigma_d}{(\sigma_T + C)} \cdot \|\|\varphi^+_n - \varphi^+_{n-1}\|\|_{L^2(D)}$

En effet, pour tout $v \in V$, et tout $n > 0$, on a :

$$\begin{cases} a(\varphi^+_{n+1}, v) = \sigma_d(\phi^+_n, v)_{L^2(D)} + (Q, v)_{L^2(D)} \\ a(\varphi^+_n, v) = \sigma_d(\phi^+_{n-1}, v)_{L^2(D)} + (Q, v)_{L^2(D)} \end{cases}$$

donc $\quad a(\varphi^+_{n+1} - \varphi^+_n, v) = \sigma_d(\phi^+_n - \phi^+_{n-1}, v)_{L^2(D)}$

donc $\quad a(\varphi^+_{n+1} - \varphi^+_n, \varphi^+_{n+1} - \varphi^+_n) = \sigma_d(\phi^+_n - \phi^+_{n-1}, \varphi^+_{n+1} - \varphi^+_n)_{L^2(D)}$

donc $\quad (\sigma_T + C) \cdot ||\varphi^+_{n+1} - \varphi^+_n||^2_{L^2(D)} \leq \sigma_d \cdot ||\phi^+_n - \phi^+_{n-1}||_{L^2(D)} \cdot$

$$\cdot\ ||\varphi^+_{n+1} - \varphi^{+1}_n||_{L^2(D)}$$

ce qui donne la majoration :

$$||\varphi^+_{n+1} - \varphi^+_n||_{L^2(D)} \leq \frac{\sigma_d}{(\sigma_T + C)} \cdot ||\phi^+_n - \phi^+_{n-1}||_{L^2(D)}$$

En utilisant la remarque 1 $\left(||\frac{1}{4\pi} \int_S v d\Omega||_{L^2(D)} \leq ||v||_{L^2(D)}\right)$ on déduit les deux inégalités (18).

On peut maintenant montrer le :

> **Théorème 3** : Les suites $(\varphi_n^+) \in V$ et (ϕ_n^+) associée convergent vers $\varphi^+ \in V$ et $\phi^+ \in L^2(E)$, solution du problème du flux pair :
>
> $$\phi^+ = \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi^+(\Omega)\, d\Omega$$
>
> $$a(\varphi^+, v) = \sigma_d (\phi^+, v)_{L^2(D)} + (Q, v)_{L^2(D)} .$$

Sitôt que $\sigma_d/(\sigma_T + C) < 1$, les inégalités (18) entraînent l'absolue convergence des séries de termes généraux respectifs $(\varphi_{n+1}^+ - \varphi_n^+)$ et $(\phi_{n+1}^+ - \phi_n^+)$ dans $L^2(D)$ et $L^2(E)$ forts.

a) Notons φ^+ et ϕ^+ leur limite. Il est clair que $\phi^+ = \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi^+ \, d\Omega$

car :
$$||\phi^+ - \frac{1}{4\pi}\int_S \varphi^+ \, d\Omega||_{L^2(E)} \leq ||\phi^+ - \phi_n^+||_{L^2(E)} + ||\phi_n^+ - \frac{1}{4\pi}\int_S \varphi_n^+ \, d\Omega||_{L^2(E)} + ||\int_S (\varphi_n^+ - \varphi^+) \frac{d\Omega}{4\pi}||_{L^2(E)}$$

et ce, pour tout $n > 0$. On a :

. $\lim\limits_{n \to +\infty} ||\phi^+ - \phi_n^+||_{L^2(E)} = 0$ (par définition de ϕ^+)

. $||\phi_n^+ - \frac{1}{4\pi}\int_S \varphi_n^+(\Omega)\, d\Omega||_{L^2(E)} = 0$ (par définition de ϕ_n^+)

. $$||\int_S (\varphi_n^+ - \varphi^+) \frac{d\Omega}{4\pi}||_{L^2(E)} = \left[\int_E dx \left[\int_S (\varphi_n^+ - \varphi^+) \frac{d\Omega}{4\pi}\right]^2\right]^{1/2}$$
$$\leq \left[\int_E dx \, . \int_S \frac{d\Omega}{4\pi} \, . \int_S (\varphi_n^+ - \varphi^+)^2 \, d\Omega\right]^2 = ||\varphi^+ - \varphi_n^+||_{L^2(D)}$$

et, bien sûr, $\lim\limits_{n \to +\infty} ||\varphi^+ - \varphi_n^+||_{L^2(D)} = 0$, par définition de φ^+.

b) <u>Montrons que $\varphi^+ \in V$ et que (φ^+_n) converge vers φ^+ dans V</u>

Soient n > 0 et p > 0. On peut écrire :

$$a(\varphi^+_n, v) = \sigma_d(\phi^+_{n-1}, v)_{L^2(D)} + (Q, v)_{L^2(D)}, \qquad \forall v \in V$$

$$a(\varphi^+_p, v) = \sigma_d(\phi^+_{p-1}, v)_{L^2(D)} + (Q, v)_{L^2(D)}, \qquad \forall v \in V$$

On tire, par soustraction :

$$a(\varphi^+_n - \varphi^+_p, v) = \sigma_d(\phi^+_{n-1} - \phi^+_{p-1}, v)_{L^2(D)} \qquad \forall v \in V$$

Donc :

$$a(\varphi^+_n - \varphi^+_p, \varphi^+_n - \varphi^+_p) \leq \sigma_d \; ||\phi^+_{n-1} - \phi^+_{p-1}||_{L^2(D)} \cdot ||\varphi^+_n - \varphi^+_p||_{L^2(D)}$$

Dans $L^2(D)$, les suites ϕ^+_n et φ^+_n étant convergentes, elles sont de Cauchy. Comme $\exists C > 0$, telle que :

$$a(\varphi^+_n - \varphi^+_p, \varphi^+_n - \varphi^+_p) \geq C \; . \; ||\varphi^+_n - \varphi^+_p||^2_V$$

on déduit que la suite φ^+_p est de Cauchy dans V fort. Elle converge donc vers un élément $\bar{\varphi}^+ \in V$.

Reste à montrer que $\varphi^+ = \bar{\varphi}^+$. Pour tout n > 0 :

$$||\varphi^+ - \bar{\varphi}^+||_{L^2(D)} \leq ||\varphi^+ - \varphi^+_n||_{L^2(D)} + ||\varphi^+_n - \bar{\varphi}^+||_{L^2(D)}$$

$$\leq ||\varphi^+ - \varphi^+_n||_{L^2(D)} + ||\varphi^+_n - \bar{\varphi}^+||_V$$

et, par définition des limites φ^+ et $\bar{\varphi}^+$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} ||\varphi^+ - \varphi^+_n||_{L^2(D)} = 0 \quad ; \quad \lim_{n \to +\infty} ||\varphi^+_n - \bar{\varphi}^+||_V = 0.$$

c) La limite des suites (φ_n^+) et (ϕ_n^+) est solution de (8)

Pour tout $v \in V$ et tout $n > 0$:

$$|a(\varphi^+, v) - \sigma_d(\phi^+, v)_{L^2(D)} - (Q, v)_{L^2(D)}| \leq |a(\varphi^+ - \varphi_n^+, v)|$$

$$+ |\sigma_d(\phi^+ - \phi_{n-1}^+, v)_{L^2(D)}| + |a(\varphi_n^+, v) - \sigma_d(\phi_{n-1}^+, v)_{L^2(D)} - (Q, v)|_{L^2(D)}$$

On a alors :

. $a(\varphi_n^+, v) = \sigma_d(\phi_{n-1}^+ . v)_{L^2(D)} + (Q, v)_{L^2(D)}$

. $|a(\varphi^+ - \varphi_n^+, v)| \leq ||\varphi^+ - \varphi_n^+||_V \cdot ||v||_V$

. $|\sigma_d(\phi^+ - \phi_{n-1}^+, v)_{L^2(D)}| \leq \sigma_d \, ||\phi^+ - \phi_{n-1}^+||_{L^2(D)} \cdot ||v||_{L^2(D)}$

donc φ^+ est solution de (8), ce qui achève la démonstration.

III.2 - Qualification de la convergence par le procédé de la minimisation

La forme bilinéaire introduite pour étudier l'équation du flux pair étant symétrique définie et positive, il est équivalent d'étudier le problème variationnel (8) ou de résoudre le problème de la minimisation de la forme quadratique associée.

Introduisons donc la fonction J que nous allons devoir minimiser (on note $\bar{\psi}^+$ la moyenne :

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \psi^+(\vec{\Omega}) \, d\Omega \text{).}$$

<u>Définition 5</u> : On appelle fonctionnelle J, la forme quadratique obtenue à partir de la formulation variationnelle (8) :

$$\text{pour } \psi^+ \in V,\ J(\psi^+) = \frac{1}{2}\, a(\psi^+, \psi^+) - \frac{1}{2}\, \sigma_d(\bar{\psi}^+, \psi^+)_{L^2(D)} - (Q, \psi^+)_{L^2(D)} \ ;$$

On appelle problème d'optimisation, le problème :

(19) Trouver $\varphi^+ \in V$, argument du minimum de J.

<u>Remarque 5</u> : Rappelons brièvement un certain nombre de propriétés classiques vérifiées par le problème d'optimisation.

a) <u>Forme quadratique J</u> : pour tout couple $(\varphi^+, \psi^+) \in V^2$:

$$(20)\quad \begin{cases} \underline{J(\psi^+) - J(\varphi^+)} = \frac{1}{2}\, \underline{a(\psi^+ - \varphi^+, \psi^+ - \varphi^+)} - \frac{\sigma_d}{2}\, \underline{(\bar{\psi}^+ - \bar{\varphi}^+, \bar{\psi}^+ - \bar{\varphi}^+)_{L^2(D)}} \\ \qquad + \underline{\{a(\varphi^+, \psi^+ - \varphi^+) - \sigma_d(\bar{\varphi}^+, \psi^+ - \varphi^+)_{L^2(D)} - (Q, \psi^+ - \varphi^+)_{L^2(D)}\}} \end{cases}$$

En effet,
$$J(\psi^+) - J(\varphi^+) = \frac{1}{2}\, a(\psi^+, \psi^+) - \frac{\sigma_d}{2}\, (\bar{\psi}^+, \psi^+)_{L^2(D)} - \frac{1}{2}\, a(\varphi^+, \varphi^+) + \frac{\sigma_d}{2}\, (\bar{\varphi}^+, \varphi^+)_{L^2(D)} - (Q, \psi^+ - \varphi^+)_{L^2(D)}$$

or :
$$a(\psi^+, \psi^+) - a(\varphi^+, \varphi^+) = a(\psi^+ - \varphi^+, \psi^+ - \varphi^+) + 2a(\varphi^+, \psi^+ - \varphi^+)$$

et :
$$\sigma_d(\bar{\psi}^+, \psi^+)_{L^2(D)} - \sigma_d(\bar{\varphi}^+, \varphi^+)_{L^2(D)} = \sigma_d(\overline{\psi^+ - \varphi^+}, \psi^+ - \varphi^+)_{L^2(D)} + 2\sigma_d(\bar{\varphi}^+, \psi^+ - \varphi^+)_{L^2(D)}$$

b) <u>Les problèmes (8) et (19) sont équivalents</u>.

c) Le problème (19) admet une solution unique.

En effet, sitôt que $\sigma_d < (\sigma_T + C)$ (où C a été introduite au paragraphe III.1) la fonctionnelle J est strictement croissante à l'infini ($\lim_{|\psi^+| \to +\infty} J(\psi^+) = +\infty$). Comme elle est fortement continue et strictement convexe (puisque quadratique), le problème admet une solution unique.

■

On va traduire, dans ce paragraphe, la convergence de la suite $(\varphi_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la solution en termes de suite minimisante pour J.

> Lemme 5 : La suite $(\varphi_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de V convergeant vers la solution $\varphi^+ \in V$ de l'équation du flux pair est une suite minimisante pour J, la suite réelle $J(\varphi_n^+)$ étant strictement décroissante et convergeant vers $J(\varphi^+)$.

La fonctionnelle J étant fortement continue sur V, il est évident que la suite (φ_n^+) convergeant vers (φ^+), la suite $J(\varphi_n^+)$ converge vers $J(\varphi^+)$. Il reste à montrer qu'elle est strictement décroissante. On va pour ce faire utiliser l'égalité (20) en faisant $\psi^+ = \varphi_n^+$ et $\varphi^+ = \varphi_{n+1}^+$, avec φ_{n+1}^+ solution de :

$$a(\varphi_{n+1}^+, v) = \sigma_d(\phi_n^+, v)_{L^2(D)} + (Q, v)_{L^2(D)} \qquad \forall v \in V$$

on a alors :

$$J(\varphi_n^+) - J(\varphi_{n+1}^+) = \frac{a}{2}(\varphi_n^+ - \varphi_{n+1}^+, \varphi_n^+ - \varphi_{n+1}^+) - \frac{\sigma_d}{2} ||\overline{\varphi_n^+} - \overline{\varphi_{n+1}^+}||^2_{L^2(D)}$$

$$+ \{a(\varphi_{n+1}^+, \varphi_n^+ - \varphi_{n+1}^+) - \sigma_d(\overline{\varphi}_{n+1}^+, \varphi_n^+ - \varphi_{n+1}^+)_{L^2(D)}$$

$$- (Q, \varphi_n^+ - \varphi_{n+1}^+)_{L^2(D)} \quad \}$$

Soit encore : $J(\varphi_n^+) - J(\varphi_{n+1}^+) = \frac{1}{2} a(\varphi_n^+ - \varphi_{n+1}^+, \varphi_n^+ - \varphi_{n+1}^+)$

$$- \frac{\sigma_d}{2} ||\phi_n^+ - \phi_{n+1}^+||^2_{L^2(D)} + \sigma_d(\phi_n^+ - \phi_{n+1}^+, \phi_n^+ - \phi_{n+1}^+)_{L^2(D)}$$

soit enfin :

$$J(\varphi_n^+) - J(\varphi_{n+1}^+) = \frac{1}{2}\, a\,(\varphi_n^+ - \varphi_{n+1}^+, \varphi_n^+ - \varphi_{n+1}^+) + \frac{\sigma_d}{2}\, ||\phi_n^+ - \phi_{n+1}^+||^2_{L^2(D)}$$

ce qui entraîne que la suite $J(\varphi_n^+)$ vérifie :

$$J(\varphi_n^+) \geq J(\varphi_{n+1}^+).$$

III.3 - Accélération de la convergence par diffusion synthétique

A partir du processus "classique" on définit le processus dit "accéléré" de la manière suivante :

. Soit $n \geq 0$ et $(\tilde{\varphi}_{n+1}^+) \in V$ solution du problème :

$$a(\tilde{\varphi}_{n+1}^+, v) = (\sigma_d\, \phi_n^+, v)_{L^2(D)} + (Q, v)_{L^2(D)} \qquad \forall v \in V$$

. On appelle D_{n+1} la correction qu'il faut ajouter à $(\tilde{\varphi}_{n+1}^+)$ pour obtenir la solution φ^+ du problème :

$$a(\varphi^+, v) = (\sigma_d\, \phi^+, v)_{L^2(D)} + (Q, v)_{L^2(D)} \qquad \forall v \in V$$

Notons $\tilde{\phi}_{n+1}^+ = \frac{1}{4\pi}\int_S \tilde{\varphi}_{n+1}^+(\vec{\Omega})\, d\Omega$ et $d_{n+1} = \frac{1}{4\pi}\int_S D_{n+1}(\vec{\Omega})\, d\Omega$

Alors, D_{n+1} est solution du problème ($\forall v \in V$) :

(21) $$a(D_{n+1}, v) = \sigma_d (d_{n+1}, v)_{L^2(D)} + \sigma_d(\tilde{\phi}_{n+1}^+ - \phi_n^+, v)_{L^2(D)}$$

. Résoudre le problème précédent (21) est aussi compliqué que de résoudre le problème du flux pair. On simplifie ce problème en considérant le problème "diffusion" associé : on projette (21) sur l'espace $\mathcal{V}$ des fonctions de V indépendantes de $\vec{\Omega}$.

On résout donc, pour tout $v \in \mathcal{V}$:

$$(22) \qquad a(\delta_{n+1}, v) - \sigma_d(\delta_{n+1}, v)_{L^2(D)} = \sigma_d(\tilde{\phi}^+_{n+1} - \phi^+_n, v)_{L^2(D)}$$

. On définit enfin ϕ^+_{n+1} par $(\tilde{\phi}^+_{n+1} + \delta_{n+1})$ et on recommence le processus itératif.

On a immédiatement le :

> <u>Lemme 6</u> : On reprend l'élément $\tilde{\varphi}^+_{n+1}$ de la suite $(\varphi^+_n)_{n \in \mathbb{N}}$ considérée au lemme 5. On note δ_{n+1} la correction de type diffusion solution de l'équation (22). On a alors l'inégalité :
>
> $J(\tilde{\varphi}^+_{n+1} + \delta_{n+1}) \leq J(\tilde{\varphi}^+_{n+1})$.
>
> $(\tilde{\varphi}^+_{n+1} + \delta_{n+1}$ est "plus proche" de la solution φ^+ au sens de J que $\tilde{\varphi}^+_{n+1})$.

Evaluons la différence $J(\tilde{\varphi}^+_{n+1}) - J(\tilde{\varphi}^+_{n+1} + \delta_{n+1})$ à l'aide de l'identité (20) :

$$J(\tilde{\varphi}^+_{n+1}) - J(\tilde{\varphi}^+_{n+1} + \delta_{n+1}) = \frac{1}{2}\, a(\delta_{n+1}, \delta_{n+1}) - \frac{\sigma_d}{2}\, (\delta_{n+1}, \delta_{n+1})_{L^2(D)}$$
$$- \{a(\tilde{\varphi}^+_{n+1} + \delta_{n+1}, \delta_{n+1}) - \sigma_d(\tilde{\phi}^+_{n+1} + \delta_{n+1}, \delta_{n+1})_{L^2(D)} - (Q, \delta_{n+1})_{L^2(D)}\}$$

or : $\qquad a(\tilde{\varphi}^+_{n+1}, \delta_{n+1}) - (Q, \delta_{n+1})_{L^2(D)} = \sigma_d(\phi^+_n, \delta_{n+1})_{L^2(D)}$

Le crochet devient :

$$a(\delta_{n+1}, \delta_{n+1}) - \sigma_d(\delta_{n+1}, \delta_{n+1})_{L^2(D)} - \sigma_d(\tilde{\phi}^+_{n+1} - \phi^+_n, \delta_{n+1})_{L^2(D)},$$

qui est nul, à cause de l'égalité (22).

Il reste donc :

$$J(\tilde{\varphi}^+_{n+1}) - J(\tilde{\varphi}^+_{n+1} + \delta_{n+1}) = \frac{1}{2}\, a\,(\delta_{n+1}, \delta_{n+1}) - \frac{\sigma_d}{2}\,(\delta_{n+1}, \delta_{n+1})_{L^2(D)}$$

ce qui démontre le lemme 6, sitôt que $\sigma_d \leq (\sigma_T + C)$.

■

On peut alors prouver la convergence des suites $(\tilde{\varphi}^+_n)$ et $(\tilde{\varphi}^+_n + \delta_n)$ vers la solution φ^+ du problème du flux pair ; c'est l'objet du :

> <u>Théorème 4</u> : Les suites "accélérées" $(\tilde{\varphi}^+_n) \in V$ et $(\tilde{\varphi}^+_n + \delta_n) \in V$ convergent toutes les deux vers la solution φ^+ du problème du flux pair.

Construisons la suite $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\psi_{2p-1} = \tilde{\varphi}^+_p$ et $\psi_{2p} = \tilde{\varphi}^+_p + \delta_p$. Les lemmes 5 et 6 entraînent la monotonie de la suite $J(\psi_n)$: elle est décroissante et bornée, puisque $\forall v \in V$, $J(v) \geq J(\varphi^+)$. Elle est donc convergente.

On en déduit que la suite (ψ_n) est elle-même convergente dans V. En effet, elle est de Cauchy : soient n et p deux entiers et supposons par exemple que $p > n$, alors on peut décomposer $J(\psi_n) - J(\psi_p) \geq 0$:

$$J(\psi_n) - J(\psi_p) = \sum_{k=n}^{p-1} J(\psi_k) - J(\psi_{k+1}) \geq \sum_{k=n}^{p-1} 2\mathscr{C} \,.\, ||\psi_k - \psi_{k+1}||^2_V \,.$$

- En effet, si k est pair, on a :

$$J(\psi_k) - J(\psi_{k+1}) = \frac{a}{2}\,(\psi_k - \psi_{k+1}, \psi_k - \psi_{k+1}) +$$

$$+ \frac{\sigma_d}{2}\,(\bar{\psi}_k - \bar{\psi}_{k+1}, \psi_k - \psi_{k+1})_{L^2(D)} \geq C_1 \,.\, ||\psi_k - \psi_{k+1}||^2_V,$$

en notant C_1 la constante de coercivité.

- Si au contraire k est impair, on a :

$$J(\psi_k) - J(\psi_{k+1}) = \frac{a}{2}(\psi_k - \psi_{k+1}, \psi_k - \psi_{k+1})$$

$$\frac{\sigma_d}{2}(\bar{\psi}_k - \bar{\psi}_{k+1}, \psi_k - \psi_{k+1})_{L^2(D)} \geq C_2 \cdot ||\psi_k - \psi_{k+1}||_V^2$$

Il suffit donc de choisir $(2\mathcal{C}) = \min(C_1, C_2)$.

L'inégalité de Schwartz permet d'écrire :

$$2\sum_{k=n}^{p-1} ||\psi_k - \psi_{k+1}||_V^2 \geq ||\psi_p - \psi_n||_V^2$$

D'où la minoration finale : $J(\psi_n) - J(\psi_p) \geq \mathcal{C} \cdot ||\psi_n - \psi_p||_V^2$.

Le fait que la suite $J(\psi_n)$ est de Cauchy entraîne donc que la suite (ψ_n) est elle-même de Cauchy dans V. Elle converge donc vers $\psi^+ \in V$.

- Il reste à montrer que $\psi^+ = \varphi^+$, solution du problème du flux pair, ce qui est visiblement vérifié à cause de la majoration, pour tout $v \in V$:

$$|a(\psi^+, v) - \sigma_d(\psi^+, v)_{L^2(D)} - (Q, v)_{L^2(D)}| \tag{23}$$

$$\leq |a(\psi^+ - \psi_{2p-1}, v)| + |\sigma_d(\bar{\psi}^+ - \bar{\psi}_{2p-2}, v)_{L^2(D)}|,$$ puisque, par construction de ψ_{2p-1} à partir de $\bar{\psi}_{2p-2}$ on a :

$$\forall v \in V \qquad a(\psi_{2p-1}, v) = \sigma_d(\bar{\psi}_{2p-2}, v)_{L^2(D)} + (Q, v)_{L^2(D)}$$

Le second membre de (23) peut être rendu aussi petit que l'on veut en choisissant p assez grand, ce qui prouve que ψ^+ est la solution du problème du flux pair et achève la démonstration.

III.4 - Vitesse de convergence pour le processus classique

La fonctionnelle J peut être interprétée comme une mesure de la "distance" séparant toute fonction φ^+_{n+1} à la solution φ^+ du problème du flux pair. On va donc qualifier la vitesse de convergence des suites en termes de variations de la fonctionnelle J.

Appliquons donc l'égalité (20) aux fonctions φ^+_n et φ^+_{n+1}, les flux calculés aux itérations n et (n+1), pour étudier la variation de J entre ces deux points :

$$J(\varphi^+_n) - J(\varphi^+_{n+1}) = \frac{1}{2}\, a(\varphi^+_n - \varphi^+_{n+1},\, \varphi^+_n - \varphi^+_{n+1}) + \frac{\sigma_d}{2}\, ||\phi^+_n - \phi^+_{n+1}||^2_{L^2(D)} \quad ;$$

or, φ^+_n et φ^+_{n+1} sont solutions de :

$$a(\varphi^+_{n+1}, v) = \sigma_d(\phi^+_n, v)_{L^2(D)} + (Q, v)_{L^2(D)} \qquad \forall v \in V$$

$$a(\varphi^+_n, v) = \sigma_d(\phi^+_{n-1}, v)_{L^2(D)} + (Q, v)_{L^2(D)} \qquad \forall v \in V$$

d'où : $a(\varphi^+_{n+1} - \varphi^+_n,\, \varphi^+_{n+1} - \varphi^+_n) = \sigma_d(\phi^+_n - \phi^+_{n-1},\, \varphi^+_{n+1} - \varphi^+_n)_{L^2(D)}$,

soit, en reprenant les notations du paragraphe III.1 :

$$a(\varphi^+_{n+1} - \varphi^+_n,\, \varphi^+_{n+1} - \varphi^+_n) \leq \frac{(\sigma_d)^2}{C + \sigma_T} \cdot ||\phi^+_n - \phi^+_{n-1}||^2_{L^2(D)}$$

et donc la majoration :

$$(24) \qquad J(\varphi^+_n) - J(\varphi^+_{n+1}) \leq \frac{(\sigma_d)^2}{2(C + \sigma_T)} \cdot ||\phi^+_n - \phi^+_{n-1}||^2_{L^2(D)} + \frac{\sigma_d}{2}\, ||\phi^+_n - \phi^+_{n+1}||^2_{L^2(D)}$$

D'autre part, l'utilisation de l'inégalité fondamentale (11) donne immédiatement :

$$(25) \qquad J(\varphi^+_n) - J(\varphi^+_{n+1}) \geq \frac{(C + \sigma_T + \sigma_d)}{2} \cdot ||\phi^+_n - \phi^+_{n+1}||^2_{L^2(D)}$$

L'étude de la convergence de la suite $J(\varphi_n^+)$ peut être immédiatement ramenée à l'étude de la série du terme général $(J(\varphi_n^+) - J(\varphi_{n+1}^+))$, qui est lui-même encadré grâce aux deux inégalités (24) et (25) : on est ainsi ramené à étudier la série de terme général : $||\phi_n^+ - \phi_{n+1}^+||^2_{L^2(D)}$.

On a montré au paragraphe III.1 qu'on avait la majoration :

$$||\phi_n^+ - \phi_{n+1}^+||^2_{L^2(D)} \leq \left[\frac{\sigma_d}{C + \sigma_T}\right]^2 \cdot ||\phi_{n-1}^+ - \phi_n^+||^2_{L^2(D)} ,$$

et donc convergence sitôt que : $\sigma_d < (C + \sigma_T)$.

Remarque 6 : Cas des milieux opaques

On va considérer un milieu qui s'opacifie, c'est-à-dire où $\sigma_d \to \sigma_T$: si le domaine E ne possède pas la propriété de Poincaré, alors la solution n'est pas bornée (cas $C = 0$, cf. remarque 3).

Dans ce cas, la majoration du terme général de la série $||\phi_n^+ - \phi_{n+1}^+||^2_{L^2(D)}$ devient de moins en moins "bonne" et la série va converger très lentement : la convergence est mauvaise.

C'est au contraire la propriété de Poincaré qui garantit la convergence de la série pour $\sigma_d = \sigma_T$ et le fait que la solution est bornée. Cependant, lorsque la taille du domaine est grande devant le libre parcours (par exemple si σ_T est grande), la constante C devient petite et la convergence peut être lente dans ce cas.

III.5 - Vitesse de convergence pour le processus accéléré

Au lemme 6, on a montré qu'après chaque itération "classique", l'adjonction d'une correction "diffusion" ne pouvait qu'améliorer la convergence, au sens où l'on construit une fonction corrigée qui fait décroître la fonctionnelle J. Considérons la variation V :

$$(26) \quad \begin{aligned} V &= J(\varphi_n^+) - J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+ + \delta_{n+1}) = \\ &(J(\varphi_n^+) - J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+)) + (J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+) - J(\varphi^+)) + (J(\varphi^+) - J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+ + \delta_{n+1})) \end{aligned}$$

(φ^+ est toujours la solution du problème du flux pair).

Si, on fait l'hypothèse que $\sigma_d \to \sigma_T$ i.e. $(\sigma_T - \sigma_d) = \varepsilon\gamma$, avec $\varepsilon > 0$, alors la variation de la fonctionnelle J , V est égale à la variation totale entre (φ_n^+) et la solution exacte (φ^+) à un infiniment petit d'ordre 2 près :

$$\underline{\underline{V = J(\varphi_n^+) - J(\tilde{\varphi}_n^+ + \delta_{n+1}) = (J(\varphi_n^+) - J(\varphi^+))\ (1 + \varepsilon^2\ \mathcal{F}(\varphi^+))}}$$

Pour ce faire, trois termes sont à évaluer :

a) $\underline{\text{Terme : } J(\varphi_n^+) - J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+)}$: D'après l'inégalité (24), on a :

$$J(\varphi_n^+) - J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+) \leqslant (k\ .\ \sigma d).\qquad ||\phi_n^+ - \tilde{\phi}_{n+1}^+||^2_{L^2(D)}$$

b) $\underline{\text{Terme : } J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+ + \delta_{n+1}) - J(\varphi^+)}$: Notons D_{n+1} la différence $\varphi^+ - \tilde{\varphi}_{n+1}^+$, et Δ_{n+1} la différence $\varphi^+ - \tilde{\varphi}_{n+1}^+ - \delta_{n+1}$. Alors :

$$J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+ + \delta_{n+1}) - J(\varphi^+) = \frac{1}{2}\, a(\Delta_{n+1}, \Delta_{n+1}) - \frac{\sigma_d}{2}\, (\overline{\Delta_{n+1}}, \Delta_{n+1})_{L^2(D)}$$

$$- \{a(\varphi^+, \Delta_{n+1}) - \sigma_d(\phi^+, \Delta_{n+1}) - (Q, \Delta_{n+1})\}$$

Or D_{n+1} et δ_{n+1} sont solutions des problèmes :

$$a(D_{n+1}, v) - (\sigma_d\, d_{n+1}, v)_{L^2(D)} = \sigma_d(\tilde{\phi}_{n+1}^+ - \phi_n^+, v)_{L^2(D)} \qquad v \in V$$

$$a(\delta_{n+1}, v) - (\sigma_d\, \delta_{n+1}, v)_{L^2(D)} = \sigma_d(\tilde{\phi}_{n+1}^+ - \phi_n^+, v)_{L^2(D)} \qquad v \in \mathcal{V}$$

On fait successivement $v = D_{n+1}$ puis $- 2\delta_{n+1}$ dans la première équation, puis $v = \delta_{n+1}$ dans la seconde ; il vient, après addition :

$$a(\Delta_{n+1}, \Delta_{n+1}) - \sigma_d(\overline{\Delta_{n+1}}, \Delta_{n+1})_{L^2(D)} = \sigma_d(\tilde{\phi}_{n+1}^+ - \phi_n^+, \Delta_{n+1})_{L^2(D)}$$

d'où finalement :

$$J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+ + \delta_{n+1}) - J(\varphi^+) = \frac{\sigma_d}{2}\, (\tilde{\phi}_{n+1}^+ - \phi_n^+, \Delta_{n+1})_{L^2(D)}$$

c) Terme : $J(\tilde{\varphi}^{+}_{n+1}) - J(\varphi^{+})$: il vient :

$$J(\tilde{\varphi}^{+}_{n+1}) - J(\varphi^{+}) = \frac{1}{2}\, a(D_{n+1}, D_{n+1}) - \frac{\sigma_d}{2}\,(d_{n+1}, D_{n+1})_{L^2(D)}.$$

. Utilisons maintenant l'hypothèse du § II.4 :

$$\sigma_T = \Sigma_T/\varepsilon, \qquad \sigma_d = \Sigma_T/\varepsilon - \varepsilon.\gamma$$

alors le terme source $\sigma_d(\tilde{\phi}_{n+1} - \phi^{+}_{n})$ s'écrit $\frac{\Sigma_T}{\varepsilon}(1 - \varepsilon^2\gamma)\,(\tilde{\phi}^{+}_{n+1} - \phi^{+}_{n})$

En posant $Q = \Sigma_T(\tilde{\phi}^{+}_{n+1} - \phi^{+}_{n})$, la source des problèmes dont D_{n+1} ou δ_{n+1} sont solution s'écrit : $\varepsilon^{-1}\,.\,Q$ en reprenant les hypothèses et notations de la proposition 5, n = - 2.

De cette proposition, on déduit que :

. $\delta_{n+1} = \frac{1}{\varepsilon^2}(u_0 + \varepsilon u_1)$

. $D_{n+1} - \delta_{n+1} = C\,.\,\varepsilon^{0}$. où C est une fonction bornée de $(\tilde{\phi}^{+}_{n+1} - \tilde{\phi}^{+}_{n})$ et de ε.

Les termes b) et c) se calculent alors facilement, en fonction de ε :

$$\underline{J(\tilde{\varphi}^{+}_{n+1}) - J(\varphi^{+})} = \frac{1}{2}\, a\left[\frac{1}{\varepsilon^2}(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 G),\ \frac{1}{\varepsilon^2}(u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 G)\right]$$

$$- \frac{\sigma_d}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon^2}(\overline{u_0} + \varepsilon\overline{u_1} + \varepsilon^2\overline{G}),\ \frac{1}{\varepsilon^2}(\overline{u_0} + \varepsilon\overline{u_1} + \varepsilon^2\overline{G})\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3}\left(\frac{1}{2\Sigma_T}[\vec{\Omega}\,.\,\vec{\nabla}u_0),\ (\vec{\Omega}\ \ \vec{\nabla}u_0)] + \frac{\gamma}{2}(u_0, u_0)\right) + \frac{1}{\varepsilon^3}\,H(\varepsilon)$$

$$\underline{J(\tilde{\varphi}^{+}_{n+1} + \delta_{n+1}) - J(\varphi^{+})} = \frac{\sigma_d}{2}\,(\tilde{\phi}^{+}_{n+1} - \phi^{+}_{n},\ D_{n+1} - \delta_{n+1})_{L^2(D)}$$

$$= \frac{\Sigma_T}{2\varepsilon}\,(\tilde{\phi}^{+}_{n+1} - \phi^{+}_{n},\ C\ )_{L^2(D)}$$

d'où le développement de V, en fonction de ε :

$$|V| \leq \frac{\Sigma_T}{\varepsilon} \, ||\phi_n^+ - \tilde{\phi}_{n+1}^+||^2_{L^2(D)} + |J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+) - J(\varphi^+)| + |J(\varphi^+) - J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+ + \delta_{n+1})|$$

$$\leq (J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+) - J(\varphi^+)) \left(1 + \frac{\frac{\Sigma_T}{\varepsilon} ||\phi_n^+ - \tilde{\phi}_{n+1}^+||^2 + \frac{\Sigma_T}{\varepsilon} ||\tilde{\phi}_{n+1}^+ - \phi_n^+|| \cdot ||g||}{J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+) - J(\varphi^+)} \right)$$

$$\leq (J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+) - J(\varphi^+)) \; (1 + \varepsilon^2 \, . \, \mathfrak{F}(\varepsilon, \phi_n^+, \tilde{\phi}_{n+1}^+))$$

D'où le résultat :

<u>Théorème 5</u> : Dans l'hypothèse où le milieu s'opacifie :

σ_T "grandit" et $\sigma_d \to \sigma_T$ de la manière suivante :

$(\sigma_T - \sigma_d) = \varepsilon\gamma$ et $\sigma_T = \Sigma/\varepsilon$; alors l'élément n de la suite $(\tilde{\varphi}_n^+ + \delta_n)$ approche la solution φ^+ à un infiniment petit d'ordre 2 près :

$$J(\varphi_n^+) - J(\tilde{\varphi}_{n+1}^+ + \delta_{n+1}) = (J(\varphi_n^+) - J(\varphi^+)) \; (1 + \varepsilon^2 \mathfrak{F})$$

CONCLUSION

La méthode du flux pair permet de construire un formalisme mathématique très bien adapté à l'étude théorique de l'équation stationnaire du transport sur L^2. Outre l'existence d'une solution qu'il est facile de prouver par cette méthode, on a, dans cette note :

- démontré une inégalité de Poincaré qui améliore la convergence, en utilisant les conditions à la limite du domaine ;

- exhibé le lien canonique existant entre transport et diffusion, tant dans la formulation variationnelle que du point de vue du comportement asymptotique ;

- caractérisé la convergence à l'aide de la fonctionnelle quadratique associée : cette méthode prouve, pour toutes les géométries, l'amélioration de la convergence lorsque l'on utilise la diffusion synthétique.

Une étude des schémas numériques discrétisant l'équation du flux pair est en cours et fera l'objet d'une prochaine note. Les principales méthodes de résolution du problème approché utilisent les résultats abstraits obtenus dans ce rapport, c'est pourquoi nous donnons ici, en annexe quelques résultats numériques illustrant les principaux résultats théoriques.

ANNEXE : VERIFICATION NUMERIQUE DES PROPOSITIONS

Dans cette partie, on se propose de vérifier numériquement les 2 principales propositions montrées précédemment :

- l'inégalité de Poincaré et l'existence d'une solution
- le comportement asymptotique de l'équation du flux pair.

On se place en géométrie sphérique ; le domaine spatial D est une sphère de rayon R = 1 ; les directions sont alors décrites par la variable μ qui parcourt l'intervalle $]-1 ; +1[$.

D'un point de vue section efficace, on choisit $\sigma_T(r) \equiv 1$, pour tout point r.

La discrétisation des variables r et μ sont conduites comme suit :

. $\mu = m/4$, avec $m = 0, 1, \ldots, 4$;
. $r = i/10$, avec $i = 0, 1, \ldots, 10$.

A - EXISTENCE D'UNE SOLUTION - INEGALITE DE POINCARE

On va choisir des valeurs de σ_D non nulles et calculer la vitesse de convergence de la manière suivante : considérant ϕ^+_{n-1}, ϕ^+_n et ϕ^+_{n+1} trois éléments de la suite, on appelle facteur de convergence empirique, la quantité :

$$C_n = \frac{||\phi^+_{n+1} - \phi^+_n||_{L^2(E)}}{||\phi^+_n - \phi^+_{n-1}||_{L^2(E)}}$$

En pratique, on constate que C_n converge rapidement vers une limite $C(\sigma_D)$ que l'on peut rapprocher du coefficient utilisant l'inégalité de Poincaré :

$C'(\sigma_D) = \sigma_d/(C_o + \sigma_T)$ où C_o est la constante intervenant dans l'inégalité de Poincaré :

$$C_o = 1/\max(2d, 2d\delta),$$

avec : d : diamètre du domaine ; ici, d = 1

δ : nombre de libres parcours maximum que l'on peut inscrire en ligne droite dans E ; ici, $\sigma_T = 1$ d'où $\delta = 1$

et donc une estimation de $C_o = 1/2$.

σ_D	0	0.5	1.0	1.5
$C'(\sigma_D)$	0.	0.3333	0.6666	1.0000
$C(\sigma_D)$	0.	0.25065	0.5013	0.7519
$\max_n C_n$	0.	0.27695	0.5013	0.7519

B - COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE L'EQUATION DU FLUX PAIR

Afin d'étudier numériquement le comportement asymptotique de l'équation du flux pair, on va étudier une suite de problèmes, fonction du paramètre réel ε défini comme suit :

La source imposée (extérieure) est mise égale à ε. On prend, pour section totale, la fonction constante égale à 1/ε, pour paramètre γ la fonction 0.5 et pour section de diffusion, la définition classique :

$$\sigma_d = \sigma_T - \varepsilon\gamma = 1/\varepsilon - \gamma\varepsilon.$$

On résout d'autre part, et simultanément, le problème "diffusion" associé, obtenu par projection du problème du flux pair sur l'espace des fonctions constantes en angle.

Dans le tableau suivant, on porte :

- la norme L^2 de la différence : $||\varphi^+ - \phi_D^+||_{L^2(D)}$;
- le "nombre de particules" dans le système, c'est-à-dire, la norme L^1 du flux pair : $||\varphi^+||_{L^1(D)}$;
- la différence relative, que l'on choisit comme : $D = \dfrac{||\varphi^+ - \phi_D^+||_{L^2(D)}}{||\varphi^+||_{L^1(D)}}$

ε	$\lvert\lvert\varphi^+ - \phi_D^+\rvert\rvert_{L^2}$	D	$\lvert\lvert\varphi^+\rvert\rvert_{L^1(D)}$
1.000	.312 E-01	.150 E-00	.2080
0.500	.159 E-01	.111 E-00	.1434
0.100	.229 E-02	.297 E-01	.0771
0.050	.932 E-03	.137 E-01	.0678
0.010	.345 E-03	.573 E-03	.0601
0.005	.653 E-04	.110 E-03	.0592
10^{-3}	0.	0.	.0584
10^{-4}	0.	0.	.0583

En ce qui concerne le calcul de φ^+, les résultats sont convergés, en norme L^2 à 10^{-8}.

REFERENCES

1. Introduction au cours du Professeur E.E. LEWIS Ecole d'Eté d'Analyse Numérique C.E.A.-E.D.F.-I.N.R.I.A. (20 juin - 10 juillet 1981) sur l'équation du transport.

2. Cours du Professeur E.E. LEWIS "Equation du transport" : méthodes déterministes Ecole d'Eté d'Analyse Numérique C.E.A.-E.D.F.-I.N.R.I.A. (20 juin - 10 juillet 1981)

3. Methods of Numerical Mathematics, Second Edition G.I. MARCHUK Springer Verlag (Collection : Applications of Mathematics)

4. Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques : Tome 3 (à paraître R. DAUTRAY et J.L. LIONS) Série Scientifique - Collection CEA - MASSON

5. Résolution de l'équation du transport par la méthode du flux pair Etude numérique de l'équation d'évolution du transport en géométrie lagrangienne R-Z
D. VERWAERDE
Note C.E.A-N-2352 de Mai 1983

6. Cours d'analyse Fonctionnelle de l'option Mathématiques Appliquées de l'Ecole Centrale Paris - Année scolaire 1973-1974
J.B. KAMMERER

7. Computational Methods of Neutron Transport
E.E. LEWIS et W.F. MILLER, Jr.
Wiley-Interscience Publication