ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

ITEF--93 (1987).

В.Р. ПЕТУХОВ

СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИНВАРИАНТНОГО СКЛЕИВАНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Препринт №93

Москва — ЦНИИатоминформ — 1987

УДК 517.91:93 М-16

СВОЙСТВА ИНВАРИАНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИНВАРИАНТНОГО СКЛЕИВАНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ: Препринт ИТЭФ 87-93/

В.Р.Петухов - М.: ЦНИИатоминформ, 1987 - 8с.

Рассматриваются инвариантное моделирование и инвариантное склеивание как непрерывных (скоростей и ускорений), так и дискретных векторных полей, градиентный и дивергентный случаи. Обсуждаются приложения: векторные поля в кристаллах, дисклинации кристаллов, топологические заряды и их поля.

Рис. - , список лит. - 5 наим.

Будем говорить, что векторное поле А инвариантно моделирует векторное поле В, если они имеют одни и те же особенности, а также одни и те же инвариантные геометрические группы.

Будем обозначать геометрическую инвариантную группу через Н, а группу преобразования поля, сохраняющую все особенности, через G. Очевидно, $GH = HG$.

В качестве примера [I] рассмотрим дифференциальные уравнения силовых линий физического диполя

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3xy}{2x^2 - y^2} \qquad (I)$$

и математического диполя

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2x_1 y_1}{x_1^2 - y_1^2}. \qquad (2)$$

Преобразование $z = \zeta|\zeta|$, $z = x + iy$, $\zeta = x_1 + iy_1$, $z \neq 0$, $\zeta \neq 0$ (I) переводит в (2).

Аналогичные преобразования можно построить и для полей топологических зарядов [2], полей дисклинаций в кристаллах [3] и т.д.. Заметим, что поля, описываемые уравнениями на плоскости или на торе,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin y}{\sin x}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sin y}{\cos x}, \ldots, \frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x},$$

моделируют друг друга, так же, как и поля, описываемые уравнениями

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{\sin y}, \quad \ldots, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}.$$

Поля топологических зарядов можно моделировать и на различных многообразиях (на сфере, бутылке Клейна и т.д.) в соответствии с тем, чтобы удвоенный индекс многообразия совпадал с суммой индексов Франка [2] этих зарядов. Можно моделировать электростатические поля и бесконечной системы зарядов, например, силовое поле в кристаллической решетке, которое описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{\sum\limits_{k,l} \frac{\pm q_{kl}(x-x_{kl})}{r_{kl}^3}} = \frac{dy}{\sum\limits_{k,l} \frac{\pm q_{kl}(y-y_{kl})}{r_{kl}^3}}.$$

Здесь q_{kl} -заряд с учетом знака в узле k,l решетки, (x_{kl}, y_{kl})- координаты k,l - узла. Ряды, стоящие в знаменателях, медленно сходятся. Однако, отбрасывание достаточно удаленных членов этих рядов нарушает инвариантное моделирование в силу изменения геометрических групп симметрии.

Пусть векторное поле находится из уравнения $x = Ax$, H -геометрическая группа. Если это уравнение решается методом последовательных приближений и HA=AH, то H-инвариантная группа. Таким свойством обладают процессы последовательных приближений Пикара и Пеано (при соответствующем построении ломаных). Переходим теперь к инвариантному склеиванию.

Инвариантное склеивание векторных полей A,B,C,... (или полей фазовых кривых)- построение такого поля $\mathfrak{F}$, определенного на всем многообразии M-множестве задания A,B,C,..., которое наделено всеми особенностями полей A,B,C,... и имеет по крайней мере те же локальные геометрические группы симметрий, что и поля A,B,C,... в окрестности каждой из особенностей.

В терминах уравнений инвариантное склеивание можно выразить следующим образом.

Пусть на каждом из множеств $\mathcal{D}_k$ задано векторное поле x_k, удовлетворяющее уравнению $A_k x_k = B_k x_k$ и пусть для простоты $\mathring{\mathcal{D}}_i \cap \mathring{\mathcal{D}}_j = \phi$, $i \neq j$. Пусть далее в каждом $\mathcal{D}_k$ действуют две группы: группа преобразований G_k и геометрическая группа H_k (например, симметрий). При этом, конечно, $H_k G_k = G_k H_k$, $G_k \mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k$, $H_k \mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k$. Найти уравнение $Ax = Bx$ на $\bigcup_k \mathcal{D}_k = \mathcal{D}$ такое, что на каждом $\mathcal{D}_k$ будет $\exists g_k \in G_k$, $h_k \in H_k$ и искомое уравнение на $\mathcal{D}_k$ будет записываться так:

$$A_k g_k y_k = B_k g_k y_k\ ,\quad y_k = h_k x_k .$$

Однако, можно потребовать существования геометрической группы (симметрий) на всем $\mathcal{D}$. Например, имеем однородное покрытие пространства элементами $\mathcal{D}_k$, причем на $\mathcal{D}_1$ имеем векторное поле, определяемое системой $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Будем "тиражировать" это векторное поле на все $\mathcal{D}_k$. Тогда имеем

$$\frac{dx}{dt} = \sum_k \chi_k(x) f(x + y_k).$$

Здесь $\chi_k(x)$ - характеристическая функция $\mathcal{D}_k$, y_k - некоторый вектор, такой что если $x \in \mathcal{D}_k$, то $x + y_k \in \mathcal{D}_1$. Если мы хотим, чтобы это векторное поле было непрерывно в пространстве, то на границе элемента $\mathcal{D}_1$ надо потребовать, например, чтобы векторное поле было касательным к ней или нормальным, то есть выполнения, например, определенных элементов геометрической симметрии.

В результате склеивания таким образом может приобретаться дополнительная геометрическая симметрия либо теряться. Известно, что с точностью до гармонического слагаемого всякое векторное поле может быть представлено как сумма дивергентного и градиентного. Для дискретных векторных полей, определяемых системой разностных уравнений, $x(n+1) = F(x(n))$ этот факт также имеет место [4]. Назовем разностную систему градиентной, если она имеет вид $x(n+1) = \Phi(x(n))I$, где Φ -скалярная функция, I =(I,I,...,I), и дивергентной, если $FI = 0$. Среди дивергентных разностных систем заслуживают внимания системы вида

$$x(n+1) = A(x(n))I, \text{ где } A^* = -A,$$

а для дивергентных систем дифференциальных уравнений - системы вида

$$\frac{dx}{dt} = A(u(x))\, \operatorname{grad} u(x), \quad A^* = -A.$$

Для дифференциальных систем будем также рассматривать векторные поля ускорений $\ddot{x} = F(x)$. Известно [5], что если $\dot{y} = H(y)$ -векторное поле скоростей, соответствующее этому полю ускорений, то

$$\frac{\partial H(x)}{\partial x} H(x) = F(x).$$

Поставим вопрос, при каких неособых линейных преобразованиях $z = Sx + a$, в частности, геометрических симметриях, структура каждой из этих систем будет сохраняться.

I. Для того, чтобы $S^{-1}F(Sx+a) = F(x)$, достаточно, чтобы таким же свойством обладало и поле $H(x)$.

2. Пусть

$\dot{x} = A(u(x))\,\mathrm{grad}\,u(x)$, $A^* = -A$. Для того, чтобы эта система ссхраняла свой вид при рассматриваемом преобразовании, достаточно, чтобы $AS = SA$ и $S = S^*$.

3. Следовательно, если $S = S^*$, то вид системы $\dot{x} = \mathrm{grad}\,u(x)$ сохраняется при рассматриваемом преобразовании, и наоборот.

4. Для того, чтобы дивергентная разностная система сохраняла свой вид, необходимо и достаточно, чтобы суммы элементов каждого столбца были равны между собой.

5. Для того, чтобы градиентная разностная система сохраняла свой вид, необходимо и достаточно, чтобы суммы элементов каждой строчки были равны между собой.

И в том, и в другом случае этим свойством из всех геометрических симметрий обладает только центральная симметрия.

Заметим еще, что множество всех дивергентных разностных систем и множество дивергентных дифференциальных систем, имеющих один и тот же интеграл, образуют алгебру Ли с обычным коммутатором матриц правых частей.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I П е т у х о в В.Р. Инвариантное моделирование и инвариантное склеивание векторных полей. М., Препринт ИТЭФ, 1986 , № 163.

2. Р о ж к о в С.С. Топология, многообразия и гомотопия: основные понятия и приложения к моделям n-поля. - УФН, 1986, т.149, вып.2, с.259-274.

3 В л а д и м и р о в В.И., Р о м а н о в А.Е. Дисклинации в кристаллах. Ленинград: Наука, 1986, 224с.

4 П е т у х о в В.Р. Некоторые аналитические результаты группового анализа динамических систем.М., Препринт ИТЭФ, 1984, № 68.

5 П е т у х о в В.Р. Дивергентные и градиентные векторные поля в теории автономных систем. М., Препринт ИТЭФ, 1983, № 19.

В.Р.Петухов

Свойства инвариантного моделирования и инвариантного склеивания векторных полей.

Редактор И.Н.Ломакина Корректор О.Ю.Ольховникова

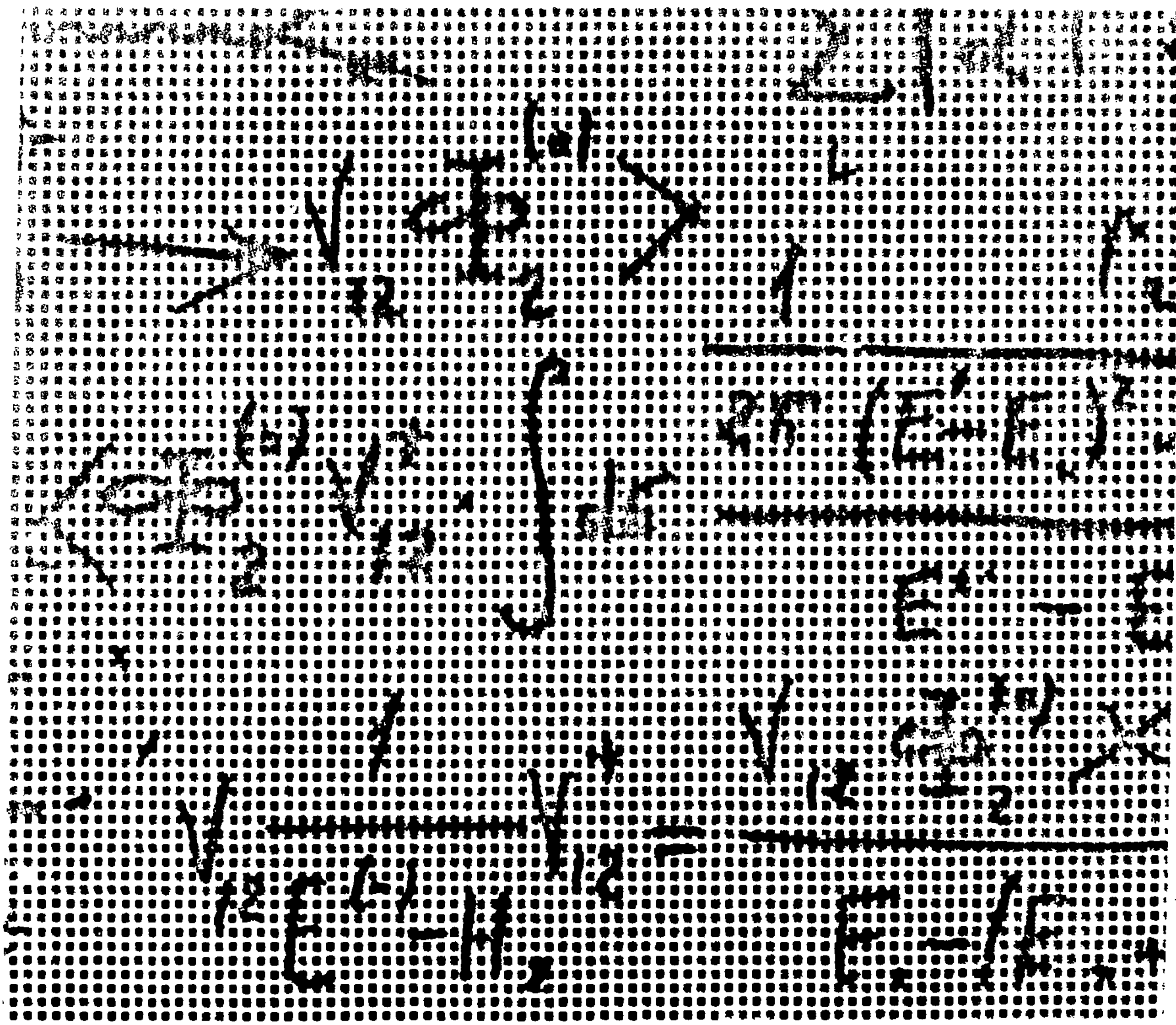
Работа поступила в ОНТИ 5.06.87

Подписано к печати 9.06.87 Т13454 Формат 60x90 1/16
Офсетн.печ. Усл.-печ.л.0,5. Уч.-изд.л.0,3. Тираж 200 экз.
Заказ 93 Индекс 3624 Цена 5 коп.

Отпечатано в ИТЭФ, 117259, Москва, Б.Черемушкинская, 25

5 коп.

ИНДЕКС 3624



М.,ПРЕПРИНТ ИТЭФ, 1987, № 93. с.1-8