

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

CENTRE D'ETUDES NUCLEAIRES DE SACLAY

Service de Documentation

F91191 GIF SUR YVETTE CEDEX

CEA-CONF -- 8884

L3

LA METHODE MONTE CARLO DANS LES PROBLEMES DE TRANSPORT DE  
RAYONNEMENTS

Dejonghe, G.; Nimal, J.C.; Vergnaud, T.

CEA CEN Saclay, 91-Gif-sur-Yvette (France). IRDI

Communication présentée à :

Conference on statistics and scientific  
calculus

Rouen (France)

20-22 Nov 1986

LA METHODE DE MONTE CARLO DANS LES PROBLEMES DE TRANSPORT DE RAYONNEMENTS

G. DEJONGHE - J.C. NIMAL - T. VERGNAUD -

CEA/CEN.SACLAY - DDMT/SERMA/LEPF - 91191 GIF SUR YVETTE CEDEX - FRANCE -

1 - INTRODUCTION

L'étude des problèmes de transport des rayonnements neutres (neutrons, photons) vise à déterminer la répartition énergétique spatiale et angulaire des particules après émission à partir d'une source et leur migration dans divers matériaux. Ces études sont faites pour plusieurs buts :

- propagation dans un blindage qui "atténue" les rayonnements : ce sont les études de radioprotection
- distribution de puissance dans le coeur d'un réacteur à fission : ce sont les études de neutronique
- obtention d'un facteur de multiplication des neutrons d'une génération à la suivante obtenue par fission : ce sont les études de sûreté-criticité.

Deux grandeurs interviennent essentiellement dans les problèmes de transport :

- le flux dans l'espace des phases  $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  où  $\vec{r}$  désigne la position,  $E$  l'énergie et  $\vec{\Omega}$  la direction de la particule.  $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) dE d\vec{\Omega}$  est le nombre de particules qui franchissent l'unité de surface placée perpendiculairement à la direction  $\vec{\Omega}$ , par unité de temps et dont l'énergie et la direction sont comprises respectivement dans les intervalles  $dE$  autour de  $E$  et  $d\vec{\Omega}$  autour de  $\vec{\Omega}$ .
- la densité de particule entrant en collision  $\chi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  au point  $(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  de l'espace des phases et définie par :

$$(1) \quad \chi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \Sigma_T(\vec{r}, E) \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$$

où  $\Sigma_T(\vec{r}, E)$  est la section efficace totale du milieu au point  $\vec{r}$  et à l'énergie  $E$ .

$\varphi$  et  $\chi$  satisfont respectivement à deux équations : l'une intégrodifférentielle (2), l'autre intégrale (3). Ces deux équations sont deux formes différentes de l'équation du transport dite de Boltzmann.

$$(2) \vec{\Omega} \text{grad} \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \Sigma_T(\vec{r}, E) \varphi = \iint d\Omega' \int dE' \Sigma_s(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \vec{\Omega}, \vec{r}) \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') + S_0(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$$

$$(3) \chi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \int \mu(\vec{r}', E', \vec{\Omega}') K(\vec{r}', E', \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\vec{r}' d\vec{\Omega}' dE' + S(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$$

où :

$S_0$  et  $S$  désignent respectivement la densité de source et la densité de source de première collision.

$\Sigma_s$  est le noyau de diffusion caractérisant le changement de direction et d'énergie par interaction particule-matière.

La connaissance des flux  $\varphi$  et des densités  $\chi$  permet de calculer des quantités plus physiques : les taux de réaction  $\bar{I}$  définis par la relation (4) où  $x$  désigne le point de l'espace des phases  $(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ .

$$(4) \bar{I} = \int \varphi(x') R(x') dx'$$

$\bar{I}$  représente des débits de dose biologique, des échauffements, des dommages formés dans les structures, des puissances dégagées par fission et ceci suivant la fonction réponse  $R(x')$  choisie.

Pour terminer cette introduction, nous définirons deux termes qui interviennent au cours de cet exposé le JEU et le SCORE.

Soit un problème donné admettant une unique solution  $Y$ . Résoudre le problème par Monte Carlo consiste à effectuer les démarches suivantes :

- 1°) construire un processus statistique, c'est-à-dire une succession d'états d'un système où le hasard intervient. Ce processus sera appelé le JEU.
- 2°) attribuer une valeur numérique à une variable  $X$ , cette valeur dépendant du déroulement du processus statistique. Cette attribution sera appelée le SCORE.  $X$  est donc une variable aléatoire.
- 3°) les règles du JEU et celles du SCORE sont déterminées de telle façon que l'espérance mathématique de  $X$  soit  $Y$ . Nous noterons :

$$(4 \text{ bis}) \quad E(X) = Y$$

Une fois les règles fixées et une fois la relation (4bis) établie, on procédera aux opérations suivantes : on réalisera le JEU  $N$  fois de suite et de façon indépendante les unes des autres. On obtiendra  $N$  valeurs du SCORE  $X_1, X_2, \dots, X_N$ .

Vues la relation (4bis) et la loi des grands nombres, la moyenne  $\bar{X}_N$  tendra vers  $Y$  pour  $N$  tendant vers l'infini. C'est la relation (3) :

$$(2) \quad \bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

$$(3) \quad N \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad \bar{X}_N \rightarrow Y$$

## 2 - UTILISATION DE LA METHODE DE MONTE CARLO POUR LA RESOLUTION DU PROBLEME DU TRANSPORT (SIMULATION NATURELLE)

### 2.1. Présentation de l'équation à résoudre

La propagation des particules neutres dans un système donné peut être décrite par l'équation intégrale de Fredholm (5) où  $\chi(x)$  représente la densité de particules entrant en collision au point  $x$  de l'espace des phases.

$$(5) \quad \chi(x) = \int \chi(x') \kappa(x/x') dx' + S_0(x)$$

Dans un système non surcritique ou en régime non stationnaire avec coupure en temps, la solution de cette équation peut s'obtenir en faisant la somme (7) des termes de la série de Neumann (6) :

$$(6) \quad \begin{cases} \chi_0(x) = S_0(x) \\ \chi_v(x) = \int \chi_{v-1}(x') \kappa(x/x') dx' \end{cases}$$

$$(7) \quad \chi(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \chi_v(x)$$

Le terme  $\chi_v(x)$  a une signification physique simple : il s'agit de densité de collisions en  $x$  pour les particules qui vont subir leur  $v^{\text{e}}$  collision. Très souvent, on s'intéresse non pas à la densité de collision  $\chi(x)$  mais à des taux de réaction  $I$  qui sont des intégrales pondérées de  $\chi(x)$  dans une portion  $V$  de l'espace des phases. C'est la relation (8) :

$$(8) \quad I = \int_V z(x) \chi(x) dx$$

$$z(x) > 0 \quad \text{pour } x \in V$$

$$z(x) = 0 \quad \text{pour } x \notin V$$

On a également les relations (9) qui montrent que la contribution I peut être évaluée collision par collision :

$$(9) \quad \begin{aligned} I_J &= \int z(X) \chi_J(X) dX \\ I &= \sum_{J=0}^{\infty} I_J \end{aligned}$$

Signalons enfin la forme (10) de  $\chi_J(X)$  équivalente à la forme (6) :

$$(10) \quad \chi_J(X) = \int S_0(X_0) K(X_1/X_0) K(X_2/X_1) \dots K(X_J/X_{J-1}) dX_0 dX_1 \dots dX_{J-1}$$

## 2.2. Jeu et score

Définissons les probabilités suivantes :

$$(11) \quad P_0(X) = \frac{S_0(X)}{S_0} \quad S_0 = \int S_0(X) dX$$

$$P(X_J/X_{J-1}) = \frac{K(X_J/X_{J-1})}{K(X_{J-1})} \quad \text{avec} \quad K(X_{J-1}) = \int K(X_J/X_{J-1}) dX_J$$

Le JEU que nous proposons consiste à construire une chaîne de points de collision  $X_1, X_2, \dots, X_{J-1}, X_J, \dots$  de la façon suivante :

$X_0$  est choisi avec la probabilité  $P_0(X_0)$

$X_J$  est choisi, une fois  $X_{J-1}$  connu, avec la probabilité  $P(X_J/X_{J-1})$

Le SCORE sera le suivant : la contribution  $J_J$  du  $J^{\text{e}}$  choc à l'intégrale  $I_J$  sera définie par (12) :

$$(12) \quad J_J = z(X_J) S_0 \omega_J$$

$$\text{avec} \quad \omega_0 = 1 \quad \omega_J = \omega_{J-1} K(X_{J-1})$$

$\omega_J$  représente le poids attribué à la particule au moment du  $J^{\text{e}}$  choc.

Proposition

L'espérance mathématique de  $J_0$  est égale à  $I_0$ .

La démonstration s'appuie sur le calcul de l'espérance mathématique :

$$\begin{aligned}
(13) \quad E[J_0] &= \int P(X_0) \chi_{v-1} \dots P_0(X_0) \tau(X_0) S_0 \kappa(X_{v-1}) \dots \kappa(X_0) dX_0 \dots dX_0 \\
&= \int \tau(X_0) \chi_v(X_0) dX_0 = I_0 \quad (\text{voir 9 et 10})
\end{aligned}$$

Arrêt du processus

Le processus s'arrête naturellement lorsque la particule quitte la partie de l'espace des phases étudiée .

Un autre procédé, appelé roulette russe, permet d'éviter l'étude de chaînes de trop grande longueur correspondant à un poids  $\omega_0$  très petit (le produit  $\kappa(X_{v-1}) \kappa(X_{v-2}) \dots \kappa(X_0)$  représente la probabilité d'échapper à la capture).

Au lieu de poser  $\omega_0 = \prod_{j=1}^v \kappa(X_{j-1})$ , on pose :

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= 1 \quad \text{avec une probabilité} \quad \omega_{v-1} \kappa(X_{v-1}) \\
\omega_0 &= 0 \quad \text{autrement (la particule est supprimée)}
\end{aligned}$$

2.3. Expression des lois d'échantillonnage

Exception faite de la roulette russe, le jeu que nous venons de définir coïncide avec la réalité physique : il s'agit donc d'une simulation exacte du processus statistique. Cette simulation utilise les lois microscopiques de l'interaction particule-matière sans aucune approximation. Cette rigueur dans le traitement est une caractéristique importante de la méthode de Monte Carlo. De même les milieux géométriques peuvent être traités sans approximation.

A titre d'exemples, nous allons donner les expressions des principales lois de densités de probabilité qui interviennent dans le traitement du transport par Monte Carlo. Ces lois permettent, rappelons le, de passer du point  $X_{j-1}$  au point  $X_j$ . Ce passage s'effectue en deux étapes :

- le parcours en ligne droite entre deux collisions successives
- le déroulement de la collision, c'est-à-dire la détermination des caractéristiques après choc à partir des caractéristiques ayant choc.

Désignons par  $\vec{r}_0$ , la position de la  $V^e$  collision et respectivement par  $E_0$  et  $\vec{\Omega}_0$  l'énergie et la direction après la  $V^e$  collision.

### 2.3.1. Expression de la densité des parcours

Désignons par  $P(\rho) d\rho$ , la probabilité pour une particule issue du point  $X_{V-1}$  de parcourir sans choc une distance comprise entre  $\rho$  et  $\rho + d\rho$ . La relation (14) donne l'expression de  $P(\rho)$ .

$$(14) \quad P(\rho) = \sum_T (\vec{r}_{V-1} + \rho \vec{\Omega}_{V-1}, E_{V-1}) e^{-\int_0^\rho \sum_T (\vec{r}_{V-1} + t \vec{\Omega}_{V-1}, E_{V-1}) dt}$$

$\sum_T(\vec{r}, E)$  représente la section totale au point  $\vec{r}$  et à l'énergie  $E$ .  $\sum_T(\vec{r}_{V-1} + t \vec{\Omega}_{V-1}, E_{V-1})$  est une fonction de  $t$  constante par intervalle, le plus souvent.

### 2.3.2. Expression du noyau de collision

Explicitons le noyau dans le cas de l'interaction neutron-matière.

Il existe trois formes essentielles du noyau de collision.

La première (15) est valable dans le domaine dit de ralentissement du neutron, c'est-à-dire lorsque l'agitation thermique du noyau cible est négligeable vue l'énergie importante du neutron. La seconde (16) et la troisième forme se rapportent au domaine thermique. Le modèle (16) dit "liaison moléculaire", fait intervenir les fonction  $S(\alpha, \beta)$  déduites du spectre de fréquence (rotation, vibration, translation) de la molécule. (17) représente la probabilité pour un atome de vitesse  $V$  de choquer un neutron de vitesse  $v$ . C'est le modèle dit "gaz libre". Les caractéristiques après collision sont obtenues en écrivant la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

a) Ralentissement

$$(15) \quad K(E_{V-1}, \vec{\Omega}_{V-1} \rightarrow E_0, \vec{\Omega}_0) = \sum_i \left\{ N_i \frac{d\sigma_{el,i}(E_{V-1}, \cos\theta)}{d\Omega_0} \int_{E_0}^{E_{V-1}} \left[ \frac{(\cos\theta + (A^2 - \sin^2\theta)^{1/2})^2}{(1+A)^2} E_{V-1} \right] + \sigma_{in,i}(E_{V-1}) F_{in,i}(E_{V-1} \rightarrow E_0) H_{in,i}(\cos\theta, A_i) + 2 \sigma_{n,2n,i}(E_{V-1}) F_{n,2n,i}(E_{V-1} \rightarrow E_0) H_{n,2n,i}(\cos\theta, A_i) \right\}$$



où  $\theta = \text{Arccos } \vec{\Omega}_{v-1} \cdot \vec{\Omega}_v$

- $el, in; n, 2n$  désignent respectivement le type d'interaction : diffusion élastique; réaction inélastique ou réaction  $n, 2n$
- $N_i$  nombre de noyaux de type  $i$  par unité de volume
- $\frac{d\sigma_{el, i}(E_{v-1})}{dE_v}$  est généralement donnée pour des valeurs discrètes de  $E_{v-1}$  et de  $\cos \theta$
- les spectres  $F_{in}$  et  $F_{n, 2n}$  résultent de modèles

b) Thermalisation avec liaison moléculaire

$$(16) \quad K(E_{v-1}, \vec{\Omega}_{v-1} \rightarrow E_v, \vec{\Omega}_v) = \sum_i N_i \frac{\sigma_i}{2} \sqrt{\frac{y_v}{y_{v-1}}} S_i(\alpha, \beta)$$

$$y_v = \frac{E_v}{kT} ; y_{v-1} = \frac{E_{v-1}}{kT} , \beta = y_v - y_{v-1}$$

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_i} [ y_v - y_{v-1} - \vec{\Omega}_v \cdot \vec{\Omega}_{v-1} \sqrt{y_v y_{v-1}} ]$$

où  $T$  est la température.

c) Thermalisation avec modèle gaz libre

$$(17) \quad Q(\vec{v}, \vec{v}, T) = \frac{|\vec{v} - \vec{v}| \sigma(|\vec{v} - \vec{v}|) P(\vec{v}, T)}{\iiint |\vec{v} - \vec{v}| \sigma(|\vec{v} - \vec{v}|) P(\vec{v}, T) d\vec{v}}$$

avec :

$$P(\vec{v}, T) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\alpha \frac{v^2}{2}} v^2 \quad v = |\vec{v}|$$

$$\alpha = \frac{A}{kT}$$

$k$  constante de Boltzmann

### 3 - TECHNIQUES D'ECHANTILLONNAGE

#### 3.1. Position du problème

Un problème important à résoudre est la génération aléatoire de caractéristiques dont les densités de probabilité sont données. Comme nous l'avons vu aux paragraphes 2.3.1. et 2.3.2., ces densités sont souvent des expressions compliquées. Pour ne pas perdre l'intérêt de la méthode, il est indispensable que les procédés de génération reproduisent exactement les densités de probabilité. Par ailleurs, ces générations de caractéristiques aléatoires ayant lieu un très grand nombre de fois, il est indispensable que leurs temps d'exécution sur ordinateur soient aussi brefs que possible.

Le point de départ des techniques d'échantillonnage est une table de nombres aléatoires  $\xi$  uniformément répartis sur le segment  $]0,1]$  et indépendants les uns des autres. Le procédé actuellement utilisé pour générer de tels nombres  $\xi$  est la multiplication par un nombre  $N$  modulo  $M$ . C'est la relation (18).

$$(18) \quad I_n = I_{n-1} \times N \quad \text{modulo } M$$

$$\xi = \frac{I_n}{M}$$

Il existe différents couples  $(N, M)$  possibles. La suite  $I_n$  est initialisée par un nombre premier impair.

Le problème de la génération d'une variable aléatoire  $X$  distribuée suivant une densité de probabilité  $g(X)$  sur un segment  $]a, b]$  peut être résolu par les méthodes suivantes .

#### 3.2. Bijection analytique

On établit une correspondance de la forme (19) entre les points du segment  $]0,1]$  support de la variable  $\xi$  et le segment  $]a, b]$  correspondant à la variable à générer  $X$ .

$$(19) \quad \begin{aligned} X_0 &= F(\xi_0) \\ \xi_0 &\in ]0,1] \\ X &\in ]a,b] \end{aligned}$$

Cette correspondance (19) est telle que X soit distribué avec la densité de probabilité  $g(X)$ . Par construction on a donc :

$$P_r \{ X \in ]a, X_0] \} = P_r \{ \xi \in ]0, \xi_0] \}$$

d'où

$$\int_a^{X_0} g(X) dX = \int_0^{\xi_0} d\xi = \xi_0$$

Si  $G(X)$  est une primitive de  $g(X)$  qui admette une fonction inverse  $G^{-1}$ , on obtient :

$$(20) \quad F(\xi_0) = G^{-1} [ \xi_0 + G(a) ]$$

Exemple :

Pour tirer des parcours sans choc X avec la densité de probabilité  $g(X) = \sum_r e^{-\sum_r X}$ , il suffit de tirer  $\xi$  avec une densité uniforme sur  $]0, 1]$  et de poser  $X = \frac{-1}{\sum_r} \log(1 - \xi)$

Remarque

Un cas particulier de la bijection analytique est le cas où la densité de probabilité  $g(X)$  est une mesure (21) concentrée en des points  $X = X_i$

$$(21) \quad g(X) = \sum_{i=1}^N a_i \delta_X(X_i)$$

$$\text{avec : } \sum_i a_i = 1$$

On obtient alors :

$$(22) \quad X = X_i \iff \sum_{j=0}^{i-1} a_j \leq \xi < \sum_{j=0}^i a_j$$

avec  $a_0 = 0$

### 3.3. Bijection numérique

Il n'est pas souvent possible de trouver une primitive inversible de la densité de probabilité  $g(X)$ . Une méthode apparentée à la précédente, mais numérique, consiste à diviser le support  $]a, b]$  de X en sous-intervalles équiprobables  $]X_i, X_{i+1}]$ . C'est la relation (23) :

$$(23) \quad \int_{X_i}^{X_{i+1}} g(X) dX = \frac{1}{N} \text{ avec } X_0 = a \quad X_N = b$$

On choisit alors un sous-intervalle  $]X_i, X_{i+1}]$  au hasard puis on tire uniformément un point  $X$  dans ce sous-intervalle. Cette méthode consiste à remplacer  $g(X)$  par une fonction approchée  $\tilde{g}(X)$  en escalier définie par (24) :

$$(24) \quad \tilde{g}(X) = \frac{1}{N(X_{i+1} - X_i)} \quad \text{pour } X_i < X \leq X_{i+1}$$

### 3.4. Méthode du rejet simple

Cette méthode n'est utilisable que pour les densités de probabilité bornées définies sur <sup>un</sup> support  $]a, b]$  fini. Comme nous le verrons, cette méthode peut devenir coûteuse lorsque  $g(X)$  présente des variations relatives importantes. Désignons par  $g_M$ , une borne supérieure de  $g(X)$ ,  $X \in ]a, b]$

On choisit deux nombres aléatoires indépendants  $\xi_1$  et  $\xi_2$  uniformément répartis, pour  $\xi_1$  sur le segment  $]a, b]$ , pour  $\xi_2$  sur le segment  $]0, 1]$ .

On effectue ensuite les opérations suivantes :

- a) si  $\xi_2 > \frac{g(\xi_1)}{g_M}$  on recommence le processus avec deux nouveaux tirages  $\xi_1'$  et  $\xi_2'$
- b) si  $\xi_2 \leq \frac{g(\xi_1)}{g_M}$  on pose  $X = \xi_1$

#### Proposition

$X$  défini par ce processus a une densité de probabilité égale à  $g(X)$ .

#### Démonstration

On a :

$$\begin{aligned} \text{Proba} \{X \in ]\xi_1, \xi_1 + d\xi_1]\} &= \frac{\text{Pr} \{ \xi_1 \in ]\xi_1, \xi_1 + d\xi_1]\} \text{Pr} \{ \xi_2 \leq \frac{g(\xi_1)}{g_M} \}}{\text{Pr} \{ \text{1 double tirage accepté} \}} \\ &= \frac{\frac{d\xi_1}{b-a} \times \frac{g(\xi_1)}{g_M}}{\frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{g(\xi_1)}{g_M} d\xi_1} = g(\xi_1) d\xi_1 \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Le rendement  $\rho$  de l'opération peut être défini comme étant la probabilité d'accepter un couple  $\xi_1, \xi_2$  donc d'avoir une valeur de  $X$  en un coup.

C'est donc :

$$(25) \quad \rho = \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{g(\xi_1)}{g_m} d\xi_1 = \frac{1}{(b-a)g_m}$$

Cette expression du rendement montre que la méthode devient très coûteuse lorsque  $g(X)$  s'écarte notablement d'une fonction constante.

### 3.5. Méthode du rejet avec tirage approché

Cette méthode nécessite l'attribution d'un poids à l'évènement simulé.

Soit  $g_a(X)$ , une fonction approchée de  $g(X)$ , telle qu'on sache tirer simplement des  $X$  avec la densité de probabilité  $g_a(X)$ .

Pour générer  $X$ , on commence par tirer  $N$  valeurs avec la densité de probabilité  $g_a(X)$ , soient  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_N$ . On choisit ensuite l'une de ces valeurs avec la probabilité :

$$(26) \quad p_i = \frac{g(X_i)/g_a(X_i)}{\sum_{i=1}^N g(X_i)/g_a(X_i)}$$

Un poids  $\omega$  est attribué à l'évènement conformément à la formule (27) :

$$(27) \quad \omega = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(X_i)}{g_a(X_i)}$$

#### Proposition

Le produit du poids attribué  $\omega$  par la densité de probabilité d'apparition d'un  $X$  est égal à  $g(X)$ .

#### Démonstration

Evaluons la densité de probabilité d'apparition d'une valeur de  $X$  soit  $d(X)$  :

$$\begin{aligned} d(X) dX &= \left\{ \text{probabilité d'avoir un } X \text{ dans } dX \text{ après } N \text{ tirages suivant } g_a(X) \right\} \\ &\quad \times \left\{ \text{probabilité de choisir cet } X \right\} \\ &= N g_a(X) dX \times \frac{g(X)/g_a(X)}{\sum_{i=1}^N g(X_i)/g_a(X_i)} = \frac{g(X) dX}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i)/g_a(X_i)} \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \omega d(X) dX = g(X) dX$$

Remarque :

Lorsque  $g_a(X)$  est mal choisi, et N non suffisamment grand, la variable  $\omega$  est très dispersée : ce procédé peut alors induire une erreur statistique importante sur le résultat définitif du calcul de Monte Carlo.

#### 4 - NECESSITE DU BIAISAGE

Les problèmes de transport de rayonnement peuvent être divisés en deux catégories :

- les problèmes dans lesquels les flux s'atténuent peu spatialement. C'est le cas des études de neutronique au niveau de la cellule élémentaire.
- les problèmes de pénétrations profondes avec forte atténuation du flux de particules. C'est le cas des études de protections.

Pour la première catégorie, le problème essentiel est le respect rigoureux de la géométrie et des sections efficaces en particulier des résonances. Le jeu défini au paragraphe 2.2. permet de résoudre efficacement le problème du transport.

Pour la seconde catégorie, le jeu que nous avons défini conduirait à des temps de calcul prohibitifs : la probabilité d'observer une particule à grande distance peut être inférieure à  $10^{-12}$  dans les réacteurs classiques. Le nombre d'histoires de particules simulées étant compris généralement entre 1 000 et 50 000 pour des raisons de temps de calculs, on conçoit que le jeu naturel que nous avons décrit ne puisse pas donner de résultats au-delà de 2 à 3 décades d'atténuation. On est donc amené à construire un nouveau jeu appelé couramment jeu "biaisé" par opposition au jeu "naturel".

Le principe de ce biaisage est simple puisqu'il consiste à effectuer le changement d'inconnu (28) où  $\varphi(X)$  désigne le flux au point X de l'espace des phases.

$$(28) \quad \varphi^*(X) \pi(X) = \varphi(X)$$

$\varphi^*(X)$  désignera un flux de particules biaisées

$\pi(X)$  est une fonction strictement positive laissée à notre choix.

L'interprétation physique de cette relation (28) est simple : on remplace la densité de particules naturelles ayant un poids unité par une densité de particules divisée par  $\pi(x)$ , chaque particule ayant un poids  $\pi(x)$ . La relation (44) est une relation de conservation.

En choisissant des valeurs de  $\pi(x)$  décroissant suffisamment vite, lorsque le flux  $\varphi(x)$  décroît, on conçoit qu'on puisse conserver un flux  $\varphi^*(x)$  de particules biaisées suffisamment grand pour que le nombre de contributions à grande distance soit important. Une fois réalisé un jeu donnant  $\varphi^*(x)$  avec suffisamment de précision à grande distance des sources, l'équation (28) permet de remonter au flux réel  $\varphi(x)$ . Le problème à ce stade se résume à deux questions :

- quel jeu utiliser pour obtenir  $\varphi^*(x)$
- comment choisir au mieux les fonctions  $\pi(x)$

La première question peut être résolue simplement, au moins dans son principe.

$\varphi(x)$  satisfait à l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann (29) :

$$(29) \quad \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial t} + \vec{n} \cdot \text{grad}_{\vec{r}} \varphi(x) + \Sigma_T(x) \varphi(x) = \int dX' C(X' \rightarrow X) \varphi(x') + S(X)$$

$\vec{n}$ ,  $v$ ,  $\vec{r}$  désignent respectivement, la direction, la vitesse et la position de la particule au point  $X$ .  $\Sigma_T(x)$  est la section efficace totale.

En reportant dans (29) l'expression (28) de  $\varphi(x)$ , on obtient l'équation (30) satisfaite par  $\varphi^*(x)$

$$(30) \quad \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi^*(x)}{\partial t} + \vec{n} \cdot \text{grad}_{\vec{r}} \varphi^*(x) + \Sigma_T^*(x) \varphi^*(x) = \int dX' C^*(X' \rightarrow X) \varphi^*(x') + S^*(X)$$

Les fonctions  $\Sigma_T^*(x)$ ,  $C^*(X' \rightarrow X)$  et  $S^*(X)$  ont des expressions définies par les relations (31), (34), (35) :

$$(31) \quad \Sigma_T^*(x) = \Sigma_T(x) + \frac{1}{v} \frac{\partial \pi(x)}{\partial t} - \kappa(x) \vec{n} \cdot \vec{n}_0(x)$$

où

$$(32) \quad \kappa(x) = \frac{|\text{grad}_{\vec{r}} \pi(x)|}{\pi(x)}$$

$$(33) \quad \vec{n}_0(x) = - \frac{\text{grad}_{\vec{r}} \pi(x)}{|\text{grad}_{\vec{r}} \pi(x)|}$$

$$(34) \quad C^*(X' \rightarrow X) = \frac{\pi(X')}{\pi(X)} C(X' \rightarrow X)$$

$$(35) \quad S^*(X) = \frac{S(X)}{\pi(X)}$$

### Propriété

Le flux de particules biaisées  $\varphi^*(X)$  satisfait formellement à une équation intégrodifférentielle semblable à celle satisfaite par le flux naturel  $\varphi(X)$ . Seules, les constantes nucléaires, c'est-à-dire la section efficace totale  $\Sigma_T^*(X)$  et le noyau de collision  $C^*(X' \rightarrow X)$ , sont modifiées par rapport aux constantes naturelles.

Donnons une interprétation physique des relations (31) à (33).  $K(X)$  est par construction une fonction à valeur positive.  $\vec{\Omega}_0(X)$  a la signification d'une direction d'intérêt : c'est un champ de vecteurs dirigés vers les zones de poids faibles, c'est-à-dire vers les zones d'intérêt. La relation (31) montre que la section efficace biaisée  $\Sigma_T^*(X)$  est plus faible que  $\Sigma_T(X)$ , lorsque la direction  $\vec{\Omega}$  de la particule est voisine de la direction d'intérêt  $\vec{\Omega}_0(X)$  locale. Les parcours biaisés sont donc plus grands que les parcours naturels dans le sens de la direction d'intérêt et inversement ils sont réduits dans le sens inverse. On conçoit donc que les particules biaisées migrent vers les zones d'intérêt d'autant plus rapidement que le rapport  $K(X)/\Sigma_T(X)$  est grand. Les événements conduisant les particules biaisées à grande distance sont plus probables que dans le jeu naturel, mais en contre partie leur poids est d'autant plus faible.



- REALISATION DE LA SIMULATION BIAISEE

5.1. Le jeu biaisé

Reprenons le formalisme de l'équation intégrale de base (36) dont la solution est la densité de particules  $\chi(x)$  entrant en collision au point  $X$  de l'espace des phases.

$$(36) \quad \chi(x) = \int \chi(x') K(x/x') dx' + S_0(x)$$

Un poids  $\pi(x)$  est attribué en tout point  $X$  de l'espace conformément au chapitre 4. Le point de naissance de la particule, soit  $X_0$ , est tiré avec une densité de probabilité  $P_0^*(x)$  donnée par la relation (37) : analogue à la relation

$$(37) \quad P_0^*(x) = \frac{\frac{S_0(x)}{\pi(x)}}{\int \frac{S_0(x)}{\pi(x)} dx} = \frac{S_0^*(x)}{S_0^*}$$

avec  $S_0^* = \int S_0^*(x) dx$        $S_0^*(x) = S_0(x)/\pi(x)$

Les chocs successifs de la particule (soient  $X_1, X_2, \dots, X_0, \dots$  les points correspondants) sont déterminés avec une densité biaisée  $P^*(X_0/X_{0-1})$ . Nous expliciterons plus loin le choix de ces fonctions  $P^*(X_0/X_{0-1})$ . Par une démonstration analogue à celle présentée au paragraphe 2.2., on démontre que la contribution  $J_0$  de la  $0^{\text{e}}$  collision au résultat est donnée par (38) :

$$(38) \quad J_0 = S_0^* z(X_0) \omega_0$$

avec (38bis)  $\omega_0 = S_0(X_0) / S_0^*(X_0)$

$$(39) \text{ et } \omega_0 = \omega_{0-1} \frac{K(X_0/X_{0-1})}{P^*(X_0/X_{0-1})}$$

$$E(J_0) = I_0$$

Démonstration

On a  $E(J_0) = \int J_0 P^*(X_0) \prod_{n=1}^0 P^*(X_n/X_{n-1}) dX_0 \dots dX_n \dots dX_0$

(39bis)  
soit :  $E(J_0) = \int S_0^* z(X_0) \frac{S_0(X_0)}{S_0^*(X_0)} \prod_{n=1}^0 \frac{K(X_n/X_{n-1})}{\prod_{n=1}^0 P^*(X_n/X_{n-1})} \frac{S_0^*(X_0)}{S_0^*} \prod_{n=1}^0 (P^*(X_n/X_{n-1}) dX_{n-1})$   
 $= \int S_0(X_0) \prod_{n=1}^0 K(X_n/X_{n-1}) z(X_0) dX_0 \dots dX_0 = I_0$

### 5.2. Les probabilités biaisés

Reprenons l'équation intégrale (36) :

$$(36) \chi(x) = \int \chi(x') K(x/x') dx' + S_0(x)$$

et effectuons le changement d'inconnue suivant :

$$(40) \chi^*(x) = J(x) \chi(x) = \frac{\chi(x)}{\pi(x)}$$

avec toujours :

$\pi(x)$  poids imposé au point  $x$  de l'espace des phases

$J(x) = \frac{1}{\pi(x)}$  importance de la particule au point  $x$ .

Portons l'expression de  $\chi(x)$  tirée de (40) dans l'équation intégrale (36). Il vient alors l'équation intégrale (41) portant sur  $\chi^*(x)$

$$(41) \chi^*(x) = \int \chi^*(x') \frac{J(x)}{J(x')} K(x/x') dx' + J(x) S_0(x)$$

Le point de naissance  $X_0$  de la particule est bien tiré avec la densité de probabilité biaisée :

$$(42) P_0^*(x) = \frac{J(x) S_0(x)}{\int J(x) S_0(x) dx} = \frac{\frac{S_0(x)}{\pi(x)}}{\int \frac{S_0(x)}{\pi(x)} dx}$$

Le point  $X_V$  est tiré avec la probabilité  $P^*(x_V/x_{j-1})$  une fois connu le point  $X_{j-1}$ .  $P^*(x_V/x_{j-1})$  est défini par (42) :

$$(42bis) P^*(x_V/x_{j-1}) = \frac{\frac{J(x_V)}{J(x_{j-1})} K(x_V/x_{j-1})}{\int \frac{J(x_S)}{J(x_{j-1})} K(x_S/x_{j-1}) dx_S}$$

### 5.3. Cas particulier $J(x)$ (donc $\pi(x)$ ) est constant par domaine de l'espace des phases : biaisage par splitting roulette.

Considérons une surface  $\partial \Omega_n \Omega_m$  séparant les ouverts  $\Omega_n$  et  $\Omega_m$  où le poids  $\pi(x)$  est constant et prend respectivement les valeurs  $\pi_n$  et  $\pi_m$ . Soit une particule quittant le milieu  $\Omega_n$  pour entrer dans le milieu  $\Omega_m$ .

Soit  $R_{n \rightarrow m}$  le rapport  $\frac{\pi_n}{\pi_m}$

Le principe du biaisage par splitting roulette consiste à remplacer la particule de poids  $\pi_n$  lorsqu'elle entre dans le milieu  $\Omega_m$  par  $M$  particule de poids  $\pi_m$  où  $M$  est défini de la façon suivante.

Soient :

- $M_0$  la partie entière de  $R_{n \rightarrow m}$
- $e$  la partie fractionnaire  $e = R_{n \rightarrow m} - M_0$

On détermine  $M$  par tirage au hasard avec les règles suivantes :

$$M = \begin{cases} M_0 & \text{avec la probabilité } 1 - e \\ M_0 + 1 & \text{avec la probabilité } e \end{cases}$$

Ce procédé s'appelle le fractionnement (ou splitting)

si  $R_{n \rightarrow m}$  est plus grand que l'unité et la roulette russe

si  $R_{n \rightarrow m}$  est inférieur à l'unité.

Proposition : La somme des poids des particules à l'issue de cette opération, soit  $M \pi_m$ , est en moyenne égal à  $\pi_n$ .

Démonstration :

$$\begin{aligned} E(M \pi_m) &= \pi_m E(M) \\ &= \pi_m [M_0 (1 - e) + (M_0 + 1) e] \\ &= \pi_m [M_0 + e] = \pi_m R_{n \rightarrow m} = \pi_n \end{aligned}$$

vue la définition 2.

## 6 - LE MEILLEUR CHOIX DES FONCTIONS D'IMPORTANCE LE JEU A VARIANCE NULLE

6.1. Proposition de jeu à variance nulle

Le problème de la détermination de  $\bar{I} = \int R(x)X(x)dx$  lorsque  $X(x)$  est solution de (5) :

$$X(x) = \int H(x; x') X(x') dx' + S(x)$$

est équivalent au problème adjoint :

$$(43) \quad \bar{I} = \int S(x) X^+(x) dx$$

$$(44) \quad X^+(x) = \int H^+(x; x') X^+(x') dx' + R(x)$$

Rappelons que  $H^+(x; x') = H(x'; x)$  et que, si  $X(x)$  est développable en série de Neumann,  $X^+(x)$  l'est aussi.

Le but de cette partie est de montrer que la fonction d'importance  $J(x) = X^+(x)$  est optimale lorsque la simulation de la vie des particules est celle décrite au chapitre 5.

Pour cela, nous montrerons dans un premier temps que le problème du calcul du moment d'ordre 2 de la réponse, lorsque des lois biaisées sont utilisées pour la tirage, se ramène à un problème de résolution d'une équation intégrale du même type que (5) et (44).

Le noyau du nouvel opérateur ainsi introduit a une expression simple lorsque la fonction d'importance est la densité de collision adjointe, ce qui permet d'établir que la variance de la réponse est nulle.

Une démonstration directe est enfin proposée, qui consiste à démontrer que toutes les particules simulées ont alors la même contribution  $\bar{I}$  au résultat (le score associé à une particule est déterministe).

Si la résolution du problème adjoint est souvent du même ordre de difficulté que celle du problème direct, les considérations faites sur les poids des particules restent applicables lorsque la fonction d'importance choisie est sous-optimale.

## 6.2. MOMENT DU SECOND ORDRE DE L'ESTIMATEUR I DE LA REPONSE TOTALE I

Nous nous proposons de démontrer la proposition suivante :

Proposition :

Etant donné un couple de fonctions  $S^*(x)$  et  $P^*(x, x')$ , où  $S^*(x)$  représente la densité biaisée de source et  $P^*(x, x')$  la densité biaisée de diffusion, le moment du second ordre  $I^2$  de I est solution de :

$$(45) \quad \overline{I^2} = \int \Psi^*(x) \{ 2X^+(x) - R(x) \} R(x) dx$$

$\Psi^*$  étant solution de l'équation intégrale :

$$(46) \quad \Psi^*(x) = \int \frac{H^2(x; x')}{P^*(x; x')} \Psi^*(x') dx' + \frac{S^2(x)}{S^*(x)}$$

sous réserve que  $\Psi^*$  soit développable en série de Neumann.

Démontrons tout d'abord la lemme suivant :

Lemme :

Soient  $I_n$  et  $I_p$  les scores élémentaires associés respectivement aux  $n^{\text{ième}}$  et  $p^{\text{ième}}$  évènements d'une chaîne  $\Gamma$ .

L'espérance mathématique du produit  $I_n I_p$  ( $p \geq n$ ) est :

$$(47) \quad \overline{I_n I_p} = \int \Psi_n^*(x) X_{p-n}^+(x) R(x) dx$$

où  $X_{p-n}^+$  et  $\Psi_n^*$  sont respectivement les  $(p-n)^{\text{ième}}$  et  $n^{\text{ième}}$  termes des développements en série de Neumann de  $X^+$  et  $\Psi^*$ .

Démonstration

Rappelons (38bis) que:  $I_n = R(X_n) \omega_n^*(\Gamma)$

$$(38) \quad \omega_n^*(\delta) = \frac{S(x_0)}{S^*(x_0)} \prod_{v=0}^{n-1} \frac{H(x_{v+1}, x_v)}{P^*(x_{v+1}, x_v)}$$

$$dP^*(\delta) = S^*(x_0) dx_0 \cdot \prod_{v=0}^{n-1} P^*(x_{v+1}, x_v) dx_{v+1}$$

Par définition :

$$\overline{I_n I_p} = \int R(x_n) \omega_n^*(\delta) R(x_p) \omega_p^*(\delta) dP^*(\delta)$$

$$\overline{I_n I_p} = \int \frac{S(x_n)}{S^*(x_n)} \prod_{v=0}^{n-1} \frac{H(x_{v+1}, x_v)}{P^*(x_{v+1}, x_v)} R(x_n) \frac{S(x_p)}{S^*(x_p)} \prod_{v=0}^{p-1} \frac{H(x_{v+1}, x_v)}{P^*(x_{v+1}, x_v)} R(x_p) S^*(x_n) \prod_{v=0}^{p-1} P^*(x_{v+1}, x_v) dx_n \dots dx_p$$

car  $\int \prod_{v=0}^{p-1} P^*(x_{v+1}, x_v) dx_{v+1} \dots dx_p$  est égal à 1, par construction de  $P^*$ .

$$\overline{I_n I_p} = \int \frac{S^2(x_n)}{S^*(x_n)} \prod_{v=0}^{n-1} \frac{H^2(x_{v+1}, x_v)}{P^*(x_{v+1}, x_v)} R(x_n) dx_n \dots dx_n \cdot \int \prod_{v=0}^{p-1} H(x_{v+1}, x_v) R(x_p) dx_{n+1} \dots dx_p$$

- $\int \prod_{v=0}^{n-1} \frac{H^2(x_{v+1}, x_v)}{P^*(x_{v+1}, x_v)} \cdot \frac{S^2(x_n)}{S^*(x_n)} dx_n \dots dx_n = \int \prod_{v=0}^{n-1} \frac{H^2(x_{v+1}, x_v)}{P^*(x_{v+1}, x_v)} \cdot \Psi_n^*(x_n) dx_n \dots dx_n = \Psi_n^*(x_n)$
- $\int \prod_{v=0}^{p-1} H(x_{v+1}, x_v) \cdot R(x_p) dx_{n+1} \dots dx_p = \int \prod_{v=0}^{p-1} H^+(x_v, x_{v+1}) \cdot \chi_{p-n}^+(x_p) dx_{n+1} \dots dx_p = \chi_{p-n}^+(x_n)$

On en déduit le résultat annoncé :

$$\overline{I_n I_p} = \int \Psi_n^*(x_n) \chi_{p-n}^+(x_n) R(x_n) dx_n$$

Démonstration de la proposition :

$$\begin{aligned} \overline{I^2} &= E \left[ \sum_{n=0}^{\infty} I_n \right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{I_n^2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=n+1}^{\infty} \overline{I_n I_p} \\ \sum_{p=n+1}^{\infty} \overline{I_n I_p} &= \int \Psi_n^*(x) R(x) \left\{ \sum_{p=n+1}^{\infty} \chi_{p-n}^+(x) \right\} dx = \int \Psi_n^*(x) R(x) \{ \chi^+(x) - R(x) \} dx \\ \overline{I_n^2} &= \int \Psi_n^*(x) R^2(x) dx \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \overline{I^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int \Psi_n^*(x) R^2(x) dx + 2 \int \Psi_n^*(x) R(x) \{ \chi^+(x) - R(x) \} dx \right\} \\ &= \int \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^*(x) \right\} \{ 2 \chi^+(x) - R(x) \} R(x) dx = \int \Psi^*(x) \{ 2 \chi^+(x) - R(x) \} R(x) dx \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation (A.3.).

Conclusion :

Optimiser la variance sur le score total revient à déterminer deux fonctions  $\hat{S}^*(x)$  et  $\hat{P}^*(x, x')$  telles que :

$$\hat{I}^2 = \int \hat{\Psi}^*(x) \{ 2 \chi^+(x) - R(x) \} R(x) dx \quad \text{soit minimal}$$

et

$$\hat{\Psi}^*(x) = \int \frac{H^2(x, x')}{\hat{P}^*(x, x')} \hat{\Psi}^*(x') dx' + \frac{S^2(x)}{\hat{S}^*(x)}$$

La détermination de ces fonctions fait l'objet du paragraphe suivant.

### § 3. JEU A VARIANCE NULLE

Soit  $J(x)$  une fonction d'importance fixée.

La densité biaisée des particules entrant en collision au point  $x$  est alors solution de l'équation (41) :

$$X^*(x) = \int \frac{J(x)}{J(x')} H(x, x') X^*(x') dx' + J(x) S(x)$$

Nous voulons démontrer que le choix de  $X^*(x)$  comme fonction d'importance conduit à une variance nulle sur le score total.

Les densités de probabilité biaisées ont alors pour expression (36) :

$$(48) \quad \hat{S}^*(x) = \frac{X^*(x) S(x)}{\int X^*(x) S(x) dx} = \frac{X^*(x) S(x)}{\bar{I}} \quad \text{d'après (A.1)}$$

$$(49) \quad \hat{P}^*(x, x') = \frac{H(x, x') X^*(x)}{\int H(x, x') X^*(x) dx} = \frac{H(x, x') X^*(x)}{X^*(x') - R(x')} \quad \text{d'après (A.2)}$$

L'équation (46) devient, dans ce cas :

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}^*(x) &= \int \frac{H^2(x, x')}{X^*(x) H(x, x') / [X^*(x') - R(x')]} \hat{\Phi}^*(x') dx' + \frac{S^2(x)}{X^*(x) S(x) / \bar{I}} \\ \hat{\Phi}^*(x) &= \int \frac{X^*(x') - R(x')}{X^*(x)} H(x, x') \hat{\Phi}^*(x') dx' + \frac{S(x) \cdot \bar{I}}{X^*(x)} \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable :

$$\hat{\Phi}^*(x) = \frac{X^*(x) \hat{\Phi}^*(x)}{\bar{I}}$$

Le moment d'ordre 2  $\hat{I}^2$  du score total a pour expression :

$$\hat{I}^2 = \bar{I} \int \hat{\Phi}^*(x) [2X^*(x) - R(x)] \frac{A(x)}{X^*(x)} dx$$

et  $\hat{\Phi}^*$  est solution de :

$$\hat{\Phi}^*(x) = \int \left[ 1 - \frac{R(x')}{X^*(x')} \right] H(x, x') \hat{\Phi}^*(x') dx' + S(x)$$

$\hat{I}^2$  peut aussi être déterminé par la résolution du problème adjoint suivant :

$$(50) \quad \hat{I}^2 = \bar{I} \int \hat{\Phi}^{*'}(x) S(x) dx$$

$$(51) \quad \hat{\Phi}^{*'}(x) = \left[ 1 - \frac{R(x)}{X^+(x)} \right] \int H^+(x, x') \hat{\Phi}^{*'}(x') dx' + \left[ 2 - \frac{R(x)}{X^+(x)} \right] R(x)$$

Proposition :

La solution  $\hat{\Phi}^{*'}(x)$  de l'équation (51) est la densité de collision adjointe  $X^+(x)$ .

Démonstration :

Vérifions que  $X^+(x)$  convient :

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - \frac{R(x)}{X^+(x)} \right] \int H^+(x, x') X^+(x') dx' + \left[ 2 - \frac{R(x)}{X^+(x)} \right] R(x) \\ &= \left[ 1 - \frac{R(x)}{X^+(x)} \right] [X^+(x) - R(x)] + \left[ 2 - \frac{R(x)}{X^+(x)} \right] R(x) \\ &= X^+(x) - R(x) - \frac{R(x)X^+(x)}{X^+(x)} + \frac{R^2(x)}{X^+(x)} + 2R(x) - \frac{R^2(x)}{X^+(x)} = X^+(x) \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement le résultat cherché.

Proposition :

La variance de l'estimateur de la réponse totale lorsque la fonction d'importance choisie est  $X^+$  est nulle.

Démonstration

$$\begin{aligned} \hat{I}^2 &= \bar{I} \int S(x) X^+(x) dx = \bar{I}^2 \quad \text{d'après la proposition précédente} \\ \hat{G}^2 &= \hat{I}^2 - \bar{I}^2 = 0 \quad \text{et (50)} \end{aligned}$$

Nous allons vérifier directement que, dans ce cas, la contribution d'une chaîne  $\Gamma$  quelconque à la réponse est déterministe, c'est-à-dire que  $I(\Gamma) = \bar{I} \forall \Gamma$ .



6.4. ENCAISSEMENT TOTAL D'UNE CHAÎNE  $\gamma$  DONNÉE LORSQUE LA FONCTION D'IMPORTANCE EST LA DENSITÉ DE COLLISION ADJOINTE

La suite des poids de la particule est donnée par (38bis) (39) :

$$\omega_0^*(\gamma) = \frac{S(x_0)}{S^*(x_0)}$$

$$\omega_n^*(\gamma) = \omega_{n-1}^*(\gamma) \cdot \frac{H(x_n, x_{n-1})}{P^*(x_n; x_{n-1})}$$

En substituant les valeurs de  $\hat{S}^*(x)$  et  $\hat{P}^*(x, x')$  établies au paragraphe précédent ((A.6) et A.7)) :

$$\omega_0^*(\gamma) = \frac{S(x_0)}{X^*(x_0) S(x_0) / \bar{I}} = \frac{\bar{I}}{X^*(x_0)}$$

$$\omega_n^*(\gamma) = \omega_{n-1}^*(\gamma) \cdot \frac{H(x_n, x_{n-1})}{H(x_n, x_{n-1}) X^*(x_n) / [X^*(x_{n-1}) - R(x_{n-1})]}$$

$$\omega_n^*(\gamma) = \omega_{n-1}^*(\gamma) \cdot \frac{X^*(x_{n-1}) - R(x_{n-1})}{X^*(x_n)}$$

On démontre par récurrence la proposition suivante :

$$\omega_n^*(\gamma) = \frac{\bar{I}}{X^*(x_n)} \cdot \prod_{v=0}^{n-1} \left[ 1 - \frac{R(x_v)}{X^*(x_v)} \right] \quad (\text{pour } n > 0)$$

Démonstration :

- au rang  $n^o$  1

$$\omega_1^*(\gamma) = \omega_0^*(\gamma) \cdot \frac{X^*(x_0) - R(x_0)}{X^*(x_1)} = \frac{\bar{I}}{X^*(x_1)} \cdot \frac{X^*(x_0) - R(x_0)}{X^*(x_0)}$$

$$\omega_1^*(\gamma) = \frac{\bar{I}}{X^*(x_1)} \left[ 1 - \frac{R(x_0)}{X^*(x_0)} \right]$$

- au rang  $n$  :

$$\omega_n^*(\gamma) = \omega_{n-1}^*(\gamma) \cdot \frac{X^*(x_{n-1}) - R(x_{n-1})}{X^*(x_n)} = \frac{\bar{I}}{X^*(x_n)} \prod_{v=0}^{n-1} \left[ 1 - \frac{R(x_v)}{X^*(x_v)} \right] \cdot \frac{X^*(x_{n-1}) - R(x_{n-1})}{X^*(x_{n-1})}$$

$$\omega_n^*(\gamma) = \frac{\bar{I}}{X^*(x_n)} \prod_{v=0}^{n-1} \left[ 1 - \frac{R(x_v)}{X^*(x_v)} \right]$$

Le score total associé à la chaîne est, d'après (32) :

$$I(\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^*(\delta) R(x_n) = \bar{I} \frac{R(x_0)}{X^*(x_0)} + \bar{I} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(x_n)}{X^*(x_n)} \prod_{v=0}^{n-1} \left[ 1 - \frac{R(x_v)}{X^*(x_v)} \right]$$

Posons  $y_v = \frac{R(x_v)}{X^*(x_v)}$

Le score total  $I(\delta)$  est déterministe et égal à  $\bar{I}$  si et seulement si :

$$y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \prod_{v=0}^{n-1} (1 - y_v) = 1$$

Soit  $S_N$  la somme partielle :  $S_N = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \prod_{v=0}^{n-1} (1 - y_v)$

Proposition :

$$S_N = y_N + (y_N - 1) \cdot [P_N(1) - 1]$$

où  $P_N$  est le polynôme :  $P_N(y) = \prod_{v=0}^{N-1} (y - y_v)$

Démonstration :

$\bar{I}_0(\delta) :$	$y_0$			
$+ \bar{I}_1(\delta) :$	$y_1$	$-y_0 y_1$		
$+ \bar{I}_2(\delta) :$	$y_2$	$-y_0 y_2 - y_1 y_2$	$+ y_0 y_1 y_2$	
$+ \bar{I}_3(\delta) :$	$y_3$	$-y_0 y_3 - y_1 y_3 - y_2 y_3$	$+ y_0 y_1 y_3 + y_0 y_2 y_3 + y_1 y_2 y_3$	$- y_0 y_1 y_2 y_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$+ \bar{I}_{N-1}(\delta) :$	$y_{N-1}$	$-\left(\sum_{v=0}^{N-2} y_v\right) y_{N-1}$	$+\left(\sum_{v=0}^{N-2} \sum_{v_1=0}^{v-1} y_v y_{v_1}\right) y_{N-1}$	$-\left(\sum_{v=0}^{N-2} \sum_{v_1=0}^{v-1} \sum_{v_2=0}^{v_1-1} y_v y_{v_1} y_{v_2}\right) y_{N-1}$
$+ \bar{I}_N(\delta) :$	$1$	$-\sum_{v=0}^{N-1} y_v$	$+\sum_{v=0}^{N-1} \sum_{v_1=0}^{v-1} y_v y_{v_1}$	$-\sum_{v=0}^{N-1} \sum_{v_1=0}^{v-1} \sum_{v_2=0}^{v_1-1} y_v y_{v_1} y_{v_2}$

$= S_N$

En développant  $I_n(\delta)$  à  $n$  fixé (lignes de la matrice).

Soit  $A$  la matrice triangulaire  $(N+1, N+1)$  ainsi construite :

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i}^{N-1} a_{ij} + y_N \sum_{j=0}^N a_{Nj}$$

Cette matrice a la propriété suivante :

$$\sum_{i=j}^{N-1} a_{ij} = -a_{Nj+1} \quad j=0, \dots, N-1$$

$$\text{d'où } S_N = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=j}^{N-1} a_{ij} + y_N + y_N \sum_{j=0}^{N-1} a_{Nj+1}$$

$$S_N = y_N + (y_N - 1) \sum_{j=1}^N a_{Nj} \quad a_{Nj} = (-1)^j \sum_{i=0}^{N-1} \dots \sum_{v=0}^{N-1} y_i \dots y_v$$

Les  $a_{Nj}$  sont les coefficients du polynôme :

$$P_N(y) = y^N + a_{N+1} y^{N-1} + \dots + a_{N,N-1} y + a_{NN} \quad \text{de racines } y_1, \dots, y_{N+1}$$

$$P_N(y) = \prod_{v=0}^{N-1} (y - y_v)$$

d'où :

$$S_N = y_N + (y_N - 1) \{ P_N(1) - 1 \}$$

Proposition :

Si  $R(x) > 0 \quad \forall x$  l'encaissement total  $I(\delta)$  est déterministe et égal à  $\bar{I}$ .

Démonstration

Il suffit de montrer que  $\lim_{N \rightarrow \infty} |1 - S_N| = 0$

$$E_N = 1 - S_N = \prod_{v=0}^N (1 - y_v)$$

$R(x_v)$  étant  $\geq 0$

$1 > y_v \geq 0$  d'après (A.2)

et donc la suite  $E_N$  est décroissante.

De plus, à  $N$  fixé, il existe au moins un événement  $x_p$  ( $p > n$ ) tel que  $y_p$  soit non nul, de tels événements étant les plus probables (d'après A.7.).

Par suite, il existe une infinité de  $y_p$  non nuls, d'où :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N = 0$$

ce qui établit la proposition.

Nous obtenons en résumé les relations suivantes :

$$(52) \quad \frac{\omega_{n+1}^*(Y)}{\pi^*(x_{n+1})} = \prod_{v=0}^n \{1 - y_v\}$$

où  $y_v = R(x_v) / \mathcal{X}^*(x_v)$   
 $\pi^*(x) = 1 / \mathcal{X}^*(x)$  est le poids imposé en  $x$

Cette relation est valable à la norme des sources biaisées  $\bar{I}$  près.

$$(53) \quad S_n = \bar{I} (1 - \epsilon_n) = \bar{I} \prod_{v=0}^n \{1 - y_v\}$$

$S_n$  est la série de Neumann :  $I(r) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(r)$  tronquée à l'ordre  $n$ .

Ces deux relations amènent les remarques suivantes :

1. par construction, tous les événements de la chaîne  $\bar{I}$  contribuent aux résultats (il n'existe pas d'événements inutiles) ;
2. aussi longtemps que la particule simulée se propage dans une portion de l'espace des phases où le détecteur est nul ( $y_v = 0$ ), elle reste en accord de poids avec le poids imposé  $\pi^*$  ;
3. lorsqu'elle atteint le support du détecteur (et si celui-ci est positif), le rapport :

$$\frac{\text{Poids de la particule}}{\text{Poids imposé}}$$

décroit de 1 vers 0.

Le jeu idéal n'utilise donc aucune technique de splitting.

4. la quantité d'information associée à une sous-chaîne  $(x_{N_1}, \dots, x_{N_2})$  d'événements tous définis dans le support du détecteur, rapportée à la quantité d'information totale  $\bar{I}$  est :

$$\prod_{v=N_1}^{N_2} \{1 - y_v\} \quad (\text{d'après A.11}) \text{ et s'interprète de}$$

plus comme la dégradation du rapport :  $\frac{\omega^*}{\pi^*}$  (d'après 52)

5. la quantité d'information  $\bar{I}$  est globalement transmise avec une variance, nulle si de telles sous-chaînes apparaissent en nombre infini.

La simulation d'une chaîne infinie étant évidemment irréalisable, des techniques de roulette sont utilisées dans la pratique. L'emploi de la roulette induit alors une variance non nulle sur  $\bar{I}$ , que nous allons calculer.

Soit  $\varepsilon_f$  un nombre réel appartenant à  $(0, 1)$ .

Soit  $x_{n+1}$  un événement de la chaîne simulée tel que :

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\omega_n^*(\delta)}{\pi^+(x_n)} > \varepsilon_f \\ \frac{\omega_{n+1}^*(\delta)}{\pi^+(x_{n+1})} \leq \varepsilon_f \end{array} \right.$$

Un nombre  $\delta$  est uniformément tiré sur  $(0, 1)$ .

si  $\delta \leq \varepsilon_f$  la particule survit avec un poids  $\omega_{n+1}^*(\delta) = 1$   
 si  $\delta > \varepsilon_f$  elle disparaît (arrêt de la simulation).

Nous poserons pour simplifier  $\frac{\omega_{n+1}^*(\delta)}{\pi^+(x_{n+1})} \neq \varepsilon_f$

Soit  $K$  le nombre de fois où le rapport du poids de la particule au poids imposé est remis à 1.

La probabilité que ce rapport soit remis à 1 exactement  $k$  fois est :

$$P(H = k) = \varepsilon_f^k (1 - \varepsilon_f) \quad k = 0, \dots, \infty$$

Soit alors  $(x_{N_1(k)}, \dots, x_{N_2(k)})$  une sous-chaîne telle que définie à la remarque 4, où  $x_{N_1(k)}$  est le premier événement en désaccord de poids et  $x_{N_2(k)}$  le dernier (pour lequel  $\omega_{N_2(k)+1}^*(\delta) \neq \varepsilon_f \pi^+(x_{N_2(k)+1})$ ).

La contribution de cette sous-chaîne à la réponse totale et des précédentes est :

$$S = (1 + K) \bar{I}(1 - \varepsilon_f)$$

puisque  $\bar{I}(1 - \varepsilon_f)$  représente la quantité d'information encaissée entre deux passages à la roulette.

Vérifions que la moyenne de cet estimateur est encore  $\bar{I}$  :

$$\bar{S} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \bar{I}(1 - \varepsilon_f) \varepsilon_f^k (1 - \varepsilon_f) = \bar{I}(1 - \varepsilon_f)^2 \frac{d}{d\varepsilon_f} \left[ \frac{1}{1 - \varepsilon_f} \right] = \bar{I}$$

Moment d'ordre 2 de  $S$  :

$$\begin{aligned} \bar{S}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 \bar{I}^2 (1 - \varepsilon_f)^2 \varepsilon_f^k (1 - \varepsilon_f) = \bar{I}^2 (1 - \varepsilon_f)^3 \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) \varepsilon_f^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \varepsilon_f^k \right\} \\ \bar{S}^2 &= \bar{I}^2 (1 - \varepsilon_f)^3 \left\{ \frac{d^2}{d\varepsilon_f^2} \left[ \frac{1}{1 - \varepsilon_f} \right] - \frac{d}{d\varepsilon_f} \left[ \frac{1}{1 - \varepsilon_f} \right] \right\} = \bar{I}^2 (1 + \varepsilon_f) \end{aligned}$$

La variance de S est :

$$\sigma^2(S) = \epsilon_f \bar{I}^2$$

La largeur de l'intervalle de confiance sur  $\bar{I}$  est donc de :  $\Delta = \bar{I} \sqrt{\epsilon_f}$

Le nombre moyen de roulettes est :

$$\bar{R} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \epsilon_f^k (1-\epsilon_f) = \frac{1}{1-\epsilon_f}$$

Soit  $\bar{y}$  la valeur moyenne de  $y$  lorsque  $R$  est non nul ; le nombre moyen  $\bar{N}$  de collisions simulées avant roulette dans le support de  $R$  est :

$$\prod_{v=N_1(R)}^{M_2(R)} \{1-y_v\} \approx \{1-\bar{y}\}^{\bar{N}} \approx \epsilon_f$$

Soit  $\bar{N} \approx \frac{\text{Log } \epsilon_f}{\text{Log } (1-\bar{y})}$

Le nombre moyen de collisions pour lesquelles l'encaissement est non nul est :

$$\bar{N} \cdot \bar{R} = \frac{1}{\text{Log } (1-\bar{y})} \cdot \frac{\text{Log } \epsilon_f}{1-\epsilon_f}$$

En particulier, en l'absence de roulette russe ( $\epsilon_f = 0$ ), on retrouve les résultats précédents :

- variance nulle sur la réponse
- nombre de chocs de la particule infini dans le support du détecteur.

## 7 - LES DEVELOPPEMENTS EN COURS

Les principes de simulation précédemment exposés ont été appliqués successivement dans les codes TRIPOLI-1 (transport de neutrons ; problèmes de protection, fin des années 1960) puis TRIPOLI-2 (transport de neutrons et de photons, protection/neutronique/criticité, fin des années 1970), écrits en FORTRAN IV sur machines IBM 370.

Actuellement, une réécriture complète du programme est en cours (TRIPOLI-3). Ce développement est nécessité par trois raisons principales :

- l'apparition de calculateurs vectoriels (CRAY1/CRAY XMP, etc..) ; l'utilisation efficace de ces calculateurs impose de repenser profondément les algorithmes de simulation du parcours et de la collision, les événements de même nature devant être regroupés, puis traités simultanément. Ce type de simulation introduit des discontinuités (en temps) dans l'histoire des particules, contrairement à une simulation classique (scalaire) ou utilisant des processeurs parallèles.

- le transport des neutrons et photons dans les milieux lacunaires. Ces problèmes de fuite de particules dans des vides de formes quelconques sont rencontrés dans les réacteurs, les dispositifs expérimentaux et les problèmes de démantèlement de centrales. Les fonctions d'importance optimales (flux adjoints) ont de très fortes variations en espace et en angle, les variables  $\vec{r}$  et  $\vec{\Omega}$  étant de plus fortement corrélées. Elles peuvent également dépendre du temps. Les fonctions implantées dans TRIPOLI-2 ont actuellement un faible rendement pour des vides étroits (par exemple, des vides cylindriques de rapport longueur/rayon de l'ordre de 100).

Une thèse est en cours pour déterminer des lois de tirage plus efficaces à partir de flux adjoints calculés par des méthodes déterministes (différences fines, probabilités de collision) dans des géométries approchées (bidimensionnelles).

- la généralisation de l'utilisation de TRIPOLI-2 à des ingénieurs de projet n'étant pas des spécialistes des techniques de pondérations implémentées dans le code.

Ces derniers ont souvent des difficultés pour définir un premier jeu de fonctions d'importance, et ensuite pour les modifier au vue des simulations partielles (phase de réglage) de façon à minimiser la variance.

Notre direction de recherche consiste à définir un système expert qui permettra d'initialiser les fonctions d'importance par des valeurs réalistes,

à partir des caractéristiques générales du problème (nature de la source, de la réponse, des milieux traversés, ...), puis à ajuster dynamiquement ces fonctions d'importance en cours de simulation.

### 7.1. Ajustement automatique des fonctions d'importance

Nous supposons tout d'abord que nous disposons d'un ensemble de points  $\vec{r}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) d'un ensemble d'observations  $\varphi_i^+$  du flux adjoint, obtenu par une simulation par Monte Carlo partielle ou un calcul déterministe approché.

Nous posons  $f_i = \text{Log } \varphi_i^+$  et  $C_{ij}$  : corrélation entre  $f_i$  et  $f_j$ .

Nous cherchons des fonctions d'importance de la forme :

$$(54) \quad I_p(\vec{r}) = e^{Q(\vec{r}/\vec{p})} \quad \text{pour } \vec{r} \in R_p^+$$

$$\text{où } Q(\vec{r}/\vec{p}) = p_1 x^2 + p_2 y^2 + \dots + p_{10} = \langle \vec{p}, \vec{R} \rangle$$

entièrement définie par le vecteur  $\vec{p}$  sur le support  $R_p^+$

$$\vec{R} \text{ est le vecteur : } \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

#### 7.1.1. Choix de la partition de l'espace en classes $R_p^+$

Nous avons testé des méthodes classiques de reconnaissance des formes (suivi de contours, méthodes de gradient). Ces méthodes permettent de définir une partition correcte dans des géométries bidimensionnelles, mais s'avèrent d'un coût prohibitif à trois dimensions.

Finalement, nous avons choisi à trois dimensions un critère de classement fondé sur la forme quadratique présumée des équipoids :

- deux points  $\vec{r}_i$  et  $\vec{r}_j$  appartiennent à la même classe  $R_p^+$  si :

$$(55) \quad \left| f_j - f_i - \left\langle \vec{r}_j - \vec{r}_i, \frac{\vec{g}_i + \vec{g}_j}{2} \right\rangle \right| \leq \epsilon$$

où  $\vec{g}_i$  est le gradient de  $f$  au point  $\vec{r}_i$ ,



Ce critère est obtenu en faisant le développement de Taylor de  $f$  au 2ème ordre.

### 7.1.2. Ajustement de $\vec{p}$ par classe $R_p$

Une fois les  $n$  observations réparties en  $N$  classes, les paramètres  $\vec{p}$  de chaque classe sont déterminés en appliquant le principe du maximum de vraisemblance :

$\vec{f}$  est le vecteur des observations  $f_i$  appartenant à la classe, et  $\vec{Q}(\vec{p})$  le vecteur de composantes  $Q(r_i/p)$ , où  $\vec{p}$  est inconnu. Nous supposons la distribution de  $\vec{p}$  gaussienne :

$$(56) \quad P(\vec{p}) d\vec{p} = \text{constante} \cdot \exp - \frac{1}{2} (\vec{f} - \vec{Q}(\vec{p})) C^{-1} (\vec{f} - \vec{Q}(\vec{p}))$$

et obtenons classiquement  $\vec{p}$  par minimisation de la forme quadratique :

$$\frac{1}{2} (\vec{f} - \vec{Q}(\vec{p})) C^{-1} (\vec{f} - \vec{Q}(\vec{p})) = F(\vec{p})$$

Dans ce cas particulier ( $Q$  quadratique),  $\vec{p}$  est obtenu très rapidement par résolution du système linéaire  $10 \times 10$  :

$$(57) \quad \begin{bmatrix} R & C^{-1} & t_R \end{bmatrix} \vec{p} = \begin{bmatrix} R & C^{-1} \end{bmatrix} \vec{f}$$

où  $R$  est la matrice :

$$\begin{bmatrix} x_1^2 & \dots & x_k^2 \\ y_1^2 & \dots & y_k^2 \\ 1 & & 1 \end{bmatrix}$$

### 7.1.3. Itération

Nous avons introduit un nombre arbitraire  $\epsilon$  pour définir la répartition des observations en classes, le seul nombre significatif étant une valeur  $\epsilon_p$  telle que  $F(\vec{p}) < \epsilon_p$ .

Les classes géométriquement voisines sont ensuite regroupées (si  $F(\vec{p}) < \epsilon_p$ ) ou divisées (si  $F(\vec{p}) < \epsilon_p$ ).

## 7.2. Reconstitution du flux adjoint à partir d'une simulation directe

Considérons l'équation (39 bis) donnant la contribution de la  $v$ ème collision au résultat :

$$I_v = E(J_v) = \int S_0(x_0) \prod_{n=1}^v K(x_n/x_{n-1}) r(x_v) dx_0 - dx_v$$

Les termes de source direct ( $S_0$ ) et adjoint ( $r$ ) jouent un rôle symétrique :

$$\begin{aligned} I_v &= \langle S_0, \chi_v^+ \rangle = \langle \chi_v, r \rangle \\ &= \langle \chi_i, \chi_{v-i}^+ \rangle \quad \forall i=0, \dots, v \end{aligned}$$

A partir d'une simulation directe, et sous réserve d'avoir conservé la séquence d'évènements permettant de passer de l'état  $x_0$  à l'état  $x_v$ , on peut facilement définir un estimateur de la densité de collision adjointe en "renversant" le sens de la simulation.

On définit :

$$(58) \quad i^+(x_k) = w_k \sum_{i \gg k} \frac{r(x_i)}{w_i}$$

où  $r$  est la fonction réponse et  $w_i$  les poids de la simulation directe définis par la relation (39).

$i^+(x_k)$  est un estimateur sans biais de  $\chi^+$  au point  $x_k$ .

## 8 - CODE TRIPOLI-2

### 8.1. Présentation générale du code

Le code TRIPOLI-2, fonctionnant sur ordinateur IBM, résout de façon exacte par la méthode de Monte Carlo l'équation générale du transport dans des géométries à trois dimensions. Il effectue le transport des neutrons et des gamma soit séparément soit par un traitement couplé. Les problèmes peuvent être soit stationnaires soit dépendants du temps.

TRIPOLI-2 peut fonctionner suivant deux modes différents :

- le premier mode concerne les problèmes de protection, avec de fortes pénétrations ; il utilise des techniques de pondération et des sections efficaces multigroupes fines
- le deuxième mode concerne les problèmes de neutronique de coeur et les problèmes de mise en groupe, pour lesquels TRIPOLI-2 est utilisé comme code de référence ; dans le domaine des résonances les sections efficaces sont décrites par points ; la thermalisation est traitée de façon exacte.

### 8.2. Données nucléaires et interactions étudiées

TRIPOLI-2 est couplé sur deux bibliothèques de base : UKNDL et ENDF/B4 et peut traiter le transport des neutrons et des gamma.

La méthode de Monte Carlo permet de décrire les données nucléaires avec une grande précision.

La figure 1 montre la section efficace totale du fer décrite sur 315 intervalles en énergie entre 19 MeV et 0.04 eV.

### 8.3. Géométrie

La géométrie est un assemblage de volumes homogènes, disjoints, limités par des surfaces du premier ou du second degré. L'arrangement de ces volumes dans l'espace est quelconque ce qui permet de traiter des géométries très générales. L'emploi de conditions aux limites permet d'étudier des géométries répétitives par symétrie, translation ou rotation.

La figure 2 montre un exemple de géométrie étudiée par TRIPOLI.

#### 8.4. Techniques de biaisage

Les principes du biaisage décrits au chapitre 4 sont mis en application dans le code TRIPOLI-2 qui résout l'équation 30. Les fonctions  $\pi(x)$ ,  $\Sigma_T^*(x)$ ,  $K(x)$  et  $\vec{\Omega}_0(x)$  sont approximées par des fonctions plus simples.

$$\pi(x) = \pi_1(\vec{r}, v) \cdot \pi_2(\vec{\Omega}, v) \cdot \pi_3(E, v) \quad \text{pour } r \in \text{volume } v$$

$$\Sigma_T^*(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \Sigma_T(\vec{r}, E) - \chi(E) K(v) \vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}_0(\vec{r}, v)$$

Dans chaque volume  $v$  le poids  $\pi_1(\vec{r}, v)$  varie continuellement en  $\vec{r}$  et les surfaces équipoids peuvent être planes, sphériques, cylindriques ou coniques.

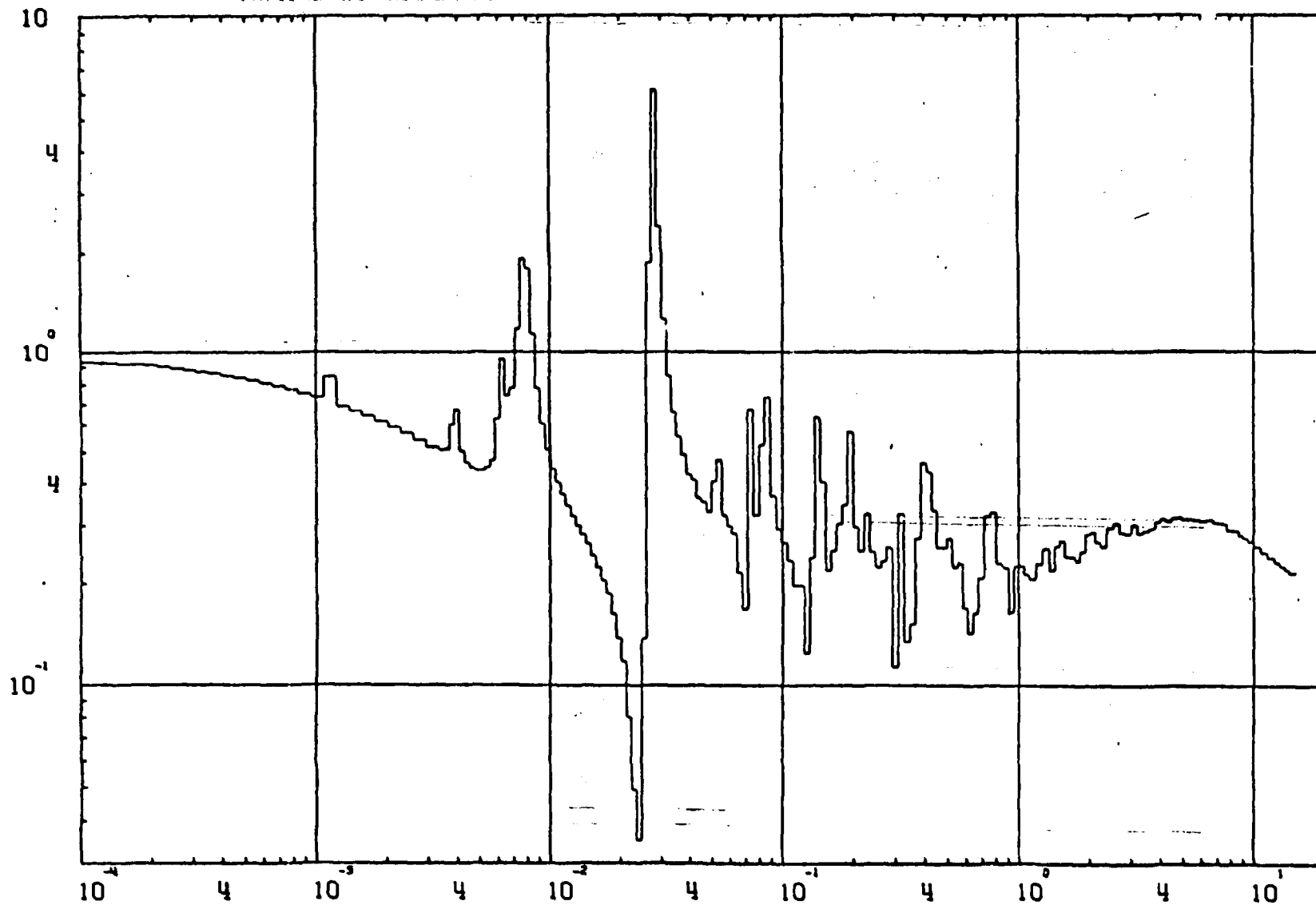
La figure 3 montre un exemple : les surfaces équipoids (correspondant à  $\pi_1(\vec{r}, v) = \text{constante}$ ) utilisées pour calculer le flux dans la zone résultat qui s'atténue d'un facteur  $10^{12}$  de puis la zone source.

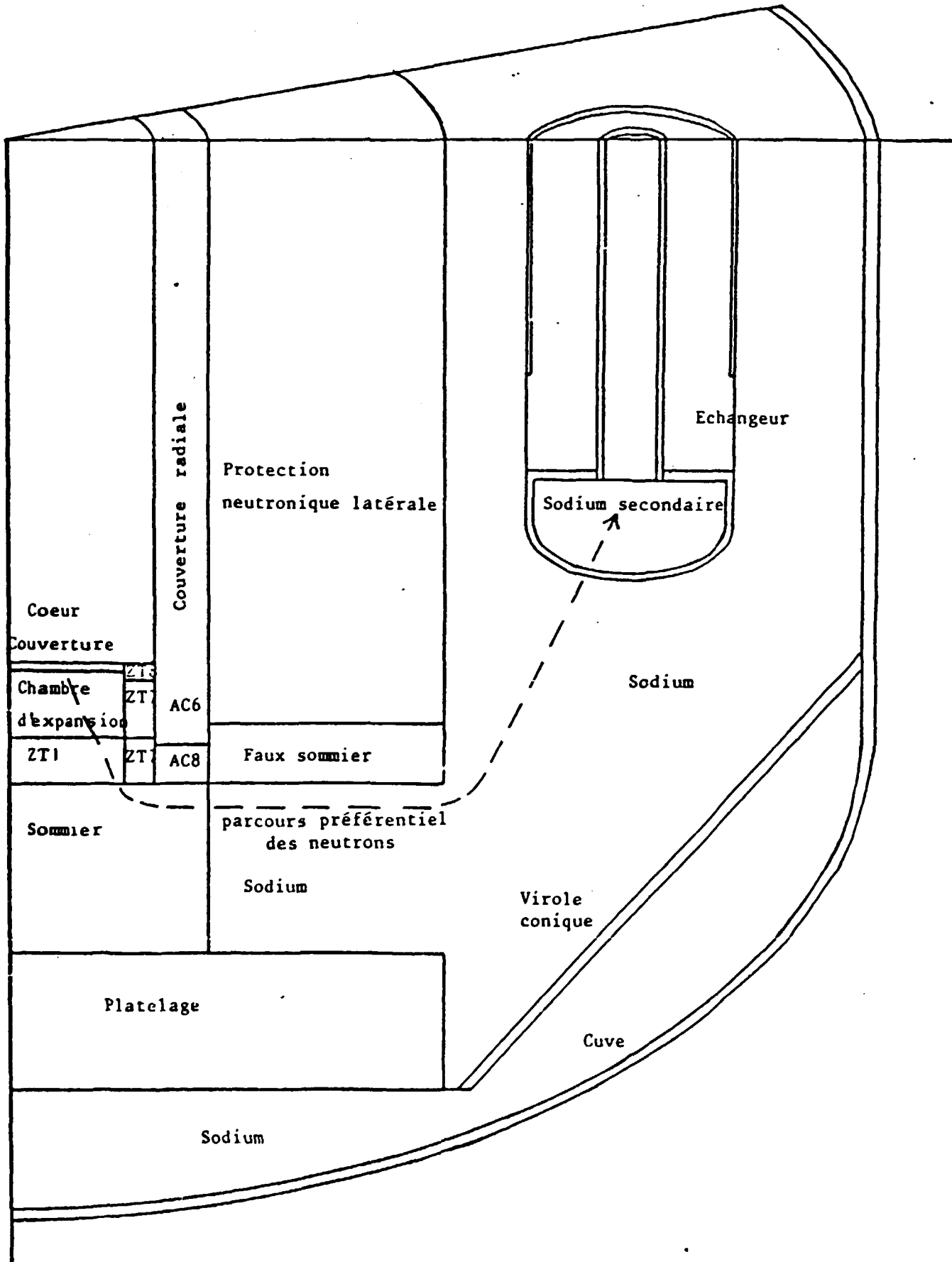
Le choix des paramètres de biaisage ( $\vec{\Omega}_0(\vec{r}, v)$ ,  $K(v)$ ,  $\pi_3(E, v)$ ) les plus adaptés au problème étudié est contrôlé par un module du système TRIPOLI : VISPAR.

Ce code visualise les chocs des particules, en particulier de celles qui contribuent au résultat cherché ; il permet de plus de localiser les points où  $\pi_1(\vec{r}, v)$  est mal adapté ainsi que les faiblesses de la protection étudiée.

La figure 4 montre l'emplacement des chocs, entre 18 MeV et 0.4 eV, de 30 neutrons contribuant à l'activation du sodium.

SECTION EFFICACE TOTALE DU FER - 315 groupes -





REACTEUR PHENIX - POIDS SPATIAL

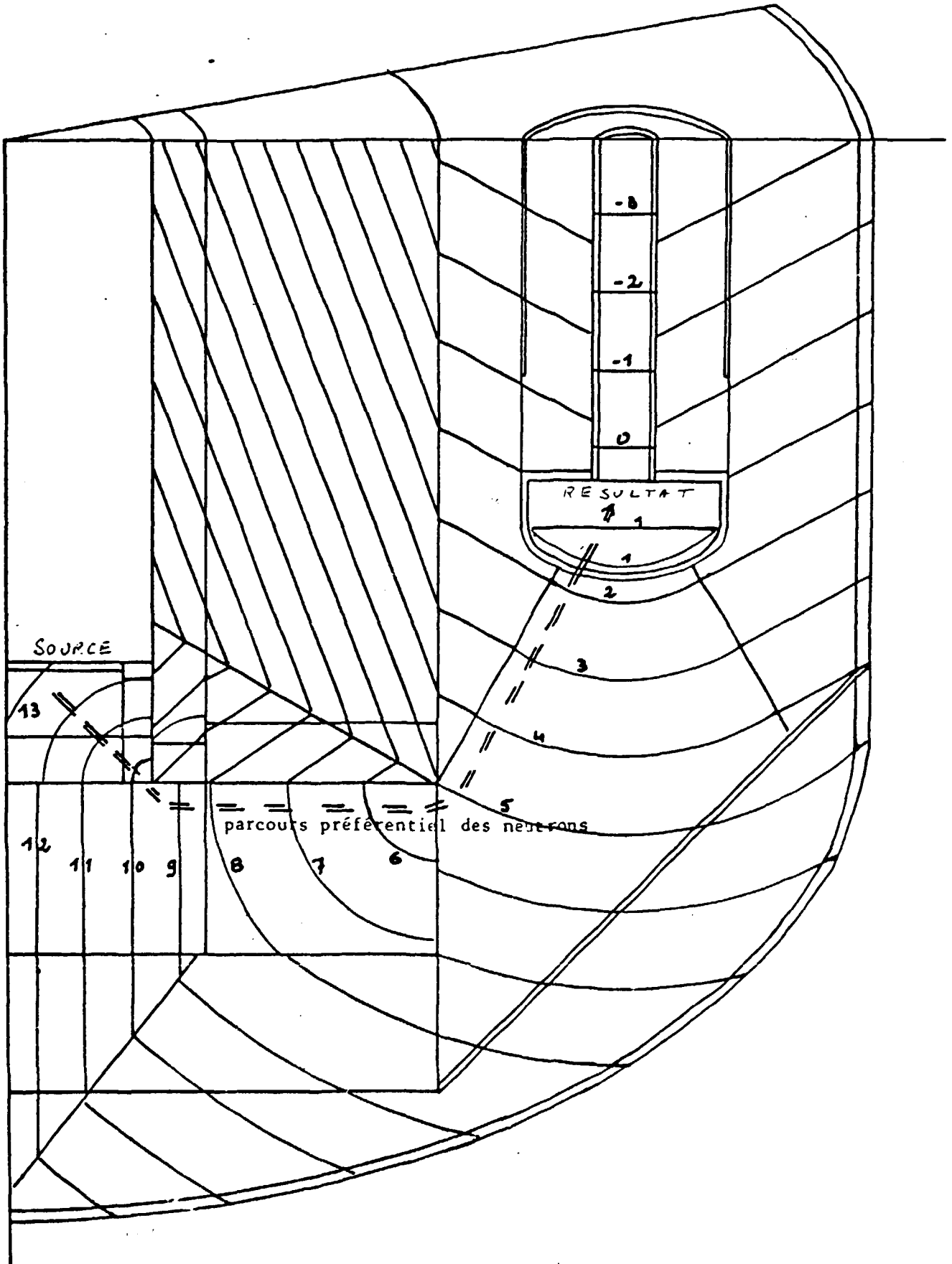


FIGURE 4

