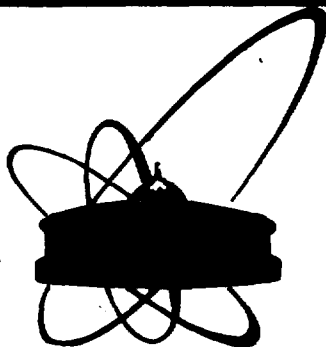


SU8803442



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P4-87-493

Д.Д.Бакалов, В.С.Мележик

**ЭФФЕКТИВНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ
РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ
С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ
В АДАБАТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ**

Направлено в "Zeitschrift für Physik D"

1987

1. Введение

Данные таблицы эффективных потенциалов задачи трех тел с электромагнитным взаимодействием содержат некий минимальный объем числовой информации, который необходим для оценки важнейших релятивистских эффектов в связанных состояниях систем, состоящих из двух частиц с зарядом e и одной, более легкой, с зарядом $-e$. К числу таких систем можно отнести ряд примеров: мезомолекулы изотопов водорода, ион H_2^+ , система $e^-e^+e^-$ и т.д.^{1/1}

Квантово-механическое описание трехчастичных систем основывается на уравнении Шредингера с релятивистским гамильтонианом, построенным в мгновенной форме динамики прямого взаимодействия^{1/2}. При решении уравнения Шредингера в адиабатическом подходе^{1/3} самой трудоемкой задачей является вычисление матричных элементов операторов релятивистского взаимодействия в адиабатическом базисе, т. е. эффективных потенциалов задачи^{1/4}. В данной работе для матричных элементов релятивистского гамильтониана в двухуровневом приближении (за исключением членов, описывающих поляризацию вакуума^{1/5}) получено представление в виде линейной комбинации небольшого числа "табличных" функций, значения которых протабулированы с переменным шагом, обеспечивающим /при минимальном объеме таблиц/ точность результатов при усреднении по волновым функциям системы не хуже $\sim 10^{-2}$. Приведены также выражения для матричных элементов дипольного и квадрупольного электрических моментов и магнитного дипольного момента системы трех частиц, необходимые для оценки взаимодействия с внешними полями^{1/6}.

2. Релятивистский гамильтониан системы трех частиц

Обозначим через M_i , \vec{R}_i , \vec{P}_i , \vec{S}_i , Z_i , μ_i , Q_i , S_i соответственно массу, радиус-вектор, импульс, оператор спина, электрический заряд, магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты и величину спина i -той частицы, $i=1,2,3$. Отметим, что для частиц с $Z_i < 0$ в таблицах обычно приводят значения μ_i и Q_i , взятые с обратным знаком. / Определим также: $M_{ij} = M_i + M_j$, $m_{ij} = M_i M_j / M_{ij}$, $\alpha_{ij} = M_j M_i / M_{ij}$, $\vec{R}_{ij} = \vec{R}_j - \vec{R}_i$, $\vec{P}_{ij} = (M_i \vec{P}_j - M_j \vec{P}_i) / M_{ij}$, $\vec{P}'_{ij} = \vec{P}_i + \vec{P}_j$.

В мгновенной форме динамики прямого взаимодействия^{1/2,91} релятивистский гамильтониан H системы трех частиц с электромагнитным взаимодействием имеет следующий вид /с точностью до членов $O(c^{-2})$ включительно/:

$$H = H^{(0)} + H^{(1)}, \quad H^{(0)} = \sum_i \frac{\vec{P}_i^2}{2M_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{Z_i Z_j e^2}{r_{ij}}, \quad H^{(1)} = - \sum_i \frac{\vec{P}_i^4}{8M_i^2 c^2} + U^{(0)}, \quad (1)$$

$$U^{(1)} = U^{(VP)} + U^{(RMC)} + U^{(DARW)} + U^{(F)} + U^{(SO)} + U^{(T)} + U^{(Q)},$$

Где в операторе релятивистского взаимодействия $U^{(1)}$ выделены члены, описывающие эффекты поляризации вакуума $U^{(VP)}$ и релятивистские поправки к массам частиц $U^{(RMC)}$, дарвиновские члены $U^{(DARW)}$, фермиевское $U^{(F)}$, спин-орбитальное $U^{(SO)}$, тензорное $U^{(T)}$ и квадрупольное $U^{(Q)}$ взаимодействия. Все они складываются из операторов парного взаимодействия частиц: $U^{(X)} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} U_{ij}^{(X)}$, $X = VP, DARW, RMC, F, SO, T, Q$, где

$$U_{ij}^{(RMC)} = -\frac{Z_i Z_j e^2}{2M_i M_j c^2} \left(\frac{1}{r_{ij}} \vec{P}_i \cdot \vec{P}_j + \frac{1}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \cdot (\vec{r}_{ij} \cdot \vec{P}_i) \vec{P}_j \right), \quad (2a)$$

$$U_{ij}^{(DARW)} = \left(\frac{e\hbar}{c} \right)^2 \left\{ \frac{S_i}{2S_i+1} \frac{(Z_i - \frac{\mu_i}{S_i}) Z_j}{2M_i^2} + \frac{S_j}{2S_j+1} \frac{Z_i (Z_j - \frac{\mu_j}{S_j})}{2M_j^2} \right\} 4\pi \delta(\vec{r}_{ij}), \quad (2b)$$

$$U_{ij}^{(F)} = -\frac{2}{3} \left(\frac{\mu_i}{S_i} \frac{e\hbar}{2M_i c} \right) \left(\frac{\mu_j}{S_j} \frac{e\hbar}{2M_j c} \right) (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j) 4\pi \delta(\vec{r}_{ij}), \quad (2b)$$

$$U_{ij}^{(SO)} = -\frac{1}{m_i c} \left\{ \frac{(Z_i e) (\frac{\mu_i e\hbar}{S_i 2M_i c})}{r_{ij}^3} (\vec{r}_{ij} \times \vec{P}_i) \cdot \vec{S}_j + \frac{(Z_j e) (\frac{\mu_j e\hbar}{S_j 2M_j c})}{r_{ij}^3} (\vec{r}_{ij} \times \vec{P}_j) \cdot \vec{S}_i \right\} + \frac{e^2 \hbar}{2c^2} \left\{ \frac{Z_i Z_j}{M_i^2} \frac{(\vec{r}_{ij} \times \vec{P}_i) \cdot \vec{S}_j}{r_{ij}^3} - \frac{Z_i Z_j}{M_i^2} \frac{(\vec{r}_{ij} \times \vec{P}_j) \cdot \vec{S}_i}{r_{ij}^3} \right\}, \quad (2c)$$

$$U_{ij}^{(T)} = -3 \left(\frac{\mu_i}{S_i} \frac{e\hbar}{2M_i c} \right) \left(\frac{\mu_j}{S_j} \frac{e\hbar}{2M_j c} \right) \frac{1}{r_{ij}^5} \left((\vec{r}_{ij} \cdot \vec{S}_i) (\vec{r}_{ij} \cdot \vec{S}_j) - \frac{S_i^2 S_j^2}{3} \right),$$

$$U_{ij}^{(Q)} = \frac{3e^2}{2} \left\{ Z_i Q_j \frac{1}{r_{ij}^5} \left((\vec{r}_{ij} \cdot \vec{S}_i)^2 - \frac{S_i^2}{3} \right) + Z_j Q_i \frac{1}{r_{ij}^5} \left((\vec{r}_{ij} \cdot \vec{S}_j)^2 - \frac{S_j^2}{3} \right) \right\} \quad (2e)$$

С использованием координат и импульсов Якоби: $\vec{r} = \vec{R}_3 - \frac{1}{2}(\vec{R}_1 + \vec{R}_2)$, $\vec{R} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1$, $\vec{R} = (M_1 \vec{R}_1 + M_2 \vec{R}_2 + M_3 \vec{R}_3) / (M_1 + M_2 + M_3)$; $\vec{p}_2 = i\hbar \vec{Q}$, $\vec{p}_3 = -i\hbar \vec{P}$, $\vec{p}_1 = i\hbar \vec{P} - i\hbar \vec{Q}$, выражения (2a) - (2e) принимает (в системе покоя центра масс $\vec{R} = \vec{P} = \vec{0}$) следующий вид:

$$H^{(0)} = \frac{1}{2m_{12}} \vec{P}^2 + \left(\frac{1}{8m_{12}} + \frac{1}{2M_3} \right) \vec{P}^2 + \frac{\alpha_{12}}{2m_{12}} \vec{P} \cdot \vec{P} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} + \frac{Z_1 Z_3 e^2}{|\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{R}|} + \frac{Z_2 Z_3 e^2}{|\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{R}|},$$

$$H^{(1)} = -\frac{1-3m_{12}/M_3}{8m_{12}^2 c^2} (\vec{P}^4 + (\vec{P} \cdot \vec{P})^2 + \frac{1}{2} \vec{P}^2 \vec{P}^2) - \frac{\alpha_{12}(1-m_{12}/M_3)}{8m_{12}^2 c^2} (\vec{P} \cdot \vec{P}) (\vec{P}^2 + \vec{P}^2) - \left(\frac{1}{8M_3^2 c^2} + \frac{1-3m_{12}/M_3}{128m_{12}^2 c^2} \right) \vec{P}^4 + U^{(1)};$$

$$U^{(x)} = U_{12}^{(x)}(\vec{R}) + U_{23}^{(x)}(\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{R}) + U_{13}^{(x)}(\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{R}), \quad x = VP, DARW, F, T, Q;$$

$$U^{(RMC)} = U_{12}^{(RMC)} + U_{23}^{(RMC)} + U_{13}^{(RMC)},$$

$$U_{12}^{(RMC)} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2M_1 M_2 c^2} \left[\frac{1}{R} \left(\vec{p}^2 - \frac{1}{4} \vec{P}^2 \right) + \frac{1}{R^3} \left(\vec{R}(\vec{R} \cdot \vec{P}) \vec{P} - \frac{1}{4} (\vec{R} \vec{P})^2 \right) \right],$$

$$U_{23}^{(RMC)} = \frac{Z_2 Z_3 e^2}{2M_2 M_3 c^2} \left[\frac{1}{r_{23}} \left(\frac{1}{2} \vec{p}^2 - \vec{P}^2 \right) + \frac{1}{r_{23}^3} \left(\frac{1}{2} \vec{r}_{23} (\vec{r}_{23} \cdot \vec{P}) \vec{P} - \vec{r}_{23} (\vec{r}_{23} \cdot \vec{P}) \vec{P} \right) \right],$$

$$U_{13}^{(RMC)} = E x^{-1} U_{23}^{(RMC)} E x ;$$

$$U^{(SO)} = U_{12}^{(SO)} + U_{23}^{(SO)} + U_{13}^{(SO)},$$

$$U_{12}^{(SO)} = \frac{Z_2 e^2 \hbar}{2M_1^2 c^2} \left\{ \left(Z_1 - \frac{M_1}{S_1} \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right) \right) \frac{1}{R^3} (\vec{R} \times \vec{P}) \cdot \vec{S}_1 + \left(Z_1 - \frac{M_1}{S_1} \left(1 - \frac{M_1}{M_2} \right) \right) \frac{1}{R^3} (\vec{R} \times \vec{P}) \cdot \vec{S}_2 \right\} +$$

$$+ \frac{Z_1 e^2 \hbar}{2M_1^2 c^2} \left\{ \left(Z_2 - \frac{M_2}{S_2} \left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right) \right) \frac{1}{R^3} (\vec{R} \times \vec{P}) \cdot \vec{S}_2 + \left(Z_2 - \frac{M_2}{S_2} \left(1 - \frac{M_2}{M_1} \right) \right) \frac{1}{R^3} (\vec{R} \times \vec{P}) \cdot \vec{S}_1 \right\},$$

$$U_{23}^{(SO)} = \frac{Z_3 e^2 \hbar}{2M_2^2 c^2} \left\{ \frac{1}{M_3} \left(Z_2 - \frac{M_2}{S_2} \left(1 + \frac{M_2}{M_3} \right) \right) \frac{1}{r_{23}^3} (\vec{r}_{23} \times \vec{P}) \cdot \vec{S}_3 + \frac{M_3}{M_2 S_2 r_{23}^3} (\vec{r}_{23} \times \vec{P}) \cdot \vec{S}_2 \right\} -$$

$$- \frac{Z_3 e^2 \hbar}{2M_2^2 c^2} \left\{ \left(Z_2 - \frac{M_2}{S_2} \right) \frac{1}{r_{23}^3} (\vec{r}_{23} \times \vec{P}) \cdot \vec{S}_3 - \frac{1}{2} \left(Z_2 + \frac{M_2}{S_2} \left(1 + \frac{2M_2}{M_3} \right) \right) \frac{1}{r_{23}^3} (\vec{r}_{23} \times \vec{P}) \cdot \vec{S}_2 \right\},$$

$$U_{13}^{(SO)} = E x^{-1} U_{23}^{(SO)} E x ,$$

где $r_{23} = |\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{R}|$, $r_{13} = |\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{R}|$, а преобразование $E x$ меняет местами аргументы у операторов, относящиеся к частицам 1 и 2:

$$E x^{-1} O(\vec{R}_1, \vec{R}_2, \dots, \vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \dots, M_1, M_2, \dots) E x = O(\vec{R}_2, \vec{R}_1, \dots, \vec{P}_2, \vec{P}_1, \dots, \vec{S}_2, \vec{S}_1, \dots, M_2, M_1, \dots).$$

Напомним, наконец, что $U^{(VP)}$ есть сумма парных потенциалов Виялге ^{15/}:

$$U^{(VP)} = U_{12}^{(Wahlg)}(R) + U_{23}^{(Wahlg)}(r_{23}) + U_{13}^{(Wahlg)}(r_{13}),$$

$$U_{ij}^{(Wahlg)}(r) = \frac{Z_i Z_j e^4}{r} \frac{2\pi}{3\pi} \int_0^\pi \frac{dx}{x^2} \sqrt{x^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{2x^2} \right) e^{-2\chi r / \lambda_e}, \quad \chi_e = \frac{\hbar}{cm_e}.$$

3. Матричные элементы гамильтониана в адиабатическом базисе

Вместо шести декартовых координат векторов \vec{R} и \vec{r} введем переменные $R = |\vec{R}|$, $\xi_2 = (\vec{r}_2 + \vec{r}_3) / R$, $\eta = (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) / R$ и углы Эйлера (φ, θ, ψ) перехода от "лабораторной" системы координат K к "вращающейся" системе K' ось Oz' которой - вдоль \vec{R} и в которой \vec{r} лежит в плоскости $Ox'z'$. В

пространстве функций от углов (ϕ, θ, φ) рассмотрим полный набор базисных функций $\mathcal{D}_{\lambda m J M}$ с определенными орбитальными моментом J , проекцией M момента на ось Oz , модулем m проекции момента на ось Oz' и пространственной четностью λ :

$$\mathcal{D}_{\lambda m J M}(\phi, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2J+1}{16\pi^2(r+\delta_{om})}} \left\{ (-1)^m D_{M, m}^J(\phi, \theta, \varphi) + \lambda (-1)^m D_{M, -m}^J(\phi, \theta, \varphi) \right\}.$$

Базисные спиноры e_{S_i} в пространстве спиновых переменных трех частиц строятся из одночастичных спиноров $e_{S_i} \xi_i$, $i=1,2,3$, по следующей схеме:

$$e_{S_i} = \sum_{S_i} C_{I_i S_i} e_{I_i} e_{S_i} \xi_i; \quad e_{I_i} = \sum_{S_i, S_2} C_{S_i S_2} e_{S_i} e_{S_2} \xi_2,$$

где $\vec{I} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, а $\vec{S} = \vec{I} + \vec{S}_3$. Вводя полный момент \vec{J} (с проекцией J_3 на Oz) $\vec{J} = \vec{S} + \vec{J}'$, определим трехчастичные сферические спиноры

$$Y_{I S \lambda m J J_3}(\phi, \theta, \varphi) = \sum_{M S} C_{S S}^{J J_3} e_{S_i} \mathcal{D}_{\lambda m J M}(\phi, \theta, \varphi).$$

В качестве базиса в пространстве функций от переменных ξ и η (при заданных R и m) используем полный набор $\varphi_{\text{rim}}(\xi, \eta; R)$ решений квантово-механической задачи о движении заряженной частицы в поле фиксированных (на расстояниях R) кулоновских центров $|B|$:

$$\varphi_{\text{rim}}(\xi, \eta; R) = N_{\text{rim}}(R) \Pi_{\text{rim}}(\xi; R) \Xi_{\text{rim}}(\eta; R) r^{\mu} \begin{cases} +l(\eta), & \text{для дискр. спектра,} \\ -l(\eta) & \text{для непр. спектра,} \end{cases} \quad i = \begin{cases} (m, n_2) \\ (k, n_2) \end{cases}$$

где $\Pi_{\text{rim}}(\xi, R) = \sum_{\mu} \varphi_{\mu}(\xi; R) = 1$ и $N(R)$ - нормировочный множитель. Адиабатический базис для задачи трех спиновых частиц есть прямое произведение базисов $\{\varphi_{\text{rim}}\}$ и $\{Y_{I S \lambda m J J_3}\}$:

$$B_{I S \lambda \rho i m J J_3}(\phi, \theta, \varphi; \xi, \eta; R) = Y_{I S \lambda m J J_3}(\phi, \theta, \varphi) \cdot \varphi_{\text{rim}}(\xi, \eta; R).$$

Зависимость $B_{I S \lambda \rho i m J J_3}$ от переменных $(\xi, \eta; R)$, от углов (ϕ, θ, φ) и от спиновых переменных факторизуется, поэтому целесообразно представить гамильтониан H в виде суммы членов, каждый из которых есть скалярное произведение неких неприводимых тензорных операторов X_i и Z_k ранга $r(X_i) = r(Z_k)$ действующих соответственно на (ϕ, θ, φ) и на спин, умноженное на оператор Y_{ξ} (действующий на $(\xi, \eta; R)$) и на коэффициент C_t , зависящий от масс, зарядов и пр. характеристик частиц / причем все X_i , Y_{ξ} и Z_k либо эрмитовы, либо антиэрмитовы/:

$$H = \sum_t C_t Y_{\xi} (X_i, Z_j), \quad X_i^{\dagger} = h_i^X X_i, \quad Y_{\xi}^{\dagger} = h_{\xi}^Y Y_{\xi}, \quad h_i^X = \pm 1, h_{\xi}^Y = \pm 1, h_i^X h_{\xi}^Y = 1, Z_k^{\dagger} = Z_k.$$

Отсюда для матричных элементов гамильтониана H в адиабатическом представлении получили бы

$$\langle I' S' \lambda' \rho' i' m' J' J_3' | H | I S \lambda \rho i m J J_3 \rangle = \delta_{\lambda \lambda'} \delta_{J J_3} \delta_{J_3 J_3'} \times$$

$$\times (-i)^{J'+S'+J} \sum_t C_t \left\{ \begin{matrix} S' S & r(t) \\ J' J & \eta \end{matrix} \right\} \langle I' S' \lambda' Z_k | I S \rangle \langle \lambda' m' J' | X_i | \lambda m J \rangle \times$$

$$\times \langle \rho' i' m' | Y_{\xi} | \rho i m \rangle.$$

Представить гамильтониан $H^{(0)}$ в виде (4) оказывается на самом деле возможным, если исключить из рассмотрения члены $U^{(np)}$; более того, минимальный набор операторов $\{X_i\}$, $\{Y_j\}$ и $\{Z_k\}$ однозначно определен. Это позволяет выразить матричные элементы релятивистского гамильтониана любо́й системы трех спиновых частиц с электромагнитным взаимодействием /без учета эффектов поляризации вакуума/ через матричные элементы $\langle p' i' m' | Y_j | p i m \rangle$ табличных операторов $\{Y_j\}$ с коэффициентами, зависящими от квантовых чисел и от характеристик частиц.

В данной работе, из-за ограниченного объема не будем приводить явных выражений для всех X_i , Y_j и Z_k . Остановимся подробнее лишь на т.н. "двухуровневом" приближении, в котором (5) сильно упрощается.

4. Явные выражения для матричных элементов гамильтониана в двухуровневом приближении

Для классификации связанных состояний системы трех спиновых частиц необходим набор квантовых чисел $(I S \lambda p i m J \gamma_3)^{st}$, аналогичных квантовым числам, используемым для нумерации функций адиабатического базиса (3). Из них точными квантовыми числами является лишь J , J_3 и λ ; I , S и J - "приближенно хорошие" с точностью $O(\alpha^2)$ /относительный порядок величин спин-спинового и спин-орбитального взаимодействия/; $i = (m, n)$ и m - "приближенно хорошие" с точностью $O(1/2M)$, где $M = (M_1^2 + M_2^2)^{1/2} / (M_1^2 + M_3^2)^{1/2}$ /порядок величины неадиабатических членов в нерелятивистском гамильтониане $H^{(0)}$, связывающих относительное движение частиц 1 и 2 с движением частицы 3/.

В дальнейшем будем рассматривать лишь состояния $s(i, m)^{st} = (0, 0, 0)$, соответствующие "основному состоянию частицы 3"; к этому типу относятся все известные связанные состояния трех частиц с кулоновским взаимодействием. Основной вклад в среднее значение любого оператора в таких состояниях дает первая две функции адиабатического базиса:

$$\mathcal{B}_{I S \lambda p [0] J \gamma_3}(\phi, \theta, \varphi; i, \eta; R) = \mathcal{B}_{I S \lambda p, i(0,0), m=0, J \gamma_3}, \quad p = \pm 1.$$

Относительная погрешность, обусловленная пренебрежением вкладом остальных базисных функций /в т.н. "двухуровневом приближении"/ не превосходит $O(1/2M)$, что составляет $\approx 10\%$ для μ -мезомолекул изотопов водорода и меньше 1% - для H_2^+ . С такой же точностью в двухуровневом приближении можно вычислить и релятивистские поправки к уровням энергии трехчастичной системы /9/, поскольку матричные элементы некоторых операторов X_i тождественно равны нулю при $m' = m = 0$, в этом приближении выражения (5) заметно упрощаются.

В результате усреднения по кулоновским сферическим функциям $\varphi_{p i m}(\hat{r}; R)$ оператор Y_j преобразуется в оператор $\hat{Y}_j(R)$, действующий на функции от переменной R :

$$\hat{Y}_i^{(j)} P P (R) = \langle P' | Y_i^{(j)} | P \rangle = \frac{R^3}{8} \int d^3x d\gamma (\delta^3 - \gamma^2) \varphi_P(\mathbf{x}, \gamma; R) Y_i^{(j)} \varphi_P(\mathbf{x}, \gamma; R) \quad (6)$$

/Подразумеваемая двухуровневое приближение, в дальнейшем не будем выписывать квантовых чисел $i'z_i = (0,0), m' = m = 0$. Квадратичные по импульсам члены в гамильтониане $H^{(n)}$ (1), (2) приводят к операторам \hat{Y}_i вида

$$\hat{Y}_i^{(j)} P P (R) = \sum_{A=0}^{\bar{A}} Y_i^{(j)A} P P (R) \frac{\partial^A}{\partial R^A}, \quad \bar{A} \leq 2,$$

где $Y_i^{(j)A} P P (R)$ - функции от R . Операторы, включающие четвертую степень импульсов /напр., $\vec{P}^4, (\vec{P}P)^2$, однако, содержат дифференцирование по R более высокого порядка, что привело бы к принципиальным трудностям при непертурбативном решении уравнения Шредингера. Ввиду этого такие члены мы будем учитывать только по теории возмущений, используя представление их матричных элементов, требующее вычисления не более чем вторых производных волновой функции трехчастичной системы. Проиллюстрируем это представление на примере оператора $Y_{54} = Y_{35}^2$. С учетом эрмитовости Y_{35} имеем

$$\hat{Y}_{54} P P = \langle P' | Y_{35} Y_{35} | P \rangle = \frac{R^3}{8} \int d^3x d\gamma (\delta^3 - \gamma^2) (Y_{35} \varphi_P) (Y_{35} \varphi_P) = \langle P' | \overleftarrow{Y}_{35} \overrightarrow{Y}_{35} | P \rangle,$$

где стрелки указывают, что соответствующий оператор действует на функцию в левых или правых обкладках. В общем случае, следовательно, матричные элементы $\hat{Y}_i^{(j)} P P (R)$ операторов $Y_i^{(j)}$, через которые выражается релятивистский гамильтониан системы трех частиц /с точностью до членов порядка $O(1/c^2)$, имеет вид

$$\hat{Y}_i^{(j)} P P (R) = \sum_{A=0}^{\bar{A}} \sum_{\alpha, \beta=0}^{\bar{\alpha}, \bar{\beta}} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial R^{\alpha+\beta}} Y_i^{(j)\alpha\beta} P P (R) \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial R^{\alpha+\beta}}, \quad \bar{\alpha}, \bar{\beta} \leq 2. \quad (7)$$

Множество спиновых операторов $\{Z_k\}$ в гамильтониане $H^{(n)}$ состоит из одночастичных операторов спина \vec{S}_i , $i=1,2,3$, и их неприводимых переносных тензорных произведений ранга 0 и 2 /см. приложение 2/.

Используя теорему Вигнера-Экарта, получаем следующее выражение для матричных элементов релятивистского гамильтониана $H^{(n)}$ через приведенные матричные элементы операторов X_i /выписанные в явном виде/, приведенные матричные элементы $\vec{Z}(k) = \vec{Z}_k, I_s^1, I_s^2$ спиновых операторов \vec{Z}_k и операторы $\hat{Y}_i^{(j)} = \hat{Y}_i^{(j)} P P$ ($\hbar = c = 1$):

$$\begin{aligned} & \langle I_s^1 \lambda P J Y \gamma_3 | H^{(n)} | I_s \lambda P J Y \gamma_3 \rangle = \alpha^2 \delta_{S_3^1} \delta_{I_1^1} \times \\ & \times \left\{ -\frac{1}{8m_{12}^3} \left(1 - \frac{3m_{12}}{M_{12}} \right) \left[\left(\frac{1}{16} \hat{Y}_{32} + \hat{Y}_{50} - 2\hat{Y}_{52} + \hat{Y}_{54} \right) + \frac{J(J+1)}{2} (\hat{Y}_{55} + \hat{Y}_{57} \hat{Y}) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{J(J+1)}{R^2} \delta_{P P} \right] - \frac{1}{8M_3^2} \hat{Y}_{32} - \frac{\alpha_{12}}{4m_{12}^3} \left(1 - \frac{m_{12}}{M_{12}} \right) \left[(\hat{Y}_{53} - \hat{Y}_{51}) + J(J+1) (\hat{Y}_{57} + \frac{1}{R^2} \hat{Y}_{59}) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2M_1 M_2} (\hat{Y}_{10} + \delta_{P P} \frac{J(J+1)}{R^2}) - \frac{1}{2M_3} \left(\frac{1}{M_2} + \frac{P P}{M_1} \right) \hat{Y}_{14} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{S_1}{2S_2+1} \frac{1-\mu_1/S_1}{2M_1^2} + \frac{S_2}{2S_2+1} \frac{1-\mu_2/S_2}{2M_2^2} \right) \delta_{PP} \delta(R) - \left(\frac{S_2}{2S_2+1} \frac{1+\mu_2/S_2}{M_2^2} (1+pp') + \right. \\
& \left. + \frac{S_2}{2S_2+1} \frac{1-\mu_2/S_2}{M_2^2} + \frac{S_1}{2S_1+1} \frac{1-\mu_1/S_1}{M_1^2} pp' \right) \hat{y}_{42} - \frac{1}{\sqrt{2S_2+1}} \times \\
& \times \left[\left(\frac{\mu_2 \mu_3}{3M_2 M_3 S_2 S_3} z_{(1)} + pp' \frac{\mu_1 \mu_3}{3M_1 M_3 S_1 S_3} z_{(2)} \right) \hat{y}_{42} + \frac{\mu_1 \mu_2}{GM_2 M_2 S_1 S_2} \delta_{PP} \delta(R) z_{(3)} \right] \} + \\
& + (-1)^{J+S+J+L} \sqrt{J(J+1)(2J+1)} \left\{ \frac{S' S 1}{J J J} \right\} \left\{ \frac{\mu_3}{4M_3 S_3} \left(\frac{1}{M_2} + \frac{pp'}{M_1} \right) \hat{y}_9 z_{(6)} + \right. \\
& \left. + \frac{z_{(4)}}{2M_1^2} \left[\left(1 - \frac{\mu_1}{S_1} \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right) \right) \frac{\delta_{PP}}{R^2} + \frac{pp'}{2} \left(1 - \frac{\mu_1}{S_1} \right) \hat{y}_9 \right] + \frac{z_{(5)}}{2M_2^2} \left[\left(1 - \frac{\mu_2}{S_2} \left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right) \right) \frac{\delta_{PP}}{R^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_2}{S_2} \right) \hat{y}_9 \right] \right\} + \\
& + (-1)^{J'+S+J} \sqrt{\frac{2J(J+1)(2J+1)}{3(2J-1)(2J+3)}} \left\{ \frac{S' S 2}{J J J} \right\} \left\{ \frac{3\mu_1 \mu_2}{4M_1 M_2 S_1 S_2} \frac{\delta_{PP}}{R^3} z_{(7)} + \frac{3\mu_3}{8M_3 S_3} \left(\frac{\mu_2}{M_2 S_2} z_{(2)} + pp' \frac{\mu_1}{M_1 S_1} z_{(2)} \right) \hat{y}_{12} + \right. \\
& \left. + \frac{3Q_1}{2} \left(\frac{pp'}{2} \hat{y}_{12} - \frac{\delta_{PP}}{R^3} \right) z_{(8)} + \frac{3Q_2}{2} \left(\frac{1}{2} \hat{y}_{12} - \frac{\delta_{PP}}{R^3} \right) z_{(9)} - \frac{3Q_3}{4} (1+pp') \hat{y}_{12} z_{(12)} \right\}; \\
& \langle I S' \lambda p' J' y_{J'} | H^{(1)} | I S \lambda p J y_J \rangle = (-1)^{J'+S+J+1} \left\{ \frac{S' S 2}{J J J} \right\} \times \\
& \times \sqrt{\frac{(J_c+1)(J_c+2)}{2J_c+3}} \left\{ \frac{3\mu_1 \mu_2}{4M_1 M_2 S_1 S_2} \frac{\delta_{PP}}{R^3} z_{(7)} + \frac{3\mu_3}{8M_3 S_3} \left(\frac{\mu_2}{M_2 S_2} z_{(2)} + pp' \frac{\mu_1}{M_1 S_1} z_{(2)} \right) \hat{y}_{12} + \right. \\
& \left. + \frac{3Q_1}{2} \left(\frac{pp'}{2} \hat{y}_{12} - \frac{\delta_{PP}}{R^3} \right) z_{(8)} + \frac{3Q_2}{2} \left(\frac{1}{2} \hat{y}_{12} - \frac{\delta_{PP}}{R^3} \right) z_{(9)} - \frac{3Q_3}{4} (1+pp') \hat{y}_{12} z_{(12)} \right\}, \\
& J' = J \pm 2, J_c = \min(J, J').
\end{aligned}$$

5. Таблицы эффективных потенциалов релятивистской задачи трех частиц с электромагнитным взаимодействием

В приложении 1 приведены явные выражения для операторов \hat{Y}_2 , дающих вклад при вычислении матричных элементов релятивистского гамильтониана $H^{(1)}$ в двухуровневом приближении. В рассматриваемом здесь случае равных зарядов $Z_1 = Z_2$ некоторые из них обладают дополнительной симметрией, вследствие чего для некоторых состояний аддитивного базиса их матричные элементы тождественно обращаются в нуль. Таблица 1 содержит перечень этих кулоновских матричных элементов. Приведены также те функции $Y_{JJ'}^{pp'}(R)$, для которых существуют простые аналитические выражения, и асимптотические формулы для убывающих $Y_{JJ'}^{pp'}$. Численные значения остальных $Y_{JJ'}^{pp'}(R)$ вычисление в $1/4, 1/2, 3/4$

затабулированы в множестве R_0 значений переменной R , являющемся подмножеством совокупности $\{R = n/10, n=1, \dots, 200\}$. Множество R_0 выбрано так, что значения $\tilde{y}(R)$, вычисленные с помощью четырехточечной интерполяционной формулы (индексы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ρ пропущены):

$$\tilde{y}(R) = \sum_{s_0 \leq s \leq s_3} y(R_s) \frac{\prod_{t+s} (R-R_t)}{\prod_{t+s} (R_s-R_t)}; R_{s_0} < R_{s_0+1} \leq R \leq R_{s_2+1}; R_s \in R_0$$

при $R \leq 20$ и положенные равными $y(20)$ при $R \geq 20$, удовлетворяют условию

$$\min \left(10 | \tilde{y}(R) - y(R) |, \frac{| \tilde{y}(R) - y(R) |}{\max(| \tilde{y}(R) |, | y(R) |)} \right) \leq 10^{-3}$$

при всех $R \geq .2$. В зависимости от поведения при средних и больших R совокупность нетривиальных $y_{\alpha\beta\rho}(R)$ разбита на несколько групп, и для каждой из них найдено свое множество R_0 , что позволило существенно уменьшить объем таблиц.

В таблицы включены также матричные элементы операторов Y_{20} и Y_{22} , входящих в выражения для дипольного электрического и дипольного магнитного моментов системы трех частиц и необходимых для оценки взаимодействия с внешними электромагнитными полями.

Приложение 1. Явные выражения для сферических операторов Y_j

$$Y_0 = \frac{8}{R^3} \frac{\xi\eta - 1}{(\xi - \eta)^2}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0 \quad (\text{см. (7)}).$$

$$Y_{12} = \frac{8}{R^3} \frac{3\xi^2\eta^2 - 4\xi\eta + 3 - \xi^2 - \eta^2}{(\xi - \eta)^5}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0.$$

$$Y_{14} = -\frac{4}{R^3(\xi - \eta)^3(\xi + \eta)} \left\{ (2\xi^2\eta - 2\eta + \xi - \xi\eta^2) \frac{\partial}{\partial \xi} - (\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} + (\xi^2\eta - \eta + 2\xi - 2\xi\eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} - (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} - (\xi + \eta)(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + (2\xi\eta - \xi^2 + 1)(1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} - (2\xi\eta - \eta^2 + 1)(\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} \right\} + \frac{4}{R^2(\xi - \eta)^3(\xi + \eta)} \left\{ (2\xi\eta - \eta^2 + 1)(\xi^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} - (2\xi\eta - \xi^2 + 1)(1 - \eta^2) \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right\}, \quad \bar{\alpha} = 0, \bar{\beta} = 1.$$

$$Y_{16} = -\frac{2}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{4}{R^2} \frac{\xi(\xi^2 - 1)}{\xi^2 - \eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial R} + \frac{4}{R^2} \frac{\eta(1 - \eta^2)}{\xi^2 - \eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial R} -$$

$$-\frac{(2\xi^2 + \eta^2 - 3)}{R^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{(2\eta^2 + \xi^2 - 3)}{R^2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} +$$

$$+ \frac{2\xi(\xi^2 - 1)}{R^3(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{2\eta(1 - \eta^2)}{R^3(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \bar{\alpha} = 0, \bar{\beta} = 2.$$

$$Y_{20} = \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \left\{ \eta(\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi(1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right\}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0.$$

$$Y_{22} = \xi\eta, \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0.$$

$$Y_{35} = -\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{2}{R^2} \left(\frac{\xi(\xi^2 - 1)}{\xi^2 - \eta^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\eta(1 - \eta^2)}{\xi^2 - \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) (1 + R \frac{\partial}{\partial R}) -$$

$$- \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{R^2(\xi^2 - \eta^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \bar{\alpha} = 0, \bar{\beta} = 2.$$

$$Y_{37} = \frac{4}{R^2(\xi^2 - \eta^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0.$$

$$Y_{59} = \frac{2}{R^2} \left\{ \frac{\xi\eta}{\xi^2 - \eta^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\eta(\xi^2 - 1)}{\xi^2 - \eta^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\xi(1 - \eta^2)}{\xi^2 - \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) (1 + R \frac{\partial}{\partial R}) \right\}, \quad \bar{\alpha} = 0, \bar{\beta} = 1.$$

$$Y_{42} = \frac{16}{R^3} \frac{d(\xi - 1)}{d\xi} \frac{d(1 - \eta)}{d\eta}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0.$$

$$Y_{32} = \overleftarrow{Y}_{37} \overrightarrow{Y}_{37}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0;$$

$$Y_{50} = \overleftarrow{Y}_{39} \overrightarrow{Y}_{39}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta} = 1; \quad Y_{51} = \overleftarrow{Y}_{37} \overrightarrow{Y}_{39}, \quad \bar{\alpha} = 0, \bar{\beta} = 1;$$

$$Y_{52} = \overleftarrow{Y}_{37} \overrightarrow{Y}_{35}, \quad \bar{\alpha} = 0, \bar{\beta} = 2; \quad Y_{53} = \overleftarrow{Y}_{39} \overrightarrow{Y}_{35}, \quad \bar{\alpha} = 1, \bar{\beta} = 2;$$

$$Y_{54} = \overleftarrow{Y}_{35} \overrightarrow{Y}_{35}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\beta} = 2;$$

$$Y_{55} = \frac{4}{R^4} \frac{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}{(\xi^2 - \eta^2)^2} \left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi\eta \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right).$$

$$Y_{5c} = \frac{4}{R^4} \frac{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}{(\xi^2-\eta^2)^2} \left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} - \xi \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} - \xi \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right),$$

$$Y_{57} = \frac{4}{R^4} \frac{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}{(\xi^2-\eta^2)^2} \left(\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} - \xi \eta \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right),$$

$$\bar{\alpha} = \bar{\beta} = 0.$$

Приложение 2. Явные выражения для спиновых операторов Z_k и их приведенных матричных элементов $Z_k(\mu)_{I'S', I'S} = \langle I'S' | Z_k | I'S \rangle$

$$Z_1 = \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3; \quad Z_{(1)I'S', I'S} = \delta_{S_2 S_3} \cdot (-1)^{I'+I+1} \Pi_{I I_2} R_2 R_3 \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} I' & I & I \\ S_2 & S & S_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S_2 & S_2 \\ I & S_1 & I' \end{Bmatrix},$$

где использованы обозначения

$$\Pi_{a b \dots c} = \sqrt{(2a+1)(2b+1) \dots (2c+1)}, \quad \sigma = (-1)^{S_1+S_2+S_3+S},$$

$$R_i = \langle S_i | \vec{S}_i | S_i \rangle = \sqrt{S_i(S_i+1)(2S_i+1)}, \quad i=1, 2, 3,$$

$$Z_2 = \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3; \quad Z_{(2)I'S', I'S} = \delta_{S_1 S_3} \cdot \sigma \cdot (-1)^{2I+1} \Pi_{I' I_3} R_1 R_3 \begin{Bmatrix} I' & I & I \\ S_3 & S & S_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 & S_1 \\ I & S_2 & I' \end{Bmatrix},$$

$$Z_3 = \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2; \quad Z_{(3)I'S', I'S} = \delta_{I' I} \delta_{S_1 S_2} \frac{\Pi_S}{2} (I(I+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1)),$$

$$Z_4 = \vec{S}_1; \quad Z_{(4)I'S', I'S} = \sigma(-1)^{I+I'} \Pi_{S_1 S_1} I' R_1 \begin{Bmatrix} I' & I & I \\ S_1 & S & S_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 & S_1 \\ I & S_2 & I' \end{Bmatrix},$$

$$Z_5 = \vec{S}_2; \quad Z_{(5)I'S', I'S} = \sigma(-1)^{2I'} \Pi_{S_2 S_2} I' R_2 \begin{Bmatrix} I' & I & I \\ S_2 & S & S_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} S_2 & S_2 \\ I & S_1 & I' \end{Bmatrix},$$

$$Z_6 = \vec{S}_3; \quad Z_{(6)I'S', I'S} = \delta_{I' I} (-1)^{S_1+I'+S_3+1} \Pi_{S_3 S_3} R_3 \begin{Bmatrix} S_3 & S_3 \\ S & I & S_1 \end{Bmatrix},$$

$$(Z_7)_{ij} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\delta_{ij} \frac{S_1 S_2 S_3}{3} - \frac{\delta_{ij}}{3} \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 \right) = (\vec{S}_2 \otimes \vec{S}_3)_{ij}^{(1)},$$

$$Z_{(7)I'S', I'S} = (-1)^{I'+S_2+S_3+1} \Pi_{S_2 S_2} I' R_2 R_3 \begin{Bmatrix} S_2 & S_2 \\ I & S_1 & I' \end{Bmatrix} D.$$

Выражение для $Z_{(7)I'S', I'S}$ очень громоздко в общем случае, но упрощается при $S_3 = \frac{1}{2}$, когда

$$D \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} I & 1/2 & S \\ 1 & 1 & 2 \\ I' & 1/2 & S' \end{array} \right\} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \begin{array}{ccc} I I' 1 \\ 1/2 & 3/2 & S' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} S' S 2 \\ 1/2 & 3/2 & I \end{array} \right\},$$

$$Z_8 = (\vec{S}_1 \otimes \vec{S}_3)^{(2)} ; z_{(8)I'S', IS} = (-1)^{I+S_1+S_3} \prod_{S_1 S_3 I' I_2} R_1 R_3 D \left\{ \begin{array}{cc} S_1 & S_1 \\ I_2 & S_1 I' \end{array} \right\},$$

$$Z_9 = (\vec{S}_1 \otimes \vec{S}_2)^{(2)} ; z_{(9)I'S', IS} = (-1)^{S_1+I'+S_2} \prod_{S_1 S_2 I' I_2} R_1 R_2 \left\{ \begin{array}{cc} I' & I \\ S_2 & S_2 S' \end{array} \right\} \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & I \\ 1 & 1 & 2 \\ S_1 & S_2 & I' \end{array} \right\},$$

$$Z_{10} = (\vec{S}_1 \otimes \vec{S}_1)^{(2)} ; z_{(10)I'S', IS} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma(-1)^{I+I'} \prod_{S_1 S_2 I' I_2} R_1 \left\{ \begin{array}{cc} I' & I \\ S_2 & S_2 S' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} S_2 & 2 & S_1 \\ I_2 & S_2 & I' \end{array} \right\},$$

$$Z_{11} = (\vec{S}_2 \otimes \vec{S}_2)^{(2)} ; z_{(11)I'S', IS} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sigma(-1)^{2I'} \prod_{S_2 S_2 I' I_2} R_2 \left\{ \begin{array}{cc} I' & I \\ S_2 & S_2 S' \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} S_2 & 2 & S_2 \\ I_2 & S_2 & I' \end{array} \right\},$$

$$Z_{12} = (\vec{S}_3 \otimes \vec{S}_3)^{(2)} ; z_{(12)I'S', IS} = \delta_{I' I} (-1)^{S_3+I-S_3} \prod_{S_3 S_3 I_2} R_3^2 \left\{ \begin{array}{cc} S_3 & I_2 \\ S_2 & S_3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ S_3 & S_3 & S_3 \end{array} \right\},$$

$$Z_{13} = 1 ; z_{(13)I'S', IS} = \delta_{S' S} \delta_{I' I} \prod_{S_1}.$$

Таблица 1. Матричные элементы, которые тождественно равны нулю, и матричные элементы, для которых существует /асимптотические/ аналитические выражения

Символом T отмечены функции $Y_{j\mu}^{\alpha\beta}$, численные значения которых приведены в табл.2; символом \emptyset - те, которые тождественно равны нулю; асимптотические формулы для медленно убывающих $Y_{j\mu}^{\alpha\beta}$, отмеченные символом \sim следует использовать при $R > 20$.

$j =$	14	15	16	17	18	20	22	22	22	35	37	39	42	50
$(\alpha\beta) =$	00 01 00 00	00 01 02	00 00 00	00 01 02	00 00 00	00 00 00	00 01 11	00 00 01	00 00 01	00 00 01	00 00 01	00 00 01	00 00 01	00 00 01
$(\mu\mu) =$	\emptyset T T T T	T $-2/R$ $-2/R$	\emptyset \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset \emptyset T	\emptyset \emptyset \emptyset T	T $-2/R$ -1	T \emptyset \emptyset T	\emptyset T T T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T
$j =$	50	51	52	53	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54
$(\alpha\beta) =$	11 00 01	00 01 02	00 01 02	00 01 02 10 11 12	00 01 02 10 11 12	00 01 02 10 11 12	00 01 02 10 11 12	00 01 02 10 11 12	00 01 02 10 11 12	00 01 02 10 11 12	00 01 02 10 11 12	00 01 02 10 11 12	00 01 02 10 11 12	00 01 02 10 11 12
$(\mu\mu) =$	T \emptyset \emptyset T	T $-2/R$ T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T	T \emptyset \emptyset T

Для $j = 55, 56$ $Y_{j\mu}^{\alpha\beta} = 0$, а $Y_{j\mu}^{\alpha\beta} \sim Y_{(j-1)\mu}^{\alpha\beta}$; остальные $Y_{j\mu}^{\alpha\beta}$ приведены в таблицах 2.

Таблица 2. Численные значения коэффициентных функций $Y_{ij}^{(R)}$ в выражении (7) для матричных элементов операторов Y_j (см. приложение 1) в адиабатическом базисе

R	$Y_{(1)ij}^{(R)}$	$Y_{(2)ij}^{(R)}$	$Y_{(3)ij}^{(R)}$	$Y_{(4)ij}^{(R)}$	$Y_{(12)ij}^{(R)}$	$Y_{(13)ij}^{(R)}$
0,1	-7,802	8,284	0,267	0,632	-0,118	0,265
0,2	-5,755	4,036	0,268	0,845	-0,189	0,283
0,3	-4,323	2,601	0,270	0,878	-0,231	0,258
0,4	-3,315	1,875	0,271	0,834	-0,254	0,250
0,5	-2,593	1,435	0,271	0,789	-0,265	0,241
0,6	-2,066	1,139	0,269	0,695	-0,269	0,229
0,7	-1,684	0,932	0,264	0,622	-0,265	0,214
0,8	-1,372	0,762	0,256	0,557	-0,259	0,197
0,9	-1,146	0,637	0,249	0,498	-0,248	0,178
1,0	-0,958	0,531	0,233	0,445	-0,236	0,158
1,1	-0,816	0,447	0,217	0,399	-0,221	0,138
1,2	-0,695	0,376	0,199	0,358	-0,206	0,119
1,3	-0,601	0,318	0,181	0,323	-0,190	0,100
1,4	-0,521	0,268	0,162	0,291	-0,175	0,083
1,5	-0,456	0,227	0,144	0,264	-0,160	0,068
1,6	-0,400	0,192	0,126	0,239	-0,145	0,055
1,7	-0,354	0,163	0,109	0,218	-0,131	0,044
1,8	-0,314	0,138	0,094	0,198	-0,119	0,035
1,9	-0,280	0,117	0,080	0,181	-0,107	0,027
2,0	-0,250	0,099	0,068	0,166	-0,096	0,021
2,1	-0,225	0,085	0,057	0,152	-0,087	0,016
2,2	-0,203	0,072	0,047	0,140	-0,078	0,012
2,3	-0,183	0,062	0,039	0,129	-0,070	0,009
2,4	-0,166	0,053	0,032	0,119	-0,063	0,007
2,5	-0,151	0,045	0,025	0,110	-0,057	0,005
2,6	-0,138	0,039	0,020	0,101	-0,051	0,004
2,7	-0,126	0,033	0,015	0,094	-0,046	0,003
2,8	-0,115	0,028	0,011	0,087	-0,041	0,003
2,9	-0,105	0,024	0,008	0,081	-0,037	0,002
3,0	-0,097	0,021	0,005	0,075	-0,034	0,002
3,1	-0,089	0,018	0,002	0,070	-0,030	0,002
3,2	-0,082	0,015	0,000	0,065	-0,027	0,002
3,4	-0,070	0,011	-0,003	0,056	-0,022	0,002
3,6	-0,060	0,009	-0,005	0,049	-0,018	0,002
3,9	-0,048	0,005	-0,007	0,040	-0,014	0,003
4,2	-0,039	0,003	-0,008	0,033	-0,011	0,003
4,5	-0,032	0,002	-0,008	0,027	-0,008	0,003
4,8	-0,026	0,001	-0,008	0,022	-0,006	0,004
5,1	-0,021	0,001	-0,008	0,018	-0,005	0,004
5,4	-0,017	0,001	-0,007	0,015	-0,004	0,004
5,8	-0,014	0,000	-0,007	0,012	-0,003	0,004
6,2	-0,011	0,0	-0,006	0,009	-0,003	0,003
6,6	-0,009	0,0	-0,005	0,007	-0,002	0,003
7,1	-0,007	0,0	-0,005	0,005	-0,002	0,003
7,6	-0,005	0,0	-0,004	0,004	-0,001	0,002
8,8	-0,003	0,0	-0,003	0,002	-0,001	0,001
10,4	-0,002	0,0	-0,002	0,001	-0,000	0,001
13,5	-0,001	0,0	-0,001	0,001	-0,000	0,001
20,0	-0,000	0,0	-0,000	0,000	-0,000	0,000

◇

Таблица 2 /продолжение/

R	У ⁰⁰ _{Ж(2)Ж}	У ⁰⁰ _{Ж(2)Ж}	У ⁰⁰ _{Ж(2)Ж}	У ⁰⁰ _{Ж(2)Ж}	У ⁰⁰ _{Ж(2)Ж}	У ⁰⁰ _{Ж(2)Ж}	У ⁰¹ _{Ж(2)Ж}
0,1	12,739	0,254	0,005	7,357	22,327	0,839	1,112
0,2	10,064	0,456	0,021	6,412	11,195	0,856	1,100
0,3	8,061	0,620	0,048	5,500	7,536	0,884	1,086
0,4	6,578	0,758	0,087	4,725	5,741	0,924	1,071
0,5	5,469	0,877	0,140	4,088	4,684	0,975	1,055
0,6	4,626	0,980	0,207	3,570	3,986	1,036	1,038
0,7	3,974	1,069	0,287	3,147	3,487	1,106	1,017
0,8	3,462	1,146	0,379	2,801	3,107	1,181	0,993
0,9	3,054	1,210	0,479	2,514	2,803	1,260	0,966
1,0	2,724	1,262	0,585	2,276	2,554	1,338	0,935
1,1	2,454	1,302	0,691	2,077	2,344	1,411	0,901
1,2	2,230	1,331	0,795	1,908	2,167	1,477	0,864
1,3	2,043	1,350	0,892	1,765	2,015	1,535	0,825
1,4	1,886	1,359	0,980	1,642	1,886	1,581	0,785
1,5	1,753	1,362	1,058	1,537	1,774	1,617	0,745
1,7	1,540	1,349	1,182	1,367	1,597	1,659	0,685
1,9	1,382	1,321	1,264	1,239	1,464	1,666	0,590
2,0	1,317	1,304	1,291	1,186	1,410	1,660	0,555
2,2	1,212	1,287	1,325	1,100	1,320	1,633	0,490
2,4	1,131	1,230	1,338	1,034	1,250	1,595	0,432
2,6	1,068	1,194	1,335	0,982	1,194	1,550	0,380
2,8	1,019	1,161	1,323	0,943	1,149	1,503	0,335
3,0	0,982	1,132	1,305	0,914	1,113	1,455	0,295
3,2	0,953	1,106	1,284	0,892	1,084	1,410	0,260
3,5	0,923	1,074	1,250	0,871	1,050	1,347	0,215
3,8	0,906	1,049	1,216	0,861	1,025	1,292	0,178
4,1	0,897	1,031	1,184	0,859	1,008	1,243	0,146
4,4	0,895	1,017	1,156	0,862	0,997	1,202	0,121
4,7	0,898	1,008	1,131	0,870	0,990	1,167	0,099
5,1	0,908	1,000	1,103	0,884	0,985	1,129	0,075
5,5	0,918	0,995	1,080	0,900	0,983	1,098	0,057
5,9	0,930	0,994	1,061	0,917	0,984	1,075	0,043
6,3	0,942	0,993	1,046	0,932	0,986	1,056	0,032
6,7	0,954	0,994	1,035	0,946	0,988	1,042	0,023
7,1	0,963	0,994	1,026	0,957	0,990	1,031	0,017
7,6	0,973	0,995	1,018	0,969	0,992	1,021	0,012
8,1	0,980	0,996	1,012	0,977	0,994	1,014	0,008
8,7	0,987	0,997	1,007	0,985	0,996	1,008	0,006
9,3	0,991	0,998	1,004	0,990	0,997	1,005	0,003
9,9	0,994	0,998	1,002	0,993	0,998	1,003	0,002
10,7	0,997	0,999	1,001	0,996	0,998	1,001	0,001
11,7	0,998	0,999	1,000	0,998	0,999	1,000	0,000
12,7	0,999	0,999	1,000	0,999	0,999	1,000	0,0
13,9	0,999	1,000	1,000	0,999	1,000	1,000	0,0
15,7	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,0
18,3	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,0
20,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,0

Таблица 2 /продолжение/

R	У ⁰⁰ _{12/10}	У ⁰⁰ _{12/11}	У ⁰⁰ _{12/12}	У ⁰⁰ _{12/13}	R	У ⁰⁰ _{12/10}	У ⁰⁰ _{12/11}	У ⁰⁰ _{12/12}	У ⁰⁰ _{12/13}
0,1	0,038	200,001	-3,878	-1,004	0,1	0,028	7,592	-11,256	-0,561
0,2	0,090	50,006	-3,627	-1,016	0,2	0,057	3,972	-5,739	-0,566
0,3	0,128	22,235	-3,344	-1,036	0,3	0,086	2,811	-3,932	-0,574
0,4	0,152	12,522	-3,071	-1,065	0,4	0,118	2,254	-3,045	-0,582
0,5	0,167	8,032	-2,821	-1,101	0,5	0,147	1,935	-2,518	-0,589
0,6	0,175	5,598	-2,599	-1,145	0,6	0,179	1,731	-2,165	-0,596
0,7	0,180	4,132	-2,403	-1,195	0,7	0,210	1,591	-1,908	-0,600
0,8	0,182	3,182	-2,231	-1,250	0,8	0,241	1,489	-1,707	-0,603
0,9	0,182	2,529	-2,079	-1,306	0,9	0,271	1,411	-1,544	-0,602
1,0	0,182	2,061	-1,946	-1,362	1,1	0,328	1,299	-1,287	-0,592
1,1	0,181	1,712	-1,828	-1,416	1,3	0,371	1,218	-1,095	-0,571
1,2	0,180	1,446	-1,723	-1,465	1,5	0,407	1,156	-0,950	-0,543
1,3	0,179	1,239	-1,631	-1,507	1,7	0,433	1,107	-0,841	-0,510
1,4	0,178	1,075	-1,548	-1,542	1,9	0,451	1,067	-0,755	-0,474
1,5	0,177	0,944	-1,474	-1,570	2,1	0,461	1,035	-0,687	-0,493
1,6	0,176	0,839	-1,408	-1,590	2,4	0,467	0,998	-0,630	-0,389
1,7	0,175	0,753	-1,348	-1,603	2,8	0,459	0,966	-0,571	-0,328
1,8	0,175	0,683	-1,295	-1,610	3,2	0,439	0,947	-0,534	-0,274
1,9	0,175	0,626	-1,247	-1,611	3,6	0,410	0,938	-0,511	-0,228
2,0	0,175	0,580	-1,204	-1,608	4,0	0,376	0,935	-0,497	-0,188
2,1	0,175	0,538	-1,165	-1,600	4,3	0,348	0,936	-0,490	-0,162
2,2	0,175	0,504	-1,130	-1,589	4,6	0,318	0,939	-0,486	-0,138
2,3	0,176	0,476	-1,098	-1,576	4,9	0,288	0,943	-0,484	-0,118
2,4	0,176	0,451	-1,070	-1,560	5,2	0,258	0,947	-0,484	-0,099
2,6	0,178	0,412	-1,021	-1,525	5,5	0,229	0,952	-0,484	-0,083
2,8	0,180	0,382	-0,981	-1,487	5,8	0,202	0,957	-0,485	-0,069
2,9	0,182	0,370	-0,965	-1,467	6,2	0,168	0,963	-0,487	-0,054
3,1	0,185	0,350	-0,937	-1,428	6,6	0,137	0,966	-0,488	-0,042
3,3	0,188	0,333	-0,915	-1,390	7,0	0,111	0,973	-0,490	-0,032
3,5	0,192	0,320	-0,898	-1,354	7,4	0,089	0,977	-0,492	-0,024
3,7	0,196	0,309	-0,887	-1,319	7,9	0,066	0,981	-0,494	-0,017
4,0	0,202	0,296	-0,876	-1,272	8,4	0,049	0,984	-0,495	-0,012
4,3	0,208	0,286	-0,873	-1,231	8,9	0,035	0,987	-0,497	-0,008
4,6	0,215	0,278	-0,875	-1,195	9,4	0,025	0,989	-0,497	-0,005
4,9	0,220	0,272	-0,880	-1,163	9,9	0,018	0,990	-0,498	-0,004
5,2	0,225	0,267	-0,889	-1,136	10,5	0,012	0,992	-0,499	-0,002
5,5	0,230	0,263	-0,899	-1,113	11,1	0,008	0,993	-0,499	-0,001
5,9	0,235	0,259	-0,914	-1,088	11,7	0,005	0,994	-0,499	-0,001
6,3	0,239	0,257	-0,928	-1,067	12,3	0,003	0,995	-0,499	-0,001
6,7	0,242	0,255	-0,942	-1,051	12,9	0,002	0,996	-0,500	-0,000
7,1	0,244	0,253	-0,953	-1,039	13,5	0,001	0,996	-0,500	0,0
7,5	0,246	0,252	-0,963	-1,029	14,3	0,001	0,997	-0,500	0,0
7,9	0,247	0,251	-0,971	-1,022	15,1	0,000	0,997	-0,500	0,0
8,3	0,248	0,251	-0,978	-1,016	15,9	0,0	0,998	-0,500	0,0
8,7	0,248	0,251	-0,983	-1,012	16,7	0,0	0,998	-0,500	0,0
9,1	0,249	0,250	-0,987	-1,008	17,5	0,0	0,998	-0,500	0,0
9,6	0,249	0,250	-0,991	-1,006	18,3	0,0	0,998	-0,500	0,0
10,1	0,249	0,250	-0,994	-1,004	19,1	0,0	0,999	-0,500	0,0
10,6	0,250	0,250	-0,995	-1,002	20,0	0,0	0,999	-0,500	0,0
11,1	0,250	0,250	-0,997	-1,001					
12,2	0,250	0,250	-0,998	-1,000					
13,4	0,250	0,250	-0,999	-1,000					
14,6	0,250	0,250	-1,000	-1,000					
15,8	0,250	0,250	-1,000	-1,000					
20,0	0,250	0,250	-1,000	-1,000					



Таблица 2 /продолжение/

R	У ⁰⁰ ₀₀₀₀	У ⁰⁰ ₀₀₀₀	У ⁰⁰ ₀₀₀₀	У ⁰⁰ ₀₀₀₀	У ⁰⁰ ₀₀₀₀	У ⁰⁰ ₀₀₀₀	У ⁰⁰ ₀₀₀₀	У ⁰⁰ ₀₀₀₀	У ⁰⁰ ₀₀₀₀
0,1	64,98	2,367	-12,163	1996,01	2,458	161,1	-0,578	4,035	1,283
0,2	51,74	2,409	-5,155	248,03	3,565	41,1	-0,779	2,070	1,180
0,3	41,46	2,640	-2,873	72,78	3,859	18,9	-0,808	1,438	1,066
0,4	33,74	2,883	-1,870	30,29	3,788	11,1	-0,767	1,138	0,957
0,5	27,92	3,198	-1,827	15,25	3,573	7,598	-0,702	0,968	0,859
0,6	23,50	3,575	-0,875	8,635	3,315	5,678	-0,632	0,859	0,774
0,7	20,08	4,012	-0,648	5,292	3,057	4,531	-0,565	0,782	0,699
0,8	17,40	4,491	-0,493	3,422	2,819	3,792	-0,504	0,719	0,635
0,9	15,27	4,994	-0,383	2,295	2,604	3,289	-0,451	0,662	0,579
1,0	13,55	5,500	-0,304	1,574	2,415	2,932	-0,403	0,607	0,530
1,1	12,15	5,983	-0,244	1,083	2,249	2,671	-0,362	0,551	0,488
1,2	11,00	6,429	-0,198	0,762	2,103	2,478	-0,325	0,495	0,451
1,3	10,04	6,822	-0,163	0,529	1,976	2,333	-0,293	0,439	0,419
1,4	9,24	7,154	-0,134	0,363	1,865	2,224	-0,265	0,384	0,391
1,5	8,56	7,422	-0,112	0,244	1,768	2,142	-0,241	0,333	0,366
1,6	7,98	7,627	-0,093	0,159	1,682	2,079	-0,218	0,285	0,345
1,8	7,08	7,867	-0,068	0,054	1,541	1,989	-0,181	0,203	0,309
1,9	6,70	7,916	-0,055	0,023	1,483	1,955	-0,166	0,169	0,294
2,0	6,30	7,926	-0,047	0,001	1,431	1,925	-0,151	0,139	0,281
2,1	6,10	7,906	-0,039	-0,014	1,386	1,898	-0,139	0,113	0,269
2,2	5,86	7,860	-0,033	-0,024	1,345	1,873	-0,127	0,091	0,259
2,4	5,46	7,716	-0,023	-0,035	1,279	1,824	-0,107	0,056	0,243
2,6	5,16	7,528	-0,015	-0,038	1,227	1,778	-0,090	0,031	0,231
2,8	4,93	7,319	-0,009	-0,037	1,187	1,733	-0,075	0,018	0,222
3,0	4,75	7,108	-0,005	-0,035	1,156	1,689	-0,062	0,000	0,213
3,3	4,57	6,799	-0,001	-0,030	1,126	1,628	-0,047	-0,011	0,211
3,6	4,46	6,519	0,003	-0,025	1,108	1,572	-0,034	-0,017	0,210
3,8	4,42	6,350	0,004	-0,022	1,102	1,538	-0,027	-0,019	0,212
4,0	4,39	6,197	0,006	-0,019	1,100	1,507	-0,020	-0,020	0,215
4,2	4,39	6,058	0,006	-0,016	1,101	1,479	-0,015	-0,020	0,219
4,4	4,39	5,933	0,007	-0,014	1,104	1,453	-0,010	-0,020	0,223
4,8	4,43	5,722	0,007	-0,010	1,115	1,409	-0,003	-0,018	0,235
5,2	4,49	5,554	0,007	-0,008	1,131	1,374	0,002	-0,018	0,247
5,6	4,56	5,422	0,006	-0,006	1,148	1,345	0,005	-0,014	0,260
6,0	4,64	5,319	0,005	-0,004	1,165	1,323	0,006	-0,012	0,272
6,4	4,70	5,239	0,004	-0,003	1,180	1,305	0,007	-0,010	0,283
6,8	4,76	5,178	0,004	-0,002	1,194	1,291	0,006	-0,008	0,293
7,2	4,82	5,131	0,003	-0,001	1,206	1,281	0,008	-0,006	0,301
7,6	4,86	5,096	0,002	-0,001	1,216	1,273	0,005	-0,005	0,308
8,1	4,90	5,064	0,002	-0,001	1,225	1,265	0,004	-0,004	0,315
8,6	4,93	5,041	0,001	0,0	1,232	1,260	0,003	-0,003	0,320
9,1	4,95	5,026	0,001	0,0	1,237	1,256	0,002	-0,002	0,323
9,6	4,96	5,016	0,001	0,0	1,241	1,254	0,002	-0,001	0,326
10,1	4,97	5,009	0,0	0,0	1,243	1,252	0,001	-0,001	0,328
10,6	4,98	5,005	0,0	0,0	1,245	1,251	0,001	-0,001	0,329
11,1	4,99	5,002	0,0	0,0	1,247	1,251	0,001	0,0	0,330
11,6	4,99	5,001	0,0	0,0	1,248	1,250	0,0	0,0	0,331
12,2	4,99	5,000	0,0	0,0	1,248	1,250	0,0	0,0	0,332
13,4	5,00	4,999	0,0	0,0	1,249	1,250	0,0	0,0	0,332
15,5	5,00	5,000	0,0	0,0	1,250	1,250	0,0	0,0	0,333
20,0	5,00	5,000	0,0	0,0	1,250	1,250	0,0	0,0	0,333



Таблица 2 /продолжение/

R	¹¹ У(12)и	⁰⁰ У(2)гг	⁰⁰ У(2)и	⁰¹ У(2)гг	⁰¹ У(2)и	⁰² У(2)гг	⁰² У(2)и	⁰⁰ У(2)гг
0,1	0,602	-29,694	-199,602	75,463	20,180	3,878	1,004	24,518
0,2	0,606	-19,118	-49,615	33,495	10,323	3,627	1,016	12,183
0,3	0,620	-13,072	-21,870	19,475	7,154	3,344	1,036	6,768
0,4	0,635	-9,478	-12,210	12,729	5,651	3,071	1,065	4,155
0,5	0,654	-7,225	-7,909	8,926	4,810	2,821	1,101	2,777
0,6	0,677	-5,739	-5,507	6,575	4,290	2,599	1,145	1,989
0,7	0,702	-4,712	-4,215	5,028	3,940	2,403	1,195	1,507
0,8	0,729	-3,975	-3,475	3,962	3,682	2,231	1,250	1,195
0,9	0,755	-3,428	-3,053	3,199	3,470	2,079	1,306	0,982
1,0	0,780	-3,011	-2,818	2,638	3,277	1,946	1,362	0,830
1,1	0,802	-2,685	-2,690	2,215	3,088	1,828	1,416	0,719
1,2	0,820	-2,425	-2,616	1,889	2,899	1,723	1,465	0,635
1,3	0,834	-2,215	-2,666	1,634	2,708	1,631	1,507	0,569
1,4	0,843	-2,042	-2,622	1,431	2,518	1,548	1,542	0,517
1,5	0,847	-1,898	-2,477	1,268	2,332	1,474	1,570	0,475
1,6	0,847	-1,777	-2,428	1,135	2,154	1,408	1,590	0,441
1,8	0,835	-1,587	-2,319	0,934	1,828	1,295	1,610	0,389
1,9	0,824	-1,512	-2,263	0,858	1,683	1,247	1,611	0,369
2,0	0,812	-1,447	-2,206	0,794	1,551	1,204	1,608	0,352
2,1	0,797	-1,391	-2,151	0,740	1,431	1,165	1,600	0,338
2,2	0,782	-1,343	-2,098	0,694	1,322	1,130	1,589	0,325
2,4	0,748	-1,264	-1,999	0,620	1,137	1,070	1,560	0,306
2,6	0,713	-1,204	-1,910	0,566	0,988	1,021	1,525	0,291
2,8	0,678	-1,158	-1,831	0,525	0,867	0,981	1,487	0,280
3,0	0,645	-1,125	-1,761	0,493	0,769	0,950	1,448	0,273
3,3	0,599	-1,092	-1,672	0,460	0,656	0,915	1,390	0,266
3,6	0,558	-1,075	-1,597	0,437	0,571	0,892	1,336	0,263
3,8	0,534	-1,070	-1,555	0,425	0,526	0,882	1,303	0,262
4,0	0,512	-1,069	-1,517	0,416	0,489	0,876	1,273	0,263
4,2	0,491	-1,072	-1,484	0,408	0,457	0,873	1,244	0,264
4,4	0,473	-1,078	-1,455	0,401	0,430	0,873	1,218	0,267
4,8	0,443	-1,095	-1,406	0,387	0,387	0,878	1,173	0,272
5,2	0,418	-1,117	-1,369	0,373	0,354	0,889	1,136	0,279
5,6	0,398	-1,139	-1,339	0,359	0,328	0,903	1,106	0,285
6,0	0,383	-1,161	-1,317	0,342	0,307	0,917	1,082	0,291
6,4	0,371	-1,180	-1,299	0,325	0,290	0,932	1,063	0,296
6,8	0,361	-1,196	-1,286	0,308	0,275	0,945	1,048	0,300
7,2	0,354	-1,208	-1,276	0,291	0,262	0,956	1,036	0,303
7,6	0,348	-1,218	-1,269	0,275	0,250	0,965	1,027	0,308
8,1	0,343	-1,228	-1,262	0,257	0,237	0,975	1,019	0,308
8,6	0,340	-1,234	-1,258	0,240	0,225	0,982	1,013	0,309
9,1	0,337	-1,239	-1,255	0,226	0,215	0,987	1,008	0,310
9,6	0,335	-1,242	-1,253	0,213	0,205	0,991	1,006	0,311
10,1	0,334	-1,245	-1,251	0,201	0,195	0,994	1,003	0,311
10,6	0,334	-1,246	-1,251	0,191	0,187	0,995	1,002	0,312
11,1	0,333	-1,247	-1,250	0,182	0,179	0,997	1,001	0,312
11,6	0,333	-1,248	-1,250	0,173	0,172	0,998	1,001	0,312
12,2	0,333	-1,248	-1,250	0,165	0,163	0,998	1,000	0,312
12,4	0,333	-1,249	-1,250	0,150	0,149	0,999	1,000	0,312
12,5	0,333	-1,250	-1,250	0,129	0,129	1,000	1,000	0,312
20,0	0,333	-1,250	-1,250	0,100	0,100	1,000	1,000	0,3125



Таблица 2 /продолжение /

R	У ⁰⁰ (Кв)ш	У ⁰¹ (Кв)ш	У ⁰¹ (Кв)ш	У ⁰² (Кв)ш	У ⁰² (Кв)ш	У ¹¹ (Кв)ш	У ¹¹ (Кв)ш
0,1	40001,8	1,204	-3999,9	-0,029	-200,001	400,136	400,006
0,2	2501,82	0,989	-499,90	-0,089	-50,006	100,322	100,022
0,3	495,566	0,721	-148,001	-0,128	-22,235	44,894	44,494
0,4	157,856	0,501	-62,322	-0,152	-12,522	25,522	25,083
0,5	65,421	0,337	-31,810	-0,167	-8,032	16,558	16,121
0,6	32,062	0,219	-18,338	-0,175	-5,598	11,681	11,267
0,7	17,618	0,135	-11,513	-0,180	-4,132	8,733	8,348
0,8	10,499	0,076	-7,712	-0,182	-3,182	6,811	6,452
0,9	6,643	0,033	-5,442	-0,182	-2,529	5,466	5,144
1,0	4,413	0,003	-4,008	-0,182	-2,060	4,533	4,197
1,1	3,065	-0,019	-3,058	-0,181	-1,712	3,824	3,486
1,2	2,227	-0,036	-2,398	-0,180	-1,446	3,280	2,936
1,3	1,692	-0,048	-1,921	-0,179	-1,239	2,855	2,504
1,4	1,345	-0,057	-1,565	-0,178	-1,075	2,515	2,160
1,5	1,113	-0,063	-1,292	-0,177	-0,944	2,239	1,884
1,6	0,953	-0,068	-1,078	-0,176	-0,839	2,012	1,661
1,8	0,757	-0,075	-0,774	-0,175	-0,683	1,663	1,335
1,9	0,694	-0,077	-0,665	-0,175	-0,626	1,528	1,216
2,0	0,645	-0,078	-0,576	-0,175	-0,578	1,412	1,118
2,1	0,605	-0,079	-0,504	-0,175	-0,538	1,312	1,037
2,2	0,573	-0,080	-0,445	-0,175	-0,504	1,225	0,969
2,4	0,524	-0,081	-0,355	-0,176	-0,451	1,083	0,864
2,6	0,488	-0,081	-0,292	-0,178	-0,412	0,973	0,787
2,8	0,461	-0,081	-0,246	-0,180	-0,383	0,886	0,730
3,0	0,439	-0,081	-0,213	-0,183	-0,359	0,816	0,682
3,3	0,413	-0,081	-0,177	-0,188	-0,333	0,737	0,629
3,6	0,393	-0,081	-0,152	-0,194	-0,314	0,678	0,588
3,8	0,382	-0,081	-0,139	-0,198	-0,304	0,647	0,566
4,0	0,373	-0,081	-0,128	-0,202	-0,296	0,621	0,547
4,2	0,365	-0,081	-0,120	-0,206	-0,289	0,599	0,531
4,4	0,358	-0,081	-0,112	-0,211	-0,283	0,580	0,516
4,8	0,346	-0,081	-0,101	-0,218	-0,274	0,549	0,491
5,2	0,338	-0,081	-0,092	-0,225	-0,267	0,524	0,472
5,6	0,331	-0,080	-0,085	-0,231	-0,262	0,503	0,456
6,0	0,326	-0,079	-0,079	-0,236	-0,259	0,484	0,442
6,4	0,322	-0,078	-0,074	-0,240	-0,256	0,467	0,431
6,8	0,320	-0,074	-0,070	-0,243	-0,254	0,451	0,422
7,2	0,317	-0,070	-0,066	-0,245	-0,253	0,438	0,413
7,6	0,316	-0,067	-0,063	-0,246	-0,252	0,426	0,406
8,1	0,315	-0,063	-0,060	-0,247	-0,251	0,413	0,399
8,6	0,314	-0,059	-0,057	-0,248	-0,251	0,402	0,392
9,1	0,313	-0,056	-0,054	-0,249	-0,250	0,393	0,386
9,6	0,313	-0,053	-0,051	-0,249	-0,250	0,386	0,381
10,1	0,313	-0,050	-0,049	-0,249	-0,250	0,380	0,377
10,6	0,312	-0,048	-0,047	-0,250	-0,250	0,375	0,373
11,1	0,312	-0,045	-0,045	-0,250	-0,250	0,371	0,369
11,6	0,312	-0,043	-0,043	-0,250	-0,250	0,368	0,366
12,2	0,312	-0,041	-0,041	-0,250	-0,250	0,364	0,363
13,4	0,312	-0,037	-0,037	-0,250	-0,250	0,368	0,368
15,5	0,312	-0,032	-0,032	-0,250	-0,250	0,362	0,362
20,0	0,312	-0,025	-0,025	-0,250	-0,250	0,344	0,344



Таблица 2 /продолжение/

R	$Y_{(57)99}^{00}$	$Y_{(55)99}^{00}$	$Y_{(55)99}^{00}$	$Y_{(56)99}^{00}$	$Y_{(56)99}^{00}$
0,1	-2245,5	1,1428	80000,0	259,5	40,180
0,2	-284,1	0,878	5000,0	61,16	10,182
0,3	-85,64	0,685	987,7	25,31	4,628
0,4	-38,86	0,545	312,5	13,21	2,686
0,5	-19,28	0,442	128,0	7,847	1,788
0,6	-11,40	0,365	61,76	5,070	1,300
0,7	-7,329	0,306	33,36	3,477	1,006
0,8	-5,004	0,260	19,570	2,494	0,814
0,9	-3,573	0,223	12,235	1,852	0,680
1,0	-2,641	0,194	8,045	1,415	0,582
1,1	-2,006	0,171	5,511	1,107	0,507
1,2	-1,558	0,151	3,907	0,883	0,447
1,3	-1,233	0,135	2,851	0,717	0,398
1,5	-0,808	0,110	1,832	0,492	0,321
1,7	-0,556	0,091	1,009	0,354	0,263
1,8	-0,468	0,838	0,812	0,304	0,239
2,0	-0,341	0,072	0,548	0,231	0,199
2,2	-0,256	0,052	0,387	0,180	0,167
2,4	-0,198	0,055	0,284	0,143	0,141
2,6	-0,156	0,049	0,215	0,117	0,120
2,8	-0,126	0,442	0,167	0,097	0,103
3,0	-0,103	0,040	0,133	0,081	0,089
3,2	-0,086	0,037	0,108	0,070	0,078
3,4	-0,073	0,034	0,090	0,060	0,068
3,7	-0,058	0,030	0,069	0,049	0,056
4,0	-0,048	0,027	0,055	0,041	0,047
4,3	-0,040	0,025	0,045	0,035	0,040
4,6	-0,034	0,023	0,038	0,031	0,035
4,9	-0,029	0,021	0,032	0,027	0,030
5,2	-0,026	0,019	0,027	0,024	0,027
5,5	-0,022	0,018	0,024	0,021	0,023
5,8	-0,019	0,017	0,021	0,019	0,021
6,1	-0,018	0,015	0,019	0,017	0,019
6,7	-0,015	0,013	0,015	0,014	0,015
7,4	-0,012	0,011	0,012	0,012	0,012
8,2	-0,010	0,009	0,010	0,010	0,010
9,0	-0,008	0,008	0,008	0,008	0,008
10,0	-0,008	0,007	0,007	0,007	0,007
11,0	-0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
12,0	-0,004	0,004	0,004	0,004	0,004
14,6	-0,003	0,003	0,003	0,003	0,003
17,6	-0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
20,0	-0,002	0,002	0,002	0,002	0,002

◇

Таблица 2 /продолжение/

R	Y_{1970}^{00}	Y_{1971}^{01}	Y_{1972}^{00}	Y_{1973}^{01}	Y_{1974}^{02}	Y_{1975}^{10}	Y_{1976}^{11}	Y_{1977}^{12}
0,1	33,859	1,870	0,751	-0,031	-0,002	111,309	-11,276	-0,561
0,2	17,435	1,654	-0,085	0,148	0,009	27,497	-5,775	-0,566
0,3	12,148	1,636	-0,267	0,304	0,030	11,997	-3,981	-0,574
0,4	9,603	1,615	-0,330	0,435	0,058	6,610	-3,099	-0,582
0,5	8,133	1,590	-0,376	0,543	0,089	4,158	-2,571	-0,589
0,6	7,171	1,559	-0,433	0,628	0,122	2,867	-2,211	-0,596
0,7	6,483	1,522	-0,506	0,691	0,157	2,121	-1,939	-0,600
0,8	5,956	1,478	-0,590	0,732	0,192	1,659	-1,719	-0,603
0,9	5,530	1,426	-0,680	0,751	0,226	1,353	-1,532	-0,602
1,0	5,173	1,366	-0,764	0,750	0,258	1,133	-1,368	-0,599
1,1	4,867	1,301	-0,835	0,733	0,289	0,965	-1,223	-0,592
1,2	4,602	1,231	-0,890	0,704	0,317	0,827	-1,095	-0,583
1,3	4,372	1,158	-0,925	0,666	0,342	0,711	-0,984	-0,571
1,5	3,993	1,010	-0,949	0,580	0,383	0,525	-0,805	-0,543
1,7	3,701	0,868	-0,929	0,495	0,414	0,390	-0,675	-0,510
1,8	3,580	0,801	-0,911	0,456	0,428	0,337	-0,624	-0,492
2,0	3,375	0,680	-0,869	0,389	0,445	0,255	-0,545	-0,457
2,2	3,210	0,574	-0,828	0,335	0,459	0,197	-0,488	-0,422
2,4	3,073	0,483	-0,787	0,292	0,468	0,156	-0,445	-0,389
2,6	2,960	0,406	-0,754	0,259	0,475	0,126	-0,413	-0,357
2,8	2,866	0,342	-0,726	0,233	0,480	0,103	-0,389	-0,328
3,0	2,788	0,287	-0,703	0,212	0,484	0,086	-0,370	-0,300
3,2	2,722	0,241	-0,683	0,196	0,487	0,072	-0,356	-0,274
3,4	2,668	0,203	-0,668	0,183	0,489	0,062	-0,345	-0,250
3,6	2,624	0,170	-0,655	0,172	0,492	0,053	-0,336	-0,228
3,8	2,587	0,143	-0,645	0,165	0,494	0,045	-0,329	-0,207
4,0	2,558	0,120	-0,637	0,157	0,495	0,039	-0,324	-0,188
4,2	2,535	0,100	-0,631	0,151	0,497	0,034	-0,320	-0,170
4,4	2,517	0,083	-0,626	0,146	0,498	0,029	-0,318	-0,154
4,6	2,503	0,070	-0,622	0,142	0,500	0,025	-0,316	-0,138
4,8	2,493	0,058	-0,620	0,139	0,501	0,022	-0,315	-0,124
5,0	2,486	0,048	-0,618	0,136	0,502	0,019	-0,315	-0,111
5,3	2,479	0,036	-0,616	0,133	0,503	0,015	-0,315	-0,094
5,6	2,476	0,028	-0,615	0,130	0,503	0,012	-0,316	-0,079
5,9	2,475	0,019	-0,616	0,128	0,504	0,010	-0,318	-0,065
6,1	2,476	0,015	-0,616	0,126	0,504	0,008	-0,319	-0,058
6,3	2,476	0,012	-0,616	0,125	0,504	0,007	-0,320	-0,051
6,6	2,478	0,009	-0,617	0,123	0,504	0,006	-0,322	-0,042
6,9	2,481	0,006	-0,618	0,121	0,503	0,004	-0,324	-0,034
7,2	2,483	0,004	-0,619	0,119	0,503	0,003	-0,325	-0,028
7,6	2,486	0,002	-0,620	0,116	0,502	0,002	-0,327	-0,021
8,0	2,488	0,001	-0,621	0,113	0,502	0,002	-0,329	-0,016
8,4	2,490	0,001	-0,621	0,110	0,501	0,001	-0,330	-0,012
8,8	2,492	0,0	-0,622	0,107	0,501	0,001	-0,331	-0,009
9,2	2,494	0,0	-0,623	0,104	0,501	0,0	-0,332	-0,006
9,6	2,495	0,0	-0,623	0,100	0,500	0,0	-0,333	-0,005
10,4	2,496	0,0	-0,624	0,094	0,500	0,0	-0,334	-0,002
11,2	2,497	0,0	-0,624	0,088	0,500	0,0	-0,334	-0,001
12,0	2,498	0,0	-0,624	0,083	0,500	0,0	-0,334	-0,001
12,9	2,498	0,0	-0,625	0,077	0,500	0,0	-0,334	-0,001
14,4	2,499	0,0	-0,625	0,070	0,500	0,0	-0,334	0,0
15,9	2,499	0,0	-0,625	0,063	0,500	0,0	-0,334	0,0
18,0	2,500	0,0	-0,625	0,056	0,500	0,0	-0,334	0,0
20,0	2,500	0,0	-0,625	0,050	0,500	0,0	-0,333	0,0



ЛИТЕРАТУРА

1. *Proceedings of the Third Internat. Conf. on Emerging Nucl. Energy Systems*, June 7-9, 1983, Helsinki. *Atomkernenergie*, **43**, 6, 1983 ; Bracci L., G.Fiorentini. *Phys. Rep.*, **86**(1982)171.
2. Dirac P.A.M. *Rev.Mod.Phys.*, **21**(1949)392; Foldy L.L., R.A.Krajcik. *Phys. Rev.*, **D12**(1975)1700.
3. Вилицкий С.И., Л.И.Пономарев. *ЭЧАЯ*, т.13, №6, 1982, стр.1336.
4. Вакалов Д.Д. Сообщение ОИЯИ 11-83-875, Дубна, 1983.
5. Melezhik V.S., L.I.Ponomarev. *Phys.Lett.* **77B**(1978)217.
6. Bakalov D. et al. *Nucl.Phys.* **A384**(1982)302.
7. Варшавович Д.А. и др. *Квантовая теория углового момента*. Л.: Наука, 1975.
8. Комаров И.В. и др. *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции*. М., Наука, 1976.
9. Bakalov D. et al. *Phys.Lett.* **161B**(1985)5.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1987 года.

Бакалов Д.Д., Мележик В.С.

P4-87-493

Эффективные потенциалы релятивистской задачи
трех тел с электромагнитным взаимодействием
в адиабатическом представлении

Получено представление релятивистского гамильтониана системы трех спиновых частиц с электромагнитным взаимодействием в виде суммы членов с факторизованной зависимостью от спиновых, угловых и сфероиальных переменных; с помощью этого представления получены выражения для адиабатических матричных элементов гамильтониана через небольшое число "базисных" матричных элементов. Приведены таблицы численных значений этих матричных элементов, позволяющие оценить с точностью порядка $O(1/2M)$ (где $1/2M = (M_1^{-1} + M_2^{-1})/2(M_1^{-1} + M_3^{-1})$ - параметр малости в адиабатическом разложении) главные релятивистские эффекты в любой системе с единичными зарядами частиц.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Перевод О.С.Виноградовой

Bakalov D.D., Melezhik V.S.

P4-87-493

Effective Potentials of Relativistic
Problem of 3-Spin Particles with
Electromagnetic Interaction in Adiabatic
Representation

The relativistic Hamiltonian for 3-spin particles with electromagnetic interaction has been represented in the form of a sum of terms with factorized dependence on spin, angular and spheroidal variables, and its matrix elements have been expressed in terms of the matrix elements of a small number of "basic" operators. The numerical values of the latter have been tabulated, thus allowing for the evaluation of the leading relativistic effects in any 3-body system (with unit particle charge) with an accuracy of $\sim O(1/2M)$, where $1/2M = (M_1^{-1} + M_2^{-1})/2(M_1^{-1} + M_3^{-1})$ is the small parameter of the adiabatic expansion (M_i , $i = 1, 2, 3$ being particle masses).

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987

24 коп.

Редактор Т. Я. Жабицкая. Макет Р. Д. Фоминой.

Подписано в печать 17.07.87.

Формат 60x90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 1,63.

Тираж 425. Заказ 39384.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Дубна Московской области.