TRN CN8701102

CNIC-00047
IAPCM-0004

中国核科技报告
CHINA NUCLEAR SCIENCE & TECHNOLOGY REPORT

多群限流渐近扩散-Fokker-Planck方程

中国核情报中心
China Nuclear Information Centre

CNIC-00047
IAPCM-0004

多群限流渐近扩散-Fokker-Planck方程

刘成安

（应用物理与计算数学研究所，北京）

中国核情报中心

北京．1987

摘　要

本工作将比较完善的限流方法与辐射输运的渐近扩散理论结合了起来；把散射反应的角分布尖峰（朝前散射）部分用Fokker-Planck方法进行了处理，从而建立了限流渐近扩散Fokker-Planck方程。该方程保持了经典扩散理论的简便性，提高了近似描述辐射输运问题的精度。

关键词　限流　渐近扩散　辐射输运

A MULTIGROUP FLUX-LIMITED ASYMPTOTIC DIFFUSION FOKKER-PLANCK EQUATION

Liu Cheng-an

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing)

ABSTRACT

A more perfect flux-limited method is applied to combine with asymptotic diffusion theory of the radiation transport, and the high peaked component in the scattering angle is treated with Fokker-Planck methods, thus the flux-limited asymptotic diffusion Fokker-Planck equation has been founded. Since the equation is of diffusion form, it retains the simplity and the convenience of the classical diffusion theory, and improves precision in describing radiation transport problems.

一、引　　言

近年来，在用渐近扩散理论代替经典扩散理论描述中性粒子迁移问题方面取得了很好的结果，提高了用扩散近似型方程描述中性粒子迁移问题的精度[1][2]。与此同时，扩散理论限流方法的研究，也取得了丰硕的成果。限流方法由定性的描述逐步过渡到了定量描述，限流理论趋于精确和完善[3][4][5]。本工作将比较完善的限流方法与辐射输运的渐近扩散理论结合了起来，同时将方程中散射角分布的尖峰部分用 Fokker-Planck 方法进行处理，从而建立了限流渐近扩散Fokker-Planck方程。

对于散射占主要地位的状态，该方程与现已提出的几种典型的限流扩散方程一致，对吸收或发射占主导的状态，它给出了满足限流要求的渐近扩散理论精度的结果。它保留了经典扩散理论的简便性，提高了近似描述辐射输运问题的精度。

二、玻耳兹曼-Fokker-Planck方程

考虑诱导过程的辐射输运方程为

$$\left\{\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}+\Omega\cdot\nabla+\sigma_a(\nu)\right\}I(\nu,\Omega)=S(\nu)\left\{1+\frac{c^2}{2h\nu^3}I(\nu,\Omega)\right\}+\int_0^\infty d\nu'\times$$

$$\times\int d\Omega'\ \frac{\nu}{\nu'}\ \sigma_s(\nu\rightarrow\nu,\Omega\cdot\Omega')I(\nu',\Omega')\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}I(\nu,\Omega)\right]-\int_0^\infty d\nu'\times$$

$$\times\int d\Omega'\sigma_s(\nu\rightarrow\nu',\Omega\cdot\Omega')I(\nu,\Omega)\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}I(\nu',\Omega)\right]\qquad(1)$$

这里函数中所含的 $(\mathbf{r},\ t)$ 变量未予写出。式中

$s(\nu)$——原子的自发辐射源，

$\sigma_a(\nu)$——物质对光子的宏观吸收截面，

$\sigma_s(\nu'\rightarrow\nu,\Omega\cdot\Omega')$——物质对光子的宏观散射截面。

为了描述的方便，引进关系式

$$S(\nu)=\sigma_{a'}(\nu)B(\nu)\qquad(2)$$

$$\sigma_a(\nu)=\sigma_{a'}(\nu)\left[1+\frac{c^2}{2h\nu^3}\ B(\nu)\right]\qquad(3)$$

相当于用两个新的函数$\sigma_{a'}(\nu)$，$B(\nu)$ 代替原来的函数 $\sigma_a(\nu)$，$S(\nu)$。将方程（2），（3）代入方程（1），并略去散射反应的诱导过程，则方程可以简化为

$$\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\Omega\cdot\nabla\right\}I(\nu,\Omega)=\sigma_a(\nu)\left[B(\nu)-I(\nu,\Omega)\right]-\sigma_s(\nu)I(\nu,\Omega)+$$

$$+\int_0^\infty d\nu'\ \int d\Omega'\ \frac{\nu}{\nu'}\sigma_s(\nu'\rightarrow\nu,\Omega\cdot\Omega')I(\nu,\Omega')\qquad(4)$$

将散射分解为两部分

$$\sigma_s(\nu'\to\nu,\Omega\cdot\Omega')=\sigma_R(\nu'\to\nu,\Omega\cdot\Omega')+\sigma_{FP}(\nu'\to\nu,\Omega\cdot\Omega') \tag{5}$$

$\sigma_R(\nu'\to\nu,\Omega\cdot\Omega')$表示正常散射部分，它是$\Omega\cdot\Omega'$的平滑函数，用勒让德多项式展开收敛快。$\sigma_{FP}(\nu'\to\nu,\Omega\cdot\Omega')$表示异常散射部分，具有峰值的朝前散射，每次散射变频小。这部分用Fokker-Planck方法进行处理。据此所导出的玻耳兹曼－Fokker-Planck方程如下[4]

$$\left\{\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}+\Omega\cdot\nabla+\sigma(\nu)\right\}I(\nu,\Omega)=\int_0^\infty d\nu'\int d\Omega'\frac{\nu}{\nu'}\sigma_R(\nu'\to\nu,\Omega\cdot\Omega')I(\nu',\Omega')+$$

$$+\sigma_{a'}(\nu)B(\nu)+\frac{\partial}{\partial\nu}[\alpha(\nu)I(\nu,\Omega)]+\beta(\nu)\left[\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]I(\nu,\Omega) \tag{6}$$

其中

$$\sigma(\nu)=\sigma_{a'}(\nu)+\sigma_R(\nu) \tag{7}$$

$$\sigma(\nu)=\sigma_t(\nu)-\int_0^\infty d\nu'\int d\Omega'\sigma_{FP}(\nu\to\nu',\Omega\cdot\Omega') \tag{8}$$

其中$\alpha(\nu)$，$\beta(\nu)$称之为Fokker-Planck系数，由下式决定：

$$\alpha(\nu)=\int_0^\infty d\nu'(\nu-\nu')\sigma_{FP,0}(\nu\to\nu') \tag{9}$$

$$\beta(\nu)=\pi\int_{-1}^{1}d\mu_0(1-\mu_0)\sigma_{FP}(\nu,\ \mu_0) \tag{10}$$

$$\sigma_{FP,0}(\nu\to\nu')=\int d\Omega\sigma_{FP}(\nu\to\nu',\Omega\cdot\Omega')=2\pi\int_{-1}^{1}d\mu_0\sigma_{FP}(\nu\to\nu',\mu_0) \tag{11}$$

$\sigma_{FP}(\nu,\ \nu_0)$为实验室坐标系，关于角度的微分截面

$$\sigma_{FP}(\nu,\mu_0)=\int_0^\infty d\nu'\sigma_{FP}(\nu\to\nu',\mu_0) \tag{12}$$

把ν分成G群，取$\nu_0=0$，ν_1，ν_2，…，$\nu_G=\infty$为分群间隔点，则多群形式的玻耳兹曼Fokker-Planck方程为

$$\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\Omega\cdot\nabla+\left(\sigma_g-\frac{\alpha_g}{\nu_g}\right)\right\}I_g(\Omega)=\frac{1}{4\pi}acT^4\sigma_{a',g}b_g+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sum_{g'=1}^{G}\tilde{\sigma}_{R,l,g'\to g}$$

$$Y_{lm}(\Omega)I^m_{lg'}+\beta_g\left[\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]I_g(\Omega) \tag{13}$$

平均群截面的权重能谱，只能近似地选取。一般说来，凡需用角分布能谱作权重函数的地方也都以角度、体积积分能谱代替。由此可以写出群截面的平均公式如下

$$
\left\{
\begin{aligned}
& I_{1g} = \int_{\nu_g}^{\nu_{g-1}} d\nu I_1(\nu) \\
& I_1(\nu) = \int d\Omega P_1(\Omega) I(\nu, \Omega) \\
& \sigma_g = \int_{\nu_g}^{\nu_{g-1}} d\nu\sigma(\nu) I_0(\nu) \Big/ \int_{\nu_g}^{\nu_{g-1}} d\nu I_0(\nu) \\
& \sigma_{a',g} = \int_{\nu_g}^{\nu_{g-1}} d\nu\sigma_{a'}(\nu) B(\nu) \Big/ \int_{\nu_g}^{\nu_{g-1}} d\nu B(\nu) \\
& b_g = \int_{\nu_g}^{\nu_{g-1}} d\nu B(\nu) \Big/ \frac{1}{4\pi} acT^4 \qquad \int_0^\infty d\nu B(\nu) = \frac{1}{4\pi} acT^4 \\
& \tilde{\sigma}_{R1g'\to g} = \int_{\nu_{g'}}^{\nu_{g'-1}} d\nu' \int_{\nu_g}^{\nu_{g-1}} d\nu \frac{\nu}{\nu'} \sigma_{R1}(\nu'\to\nu) I_0(\nu') \Big/ \int_{\nu_g} d\nu' I_0(\nu') \\
& \frac{1}{\nu_g} = \int_{\nu_{g-1}}^{\nu_g} d\nu I_0(\nu)\nu^{-1} \Big/ \int_{\nu_g}^{\nu_{g-1}} d\nu I_0(\nu) \\
& \alpha_g = \int_{\nu_g}^{\nu_{g-1}} \frac{\partial}{\partial\nu}\Big[\alpha(\nu) I_0(\nu)\Big] \Big/ \int_{\nu_g}^{\nu_{g-1}} \frac{1}{\nu} I_0(\nu) d\nu \\
& \beta_g = \pi \int_{\nu_g}^{\nu_{g-1}} d\nu \int_{-1}^{1} d\mu_0 (1-\mu_0) \sigma_{FP}(\nu,\mu_0) I_0(\nu) \Big/ \int_{\nu_g}^{\nu_{g-1}} d\nu I_0(\nu)
\end{aligned}
\right. \tag{14}
$$

如果正规散射取各向同性近似，则方程（13）可以写为

$$
\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \Omega\cdot\nabla + \left(\sigma_g - \frac{\alpha_g}{\bar{\nu}_g}\right)\right\} I_g(\Omega) = \frac{1}{4\pi}\left\{acT^4\sigma_{a',g} b_g + \sum_{g'=1}^{G} \tilde{\sigma}_{R0g'\to g} I_{0g'}\right.
$$

$$
\left. + \beta_g\left[\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}\right] I_g(\Omega) \right. \tag{15}
$$

方程（15）就是多群玻耳兹曼-Fokker-Planck方程。

三、限流渐近扩散方程的推导

1．输运方程的矩方程

为了简单起见，这里仅讨论一维几何系统的情况，这时辐射比强度 $I_g(\Omega)$ 与方位角无关，角度变量可用粒子飞行方向Ω与坐标矢径r的夹角的余弦来表示，即 $\mu = \Omega\cdot r/|r|$。对方程（15）作 $2\pi\int_{-1}^{1} d\mu$. 和 $2\pi\int_{-1}^{1} d\mu\mu$. 运算则得

$$\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}I_{0g}(r,t)+\nabla\cdot\mathbf{I}_{1g}(r,t)+\left(\sigma_g-\frac{\alpha_g}{\nu_g}\right)I_{0g}(r,t)\right\}=Q_g \tag{16}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I_{1g}(r,t)}{\partial t}+\nabla\cdot\int_{-1}^{1}2\pi\mu\mu I_g(\mu)\mathrm{d}\mu+\left(\sigma_g-\frac{\alpha_g}{\nu_g}\right)I_{1g}(r,t)+$$

$$+2\beta_g I_{1g}(r,t)=0 \tag{17}$$

$$Q_g=acT^4\sigma_{a,g}b_g+\sum_{g'=1}^{G}\tilde{\sigma}_{RO g'\to g}I_{0g'}(r,t) \tag{18}$$

2．扩散系统的推导

假定辐射比强度的角分布可用如下形式的函数来描述[6]

$$I_g(r,\ \mu,\ t)=I_{0g}(r,\ t)E(r,\ \mu,\ t)+I_{1g}(r,\ t)O_g(r,\ \mu,\ t) \tag{19}$$

其中$E_g(r,\ \mu,\ t)$和$O_g(r,\ \mu,\ t)$分别为满足如下归一化条件的变量μ的偶函数和奇函数

$$2\pi\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu E_g(r,\ \mu,\ t)=1 \tag{20}$$

$$2\pi\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu\mu O_g(r,\ \mu,\ t)=1 \tag{21}$$

又假定，它们是（r，t）的慢变化的函数，因而可以提到梯度算符和时间微分算符之外。于是，将方程（19）代入方程（17），可得

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}I_{1g}(r,t)+2\pi\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu\mu^2E_g(r,\mu,t)\nabla I_{0g}(r,t)+$$

$$+\left(\sigma_g+2\beta_g-\frac{\alpha_g}{\nu_g}\right)I_{1g}(r,t)=0 \tag{22}$$

定义

$$\tilde{\chi}_g(r,t)\equiv2\pi\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\mu\mu^2E_g(r,\mu,t) \tag{23}$$

可见，当取$E_g(r,\mu,t)=\frac{1}{4\pi}$时，$\tilde{\chi}_g(r,t)=1/3$；当取$E_g(\mu,t)=\frac{1}{2\pi}\delta(\mu-1)$时，$\tilde{\chi}_g(r,t)=1$，

这里我们取[6]

$$E_g(r,\mu,t)=\frac{C_{1g}}{4\pi(1-\nu_g^2\mu^2)} \tag{24}$$

将该式代入归一化条件式（20）可得C_{1g}和ν_g所满足的超越方程为

$$\frac{2\nu_g}{C_{1g}}=\ln\frac{1+\nu_g}{1-\nu_g} \tag{25}$$

将（24）式代入（23）式，得

$$\tilde{\chi}_g=\frac{1-C_{1g}}{\nu_g^2} \tag{26}$$

其中C_{1g}为与限流有关的常数。(推导见附录) C_{1g} 给定后，$\tilde{\chi}_g$即可确定，$\tilde{\chi}_g$随C_{1g}的变化情况，如表1所示。

表1

C_{1g}	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\tilde{\chi}_g$	1.0000	0.5454	0.3333	0.2375	0.1840	0.1510

为了在扩散系数中，考虑辐射强度随时间变化的因素，假定

$$\frac{\partial \ln I_{1g}(r,\ t)}{\partial t}=\frac{\partial \ln I_{0g}(r,\ t)}{\partial t} \tag{27}$$

确切地说，这个等式只在辐射强度各向同性分布或直穿流的情况下才成立，我们这里假定它在一般情形下也是正确的。由此方程（22）可以写为

$$\frac{1}{c}\frac{I_{1g}(r,t)}{I_{0g}(r,t)}\frac{\partial I_{0g}(r,t)}{\partial t}+\tilde{\chi}_g\nabla I_{0g}(r,\ t)$$

$$+\left(\sigma_g+2\beta_g-\frac{\alpha_g}{\bar{v}_g}\right)I_{1g}(r,t)=0 \tag{28}$$

用0阶矩方程（16）消去方程（28）中的$\frac{\partial}{\partial t}I_{0g}(r,\ t)$则得

$$\frac{I_{1g}(r,t)}{I_{0g}(r,t)}\left\{Q_g(r,t)-\left(\sigma_g-\frac{\alpha_g}{\bar{v}_g}\right)I_{0g}(r,t)-\nabla\cdot\mathbf{I}_{1g}(r,t)\right\}+\tilde{\chi}_g\nabla I_{0g}(r,t)+$$

$$+\left(\sigma_g+2\beta_g-\frac{\alpha_g}{\bar{v}_g}\right)I_{1g}(r,t)=0 \tag{29}$$

整理方程（29），且定义

$$\frac{Q_g(r,t)}{\sigma_g I_{0g}(r,t)}\equiv C_{2g} \tag{30}$$

则得

$$I_{1g}(r,t)=\frac{-\tilde{\chi}_g}{\sigma_g C_{2g}}\left(1+\frac{2\beta_g}{\sigma_g C_{2g}}-\frac{\nabla\cdot\mathbf{I}_{1g}(r,t)}{\sigma_g C_{2g} I_{0g}}\right)^{-1}\nabla I_{0g}(r,t) \tag{31}$$

C_{2g}为第g群每次碰撞（不包含奇异碰撞）产生的次级粒子数。$I_{1g}(r,t)$与$I_{0g}(r,t)$之间的关系可用如下形式的公式来表示

$$\mathbf{I}_{1g}(r,t)=\mathbf{f}_g I_{0g} \tag{32}$$

$\mathbf{f}_g$与∇I_{0g}应是反向的，所以有

$$\nabla\cdot\mathbf{I}_{1g}=-f_g\,|\nabla I_{0g}| \tag{33}$$

将方程（33）与方程（31）联立，得

$$\mathbf{I}_{1g}(r,t)=-\frac{\tilde{\chi}_g}{\sigma_g C_{2g}}\left(1+\frac{2\beta_g}{\sigma_g C_{2g}}+f_g R_g\right)^{-1}\nabla I_{0g} \tag{34}$$

其中

$$R_s(r,t)\equiv\frac{|\nabla I_{0s}(r,t)|}{\sigma_s C_{2s} I_{0s}(r,t)} \tag{35}$$

由此可得限流渐进扩散理论的扩散系数为

$$D_s=\frac{\tilde{\chi}_s}{\sigma_s C_{2s}}\left(1+\frac{2\beta_s}{\sigma_s C_{2s}}+f_s R_s\right)^{-1} \tag{36}$$

由式（32），（34）得

$$f_s=C_{2s}\sigma_s D_s R_s \tag{37}$$

由式（36），（37）消去f_s，可以解出D_s

$$D_s=\frac{\sqrt{\left(\frac{2\beta_s}{\sigma_s C_{2s}}+1\right)^2+4R_s^2\tilde{\chi}_s}-\left(1+\frac{2\beta_s}{\sigma_s C_{2s}}\right)}{2\sigma_s C_{2s} R_s^2} \tag{38}$$

这就是限流渐近扩散Fokker-Planck方程的扩散系数表示式

当$R_s\to 0$，即限流不起作用时，D_s具有如下极限值

$$\lim_{R_s\to 0} D_s=\frac{\tilde{\chi}_s}{C_{2s}\sigma_s\left(1+\frac{2\beta_s}{\sigma_s C_{2s}}\right)} \tag{39}$$

对于弹性散射占主导的情况，$C_{2s}\to 1$，$\tilde{\chi}_s\to 1/3$，$2\beta_s\sim\sigma_{FPs}(1-\overline{\mu})$，于是有

$$\lim_{R_s\to 0} D_s=\frac{1}{3\{\sigma_s+\sigma_{FPs}(1-\mu)\}}\sim\frac{1}{3\sigma_s^{\prime\prime}} \tag{40}$$

$$\sigma_s^{\prime\prime}=\sigma_s+\sigma_{FPs}(1-\overline{\mu}) \tag{41}$$

式（40）正是经典扩散理论的扩散系数公式。对于吸收或发射占主导的情况，式（39）给出渐近扩散理论扩散系数的公式表示。

当$R_s\to\infty$时，$\tilde{\chi}_s\to 1$（因为这种情况相应于强吸收），由式（38）可得

$$\lim_{R_s\to\infty} D_s=\frac{\tilde{\chi}_s}{\sigma_s C_{2s} R_s}\sim 0 \tag{42}$$

$$\lim_{R_s\to\infty} I_{1s}\sim\frac{1}{\sigma_s C_{2s}\left|\frac{\nabla I_{0s}}{\sigma_s C_{2s} I_{0s}}\right|}|\nabla I_{0s}|\sim I_{0s} \tag{43}$$

式（43）自然地给出了流的最大值极限。

3. 边界条件的推导

考虑外边界是自由面的情况，由输运方程的边界条件

$$2\pi\int_{-1}^{0}\mu I_s(r,\mu,t)=0 \tag{44}$$

考虑到式（19），（34），（F11）不难得出

$$I_s(r,\mu,t)=I_{0s}(r,t)E_s^{\prime}(r,\mu,t)-\frac{\mu(\partial/\partial r)I_{0s}}{\sigma_s C_{2s}(1+f_s R_s)}E_s(r,\mu,t) \tag{45}$$

将式（45）代入（44）可得

$$I_{0g}(\vec{r},t)+\mathbf{L}_g\cdot\nabla I_{0g}=0 \tag{46}$$

式中

$$\mathbf{L}_g=|\mathbf{L}_g|\cdot\mathbf{n}\ \text{为外法线方向}$$

$$|\mathbf{L}_g|=\frac{2D_g\nu_g^2}{C_{1g}\ln[1/(1-\nu_g)]} \tag{47}$$

$|\mathbf{L}_g|$为外推长度，它是C_{1g}的函数，当$C_{1g}=1$时

$$|\mathbf{L}_g|=2D_g \tag{48}$$

这相当于Marshak边界条件。当$C_{1g}\simeq 0$时

$$|\mathbf{L}_g|=D_g \tag{49}$$

相当于Mark边界条件，由此可见式（47）式所表示的边界条件比较好地反映了物质与辐射相互作用的特性。而经典扩散理论边界条件的选取只能人为地选择某一种，不具有式（49）所表示的普适性。

4. 多群限流渐近扩散Fokker-Planck方程

$$\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\nabla\cdot D_g\nabla+\left(\sigma_g-\frac{\alpha_g}{\bar{\nu}_g}\right)\right\}I_{0g}(r,t)=acT^4\sigma_{a',g}b_g+\sum_{g'=1}^{G}\tilde{\sigma}_{R0g'\to g}I_{0g'}(r,t) \tag{50}$$

初始条件　$I_{0g}(r,t=0)=I_{0g}^{(0)}(r)$　(51)

边界条件

外边界：$I_{0g}(r,t)+L_g\mathbf{n}\cdot\nabla I_{0g}(r,t)=0$

交界面：$I_{0g}(r,t),D_g\nabla I_{0g}(r,t)$　连续　(53)

式中

$$D_g=\frac{\sqrt{\left(1+\frac{2\beta_g}{\sigma_g C_{2g}}\right)^2+4R_g^2\tilde{\chi}_g}-\left(1+\frac{2\beta_g}{\sigma_g C_{2g}}\right)}{2\sigma_g C_{2g}R_g^2} \tag{54}$$

$$R_g=\frac{|\nabla I_{0g}|}{\sigma_g C_{2g}I_{0g}} \tag{55}$$

$$\tilde{\chi}_g=\frac{1-C_{1g}}{\nu_g^2} \tag{56}$$

$$C_{2g}=\frac{\sigma_{a',g}b_g acT^4+\sum\limits_{g'=1}^{G}\sigma_{R0g'\to g}I_{0g'}}{\sigma_g I_{0g}} \tag{57}$$

$$C_{1g}=\frac{1}{1+f_g R_g} \tag{58}$$

$$L_g = \frac{2D_g \nu_g^2}{C_{1g}\ln[1/(1-\nu_g)]} \tag{59}$$

$$\beta_g = \pi\int_{-1}^{1} d\mu_0(1-\mu_0)\sigma_{FPg}(\mu_0) \tag{60}$$

四、结 束 语

在本文中，我们将渐近扩散理论与新的限流方法很好地结合起来，导出了多群限流渐近扩散Fokker-Planck方程。在纯散射介质中，该方程与经典扩散方程一致（这 正是经典扩散理论适用的情况）；在限流不起作用的情况下，该方程具有渐近扩散理论的精度。当流很大时，扩散系数自然地保证了流不会大于标通量。

对异常散射部分，用Fokker-Planck方法进行了处理。

本文所导出的边界条件，在不同的物理状态下自动地满足Marshak边界条件（$C_{1g}\approx 0$）和Mark边界条件（$C_{1g}\approx 1$）。由此可见，所导出的边界条件较好地反映了 物质与辐射相互作用的特性，而经典扩散理论，对边界条件的处理则有较大的任意性。

应该指出的是，本文所导出的扩散方程是非线性的。扩散系数、外推长度是辐射比强度的非线性函数，这给方程的迭代求解带来了某些困难。在非定态计算时，可以考虑将限流修正部分用前一个时间步长的量代替，以避免非线性计算。

方程的导出，理论上看来是合理的，是否适用，有待于数字计算实践来检验。

附录C_{1g}公式的推导

由方程（15）知，在一维几何的情况下，辐射输运方程可以写为

$$\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\Omega\cdot\nabla+\left(\sigma_g-\frac{\alpha_g}{\nu_g}\right)\right\}I_g(\mu)=\frac{Q_g}{4\pi}+\beta_g\left[\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right]I_g(\mu) \tag{F,1}$$

式中所有带下标 g 的函数，一般都是 (r, t) 的函数，为简便起见，在推导方程 过程都不予写出。

类似式（27），我们假定

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln I_g(\mu)=\frac{\partial}{\partial t}\ln I_{0g} \tag{F·2}$$

由方程（16）消去方程（F，1）中的时间导数，得

$$\frac{I_g(\mu)}{I_{0g}}\left[Q_g-\left(\sigma_g-\frac{\alpha_g}{\nu_g}\right)I_{0g}-\frac{\partial}{\partial r}I_{1g}\right]+\Omega\cdot\nabla I_g(\mu)+\left(\sigma_g-\frac{\alpha_g}{\nu_g}\right)I_g(\mu)$$

$$=\frac{Q_g}{4\pi}+\beta_g\left[\frac{\partial}{\partial\mu}(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right]I_g(\mu) \tag{F·3}$$

方程（F·3）左边与β_g有关的第二项与第一项相比是小量，这里予以略去，于是可得

$$\Omega\cdot\nabla I_g(\mu)+\sigma_g C_{2g}(1+f_g R_g)I_g(\mu)=\frac{Q_g}{4\pi} \tag{F·4}$$

式中

$$R_\varepsilon=\frac{|(\partial/\partial r)I_{0\varepsilon}|}{\sigma_\varepsilon C_{2\varepsilon}I_{0\varepsilon}} \tag{F·5}$$

将式（19）代入方程（F·4），得

$$\mu E_\varepsilon(\mu)\frac{\partial}{\partial r}I_{0\varepsilon}+\mu O_\varepsilon(\mu)\frac{\partial}{\partial r}I_{1\varepsilon}+\sigma_\varepsilon C_{2\varepsilon}(1+f_\varepsilon R_\varepsilon)\cdot\left[E_\varepsilon(\mu)I_{0\varepsilon}+O_\varepsilon(\mu)I_{1\varepsilon}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi}Q_\varepsilon \tag{F·6}$$

将方程（F·6）中μ的奇、偶函数所满足的方程分别写出，则得

$$\mu E_\varepsilon(\mu)\frac{\partial}{\partial r}I_{0\varepsilon}+\sigma_\varepsilon C_{2\varepsilon}(1+f_\varepsilon R_\varepsilon)O_\varepsilon(\mu)I_{1\varepsilon}=0 \tag{F·7}$$

$$\mu O_\varepsilon(\mu)\frac{\partial}{\partial r}I_{1\varepsilon}+\sigma_\varepsilon C_{2\varepsilon}(1+f_\varepsilon R_\varepsilon)E_\varepsilon(\mu)I_{0\varepsilon}=\frac{Q_\varepsilon}{4\pi} \tag{F·8}$$

由式（34）知

$$I_{1\varepsilon}=-\frac{\tilde{\chi}_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon C_{2\varepsilon}}\left(1+f_\varepsilon R_\varepsilon+\frac{2\beta_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon C_{2\varepsilon}}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial r}I_{0\varepsilon} \tag{F·9}$$

将（F·4）对μ积分得

$$\frac{\partial}{\partial r}I_{1\varepsilon}=Q_\varepsilon-\sigma_\varepsilon C_{2\varepsilon}(1+f_\varepsilon R_\varepsilon)I_{0\varepsilon} \tag{F·10}$$

将（F·9）式代入方程（F·7）得

$$O_\varepsilon(\mu)=\frac{(1+f_\varepsilon R_\varepsilon+[(2\beta_\varepsilon)/(\sigma_\varepsilon C_{2\varepsilon})])}{\tilde{\chi}_\varepsilon(1+f_\varepsilon R_\varepsilon)}\mu E_\varepsilon(\mu)\approx\frac{1}{\tilde{\chi}_\varepsilon}\mu E_\varepsilon(\mu) \tag{F·11}$$

将（F·10）和（F·11）式代入方程（F·8），得

$$\frac{\mu^2 E_\varepsilon(\mu)}{\tilde{\chi}_\varepsilon}\left[Q_\varepsilon-\sigma_\varepsilon C_{2\varepsilon}(1+f_\varepsilon R_\varepsilon)I_{0\varepsilon}\right]+\sigma_\varepsilon C_{2\varepsilon}I_{0\varepsilon}E_\varepsilon(\mu)(1+f_\varepsilon R_\varepsilon))=\frac{Q_\varepsilon}{4\pi} \tag{F·12}$$

$$E_\varepsilon(\mu)=\frac{Q_\varepsilon/[\sigma_\varepsilon C_{2\varepsilon}I_{0\varepsilon}(1+f_\varepsilon R_\varepsilon)4\pi]}{1-\mu^2\frac{1}{\tilde{\chi}_\varepsilon}\left[1-\frac{Q_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon C_{2\varepsilon}I_{0\varepsilon}(1+f_\varepsilon R_\varepsilon)}\right]} \tag{F·13}$$

与式（24）类比，可得

$$C_{1\varepsilon}=\frac{Q_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon I_{0\varepsilon}C_{2\varepsilon}(1+f_\varepsilon R_\varepsilon)}=\frac{1}{1+f_\varepsilon R_\varepsilon} \tag{F·14}$$

在限流不起作用时$C_{1\varepsilon}=1$，

$$\nu_\varepsilon^2=\frac{1-C_{1\varepsilon}}{\tilde{\chi}_\varepsilon}\qquad \tilde{\chi}_\varepsilon=\frac{1-C_{1\varepsilon}}{\nu_\varepsilon^2} \tag{F·15}$$

由此（F·13）可以写为

$$E_\varepsilon(\mu)=\frac{C_{1\varepsilon}}{4\pi(1-\mu^2\nu_\varepsilon^2)} \tag{F·16}$$

参 考 文 献

[1] A.M.Winslow, *Nucl.Sci.Eng.*, 32, 101 (1968) .

[2] 刘成安、黄文凯等, 改进扩散理论的应用研究, 核科学与工程, 3, 3 (1983) .

[3] G.C.Pomraning, *Nucl.Sci.Eng.*, 85, 116—126 (1983) .

[4] G.C.Pomraning, *Nucl.Sci.Eng.*, 86, 335—345 (1984) .

[5] L.D.Levermore, "A.Chapman-Enskog Approach to Flux-Limited Diffusion Theory", UCID 18229, (1979) .

[6] 刘成安、黄文凯.研究多群扩散方程的变分方法, 原子能科学技术 2, 145 (1984).

CHINA NUCLEAR SCIENCE & TECHNOLOGY REPORT

China Nuclear Information Centre