

PUC-TN -- 32 | 84.

Nota Científica 32/84

Metaestabilidade em Teorias de Campos e Mecânica Estatística\*

C. Aração de Carvalho\*

Departamento de Física, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Cx.P. 38071, CEP 22453, Rio de Janeiro, RJ, BrasilResumo

Após uma análise das transições de fase que podem ocorrer no contexto de uma teoria de campo escalar, a temperatura finita e em presença de um campo externo, ~~passamos a~~ estudamos eventuais situações metaestáveis e como elas se relacionam com as transições. Em ambos os casos ~~nos baseamos~~ <sup>- LL</sup> numa aproximação semiclássica à teoria que, em Mecânica Estatística, corresponderia ao modelo de gotas e bolhas ("droplet-bubble model"). (Kumar)

† Trabalho parcialmente financiado pela FINEP, CNPq e CAPES.

\* Comunicação feita por ocasião do "Simpósio de Física em Homenagem ao 70º aniversário do Professor Mário Schenberg", realizado no Instituto de Física da Universidade de São Paulo em agosto de 1984.

## INTRODUÇÃO

Vamos considerar a teoria do campo escalar cujo Hamiltoniano tem por densidade:

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} v^2(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} [\vec{\nabla}\phi(\vec{x}, t)]^2 + \frac{c}{2} m^2 \phi^2(\vec{x}, t) + \frac{\lambda}{4!} \phi^4(\vec{x}, t) + j\phi(\vec{x}, t) + \frac{3}{2} \frac{m^4}{\lambda} \quad (1)$$

onde  $c$  assume os valores  $\pm 1$  e  $j$  denota um campo externo uniforme. Procederemos, primeiramente, a uma análise clássica da teoria para, através dela, obter o diagrama de fases de Landau<sup>(1)</sup> (campo médio). Na linguagem de Teoria de Campos, isto corresponde a estudar a ordem zero ("zero-loop") da aproximação semiclássica<sup>(2)</sup> às funções de correlação do modelo. Em seguida, mostraremos como flutuações técnicas e quânticas aparecem em ordens mais altas da expansão semiclássica. Concentrando nossa atenção em cálculos de primeira ordem ("one-loop"), apresentaremos uma visão das transições de fase que corresponde ao modelo de gotas e bolhas ("droplet-bubble model") da Mecânica Estatística<sup>(3)</sup>. Finalmente, mostraremos como situações metaestáveis podem ser descritas neste nível de aproximação e tentaremos relacioná-las com nossas idéias sobre as transições<sup>(4)</sup>.

## ANÁLISE CLÁSSICA

O potencial clássico,  $U_c(\phi)$ , correspondente à equação (1) é:

$$U_c(j, \phi) = \frac{c}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + j\phi + \frac{3}{2} \frac{m^4}{\lambda} \quad (2)$$

A campo externo nulo ( $j=0$ ), as duas possibilidades para  $c$  levam às figuras 1(a) e 1(b) abaixo:

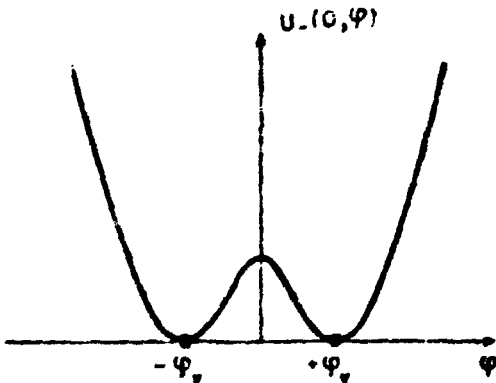


Fig 1(a):  $U_+ = \frac{\lambda}{4!} (\phi^2 - \phi_v^2)^2$

$$\phi_v^2 = 6m^2/\lambda$$

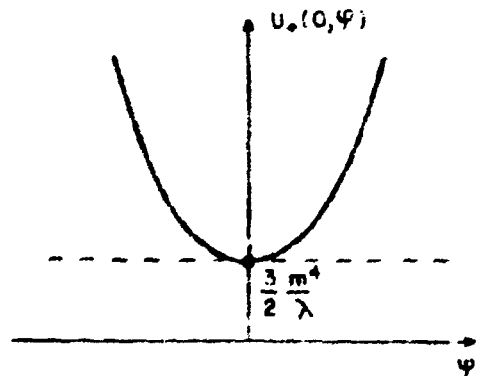


Fig 1(b):  $U_- = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{3}{2} \frac{m^4}{\lambda}$

Na literatura de Teoria de Campos, a situação da figura 1(a) é dita de simetria quebrada, enquanto a de 1(b) é chamada simétrica. As denominações correspondem ao fato do(s) mínimo(s)

do potencial clássico ser(em) (1(b)) ou não (1(a)) invariante(s) pela simetria  $Z(2)$  do Hamiltoniano, que leva  $\phi$  em  $(-\phi)$ .

A introdução de um campo externo uniforme ( $j \neq 0$ ) leva a uma nova estrutura de extremos de  $V$ . Para tanto basta estudar a equação dos extremos:




$$V'_\phi(j, \phi) = c m^2 \phi + \frac{\lambda}{6} \phi^3 + j = 0 \quad (3)$$

A equação é de 3º grau e é fácil ver<sup>(5)</sup> que o parâmetro que distingue as diferentes situações possíveis é:

$$\Delta \equiv c^3 \frac{8m^6}{\lambda^3} + \frac{9j^2}{\lambda^2} \quad (4)$$

O quadro I apresenta tais situações, conforme o sinal de  $\Delta$ :

QUADRO I

$\Delta$	RAÍZES	EXTREMOS	GRÁFICO
$>0$	1 real 2 complexas conjugadas	um único mínimo	
$=0$	1 real 2 reais coincidentes	um mínimo global um ponto de inflexão	
$<0$	3 reais distintas	um mínimo global um máximo local um mínimo local	

Portanto, dependendo dos valores de  $c$  e  $j$ , teremos as possibilidades descritas no quadro II:

QUADRO II

$\epsilon \backslash  j $	$>  j_c $	$=  j_c $	$<  j_c $
+1	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$
-1	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$

As informações dos quadros I e II nos permitem construir o diagrama de fases para o modelo, valendo-nos do plano  $(r=em^2, j)$ , que é o espaço de parâmetros relevantes.

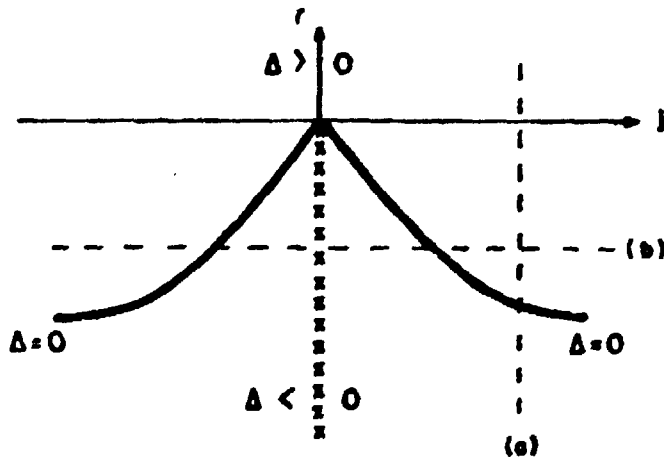


Fig 2: O espaço de parâmetros

Na figura 2, a linha cheia corresponde à equação  $\Delta=0$  e é a fronteira entre a região simétrica ( $\Delta > 0$ ) e a de

simetria quebrada ( $\lambda < 0$ ). Quando nos movemos ao longo da li
 nha pontilhada (a) (variando  $r$ ), passamos da situação de um
 único mínimo para outra em que aparecem um mínimo e um máximi
 mo adicionais (vide figura 3(a)). No limite  $j \rightarrow 0$  (movimento
 ao longo do eixo  $-r$ ), os mínimos são degenerados e correspon
 dem a valores de  $\phi$  que variam continuamente a partir do
 valor zero da fase simétrica. Este comportamento é típico
 de uma transição de 2a. ordem, cujo parâmetro (no caso, o
 ponto de mínimo global), no limite  $j \rightarrow 0$ , varia continuamente
 ao passarmos pela linha de transição. Assim, a linha cheia
 é uma linha de pontos críticos ou linha de transição de 2a.
 ordem. Poderíamos, no entanto, passar de uma região à outra
 ao longo da linha pontilhada (b) (variando  $j$ ). Tal situação
 corresponde à figura 3(b). Depois de cruzarmos a linha  $\delta=0$ ,
 penetrando na região de simetria quebrada, a passagem pelo
 eixo  $-r$  leva a teoria a inverter os papéis de seus pontos de
 mínimo local e global. Tomando o ponto de mínimo global com
 o parâmetro de ordem teremos uma mudança descontínua no
 seu valor ao trocarmos o sinal de  $j$ , um comportamento típico
 de transição de fase de 1a. ordem. Portanto, o semi-eixo
 negativo dos  $r$  corresponde a uma linha de transição de 1a.
 ordem.

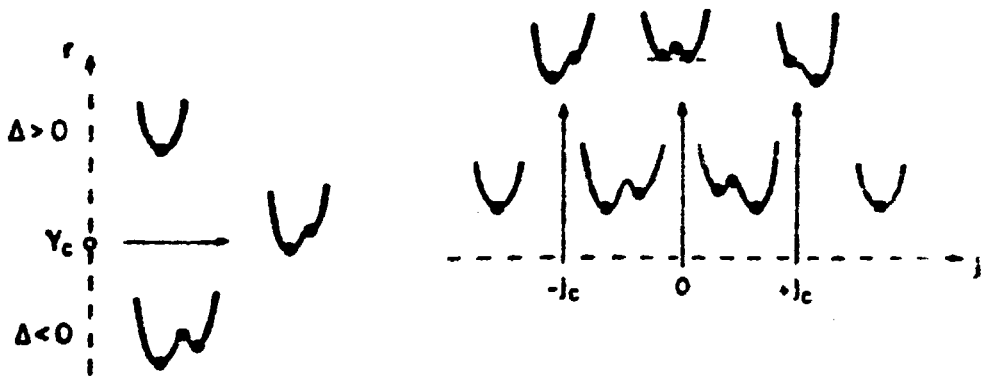


Fig 3(a): Variando  $r$  ao longo da linha (a)

Fig 3(b): Variando  $j$  ao longo da linha (b)

#### FLUTUAÇÕES TÉRMICAS E QUÂNTICAS

No parágrafo anterior estudamos o que acontece ao variarmos os valores de  $r$  e  $j$ . Como  $j$  é um campo externo, podemos imaginar que sua variação é análoga à de um campo magnético externo aplicado a uma amostra magnética (um sistema de spins, por exemplo). Já a variação de  $r$  corresponderia, no sistema magnético, a uma variação da temperatura da amostra. O tratamento de Teoria de Campos, a temperatura ( $T$ ) finita, induz uma dependência de  $r$  em  $T$ , graças a flutuações térmicas. Com isto, dispomos de um mecanismo fi

sico que permite variar  $\tau$  e que completa a analogia com a situação magnética.

A introdução de uma temperatura em Teorias de Campos faz-se de forma muito natural na linguagem das integrais funcionais. A partir de um operador Hamiltoniano:

$$\hat{H} = \int d^v x \mathcal{H}(\vec{x}, \vec{\phi}) \quad (5)$$

quer-se calcular a função de partição do sistema que, em Mecânica Estatística de equilíbrio, é dada por:

$$Z = \text{Tr} [e^{-\beta \hat{H}}] \quad ; \quad \beta = 1/kT \quad (6)$$

A expressão acima pode ser convertida numa integral funcional que soma sobre todas as configurações clássicas de campo em espaço Euclídeo de dimensão  $(v+1)$ :

$$Z = \int [D\vec{\pi}(\vec{x}, \tau)] \int [D\vec{\phi}(\vec{x}, \tau)] e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^v x \left[ \vec{\pi} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \tau} - \mathcal{H} \right]} \quad (7)$$

Tais configurações devem satisfazer:

$$\vec{\phi}(\vec{x}, \beta) = \vec{\phi}(\vec{x}, 0) \quad (\text{bosons}) \quad (8.a)$$

$$\vec{\psi}(\vec{x}, \beta) = -\vec{\psi}(\vec{x}, 0) \quad (\text{fermions}) \quad (8.b)$$

Isto está indicado na expressão (7) pelo símbolo de integração  $\int$ . A integral sobre os momenta,  $\vec{\pi}$ , não sofre restrições. Na realidade, para Hamiltonianos tais que  $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \vec{\pi}^2 + U(\vec{\phi})$ , como



no caso em questão, a integral (quadrática) sobre os momentos dá:

$$Z = \int [D\phi(\vec{x}, \tau)] e^{-\int_0^{\beta} dt \int d^3x \mathcal{L}_{\text{eff}}(t, \frac{\partial \phi}{\partial \tau})} \quad (9)$$

Para a teoria descrita por (1) teremos:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{\epsilon}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + j\phi + \frac{3}{2} \frac{m^4}{\lambda} \quad (10)$$

A integral funcional definida por (7) permite, portanto, obter a função de partição da teoria. Nela estão contidas as flutuações quânticas e térmicas de um sistema em contato com um reservatório de calor, a temperatura T. A partir dela podemos obter as demais grandezas termodinâmicas de interesse. Para o caso de termos um campo externo local,  $j=j(\vec{x})$ , podemos definir:

$$\text{Energia livre de Helmholtz: } F(\beta, j(\vec{x})) \equiv -\frac{1}{\beta} \ln Z(\beta, j(\vec{x})) \quad (11.a)$$

$$\text{Parâmetro de ordem: } M(\vec{x}) \equiv \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta} d\tau \langle \phi(\vec{x}, \tau) \rangle = \frac{-\delta F}{\delta j(\vec{x})} = \frac{1}{\beta Z} \frac{\delta Z}{\delta j(\vec{x})} \quad (11.b)$$

$$\text{Energia livre de Gibbs: } G(\beta, M(\vec{x})) = F(\beta, j(\vec{x})) + \int d^3x M(\vec{x}) j(\vec{x}) \quad (11.c)$$

$$\text{Campo externo local: } j(\vec{x}) = \frac{\delta G}{\delta M(\vec{x})} \quad (11.d)$$

Se, como no caso presente, o campo externo for uniforme,  $j \neq j(\vec{x})$ , o parâmetro de ordem passa também a sê-lo, desde que o sistema possua simetria de translação. Neste caso, costuma-se trabalhar com densidades volumétricas, tanto de parâmetro de ordem (o que leva ao análogo da magnetização em sistemas de spins), como da energia livre de Gibbs. Esta última passa a ser função (ao invés de funcional) da densidade de  $M$  (que chamaremos  $\mu$ ) e de  $\beta$ . Ela define, a temperatura zero, o potencial efetivo da Teoria de Campos:

$$\Gamma(\beta, \mu) = \frac{1}{\text{volume}} G(\beta, \mu) \quad (12.a)$$

$$\mu \equiv \frac{1}{\text{volume}} M = \langle \phi \rangle \quad (12.b)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} = j \quad (12.c)$$

Podemos investigar a estrutura de fases da teoria utilizando a equação (12.c), no limite  $\beta \rightarrow 0$ . Neste limite, (12.c) nos dá os extremos do potencial efetivo a temperatura finita. A estrutura dos mínimos permite caracterizar as distintas fases segundo o(s) subgrupo(s) do grupo de simetria do Hamiltoniano que deixam tais mínimos invariantes. A análise clássica corresponde a estudar (12.c) para o caso em que o potencial efetivo não admite flutuações, recaindo no potencial clássico. No que se segue, veremos como incluir

tais flutuações no contexto da aproximação semiclássica ao cálculo do potencial efetivo.

#### APROXIMAÇÃO SEMICLÁSSICA - GÓTAS E BÓLHAS

O procedimento usual em Teoria de Campos consiste em utilizar um campo de fundo ("background field") uniforme,  $\bar{\phi}$ , que satisfaça as equações clássicas de movimento (mínimo do potencial clássico), como base de uma aproximação semiclássica. Escreve-se, portanto, o campo de interesse como, o campo de fundo, mais uma flutuação,  $\eta$  :

$$\phi(\vec{x}, t) = \bar{\phi} + \eta(\vec{x}, t) \quad (13)$$

A inserção de (13) em (9) reduz o problema a integrar sobre as flutuações. O tratamento ordem por ordem (em  $\eta$ ) da integral resultante corresponde à expansão semiclássica ("loop-expansion"). Se nos detivermos a estudar flutuações quadráticas (termos até  $\eta^2$ ), teremos o primeiro termo não-clássico ("one-loop"). Nossa análise vai-se restringir a este termo, daqui por diante.

Em geral, trabalhos sobre Teorias de Campos a temperatura finita não consideram a presença de um campo externo ( $j=0$ , ou seja, transição ao longo do eixo  $-r$  da figura 2). O cálculo semiclássico do potencial efetivo, até lá.

ordem, em torno de um campo de fundo uniforme e com  $j=0$  é, neste caso, razoável na fase simétrica da teoria, onde há um único mínimo. Na fase de simetria quebrada, no entanto, o resultado de tal aproximação é insatisfatório, levando a um potencial efetivo NÃO CONVEXO na região intramínimos e COMPLEXO para  $|\langle\phi\rangle| \leq \phi_0/\sqrt{3}$  (vide figura 4). Ainda assim, vários autores utilizam o potencial efetivo obtido desta maneira, na aproximação de altas temperaturas ( $T \gg m$ ), para estimar a temperatura crítica do modelo. O resultado de tal estimativa para dimensão  $v=3$  é  $T_c = 4.9 m/\sqrt{\lambda}$  (6).

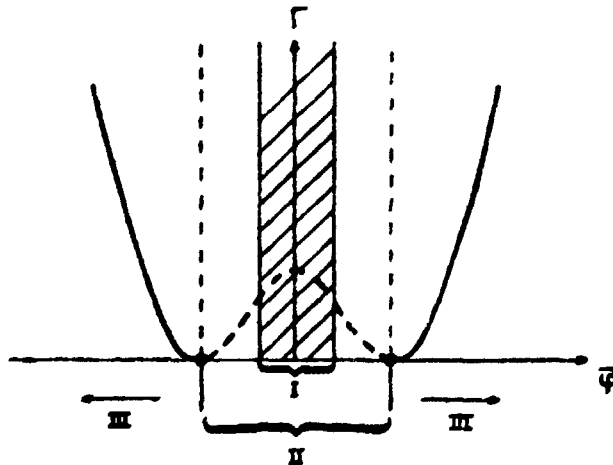


Fig 4: Potencial efetivo para  $T < T_c$ . Na região I ele é complexo; em II o cálculo de 1a. ordem viola convexidade; em III o cálculo é confiável. A linha pontilhada corresponderia ao potencial clássico. Notar que  $\bar{\phi} = \bar{\phi}(u)$ .

Análises mais recentes <sup>(7,8)</sup> têm enfatizado a necessidade de estudar a situação  $j \neq 0$  para, ao final, tomar o limite  $j \rightarrow 0$ . Isto corresponde, por exemplo, a estudar a transição ao longo da linha (a) da figura 2. Neste caso, mesmo a expansão em torno de campos de fundo uniformes pode fornecer resultados aceitáveis, uma vez que os problemas de convexidade da fase quebrada desaparecem. Há cálculos explícitos <sup>(7)</sup> na fase quebrada em torno de campos de fundo uniformes que evidenciam tal fato. Como, para  $j \neq 0$ , os mínimos do potencial clássico deixam de ser degenerados, pode-se constatar que a utilização de apenas o mínimo global como campo de fundo leva aos problemas anteriores. No entanto, a inclusão de flutuações também em torno do mínimo local corrige tais problemas. O resultado final corresponde a uma espécie de construção de Maxwell para o potencial efetivo (que é a energia livre de Gibbs por unidade de volume). Este tipo de cálculo já era bem conhecido em Mecânica Estatística, tendo sido aplicado a situações a temperatura finita <sup>(9)</sup>, o que só recentemente tem sido feito em Teorias de Campos <sup>(6,3,10)</sup>. A figura 5 esquematiza o que acabamos de descrever.

A análise de Mecânica Estatística da referência <sup>(9)</sup> vai, no entanto, mais adiante. Ela sustenta que, próximo de  $T_c$  e na fase quebrada, além das flutuações em torno dos campos uniformes ( $\bar{\phi}_1$  e  $\bar{\phi}_2$ ) devem também ser incluídas flutuações

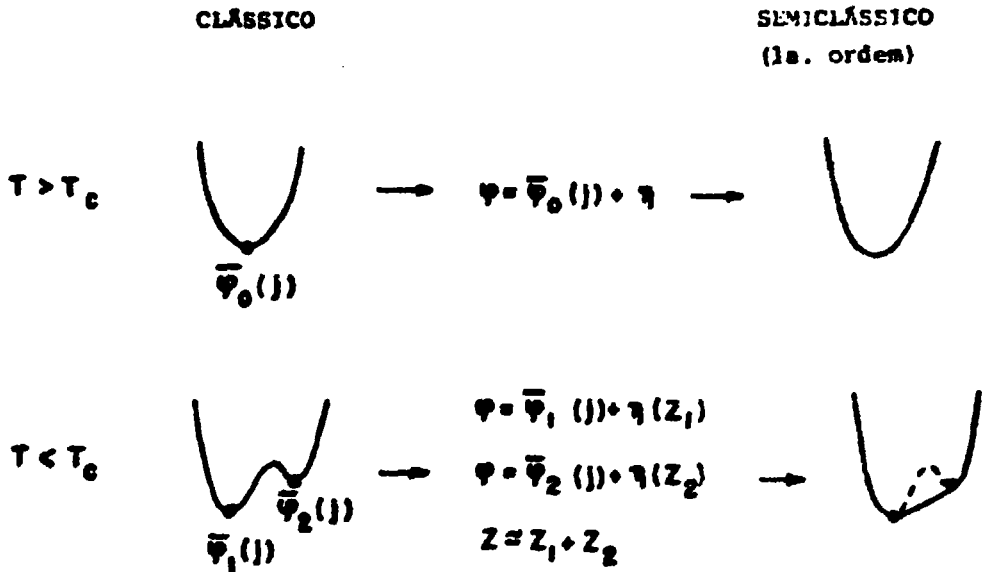


Fig 5: Potencial efetivo clássico e semiclássico (1a. ordem), com  $j \neq 0$ , para campos de fundo uniformes.

em torno de soluções não uniformes das equações de movimento. Tais soluções,  $\psi_P(\vec{x})$ , são, neste caso, independentes de  $\tau$  e variam com as coordenadas espaciais de modo a sair de uma região onde  $\psi_P = \bar{\psi}_1$  para outra em que  $\psi_P = \bar{\psi}_2$  (comportamento tipo "kink"). Devido à presença de  $j \neq 0$ , a energia de tais configurações diverge com o volume espacial. Elas podem ser associadas a paredes separando regiões de "vácuos" distintos. A imagem física do que ocorre próximo à transi

ção passa a ser a de regiões de "vácuos" distintos separadas por paredes. Cada região contribui para a energia livre com termos proporcionais ao seu volume mas as paredes também (já que  $j \neq 0$ ), o que leva a uma interação não trivial entre as distintas regiões. Pode-se mostrar<sup>(9)</sup> que, perto de  $T_c$ , o sistema é análogo a um modelo de Ising. Se agora pensarmos na evolução com temperatura ao longo da linha (a), a imagem física é semelhante ao que ocorre na transição líquido-gás: a baixas temperaturas o sistema consiste fundamentalmente de um líquido, onde existem algumas bôlhas de gás. O vácuo  $\bar{\phi}_1(j)$  (líquido) predomina em quase todo o espaço, exceto por algumas regiões finitas onde o sistema se apresenta em  $\bar{\phi}_2(j)$  (bôlhas de gás); à medida em que  $T$  se aproxima de  $T_c$ , as bôlhas de gás se expandem e as regiões de líquido e gás passam a ter tamanhos comparáveis, sendo separadas por paredes, conforme a descrição da referência (9). Acima da transição tem-se uma distribuição de regiões tal que  $\langle \phi \rangle = \bar{\phi}_0(j)$  (se  $j=0$  teríamos  $\langle \phi \rangle = 0$ , evidenciando a equivalência entre gôtas e bôlhas).

Dentro do contexto descrito acima, é natural tentar estimar a temperatura de transição como sendo aquela em que na teoria com  $j \neq 0$ , a tensão superficial das paredes vai a zero. Cabe frisar que, quando  $j=0$ , a energia livre das paredes diverge como área. O cálculo da temperatura de transi

ção corresponde a encontrar a temperatura para a qual a energia livre por unidade de área das paredes (subtraindo o vácuo) vai a zero. Resultados rigorosos<sup>(11)</sup> mostram que a temperatura em que a tensão superficial se anula ( $T_g$ ) deve corresponder à temperatura crítica ( $T_c$ ). O cálculo que acabamos de descrever foi efetuado<sup>(6)</sup> até 1ª ordem da aproximação semiclássica, em torno de um campo de fundo tipo "kink", dando como resultado  $T_g (=T_c) = 4.0 m/\sqrt{l}$ . O valor encontrado é inferior ao obtido com o potencial efetivo em torno de campos de fundo uniformes. Além disso,  $T_g$  coincide com a temperatura limite ( $T_L$ ) na qual os mínimos do potencial efetivo passam a entrar na região onde ele é complexo (vide figura 6). Esta coincidência é bastante geral<sup>(8)</sup> e pode ser interpretada como uma evidência a favor do cálculo de  $T_c$  via paredes.

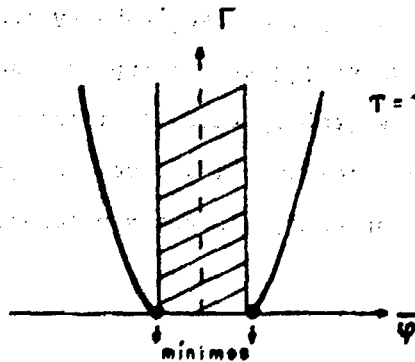


Fig 6: A coincidência entre  $T_g$  e  $T_L$ .



## METAESTABILIDADE

A aproximação semiclássica pode também ser usada para descrever situações metaestáveis. É bem conhecido que líquidos podem ser superaquecidos e gases superesfriados. Uma descrição fenomenológica de tais situações, no presente contexto, poderá ser obtida se estudarmos o que ocorre ao nos movermos ao longo da linha (b), da figura 2 (variando  $j$ ). Ao cruzarmos a linha de transição de 2a. ordem em, por exemplo,  $j=j_c$  e a temperatura  $T < T_c$  fixa (logo,  $r$  fixo), a análise anterior em termos de gotas e bôlhas pode ser utilizada, com o seguinte resultado: ao penetrarmos na região de  $\Delta < 0$ , o sistema estará preferencialmente no vácuo estável,  $\bar{\phi}_1(j)$ , a menos de regiões finitas (gotas-bôlhas) onde, por efeito de flutuação térmica, teremos o vácuo instável  $\bar{\phi}_2(j)$ . Ao cruzarmos o eixo  $-r$  ( $j=0$ ) por um processo físico adiabático qualquer, o vácuo  $\bar{\phi}_1(j)$  passa a ter energia livre maior que a de  $\bar{\phi}_2(j)$ . As bôlhas, que antes eram de vácuo instável, passam a conter o vácuo verdadeiro (estável), enquanto é o resto do espaço que se encontra ocupado por vácuo instável. Tal situação é, claramente, metaestável e a tendência é de que as bôlhas cresçam, fazendo com que o vácuo verdadeiro predomine. Este crescimento é, no entanto, condicionado a uma competição entre a energia livre de volume da bô

lha, que o favorece, e a energia livre de superfície (tensão superficial) que tende a impedi-lo. Isto leva à determinação de um raio crítico, acima do qual a situação metaestável não pode ser mantida, com as bôlhas crescendo e ocupando todo o espaço. As equações que o determinam, a uma dada temperatura  $T$ , são:

$$\left. \frac{dc}{dr} \right|_{r=r_c} = 0 \quad (14.a)$$

$$c = -\frac{4}{3} \pi r^3 \Delta\Gamma(T) + 4\pi r^2 \Delta\sigma(T) \quad (14.b)$$

$$\Delta\Gamma(T) = \Gamma(\bar{\phi}_1(j), T) - \Gamma(\bar{\phi}_2(j), T) \quad (14.c)$$

$$\Delta\sigma(T) = \frac{1}{(\text{Área})} \left\{ G(\phi_p(\vec{x}, j), T) - G(\bar{\phi}_2(j), T) \right\} \quad (14.d)$$

onde  $\phi_p$  denota uma solução tipo "kink" que interpola entre os vácuos  $\bar{\phi}_2(j)$  (no interior da bôlha) e  $\bar{\phi}_1(j)$  (fora dela). Das equações acima :

$$r_c(T) = \frac{2\Delta\sigma(T)}{\Delta\Gamma(T)} \quad (15)$$

Portanto,  $r_c(T^*) \rightarrow 0$  quando  $\Delta\sigma(T^*) \rightarrow 0$ . A temperatura  $T^*$  em que a tensão superficial da bôlha se anula corresponde a termos um raio crítico nulo, assinalando a impossibilidade de mantermos situações metaestáveis. Por outro lado, vimos na seção anterior, que a temperatura de transição pode ser esti

mada calculando-se o ponto em que a tensão superficial de uma parede se anula. Ainda que possa existir uma pequena discrepância numérica nos valores de temperatura entre o cálculo feito para uma bôlha finita (que leva a  $r_c(T^*) = 0$ ), e seu análogo para uma parede infinita (que leva a  $T_g = T_c$ ), espera-se que  $T^* = T_g$  (4).

Podemos, por conseguinte, associar a transição de fase à impossibilidade de manter situações metaestáveis, visto que, por menor que seja a bôlha de vácuo verdadeiro imersa no vácuo instável, ela vai-se expandir. Isto é uma indicação do grau de desordem do sistema, sugerindo que já penetramos na fase simétrica.

## REFERÊNCIAS

1. L. Landau, E. Lifchitz, "Physique Statistique", Editions Mir, Moscou (1967).
2. D. Amit, "Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena", McGraw-Hill (1978).
3. D.J. Wallace, "Perturbative approach to surface fluctuations", Les Houches Summer School (1982), editada pela North-Holland.
4. C. Aragão de Carvalho, G.C. Marques - em preparação.
5. M. Abramowitz, I.A. Stegun - "Handbook of Mathematical Functions".
6. C. Aragão de Carvalho, G.C. Marques, A.J. da Silva, I. Ventura, "Domain Walls at Finite Temperature", separata PUC/RJ.23/83 - (Agosto de 1983).
7. C.M. Bender, F. Cooper, Nucl. Phys. B224, 403 (1983);  
D.J. Callaway, D.J. Maloof, Phys. Rev. D27, 406 (1983);  
Y. Fujimoto, L. O'Riartaigh, G. Parravicini, Nucl.Phys. B212, 268 (1983).
8. C. Aragão de Carvalho, D. Bazeia, O.J.P. Éboli, G.C. Marques, A.J. da Silva, I. Ventura, "Surface Tension Temperature and the "instability" of the Effective Potential", separata IFUSP/P-478 (Julho de 1984).

9. F.W. Wiegel, *Phys.Rep.* 16C, n92, 57 (1975).
10. R.J. Rivers, *Z. Phys.* C22, 137 (1984).
11. J.L. Lebowitz, C.E. Pfister, *Phys. Rev. Lett.* 46, 1031 (1981); J. Bricmont, J.R. Fontaine, J.L. Lebowitz, *J.Stat.Phys.* 29, 193 (1982).