

DOS TRANSICIONES DE FASE EN FISICA NUCLEAR

Daniel R. Bes

Departamento de Física, CNEA, Buenos Aires, Argentina

1. Introducción

Los núcleos se distinguen de otros sistemas de muchos cuerpos por el hecho de que los nucleones son muchos pero no tantos. En consecuencia, la aplicación de conceptos provenientes de otros sistemas está sometida a exigencias suplementarias que, con frecuencia, llevan a un entendimiento más profundo de dichos conceptos. El tratamiento de una transición de fase en un sistema finito es más complicado que en un sistema infinito. Inclusive puede también ser considerado un problema carente de sentido ya que los sistemas finitos no presentan las discontinuidades que caracterizan las transiciones de fase en sistemas con infinitos grados de libertad. Sin embargo, es legítimo preguntarse qué sucede en un sistema finito en el intervalo de transición entre una zona que puede caracterizarse con un parámetro de deformación no nulo (o parámetro de orden, como lo llamarían los solidistas) y otra zona donde no es posible esa descripción.

En lo que sigue trataré de ilustrar el estado del arte en lo que se refiere a dos transiciones de fase que actualmente son objeto de especial interés en física nuclear, tanto desde el punto de vista experimental como del teórico: la transición de superfluido a normal (a medida que aumenta la frecuencia de rotación) y la aparición de una zona de la tabla periódica (actínidos) en la cual desaparece la simetría de reflexión.

2. Transición de superfluido a normal

Para bajas frecuencias de rotación el núcleo puede ser descrito por un formalismo tipo BCS. A medida que el núcleo rota más rápido, la

creciente importancia del término de cranking wj_x tiene efectos semejantes al aumento de un campo magnético en un superconductor. A partir de una frecuencia de rotación crítica no existe más una solución del tipo BCS (efecto Mottelson-Valatin¹).

Podemos calcular el valor de distintas magnitudes físicas usando la descripción tipo BCS y la normal. Nos preguntaremos si los cambios de valor correspondientes han sido medidos o no y si las dos descripciones son suficientemente correctas.

Afortunadamente conocemos desde hace tiempo un modelo ²⁾ que contiene buena parte de la física del problema y que es suficientemente simple como para que un cálculo exacto sea factible. Usaremos este modelo como guía para la generación de los conceptos teóricos que permitan una verificación experimental. El modelo (fig.1) consiste en 2Ω partículas moviéndose en dos niveles (a,d) de degeneración 2Ω y separados por la distancia 2ϵ . Los estados degenerados se caracterizan por el número cuántico m y los restantes (\bar{m}) se obtienen a partir de aquéllos por la operación reversión temporal⁺. Las partículas interactúan cuando están en estados vinculados por la reversión temporal (fuerza de apareamiento). El sistema rota con frecuencia w y tomamos igual a ± 1 los elementos de matriz no nulos del operador j_x

$$\begin{aligned}
 H &= H_0 + H_c + H_p \\
 H_0 &= \epsilon \sum_m (c_{am}^\dagger c_{am} + c_{a\bar{m}}^\dagger c_{a\bar{m}} - c_{dm}^\dagger c_{dm} - c_{d\bar{m}}^\dagger c_{d\bar{m}}) \\
 H_c &= -w \sum_m (c_{am}^\dagger c_{dm} - c_{a\bar{m}}^\dagger c_{d\bar{m}}) + h.c. \\
 H_p &= -G P^\dagger P \quad P^\dagger = \sum_m (c_{am}^\dagger c_{a\bar{m}} + c_{dm}^\dagger c_{d\bar{m}})
 \end{aligned} \tag{1}$$

+ En un núcleo deformado con simetría de reflexión conviene usar la representación de signatura en lugar de la representación correspondiente a la reversión temporal (m, \bar{m}). Para este modelo simplificado el formalismo resulta idéntico al desarrollado, ya que también podemos entender los estados (m, \bar{m}) como correspondientes a las signaturas r (+1, -1) y sólo cambiar el signo de w .

En primer lugar diagonalizamos los términos de partícula independiente $H_0 + H_c$ mediante una transformación válida para cada m por separado

$$\begin{pmatrix} b_{am}^+ \\ b_{dm}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{am}^+ \\ c_{dm}^+ \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} b_{a\bar{m}}^- \\ b_{d\bar{m}}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{a\bar{m}}^- \\ c_{d\bar{m}}^- \end{pmatrix} \quad (2)$$

los autovalores para ambas transformaciones resultan ser $\pm \xi$, donde

$$\begin{aligned} \xi_w &= (\xi^2 + w^2)^{1/2} \\ x &= (\xi + \xi_w) / [(\xi + \xi_w)^2 + w^2]^{1/2} \\ y &= -w / [(\xi + \xi_w)^2 + w^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (3)$$

El operador de apareamiento P^\dagger vale

$$\begin{aligned} P^\dagger &= (x^2 - y^2) \sum_m (b_{am}^+ b_{a\bar{m}}^+ + b_{dm}^+ b_{d\bar{m}}^+) \\ &+ 2xy \sum_m (b_{am}^+ b_{d\bar{m}}^+ - b_{dm}^+ b_{a\bar{m}}^+) \end{aligned} \quad (4)$$

El segundo término de P^\dagger (que aparece debido a la rotación) se anula al ser aplicado al estado fundamental. Por ello puede ser ignorado en un primer tratamiento. Por el contrario, el primer término da origen a los fenómenos colectivos (superfluidez, vibraciones, etc.) para los cuales resulta una constante de apareamiento efectiva

$$G_{eff} = G (x^2 - y^2)^2 = G \frac{4\xi^2 (\xi + \xi_w)^2}{[(\xi + \xi_w)^2 + w^2]^2} \quad (5)$$

Esta expresión describe el efecto Mottelson-Valatin¹⁾. Como G_{eff}/G disminuye con w y como la solución superfluida sólo aparece para valores de $G_{eff} \Omega / \xi_w$ suficientemente grandes, existe un valor w_c a partir del cual desaparece la misma.

La constante $(x^2 - y^2)$ puede también interpretarse como al coeficiente de normalización del estado fundamental cuando se usa el término de Coriolis como una perturbación.

$$\begin{aligned}
 (\kappa^2 - \gamma^2)^2 &\rightarrow 1 - w^2 \sum_{\nu} |\langle \nu | \frac{1}{j} | 0 \rangle|^2 / (\epsilon_{\nu} - \epsilon_0)^2 \\
 &\approx 1 - w^2 \bar{J} / 2 (\epsilon_{\nu} - \epsilon_0)
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

donde se ha usado la fórmula de cranking para el momento de inercia \bar{J} y una energía de excitación promedio $\bar{\epsilon}_{\nu}$, para los estados $|\nu\rangle$ conectados por j_x con el estado fundamental $|0\rangle$. Usando los valores realistas $\frac{1}{j} \approx 0.1 \text{ MeV}^{-1}$ y $(\epsilon_{\nu} - \epsilon_0) \approx 1.5 \text{ MeV}$ obtenemos un orden de magnitud para la frecuencia crítica en las tierras raras

$$\omega_c \approx [2 (\epsilon_{\nu} - \epsilon_0) / \bar{J}]^{1/2} \approx 0.5 \text{ MeV}
 \tag{7}$$

La solución superfluida rotante (RBCS) se obtiene separando, en el operador de apareamiento P^+ , su valor de expectación Δ/G del resto P'^+ :

$$\begin{aligned}
 P^+ &= \Delta/G + P'^+ \\
 H_P &= -\Delta^2/G - \Delta(P'^+ + P') - GP'^+ P'
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Los términos del Hamiltoniano $H_0 + H_c - \Delta(P'^+ + P')$ se diagonalizan mediante una transformación generalizada de Bogolubov-Valatin. En lugar de (2),

$$\begin{pmatrix} \beta_{+,m}^+ \\ \beta_{-,m}^+ \\ \beta_{+,m}^- \\ \beta_{-,m}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_+ & \gamma_+ & -\gamma_+ & -x_+ \\ x_- & \gamma_- & \gamma_- & x_- \\ \gamma_+ & -x_+ & x_+ & -\gamma_+ \\ -\gamma_- & x_- & x_- & -\gamma_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{+,m}^+ \\ c_{-,m}^+ \\ c_{+,m}^- \\ c_{-,m}^- \end{pmatrix}
 \tag{9}$$

donde

$$2\Delta/G\Omega = (\Delta+w)/E_+ + (\Delta-w)/E_-
 \tag{10}$$

y

$$E_{\pm} = [\epsilon^2 + (\Delta \pm w)^2]^{1/2} \quad (11)$$

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} [(\epsilon_{\pm} + \epsilon) / E_{\pm}]^{1/2}$$

$$y_{\pm} = \frac{1}{2} (w \pm \Delta) / [(\epsilon_{\pm} + \epsilon) E_{\pm}]^{1/2}$$

La ecuación (10) tiene una solución con $\Delta=0$ para $w < w_{\text{crit}}$ donde

$$w_c = \epsilon [(6\Omega/\epsilon)^{2/3} - 1]^{1/2} \quad (12)$$

Es decir que para $w < w_c$ existe la solución RBCS, mientras que para $w > w_c$ sólo aparece la solución normal RN. En particular, si $G\Omega/\epsilon < 1$, nunca existe una solución superfluida. Las energías de excitación del sistema (equiespaciadas) están dadas por $2n\epsilon_w$ ($n=1,2,\dots$). El parámetro de deformación Δ/G es un parámetro variacional que minimiza la energía al satisfacer (10). Determina el valor de un número importante de magnitudes físicas, que presentan una discontinuidad en la región w_c . Sin embargo, cabe la pregunta acerca de la validez de estas dos descripciones en el sistema nuclear finito.

La función de onda del tipo BCS representa una superposición de estados con distinto número de pares de nucleones, de la misma manera que una función de onda del tipo Nilsson presenta una combinación lineal de estados con distintos momentos angulares. Esta situación es inherente a la descripción del sistema por medio de un estado intrínseco que rota en un cierto espacio. Sin embargo, ha sido considerada un inconveniente, y en consecuencia han sido realizadas proyecciones de componentes con el número de exacto de partículas N . Cuando la proyección se realiza antes de la variación⁴⁾ los resultados pretenden ser superiores respecto de los obtenidos con BCS. Cálculos teóricos basados en la proyección del número de partículas en sistemas rotantes (RFBCS) muestran una disminución lenta en el valor de Δ , inclusive para frecuencias de rotación muy altas. En consecuencia algunos autores sostienen que el colapso del apareamiento no

existe en núcleos reales. Algunos han preferido no satisfacer (10) y usar la aproximación de un Δ constante, independiente de la frecuencia en el formalismo RBCS.

Recientemente las aproximaciones RBCS y RFBCS fueron analizadas dentro del contexto del modelo de dos niveles³⁾. La fig.2 muestra los valores de Δ (considerado como parámetro de minimización) en función de la frecuencia.

En ambos procedimientos existe una reducción de Δ en la zona de w_c . Pero en tanto que Δ se anula para $w > w_c$ en RBCS, se hace prácticamente constante en el caso RFBCS.

Recordemos sin embargo que Δ está directamente relacionada con magnitudes físicas medibles sólo en RBCS, además de ser un parámetro de minimización. En el caso de RFBCS es sólo un parámetro de minimización, sin interpretación física directa.

A continuación analizamos las magnitudes físicas que presentan una discontinuidad en la región w_c y discutimos cuales han sido o pueden ser medidas experimentalmente.

1) La amplitud para la transferencia de dos cuerpos representa en principio la medida dinámica más clara de la correlación de apareamiento. Ello se debe a que la suma

$$\langle N, g.s. | P^+ P | N, g.s. \rangle = \sum_v |\langle N, g.s. | P^+ | N-2, v \rangle|^2 \quad (13)$$

está dominada por el término v correspondiente al estado fundamental (g.s.) en el sistema con $N-2$ partículas. Este hecho puede verificarse tanto en la solución exacta como en la aproximación RBCS del modelo de dos niveles³⁾. Eq. (13) muestra que la energía de correlación de apareamiento es una cantidad medible, proporcional a la sección eficaz para la transferencia de un par de partículas entre las bandas de rotación correspondientes a los estados fundamentales de dos núcleos pares vecinos.

Una reducción considerable de la energía de correlación tiene lugar

para $w > w_c$ (fig.3); en particular, la energía de correlación es considerablemente menor que la obtenida a partir de una expresión del tipo $-G\Delta_{\text{RFBCS}}^2$, como se verifica también en el cálculo más realista de la fig.4. La desaparición de la energía de apareamiento en RBCS está correlacionada con la anulación de Δ . En RBFCs no existe una correlación clara de este tipo.

Cuál es la posibilidad de medir la disminución de la correlación de apareamiento a través de la disminución de la sección eficaz para la transferencia de dos nucleones?

Si bien el núcleo blanco (que suponemos deformado) está en el nivel fundamental a distancias grandes del proyectil, existe una amplitud finita para la población de niveles de la banda rotacional del blanco a la distancia de mayor aproximación. Esta es la distancia para la cual la transferencia es más probable. En principio, podría verificarse la fuerte dependencia de P^+ con w en la zona $w \approx w_c$ si la población de la banda rotacional incluyera la de estados con estas frecuencias de rotación. Lamentablemente los resultados existentes sobre dispersión inelástica no permiten abrigar demasiadas expectativas inmediatas, ya que la población de los estados de la banda γ se reduce mucho para momentos angulares superiores a la docena. El estado del arte sobre experiencias de transferencias de pares de partículas en núcleos deformados fue expuesto en la reciente conferencia de Legnaro⁵⁾. Las fig.5 (que contienen resultados preliminares) muestran la transferencia de estados de distinta energía en función de la multiplicidad de la radiación electromagnética emitida (esta magnitud es proporcional al momento angular del estado poblado). En ambas figs.5 el I_{max} poblado en la banda rotacional corresponde al intervalo 10-14. Es especialmente interesante el contraste entre los resultados obtenidos al usar el proyectil (Ni^{58}), en los que se pueblan preferentemente estados de 2 cuasi-partículas a energías de excitación entre 2 y 8 MeV, y los correspondientes al proyectil Sn^{116} . En este último caso la población de la banda rotacional basada en el estado fundamental aumenta significativamente. Es atrayente explicar la mayor sección eficaz

para el caso de transferencia entre dos superfluidos respecto a la transferencia entre un núcleo normal y otro superfluido como la primera manifestación experimental de un efecto Josephson nuclear.

ii) En la reciente conferencia de Copenhague, J. Garret⁶⁾ presentó un análisis que incluye las bandas conocidas en todos los isótopos del Yb (fig.6). En primer lugar construyó el rotiano usual (o la energía de excitación en el sistema intrínseco), sustrayendo la energía de rotación $-wJ_1$ en el laboratorio y refiriéndola a una configuración de referencia adecuada. En segundo lugar, realizó una operación semejante para rotaciones en el espacio de gauge, sustrayendo la energía de rotación $-\lambda_n N$. (ver más detalles en ref.⁶⁾). La fig.6 muestra los rotianos dobles resultantes para los isótopos del Yb. Aquellos correspondientes a estados con paridad negativa, son aproximadamente independientes de la frecuencia para frecuencias altas y no existe una preferencia para que el de menor energía aparezca en núcleos pares o impares. Este comportamiento es característico de sistemas sin correlaciones (estas últimas pueden advertirse en los estados $\pi = -$ para frecuencias menores). Sin embargo, existe una disminución sistemática de las energías intrínsecas para la configuración $(N, \pi) = (+, 0)$ (y en menor medida para la $(+, \frac{1}{2})$) respecto de las energías correspondientes a las configuraciones con $\pi = -$. Esta diferencia es mayor que 1 Mev para frecuencias pequeñas. Para $w = 0.4$ Mev se ha reducido a ≈ 250 Kev, pero no ha desaparecido del todo.

iii) El momento de inercia está dado por la expresión

$$J = \mathcal{I}_1 / \omega = \langle j_1 \rangle / \omega \quad (14)$$

donde

$$\langle j_1 \rangle = 4\Omega \langle x \cdot y \rangle = 4\Omega w (u + \epsilon_w) / \left[(u + \epsilon_w)^2 + w^2 \right]^{1/2} \quad (15)$$

para un sistema normal y

$$\langle j_1 \rangle = 4\Omega \langle x_+ \cdot y_+ + x_- \cdot y_- \rangle = \Omega \left[\frac{(w + \Delta)}{E_+} + \frac{(w - \Delta)}{E_-} \right] \quad (16)$$

para un superfluido. En el límite superfluido $\Delta \gg \omega$ los dos términos de (16) tienden a cancelarse. A medida que ω aumenta J también lo hace hasta llegar al valor dado por la solución normal para $\omega = \omega_c$ (fig.3(abajo)). El decrecimiento (lento) para $\omega > \omega_c$ es una característica no física de nuestro modelo simplificado. En ausencia de superfluidez el momento de inercia del sistema es el del cuerpo rígido con el mismo radio y masa.

Una discusión semejante a la anterior sobre la validez de la aproximación RBCS puede hacerse también en el caso del momento de inercia. Las aproximaciones RBCS, RFBCS y RN proporcionan resultados muy semejantes entre sí (que concuerdan con el valor exacto para frecuencias grandes (fig.3(abajo)), a pesar de que el parámetro de minimización RBCS permanece relativamente grande. Este resultado también aparece en cálculos más realistas en los cuales se verifica también que el momento de inercia rígido se obtiene en la aproximación RN.

Los dos ejemplos más espectaculares⁷⁾ de un momento de inercia constante son el Zr⁸⁴ y el Hf¹⁶⁸, ambos en el intervalo $22 < I < 32$ (fig.2). Si representamos la energía

$$E = \frac{1}{2J} I(\epsilon_{11}) + B J^2 (\epsilon_{11})^2 \quad (17)$$

el producto $2JB$ es del orden de 10^{-5} . Si bien en el caso del Zr⁸⁴ el valor de J es próximo al del cuerpo rígido correspondiente, en Hf¹⁶⁸ es todavía algo menor. Teóricamente es difícil pensar que la superfluidez de protones ha también desaparecido. Ambas objeciones arrojan dudas sobre la interpretación de la evidencia experimental, como verificación de la desaparición de la superfluidez.

iv) La fig.2 muestra el parámetro Δ como función de la frecuencia para nuestro modelo simplificado. El decrecimiento de Δ en un intervalo relativamente pequeño de la frecuencia sugiere la existencia de una disminución en el traslape de las funciones de onda correspondientes a dos estados sucesivos de la banda rotacional en la zona ω_c . En consecuencia, en la zona de transición, un estado dado puede decaer más fácilmente a bandas vecinas, en lugar de hacerlo al estado inferior de la

misma banda por medio de una transición E2 intensa. La fig.7 muestra ⁸⁾ el espectro del E_r^{156} . Las tres bandas de paridad negativa (3,4 y 5) y un fragmento de banda participan en una alimentación cruzada alrededor del spin 22. Es la primera vez que se encuentra un fenómeno semejante que involucre más de dos bandas y de distinta signatura. Existen cambios de estructura en esta región que debilitan la integridad de cada banda durante el proceso de reorganización. A esta frecuencia de rotación corresponde exactamente la alineación del tercer y cuarto neutrón, lo que puede originar un colapso del apareamiento de neutrones y quizás también un cambio en la deformación. Un fenómeno semejante parece tener lugar en las bandas de paridad par para $I=26,28$.

v) Las alineaciones del momento angular de las partículas dependen del apareamiento existente. Los casos más simples a investigar en los cuales puede tener lugar un colapso del apareamiento tienen un número impar de nucleones (lo que de por sí bloquea un cruzamiento). En la ref. ⁹⁾ se estudió el espectro del Ho^{157} hasta $\omega=0.5$ Mev. La alineación experimental está representada en función de la frecuencia ω en la fig. 8. Los cuatro orbitales de protones con menor energía y paridad negativa ($h_{11/2}$) se designan con las letras A_p, B_p, C_p y D_p . La signatura de A_p y C_p es $\alpha=-\frac{1}{2}$ y la de B_p y D_p , $\alpha=\frac{1}{2}$. Para bajas frecuencias las dos bandas existentes corresponden a las dos signaturas originadas en el nivel $(523\frac{7}{2})$. Para $\omega \approx 0.27$ Mev ambas bandas están cruzadas por configuraciones de 3 cuasi-partículas, 2 de las cuales corresponden a neutrones $i_{13/2}$ alineados. La alineación de protones (A_p, B_p) está bloqueada (esta alineación se observa en la banda yrast del Er^{158} a $\omega=0.43$ Mev). En cambio, se observa un cruce a $\omega=0.48$ MeV en la banda $\alpha=-\frac{1}{2}$ y a 0.54 Mev en la $\alpha=\frac{1}{2}$ y se interpretan por medio de la alineación de los pares (B_p, C_p) y (A_p, D_p), respectivamente. Tanto la frecuencia de cruzamiento como la magnitud de la alineación están bien reproducidas por cálculos teóricos del tipo RBCS con $\xi_2=0.21$, $\xi_4=-0.018$, $\gamma=0$ y $\Delta_p=1.2$ Mev. Para $\omega \approx 0.9$ Mev, la alineación no se reproduce teóricamente, debido a que los

orbitales A_p y B_p quedan demasiado ocupados.

Lamentablemente, existe un cálculo alternativo¹⁰⁾, que da cuenta de los mismos cruzamientos poniendo el énfasis en cambios en la deformación triaxial y suponen ausencia de apareamiento.

En resumen, la evidencia experimental indica (o en otros casos no contradice) una disminución grande de las correlaciones debidas al apareamiento entre nucleones, aunque también sugiere que no ha desaparecido totalmente. La evidencia más cuantitativa aparece en el análisis de los rotianos dobles, y obviamente está afectada por las aproximaciones usadas en construirlos. La existencia de un efecto Mottelson-Valatin atenuado también es predicha por los cálculos teóricos. En particular, los cálculos efectuados usando un formalismo BCS con constante no son válidos para frecuencias de rotación altas.

La solución RFBCS, si bien proporciona resultados consistentemente mejores que las aproximaciones RBCS y RN en la zona alrededor de w_c , se hace muy engorrosa al tratar las bandas excitadas, debido a la falta de ortogonalidad de las funciones de onda proyectadas correspondientes al mismo número de partículas. Es posible usar una representación alternativa para mejorar tanto la descripción RBCS como la RN. Está basada en la idea de que la correlación de apareamiento debe manifestarse principalmente en forma dinámica en la zona de transición, en términos de fluctuaciones de Δ alrededor de su posición de equilibrio.

Las soluciones conocidas para las vibraciones de apareamiento¹¹⁾ en el modelo de dos niveles pueden ser fácilmente extendidas al caso rotante¹²⁾. En la zona "normal" existen dos fonones, uno de adición P_a^+ que crea el estado de un fonón en el núcleo con $N+2$ partículas y otro de remoción P_r^+ que crea el otro estado de un fonón en el núcleo con dos partículas menos. Ambos fonones tienen la misma frecuencia W dada por la expresión:

$$W = 2\epsilon_w (1 - \epsilon^2 G \Omega / \epsilon_w^2)^{1/2} \quad (18)$$

que se anula para $w=w_c$ (eq.(12)). Los estados excitados del sistema de N partículas se obtienen, como superposición de dos fonones $|\uparrow_a^+ \uparrow_r^+\rangle$ y tienen energía de excitación $2W$. La energía de correlación debida a la interacción de apareamiento es la energía del punto cero de los dos vibradores menos la energía de correlación de los mismos vibradores en ausencia de la interacción de apareamiento (en este caso en el modelo de capas).

$$E_{\text{corr}} = \frac{1}{2} (2W - 4\epsilon_w) = W - 2\epsilon_w \quad (19)$$

En la zona superfluida se obtienen tres fonones, uno de ellos con frecuencia nula y otros dos con frecuencias W_{\pm}

$$W_{\pm} = [2(E_+^2 + E_-^2) - G\Omega^2(E_+ + E_- \pm F)/E_+ E_-]^{1/2} \quad (20)$$

donde

$$F = [(E_+ - E_-)^2 [2E_+ E_- (E_+ + E_-)/G\Omega^2 + 1]^2 + 4E_+ E_-]^{1/2} \quad (21)$$

y E_+ , E_- están dadas en (8). El estado de frecuencia nula es el estado espúreo, y el espectro de excitación está dado en la fig.9. La energía de correlación se obtiene en (19) sustrayendo a la energía de punto cero de los tres fonones las energías correspondientes de las excitaciones de cuasipartículas $2E_+$, $2E_-$ y $E_+ + E_-$.

$$E_{\text{corr}} = \frac{1}{2} [W_+ + W_- - 3(E_+ + E_-)] \quad (22)$$

Las correcciones (19) y (22) a la energía del estado fundamental RBCS y $\mathcal{R}N$ aproximan el valor calculado al valor exacto (fig.10(arriba)). Si bien E_{corr} resulta continua para $w=w_c$, su derivada no lo es. La discontinuidad introduce una singularidad en el cálculo del momento angular definido como

$$i' = i - \frac{d}{dW} E_{\text{cor}} \quad (23)$$

En la práctica, esta discontinuidad puede ser obviada interpolando entre las dos soluciones arriba y abajo de w_c . El momento angular resulta así también muy próximo al valor exacto (fig.10(abajo)). Sin embargo, salvar esta dificultad con métodos más rigurosos es un desafío importante cuya solución nos permitirá entender mejor el problema de las transiciones de fase desde el punto de vista microscópico.

3. Deformación sin simetría de reflexión

Una segunda transición de fase que hoy en día atrae el interés de muchos físicos nucleares corresponde a la existencia de una deformación sin simetría de reflexión.

La configuración intrínseca correspondiente al equilibrio en núcleos deformados con simetría de reflexión contiene una superposición de estados con la misma paridad pero distinto momento angular (fig.11). La simetría esférica es restituida mediante una proyección. Con ella se obtiene el estado fundamental de una banda rotacional, en el cual todas las orientaciones de la función intrínseca tienen igual probabilidad. La proyección de otros momentos angulares proporciona estados próximos en energía. El hecho de que todos provengan de una misma configuración intrínseca se manifiesta mediante transiciones colectivas intensas $E2$ entre ellas. El fenómeno análogo para el caso de una asimetría de reflexión es el doblete de paridad (fig.11) cuyos estados están conectados por transiciones $E1$ y $E3$ que reflejan los momentos dipolares y octupolares intrínsecos.

Si se examina una sistemática de los estados de paridad impar, aparece una región con excitaciones muy bajas en la zona de los actínidos. También en esta región los cálculos teóricos predicen la existencia de deformaciones octupolares.

En la desintegración electromagnética domina la componente $E1$, en tanto que los elementos de matriz $E3$ pueden obtenerse mediante excitación coulombiana. El momento dipolar colectivo proviene del hecho de que el centro de masa de los protones no coincide con el centro de masa total en presencia de una deformación sin simetría axial. Es difícil relacionar el valor de la deformación octupolar con el del cociente $B(E1)/B(E2)$. (Bohr y Mottelson y Strutinsky obtuvieron signos distintos para el momento dipolar usando diferentes suposiciones en el modelo de la gota líquida).

Si el estado $3/2^+$ en Ac^{227} se interpretase como el miembro superior del doblete de paridad asociado con el estado fundamental, su vida media, (41ns) implica una transición $E1$ dos órdenes de magnitud más rápida que la calculada a partir de la transición entre los estados ($651\ 3/2$) y ($532\ 3/2$), aún sin reducción debida al apareamiento. Resultados semejantes se obtienen en casos en que la transición $E1$ compite con una transición $E2$ que puede estimarse por otros medios.

Mientras que en el caso molecular la separación de energía de los dobletes de paridad es pequeño respecto de la escala normal de las energías de excitación, en el caso nuclear es del orden de la diferencia entre las energías de cuasipartículas. Hasta ahora, no sabemos cómo extraer información útil de la separación en un doblete sobre la magnitud de la deformación octupolar ni sobre su estabilidad. La presencia de una deformación estable sin simetría de reflexión debe probarse entonces en base a la similitud de las configuraciones intrínsecas correspondientes a los dos miembros del doblete.

Existe una descripción alternativa a la caracterizada por un parámetro de deformación distinto de cero. Como en el caso de la transición de fase de superfluido a normal, esta descripción emplea las oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio con simetría de reflexión. El segundo miembro del doblete es descrito como el estado de un fonón. En la ref.13) se discuten las dificultades para distinguir fenomenológicamente entre ambas descripciones en un núcleo impar. Nosotros nos limitaremos a enumerar diferencias y similitudes entre la solución con rompimiento es-

tático de simetría de reflexión y una solución sin ningún rompimiento, ya sea estático o dinámico.

Analizaremos en primer lugar la evidencia proveniente de núcleos impares con bajo momento angular. Suponemos nuevamente un modelo de dos niveles con distinta paridad y separados por la distancia $2\varepsilon_3$. Sea $-V$ el elemento de matriz del potencial entre estados con distinta paridad. En las bases simétrica y antisimétrica (respecto de la reflexión) las matrices que representan el hamiltoniano y la paridad de las partículas son, respectivamente

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_3 & -V \\ & -\varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_\pi & 0 \\ & -\varepsilon_\pi \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\varepsilon_3 & -V \\ & \varepsilon_3 \end{pmatrix} + \varepsilon_\pi^{-1} \quad (25)$$

donde

$$\varepsilon_\pi = (\varepsilon_3^2 + V^2)^{1/2} \quad (26)$$

1) Para referir la separación E' en el núcleo impar a la del núcleo par E , observamos que en el par existe una energía "rotacional" $\frac{E}{2}(1-P)$ donde P es el operador paridad del "rotor". Con un razonamiento análogo al del modelo partícula-rotor, reemplazamos P por $p\pi$, donde p es la paridad total del sistema. El término $-\frac{E}{2}\pi p$ constituye una "interacción de Coriolis" cuyo valor de expectación da la separación (f.f. (25)).

$$E' = E \langle \pi \rangle = E \varepsilon_3 / \varepsilon_\pi \lesssim E \quad (27)$$

Es decir que los separaciones en los núcleos impares deben ser algo menores que en los pares. Cálculos detallados con el modelo de Nilsson sin simetría de reflexión, incluyendo la fuerza de apareamiento y usando el procedimiento (27) producen los niveles y dobletes en Ac y Ra

(fig.13). No obstante, las energías de cabeza de banda en los isótopos del actinio están igualmente bien predichas con o sin deformación octupolar presente. Sin embargo, en Ra^{225} el modelo que incluye una deformación octupolar razonable predice correctamente el nivel $1/2^+$ como estado fundamental, mientras que en el modelo con simetría de reflexión el candidato más bajo está a 850 Kev.

ii) Para relacionar el factor de desacoplamiento de los dos estados pertenecientes a un doblete de paridad construimos estados de paridad definida $\Psi_{p,\kappa}$ acoplando los autovectores u_κ de la matriz (24) a las dos funciones ϕ_a y ϕ_b que representan imágenes especulares del carozo ($P\phi_a = \phi_b = R_1\phi_a$ y viceversa).

$$\Psi_{p,\kappa} = \frac{1}{\sqrt{2}} (11P\phi_a) \phi_a + \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_a u_\kappa + P\phi_b \pi u_\kappa) \quad (28)$$

El factor de desacoplamiento está dado por

$$\begin{aligned} a &= \langle \Psi_{p,1/2} | j_1 R_1 | \Psi_{p,1/2} \rangle \\ &= P \langle u_{1/2} | \pi j_1 R_1 | u_{1/2} \rangle = P \sum_{\kappa} \langle u_{1/2} | j_1 R_1 | u_{\kappa} \rangle \end{aligned} \quad (29)$$

es decir, que debe ser el mismo en valor absoluto y de distinto signo para los dos miembros del doblete. La evidencia experimental está resumida en la tabla I donde existen casos que requieren la presencia de la deformación octupolar.

iii) La influencia de la deformación sin simetría de reflexión en los elementos de matriz magnéticos se hace más notoria cuando se mezclan orbitales con orientaciones opuestas del spin. Cerca de la superficie de Fermi existen los pares de niveles de protones ($[532\downarrow]$; $[651\uparrow]$) $3/2$ y ($[523\downarrow]$ y $[642\uparrow]$) $5/2$. El dato experimental para $\langle s_z \rangle$ en Ac^{227} coincide con el valor predicho con la simetría octupolar, muy cercano a cero.

iiii) Existen transiciones alfa con cambio de paridad tan favorecidos como las que conservan paridad.

En segundo lugar analizamos la evidencia proveniente de estados con

frecuencia de rotación alta. Combinamos el modelo de dos niveles de la primera sección (eq.(1)) con el modelo de dos niveles usado en (29). Los cuatro niveles resultantes de partícula independiente se distinguen por el número cuántico $v=(a,d)$ y la paridad $\lambda=(+,-)$. $2\epsilon_3$ es la distancia entre dos niveles de distinta paridad y mismo v y $2\epsilon_2$ la distancia entre dos niveles (a,d) con la misma paridad. La matriz del hamiltoniano vale

$$(30) \quad \begin{pmatrix} \epsilon_3 + \epsilon_2 & w j^- & -V & 0 \\ w j^- & \epsilon_3 - \epsilon_2 & 0 & -V \\ -V & 0 & \epsilon_2 - \epsilon_3 & w j^+ \\ 0 & -V & w j^+ & -\epsilon_2 - \epsilon_3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_n + \epsilon_2 & w(\epsilon_2^- + \epsilon_2^+) & 0 & wxy(j^+ - j^-) \\ w(\epsilon_2^- + \epsilon_2^+) & \epsilon_n - \epsilon_2 & wxy(j^+ - j^-) & 0 \\ 0 & wxy(j^+ - j^-) & \epsilon_2 - \epsilon_n & w(\epsilon_2^+ - \epsilon_2^-) \\ wxy(j^+ - j^-) & 0 & w(\epsilon_2^+ - \epsilon_2^-) & -\epsilon_2 - \epsilon_n \end{pmatrix}$$

en la base inicial y en la base que diagonaliza el hamiltoniano si la frecuencia de rotación es nula, j^- y j^+ son los elementos de matriz del operador j_x

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= (\epsilon_3^2 + V^2)^{1/2} \\ x &= (\epsilon_3 + \epsilon_n) / [(\epsilon_3 + \epsilon_n)^2 + V^2]^{1/2} \\ y &= -V / [(\epsilon_3 + \epsilon_n)^2 + V^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (31)$$

Supongamos que el estado intruso tenga paridad negativa, en cuyo caso $j^- > j^+$. En la segunda base (sin simetría de reflexión) los elementos de matriz del operador j_x resultan promediadas dando lugar a un mejor espectro de rotación.

Si $j^- = j^+ = j$, la matriz (30) tiene autovalores $+W_2$ y $-W_2$, donde

$$W_2 = \epsilon_n \pm \epsilon_w = \epsilon_n \pm (\epsilon_2^2 + w^2 j^2)^{1/2} \quad (32)$$

El modelo simplificado predice alineaciones cuando dos raíces coinciden. Esto sucede para la frecuencia de rotación

$$w = (\epsilon_3^2 - \epsilon_2^2 + V^2)^{1/2} / j \quad (33)$$

que anula W_- . La frecuencia del cruce aumenta con la deformación octupolar. Tanto la distribución más uniforme de las alineaciones como el aumento de la frecuencia de rotación se verifican en cálculos detallados¹⁴⁾ y experimentalmente (fig. 19).

Como conclusión podemos decir que en la zona del Ac-Ra existe una evidencia suficiente de la existencia de efectos asociados con una deformación sin simetría de reflexión.

Si bien varios resultados discutidos en lo que antecede dependen sólo de una deformación sin simetría de reflexión (ya sea ésta dinámica o estática), su efectivización a nivel microscópico se efectúa por medio de un término de deformación octupolar añadido al hamiltoniano de Nilsson. Existe sin embargo una imagen física alternativa consistente en un sistema dinuclear (partícula alfa)-núcleo. Como en el caso de una molécula diatómica asimétrica, el espectro correspondiente también está caracterizado por dobletes de paridad. Si el cociente Z/A del núcleo grande es distinto al valor $1/2$ correspondiente a la partícula alfa, aparece un momento dipolar

$$D = e 4R_0 (N-2) A^{-2/3} \quad (34)$$

que también es del mismo orden que los observados experimentalmente.

La distancia alfa-núcleo puede tener también un valor estático o un significado dinámico. En ambos casos, el modelo alfa-núcleo origina también un momento octupolar no nulo. En consecuencia, es legítimo preguntarse hasta qué punto este modelo responde a una realidad física del modelo octupolar. Entiendo que no existe todavía una respuesta a esta pregunta.

El sistema dinuclear ha sido recientemente descrito¹⁵⁾ mediante una generalización del modelo IBA en la cual, además de los seis bosones usuales (s^+, d_m^+), se introducen cuatro bosones \underline{b} (s_m^{x+}, p_m^+). Los productos bilineares generan un álgebra con distintas cadenas de grupos que permiten diagonalizar un hamiltoniano construido en los operadores de

Casimir correspondientes. La cadena más conveniente resulta ser

$$U_a(6) \otimes U_b(6) \supset SU_a(3) \otimes U_b(3) \supset SU(3) \supset O(6) \supset O(4) \quad (35)$$

Se han usado dos configuraciones: una con $N_a=N$; $N_b=0$ (designada $O\alpha$) y otra con $N_a=N-2$ y $N_b=2$ (designada β), donde N es el número total de fonones (mitad de los fermiones de valencia). Para cada una de estas configuraciones vale un hamiltoniano expresable en operadores de Casimir de la cadena (35), a los que se añade un término.

$$H_{ab} = \xi L_a \cdot L_b \quad (36)$$

y otro que mezcla las configuraciones

$$H' = \delta (L_a^2 - L_b^2) + h \quad (37)$$

El caso mejor discutido es el del Th^{230} , cuyo espectro experimental y teórico aparece en la fig. 14. Para entender la naturaleza de este ajuste notemos que las cuatro bandas rotacionales obedecen bien a la ley $L(L+1)$ y que tres de los cuatro momentos de inercia (correspondientes a las bandas $K_n^{\pi}=0_2^+, 0_1^-$ y 1_1^-) son experimentales muy próximos entre sí. En el modelo existen cinco parámetros libres (además de ξ y δ (eqs. (36) y (37))). Se ajustan con ellos los dos momentos de inercia mencionados y las tres energías de cabezas de banda. δ se usa para reproducir el cociente

$$R_L = \frac{B(E1, L \rightarrow (L+1))}{B(E1, L \rightarrow (L-1))} \quad (38)$$

que es aproximadamente constante para cada L y que experimentalmente concuerda con los cocientes de Alaga. El parámetro δ se usa para ajustar el factor de impedimento (hindrance factor) suponiendo para la

desintegración alfa un operador de la forma

(39)

Hasta ahora el valor predictivo del modelo ha sido nulo pues se han introducido tantos parámetros como resultados. En ref.¹⁵⁾ se discuten también los cocientes entre las intensidades de la transición monopolar $0_2^+ \rightarrow 0_1^+$ y la cuadripolar $0_2^+ \rightarrow 2_1^+$ y las secciones eficaces (p, t) y (t, p) relativas al estado fundamental así como el comportamiento sistemático de estas magnitudes en la zona de los actínidos. Estas magnitudes se reproducen sin introducir nuevos parámetros, aunque sí haciendo suposiciones análogas a (30) sobre los operadores correspondientes.

No es por ahora posible hacer una versión microscópica del modelo debido al estado insatisfactorio de la teoría de formación de partículas alfa, por lo menos para núcleos pesados. La inclusión de un fonón f^+ es posiblemente importante para obtener una imagen bosónica correcta, de la misma manera que se requiere un bosón g^+ para representar buenos rotores.

La descripción de un sistema de bosones mediante la aproximación autoconsistente de Hartree-Bose¹⁶⁾ puede constituirse en un método alternativo válido para tratar sistemas que involucren varios bosones distintos. El estado fundamental se torna un condensado de N bosones

(40)

(41)

donde λ_m^+ crea un fonón con momento angular λ y proyección m y los x_λ son parámetros de minimización. Si se incluye en (41) $\lambda=2$ como $\lambda=3$, tanto la simetría esférica como la de reflexión quedan rotas. Esta última puede recuperarse mediante una proyección

$$|Nk\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \left[(c_1^\dagger)^N + n(c_2^\dagger)^N \right] |0\rangle \quad (42)$$

Un tratamiento análogo vale para los estados excitados. En la segunda ref.¹⁶⁾ se diagonaliza una interacción esquemática que contiene una fuerza cuadrípolar y octupolar en función del peso relativo de ambas, inclusive en la zona de transición de fase entre zonas donde predominan una u otra.

Abstract o Conclusiones (indistintamente)

Hemos presentado el estado actual del problema asociado con dos transiciones de fase que en este momento centran el interés de un buen número de físicos nucleares. Una se refiere a la desaparición de la superfluidez nuclear a medida que aumenta la velocidad de rotación; la otra, a la aparición de una deformación octupolar en la zona de los actínidos. Debido tanto a la complicación inherente a la caracterización de una transición de fase en un sistema finito desde el punto de vista teórico, así como a las dificultades experimentales y de interpretación de los resultados obtenidos, ambas regiones de transición constituyen un problema que está lejos de encontrarse resuelto.

Bibliografía

- 1) B.R.Mottelson y J.G.Valatin, Phys.Rev.Lett. 5 (1960) 511.
- 2) J.G.Valatin, Lectures in Theoretical Physics, University of Colorado, Boulder, 60, U.S.A. IV (1961)1; J.Krumlinde y Z.Szymanski, Ann. of Phys. 79 (1973) 201.
- 3) W.Nazariewicz, J.Dudek y Z.Szymanski, Nucl.Phys. A436 (1985) 139.
- 4) P.Ring y P.Schuck, The nuclear many-body problem (Springer, New York, 1980)
- 5) M.Guidry, a aparecer en los Proc. of the Conf.on Struct. with Heavy Ions, Legnaro, 1985.
- 6) J.D.Garret, Niels Bohr Centennial Conf., Nucl. Struct. 1985. North Holland, Amsterdam (1985) 111.
- 7) H.G.Price et al., Phys.Rev.Lett. 51 (1983) 1847; R.Chapman et al., Phys.Rev.Lett. 51 (1983) 2265.
- 8) S.F.Stephens, M.A.Deleplanque, R.M.Diamond, A.O.Macchiavelli y J.E.Draper, Phys.Rev. Lett. 54 (1985) 2584.
- 9) J.Simpson et al., Phys.Rev.Lett. 54 (1985) 1132
- 10) I.Bengtsson e I.Ragnarsson, Phys.Lett.
- 11) D.R.Bes y R.A.Brogliá, Nucl.Phys. 28 (1966) 289
- 12) Z.Szymanski, Niels Bohr Centennial Conf., 1985 Nucl.Struct., North Holland, Amsterdam, (1985) 343;
D.R.Bes, R.A.Brogliá, V.Nazariewicz y Z.Szymanski, a publicarse.
- 13) G.A.Leander y R.K.Sheline, Nucl.Phys. A413 (1984) 375.
- 14) W.Nazariewicz, P.Olander, I.Ragnarsson, J.Dudek y G.A.Leander, Phys.Rev.Lett. 52 (1984) 1272.
- 15) F.Iachello y A.D.Jackson, Phys.Lett. 108B (1982) 151; H.Daley y F.Iachello, Phys.Lett. 131B (1983) 281; H.Daley, a aparecer en los Proc. of the Conf. on Nucl.Struct. with Heavy Ions, Legnaro, 1985.
- 16) J.Dukelsky, G.G.Dussel, R.P.J.Perazzo, S.L.Reich y H.M.Soffa, Nucl.Phys. A425 (1984) 93; J.Dukelsky, R.P.J.Perazzo, S.L.Reich y H.M.Soffa, Phys.Lett.

- Fig.1) El modelo simplificado de dos niveles.
- Fig.2) Valores de equilibrio del parámetro Δ versus frecuencia de rotación para las versiones RBCS y RFBCS del cálculo³⁾.
- Fig.3) Dependencia de la energía de correlación de apareamiento $G\langle P^+P \rangle$ (arriba) y de los momentos de inercia J (abajo) de la frecuencia ω . Las distintas curvas denotan distintas versiones del cálculo, tal como indicado en la figura³⁾.
- Fig.4) $\langle P^+P \rangle$ y $(\Delta/G)^2$ versus frecuencia para la banda s del sistema con $N=96$, calculados en un RFBCS Woods-Saxon³⁾. Los parámetros de deformación han sido fijados por medio de un estudio extensivo de las propiedades de alto spin en los isotonos $N=96$
- Fig.5) Comparación (preliminar) de la energía de los estados poblados⁵⁾ versus multiplicidad en la reacción de captura de dos neutrones $Dy^{162} \rightarrow Dy^{160}$ inducida por los proyectiles Ni^{58} (285 Mev) y Sn^{116} (638 Mev).
- Fig.6) Routhianos dobles para los isótopos del Yb $N=89-100$ representados en función de la frecuencia para λ_n constante⁶⁾, donde λ_n es el parámetro de Lagrange introducido en BCS para fijar el número de neutrones. Las configuraciones están caracterizadas por los números cuánticos \bar{M}, α .
- Fig.7) Esquema de niveles del Er^{156} (ref. 8).
- Fig.8) El momento angular alineado i en función de la frecuencia rotacional para las bandas observadas en Ho^{157} y para la banda yrast en Er^{158} (ref. 9)

- Fig.9) El espectro de excitación de cuasi partículas, $2E_+$, $2E_-$ y E_+E_- (omitido) para $w < w_c$ y de partículas, $2\epsilon_w$, para $w > w_c$ junto con la energía de los estados de un fonón W_- y W_+ ($w < w_c$) y $2W$ para $w > w_c$ (ref. ¹²).
- Fig.10) La energía del estado fundamental (arriba) y el momento angular I_x (abajo) incluyendo las correlaciones debidas a las oscilaciones de apareamiento, antes y después de la frecuencia crítica ¹².
- Fig.11) Rompimiento de la simetría rotacional (arriba) y de la simetría de reflexión (abajo). Las figuras del medio representan al núcleo en el sistema de referencia intrínseco y las a la derecha, su proyección al sistema de laboratorio ¹³.
- Fig.12) Niveles de cuasipartículas independientes en isótopos del actinio y radio ¹³. Los niveles experimentales (columna del medio) se comparan con los niveles calculados sin simetría de reflexión (derecha) y con simetría de reflexión (izquierda).
- Fig.13) El momento angular I_x versus la frecuencia rotacional calculada ¹³ para bandas en Th^{222} con simetría de reflexión (curvas punteadas) y sin ella (curva llena).
- Fig.14) Niveles de energía ¹⁵ experimentales y teóricos en Th^{230} para dos bandas de paridad positiva (a) y dos bandas de paridad negativa (b).

Tabla 1: Factores de desacoplamiento en bandas con $K=1/2$.

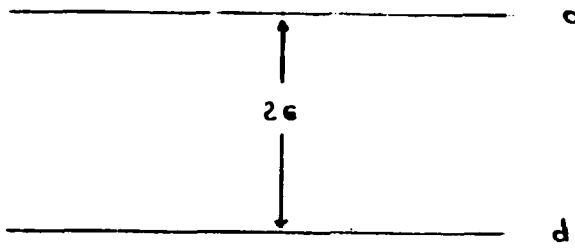


Fig. 1.

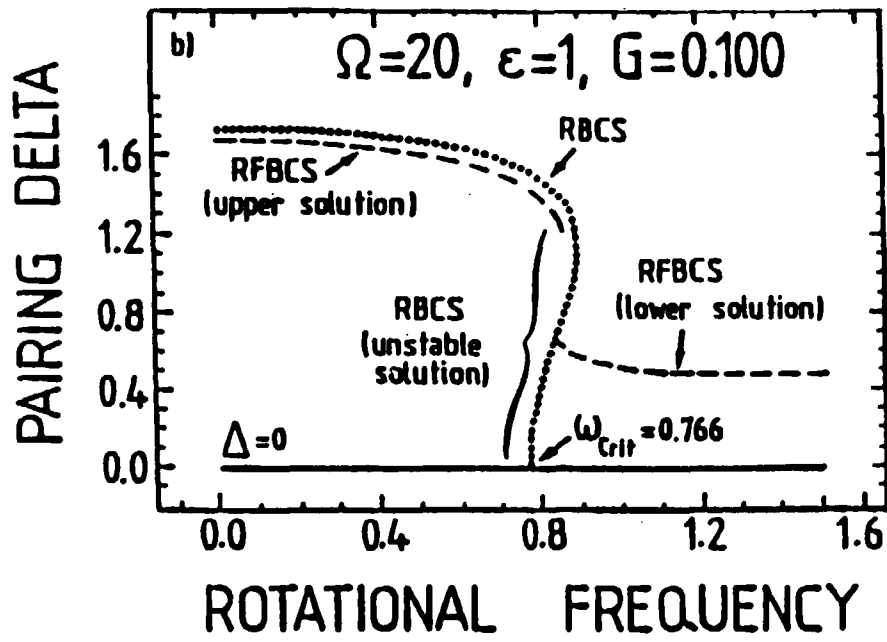


Fig 2.

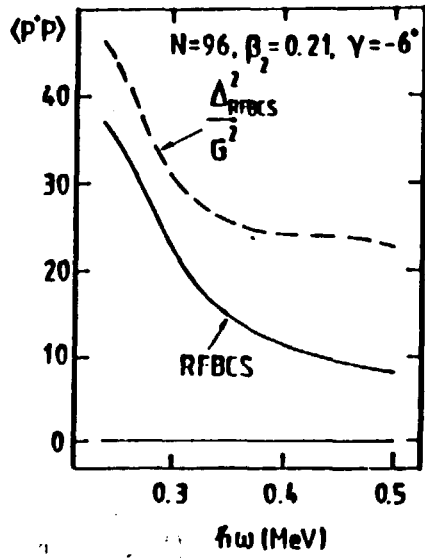


Fig. 4. $\langle P^2 \rangle$ vs $\hbar\omega$ (MeV)

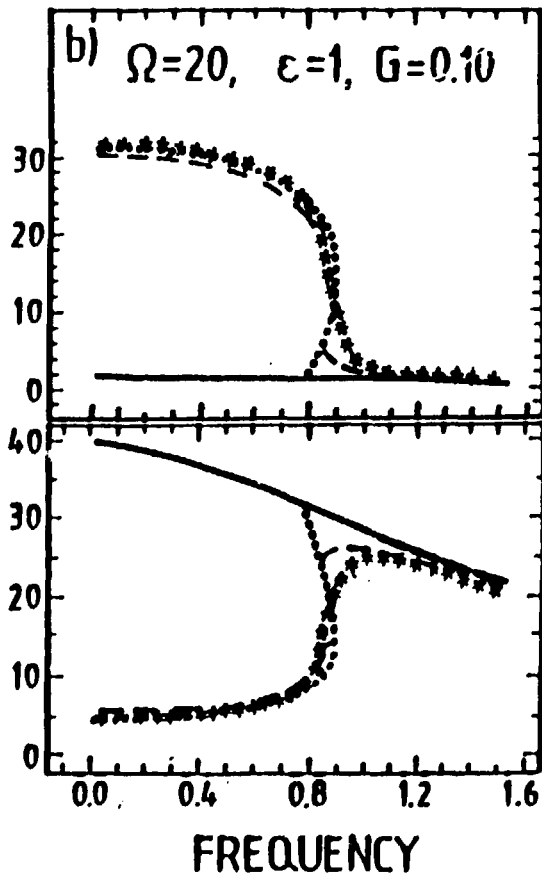


Fig. 3. $\langle P^2 \rangle$ vs FREQUENCY

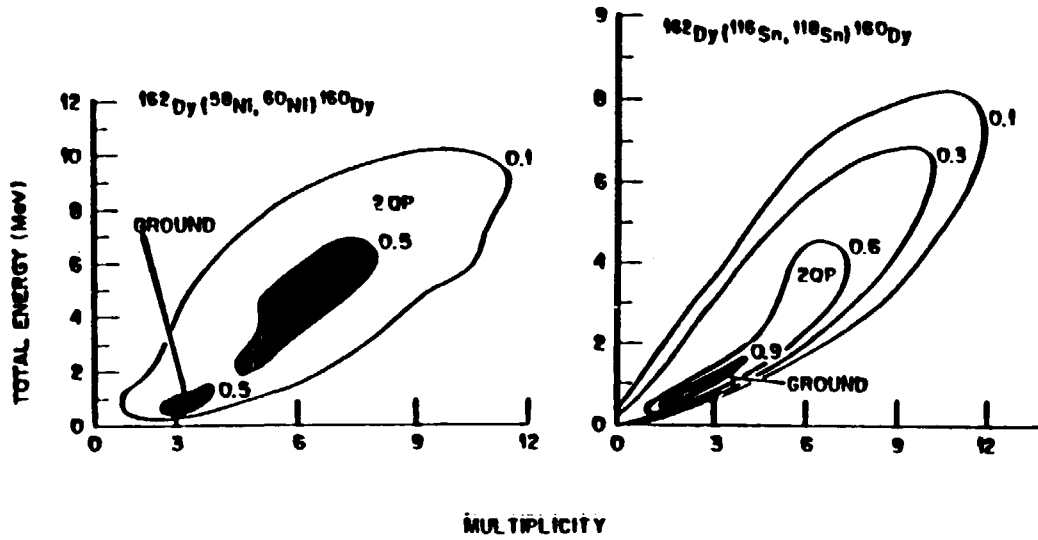


Fig. 5.

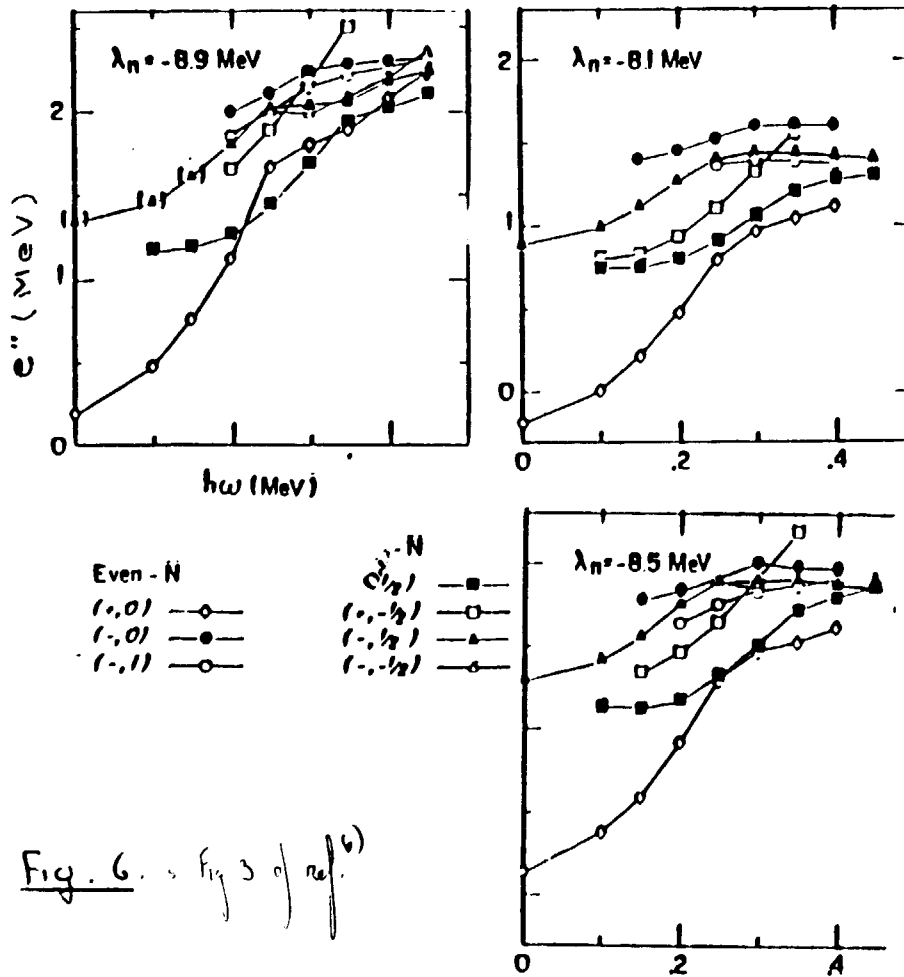


Fig. 6. = Fig 3 of ref. (6)

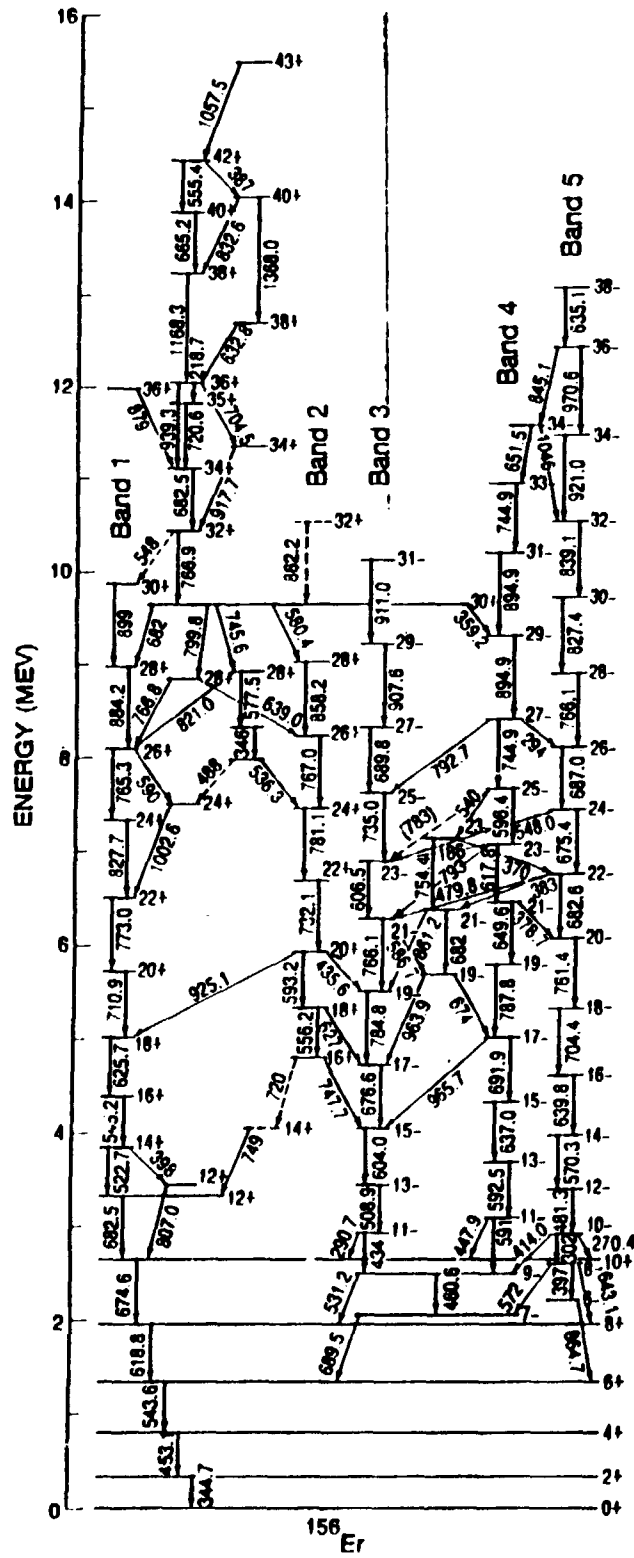


Fig. 1.1.1. (1)

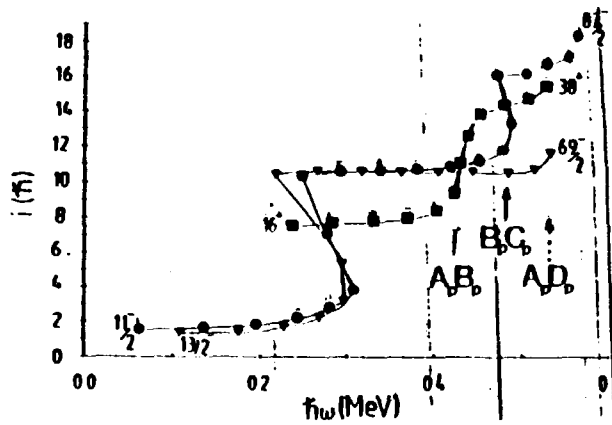


Fig 8 = Fig. 1 (ref. 2)

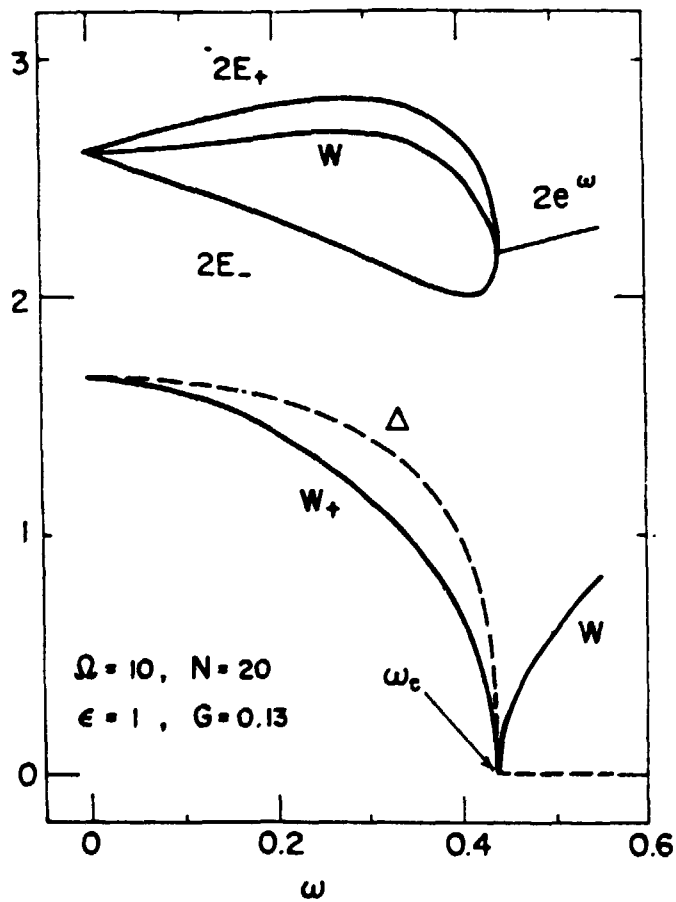


Fig 9

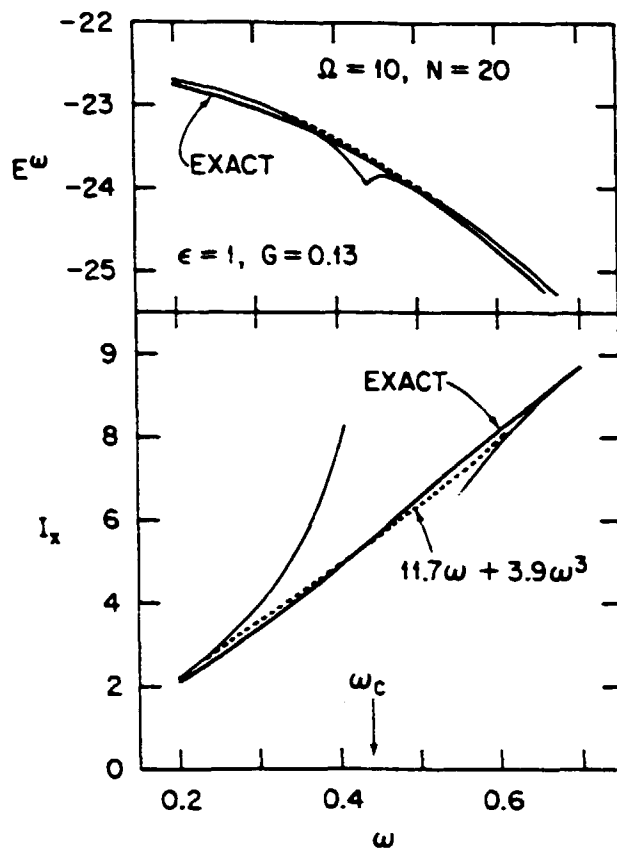


Fig 10

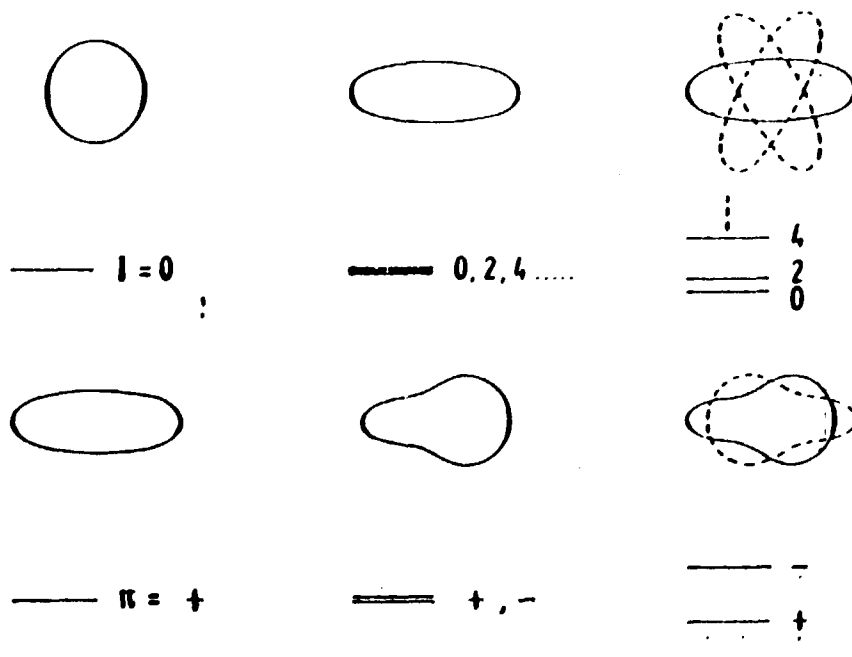


Fig. 11 = fig 1 de ref. (13)

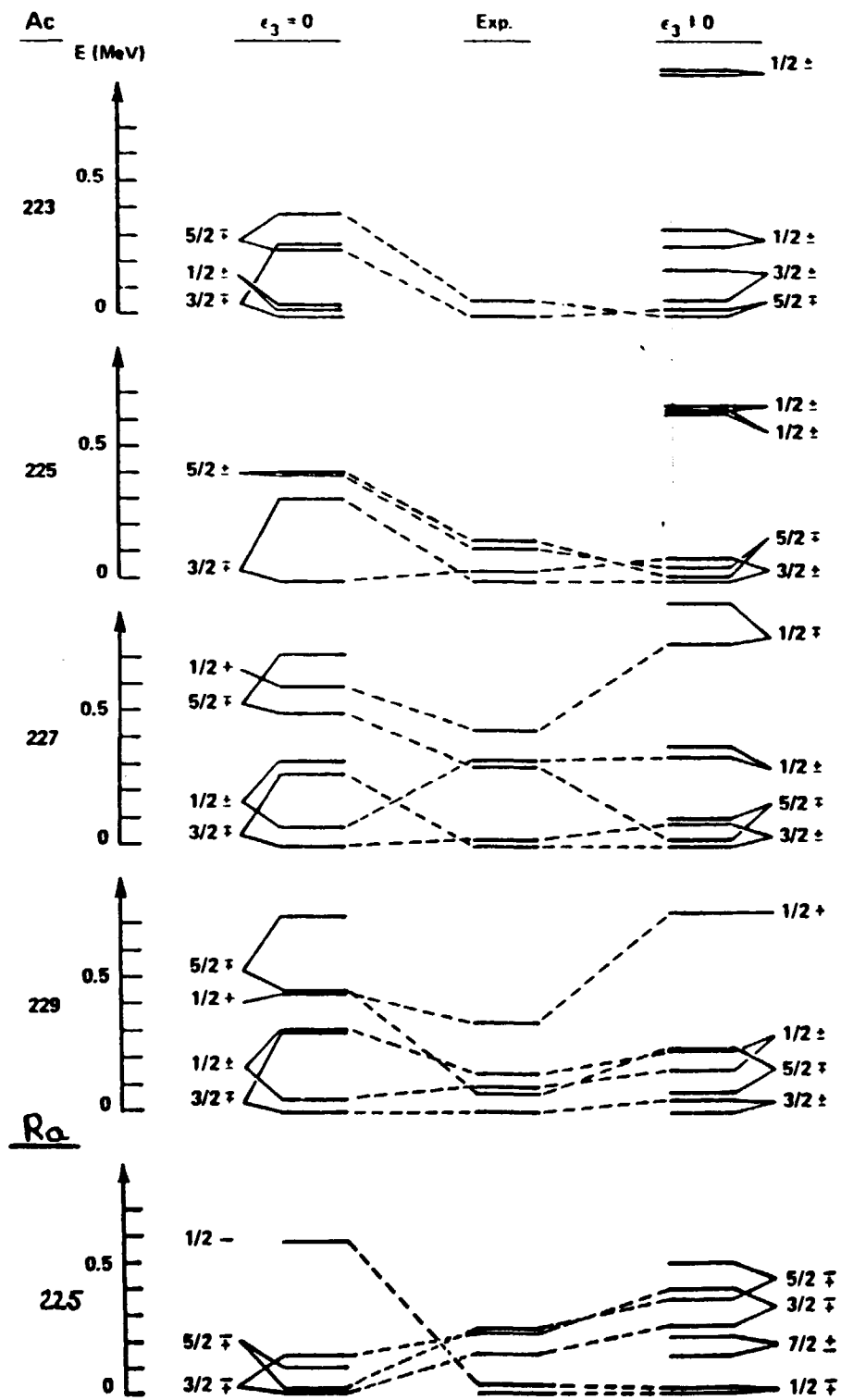


Fig. 12 = Fig. 113 - (p. 13) (spectra presented above (p. 12a, 12b))

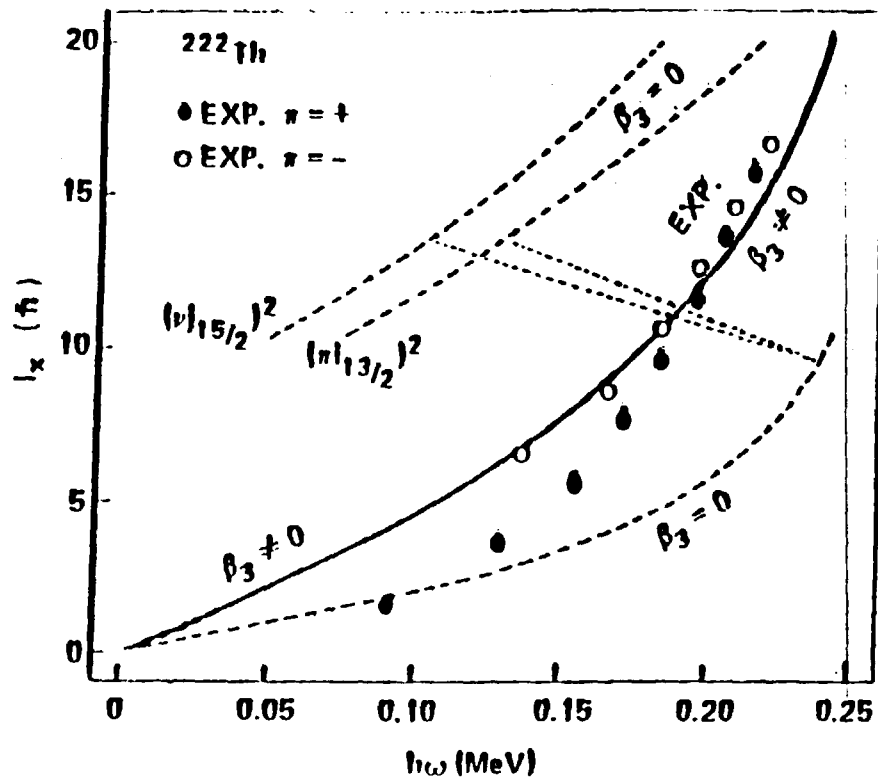


Fig. 13 = (13) (11)

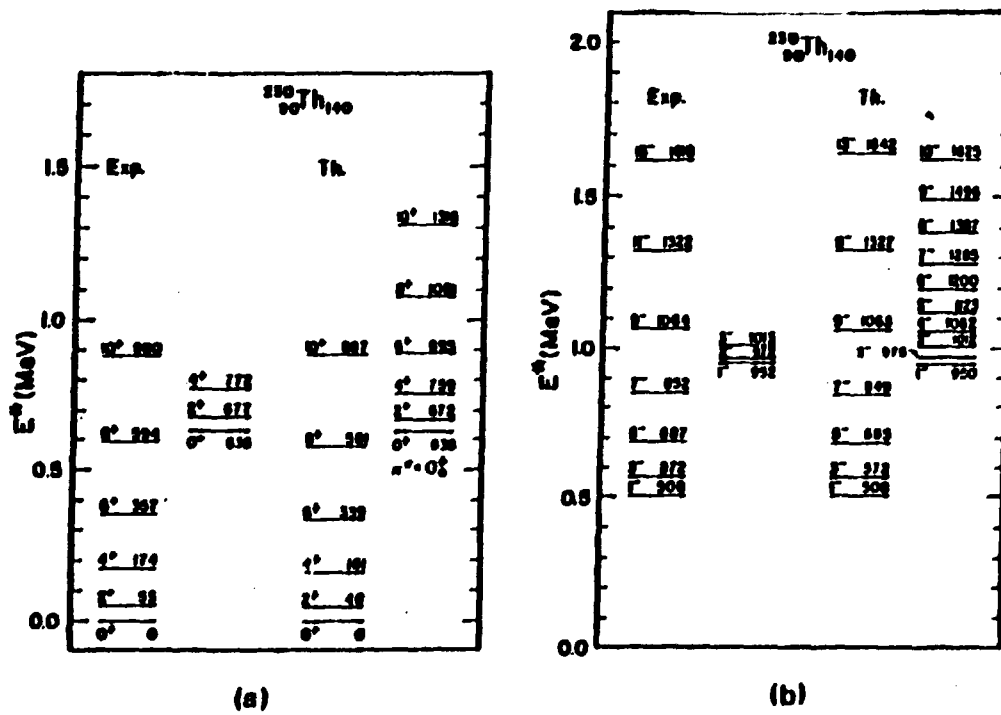


Fig. 14

Nucleo	p	ap				
		$\epsilon_j = 0$	$\epsilon_j \neq 0$	$\epsilon_j = 0$	exp	$\epsilon_j \neq 0$
^{221}Ac	+	640	541	6.7		} -2.4
	-	530		2.8		
^{223}Ac	+	640	541	6.5		} -1.8
	-	530		2.3		
^{225}Ac	+	640	541	6.4		} 2.3
	-	530		2.2		
	+					} -1.2
	-					
^{227}Ac	+	660		5.9	4.6	} 3.1
	-	530		1.8	2.2	
	+	400		0.6	0.7	} 0.3
	-					
^{229}Ac	+	660		4.8		} 3.3
	-	530		1.8		
	+	400		1.8	≠0	} 1.0
	-					
^{221}Ra	+	640	651	-0.3		} -3.5
	-	770		7.7		
^{223}Ra	+	640		0.1		} 2.7
	-	770		7.5		
^{225}Ra	+	640		-0.1	1.5	} 2.8
	+	631		0.4	2.4	
	-	770		7.0		
^{227}Ra	+	631		-0.1	1.5	} 1.1
	-				1.8	
	+					} 4.1
	-	761		3.9	4.3	
	+					
-	501	2.1	-0.9	} -0.9		

Table 1