

FR 8903313

COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE
CENTRE D'ETUDES DE LIMEIL-VALENTON
Département de MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES
Service Mathématiques et Codes Numériques
BP N° 27
94190 VILLENEUVE St GEORGES

002899
CEA-N-2599

DECOMPOSITION DE DOMAINE ET METHODE DE JACOBI PAR BLOCS ASSOCIEE
POUR L'EQUATION DE DIFFUSION

F. COULOMB

MARS 1989

COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE

- 2 -

CENTRE D'ÉTUDES DE LIMEIL-VALENTON

Département de MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Service Mathématiques et Codes Numériques

BP N° 27

94190 VILLENEUVE St GEORGES

CEA-N 2599 .

DECOMPOSITION DE DOMAINE ET METHODE DE JACOBI PAR BLOCS ASSOCIEE
POUR L'EQUATION DE DIFFUSION

F. COULOMB

MARS 1989

RESUME

Le but de ce travail est d'étudier des méthodes de résolution de l'équation de diffusion des neutrons ; on s'intéresse aux méthodes basées sur une discrétisation classique de type éléments finis et bien adaptées à une utilisation sur calculateurs parallèles. Cette étude traite de la convergence de la méthode de Jacobi par blocs associée à une décomposition d'un domaine. Une étude théorique est menée dans le cas des éléments finis de Lagrange et quelques exemples sont donnés ; dans le cas des éléments finis mixtes duaux, l'étude est basée sur des exemples.

ABSTRACT

The aim of this work is to study methods for solving the neutron diffusion equation ; we are interested in methods based on a classical finite element discretization and well suited for use on parallel computers. Domain decomposition methods seem to answer this preoccupation. This study deals with a decomposition of the domain. A theoretical study is carried out for lagrange finite elements and some examples are given ; in the case of mixed dual finite elements, the study is based on examples.

INTRODUCTION

L'équation de diffusion multigroupe des neutrons est le plus souvent résolue par la méthode itérative des puissances combinée à une méthode de type éléments finis (éléments de Lagrange, éléments mixtes). Pour les études numériques, on projette d'utiliser un ordinateur multiprocesseurs ; c'est pourquoi, on s'est penché sur l'étude de méthodes de résolution de l'équation de diffusion basées sur une approximation classique de type éléments finis et adaptées à une utilisation sur ordinateurs multiprocesseurs. Les méthodes de décomposition de domaines paraissent bien répondre à ce souci, chaque sous-domaine étant affecté à un processeur. La méthode de JACOBI par blocs étant parallélisable, on a étudié la résolution des systèmes linéaires par cette méthode.

Dans une première partie, je rappellerai brièvement l'équation, et ses formulations classique et mixte-duale ainsi que leurs approximations par éléments finis. Les parties II et III sont consacrées à l'étude de la convergence de la méthode de JACOBI par blocs associée à une décomposition du domaine, dans le cadre des éléments mixtes duaux et dans le cadre des éléments classiques de LAGRANGE. Dans le cas mixte, l'étude est menée principalement sur des exemples. Dans le cas LAGRANGE, une étude théorique est menée et des exemples sont donnés.

I - L'ÉQUATION DE DIFFUSION ET SES FORMULATIONS VARIATIONNELLES

L'équation de transport décrit l'évolution d'une population de neutrons dans un milieu. Diverses hypothèses et approximations conduisent à l'équation de diffusion multigroupe, que l'on considère sous sa forme de problème aux valeurs propres stationnaire [1,2] :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \operatorname{div} (D_g(x) \vec{\nabla} \phi_g(x)) + \sum_g^t(x) \phi_g(x) - \sum_{g'=1}^G \sum_{g' \rightarrow g}^t(x) \phi_{g'}(x) \\ = \frac{\chi_g}{\lambda} \sum_{g'=1}^G v_{g'}(x) \sum_{g'}^f(x) \phi_{g'}(x) \\ g = 1, \dots, G \end{array} \right.$$

- avec :
- ϕ_g = flux de neutrons dans le groupe g
 - D_g = coefficient de diffusion dans le groupe g
 - \sum_g^t = section efficace totale d'absorption dans le groupe g
 - \sum_g^f = section efficace macroscopique de fission pour le groupe g
 - $\sum_{g' \rightarrow g}^t$ = section efficace macroscopique de transfert du groupe g' vers le groupe g
 - χ_g = spectre de fission prompt pour le groupe g
 - v_g = nombre moyen de neutrons émis par fission

λ = coefficient de multiplication effectif du réacteur

G = nombre total de groupes d'énergie

et des conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann.

L'équation multigroupe (1) est généralement résolue par la méthode itérative des puissances ; chaque itération de cette méthode conduit à résoudre des problèmes de la forme :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \operatorname{div} (D \vec{\nabla} u) + \sum u = S \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ D \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right.$$

où Ω est un domaine borné de R^n ($n \leq 3$), Γ_0 et Γ_1 forment une partition de $\partial\Omega$ telle que $\operatorname{mes}(\Gamma_0) > 0$. C'est sur cette dernière équation que porte la présente étude ; dans ce qui suit, le terme "équation de diffusion" désigne l'équation (2)-

La propriété suivante est vérifiée :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < v \leq D(x) \leq D_\infty < +\infty \\ 0 \leq \sum(x) \leq \sum_\infty < +\infty \end{array} \right. \quad \text{dans } \Omega ;$$

Elle assure l'existence et l'unicité de la solution pour les problèmes variationnels décrits ci-après.

L'équation de diffusion peut s'écrire sous différentes formes variationnelles, dont les plus utilisées sont [3,4] :

- la formulation classique (ou primale) :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in H_{0,\Gamma_0}^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} D \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + \sum uv = \int_{\Omega} S v \end{array} \right. \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_0}^1(\Omega)$$

- la formulation mixte-duale :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\vec{p}, u) \in H_{0,\Gamma_1}(\text{div}, \Omega) \times L^2(\Omega) \\ \int_{\Omega} \frac{1}{D} \vec{p} \cdot \vec{q} + \text{div } \vec{q} u = 0 \\ \int_{\Omega} -\text{div } \vec{p} v + \sum uv = \int_{\Omega} S v \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \forall \vec{q} \in H_{0,\Gamma_1}(\text{div}, \Omega) \\ \forall v \in L^2(\Omega) \end{array}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{0,\Gamma_0}^1(\Omega) = \{ v \in H^1(\Omega) / "v=0" \text{ sur } \Gamma_0 \} \\ H_{0,\Gamma_1}(\text{div}, \Omega) = \{ \vec{q} \in L^2(\Omega)^n / \text{div } \vec{q} \in L^2(\Omega) \text{ et } "\vec{q} \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1" \} \end{array} \right.$$

Dans la formulation mixte, il intervient, en plus du flux u , une deuxième inconnue \vec{p} , qui est égale à $D \vec{\nabla} u$; elle est appelée inconnue courant.

On effectue ensuite des approximations de type éléments finis ; on utilise principalement :

- les éléments de LAGRANGE, dans le cas primal :

$$P_K = P_{k,k} \quad \text{pour tout élément rectangulaire de la triangulation.}$$

- les éléments de RAVIART et THOMAS, dans le cas mixte dual :

$$\begin{cases} P_K = P_{k,k} \\ Q_K = P_{k+1,k} \times P_{k,k+1} \end{cases} \quad \text{pour tout élément rectangulaire de la triangulation}$$

Dans ce qui suit, toute triangulation T_h du domaine considérée sera constituée de rectangles ou parallélépipèdes rectangles.

II - ETUDE DE LA CONVERGENCE DE LA METHODE DE JACOBI PAR BLOCS ASSOCIEE A UNE DECOMPOSITION DU DOMAINE, DANS LE CADRE DE LA METHODE DES ELEMENTS MIXTES DUAUX DE RAVIART ET THOMAS

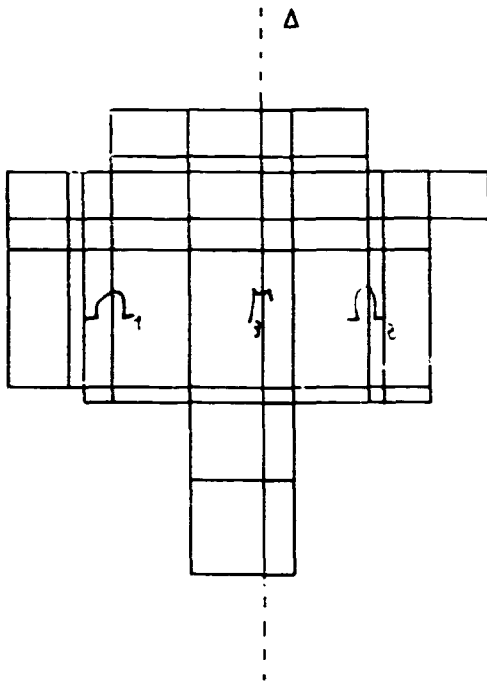
Dans ce paragraphe, une étude de la convergence de la méthode de JACOBI par blocs associée à une décomposition du domaine est entreprise, en ce qui concerne le cas d'une méthode d'éléments finis mixtes duaux de RAVIART et THOMAS. Afin de simplifier les notations, on se place en géométrie à deux dimensions.

Une triangulation du domaine et un élément de RAVIART et THOMAS sont supposés fixés.

1) DÉFINITION DE LA MÉTHODE DE JACOBI PAR BLOCS [5]

La matrice du système linéaire n'étant pas définie positive, le premier problème qui se pose concerne la possibilité de définir la méthode de JACOBI par blocs.

Supposons qu'un axe Δ , par exemple l'axe des y , coupe le domaine Ω le long de cotés de rectangles de la triangulation ; on décompose Ω en deux sous-domaines le long de Δ ; on a la possibilité de considérer l'interface Γ_3 comme un troisième sous-domaine (décomposition de dissection) ou de l'intégrer à l'un des deux sous-domaines (décomposition avec interface intégrée) (cf. Fig.1).



* décomposition de dissection :

domaine 1 : noeuds de Ω_1

domaine 2 : noeuds de Ω_2

domaine 3 : noeuds de Γ_3

* décomposition avec interface intégrée :

domaine 1 : noeuds de Ω_1 et noeuds de Γ_3

domaine 2 : noeuds de Ω_2

FIGURE 1

La matrice du système linéaire s'écrit : $A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ {}^t A_{13} & {}^t A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

A_{33} est symétrique définie positive, puisque les noeuds se trouvant sur l'interface sont des noeuds de courant. Pour $i = 1$ ou 2 , A_{ii} est la matrice du problème lié à la région Ω_i :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \operatorname{div} (D \vec{\nabla} u) + \sum u = S \quad \text{dans } \Omega_i \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ D \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right.$$

et est donc inversible si :

$$\left(\begin{array}{l} \exists \sum_0 > 0 \quad \text{telle que : } \sum(x) \geq \sum_0 > 0 \text{ dans } \Omega \\ \text{ou} \\ \text{mes}(\Gamma_0 \cap \partial\Omega_i) > 0 \end{array} \right)$$

la seconde condition étant satisfaite dans le cas où Ω et les conditions aux limites (c'est-à-dire Γ_0 et Γ_1) sont symétriques par rapport à Δ . La méthode de JACOBI par blocs associée à la décomposition de dissection peut donc être définie sous l'une des deux hypothèses précitées.

Examinons alors si la matrice $\bar{A}_{ii} = \begin{pmatrix} A_{ii} & A_{i3} \\ {}^t A_{i3} & A_{33} \end{pmatrix}$ pour $i = 1$ ou 2 , est inversible. Désignons par $A_{33}^{(i)}$ la "contribution" de Ω_i à la matrice A_{33} .*

$$\bar{A}_{ii} = \begin{pmatrix} A_{ii} & A_{i3} \\ {}^t A_{i3} & A_{33}^{(i)} \end{pmatrix} \quad \text{est alors la matrice du problème liée à } \Omega_i :$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\text{div}(D \vec{\nabla} u) + \sum u = s & \text{dans } \Omega_i \\ u = 0 & \text{sur } (\Gamma_0 \cap \partial\Omega_i) \cup \Gamma_3 \\ D \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \cap \partial\Omega_i \end{array} \right.$$

et est donc inversible puisque $\text{mes}((\Gamma_0 \cap \partial\Omega_i) \cup \Gamma_3) \geq \text{mes}(\Gamma_3) > 0$.

* Si $(A_{33})_{k,l} = \int_{\Omega} \frac{1}{D} \vec{P}_k \cdot \vec{P}_l$ alors : $(A_{33}^{(i)})_{k,l} = \int_{\Omega_i} \frac{1}{D} \vec{P}_k \cdot \vec{P}_l$

On a le résultat général suivant :

Proposition : Etant donné $M = \begin{pmatrix} A & B & D \\ t_B & C & E \\ t_D & t_E & F \end{pmatrix}$ une matrice symétrique et inversible. Si $\begin{pmatrix} A & B \\ t_B & C \end{pmatrix}$ est symétrique définie positive, F symétrique négative et $\begin{pmatrix} C & E \\ t_E & F \end{pmatrix}$ inversible, alors $A - (B D) \begin{pmatrix} C & E \\ t_E & F \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t_B \\ t_D \end{pmatrix}$ est symétrique définie positive.

En appliquant cette proposition avec $M = \begin{pmatrix} A_{33}^{(i)} & t_{A_{i3}} \\ A_{i3} & A_{ii} \end{pmatrix}$,

$A = A_{33}^{(ii)}$, $\begin{pmatrix} C & E \\ t_E & F \end{pmatrix} = A_{ii}$ (ayant numéroté les noeuds de flux en dernier) et $(B D) = t_{A_{i3}}$, on conclut que $A_{33}^{(i)} - t_{A_{i3}} A_{ii}^{-1} A_{i3}$ est symétrique définie positive. Or, $A_{33}^{(1)}$ et $A_{33}^{(2)}$ sont symétriques définies positives, ce qui implique que les deux matrices :

$$\begin{cases} A_{33} - t_{A_{13}} A_{11}^{-1} A_{13} = (A_{33}^{(1)} - t_{A_{13}} A_{11}^{-1} A_{13}) + A_{33}^{(2)} \\ A_{33} - t_{A_{23}} A_{22}^{-1} A_{23} = (A_{33}^{(2)} - t_{A_{23}} A_{22}^{-1} A_{23}) + A_{33}^{(1)} \end{cases}$$

sont symétriques définies positives et en particulier inversibles. Par conséquent \bar{A}_{11} et \bar{A}_{22} sont inversibles, et par suite la méthode de JACOBI par blocs associée à la décomposition avec interface intégrée peut être définie.

On a des résultats analogues aux précédents pour une décomposition en quatre parties le long de deux axes perpendiculaires.

Ceci se généralise à la dimension 3 pour des décompositions le long de plans de symétrie.

2) TESTS NUMÉRIQUES

Des tests numériques ont été effectués. Les premiers, menés en dimension 3, sont relatifs à la décomposition de dissection associée à la décomposition d'un cube en huit parties égales, l'élément fini étant l'élément mixte de RAVIART et THOMAS d'ordre 1 [5].

Pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{des nombres de points en } x, y \text{ et } z \text{ égaux à } 3, \\ \Sigma = 1, S = 10^{-3}, h \text{ (pas du maillage)} = 1, \\ X^0 = \text{vecteur initial des itérations de JACOBI, tel que } X^0(i)=1 \quad i, \end{array} \right.$$

les résultats sont indiqués dans le tableau 2.

Ces tests, bien que ne permettant pas de conclure, à eux seuls, laissent à penser que pour $\frac{D}{\sum h^2}$ supérieur à une constante, la méthode de JACOBI par blocs diverge.

D	nb. d'itérations	précision
100	50	151,89
	100	257 912 288
30	100	539,23
20	100	0,74
	200	5815,59
	300	45 591 728
15	19	convergence
10	15	convergence
1	21	convergence

$$\bullet \text{ précision} = pr(n) = \frac{\| X^n - X \|}{\| X \|}$$

où X est la solution exacte du système.

- dans les trois derniers cas, le nombre d'itérations indiqué est celui nécessaire à la convergence

Tableau 2

D'autres tests, relatifs à deux exemples de réacteurs, ont également suggéré que l'algorithme de dissection pouvait diverger, et que les décompositions avec interface intégrée étaient plus stables [5,6].

Une étude analytique est menée sur des exemples.

3) EXEMPLES

3.a Premier exemple

Le cadre de cet exemple est le suivant :

- Ω est un carré : $\Omega =]A,B[\times]C,D[$, et $D - C = B - A = 2h$

- la condition aux bords est : $u = 0$ sur $\partial\Omega$

- la triangulation de Ω est définie par : $\bar{\Omega} = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$

ou $K_1 = [A,M] \times [C,N]$, $K_2 = [M,B] \times [C,N]$

$K_3 = [A,M] \times [N,D]$, $K_4 = [M,B] \times [N,D]$

et $M = \frac{A+B}{2}$, $N = \frac{C+D}{2}$

- D et \sum sont constantes sur Ω

- l'élément fini est l'élément de RAVIART et THOMAS d'ordre 1.

Le domaine est décomposé en quatre régions par les coupes : $X = M$ et $Y = N$, l'interface étant considérée comme un cinquième sous-domaine. Les noeuds et la décomposition sont représentés sur la figure 3.

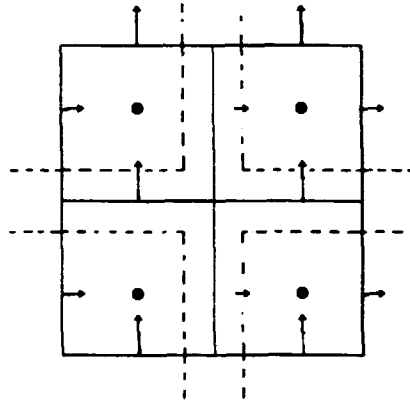


FIGURE 3

Par un calcul de la matrice d'itération et l'étude de ses valeurs propres, on montre que [5] :

La méthode de JACOBI par blocs converge si et seulement si $D < \frac{5}{24} \sum h^2$

3.b) Deuxième exemple

Le cadre de cet exemple est le suivant :

- Ω est un rectangle : $\Omega =]A,B[\times]C,D[$, et $B-A = 2(D-C) = 2h$.

- la condition aux bords est :

$$\begin{cases} u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ D \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

avec : $\Gamma_0 = \{A\} \times]C,D[$ et $\Gamma_1 = (\{A,B\} \times \{C\}) \cup (\{B\} \times]C,D]) \cup (\{A,B\} \times \{D\})$

- la triangulation de Ω est définie par $\bar{\Omega} = K_1 \cup K_2$,

où : $K_1 = [A,M] \times [C,D]$, $K_2 = [M,B] \times [C,D]$ et $M = \frac{A+B}{2}$

- D et \sum sont constantes sur Ω .

- l'élément fini est l'élément de RAVIART et THOMAS d'ordre 1.

Ω est décomposé en deux parties par la coupe : $X=M$, et on envisage trois décompositions suivant que l'interface est ou n'est pas intégrée à l'un des deux sous-domaines ; ces décompositions sont représentées sur la figure 4.

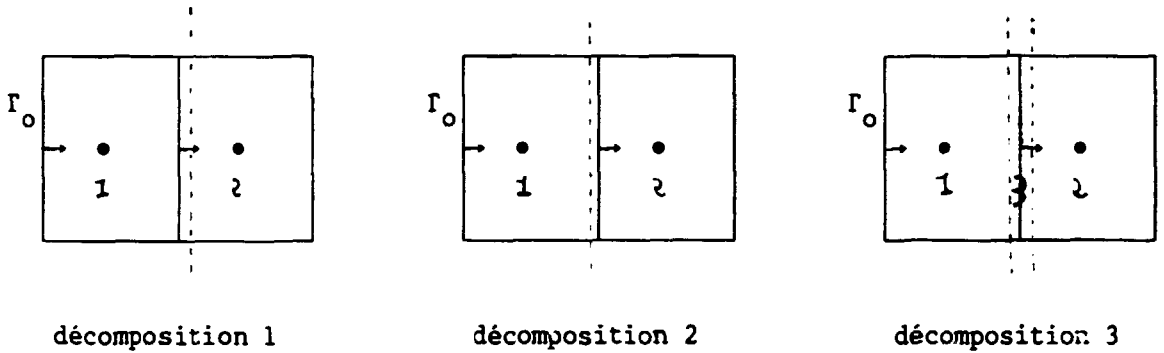


Figure 4

En calculant les trois matrices d'itérations, puis leurs valeurs propres, on obtient une condition de convergence nécessaire et suffisante pour chacune des trois décompositions [5] ; ces résultats figurent dans le tableau 5. On remarque que la méthode de JACOBI par blocs associée à la décomposition de dissection est celle qui converge le moins souvent.

	Décomposition 1 (interface intégrée au domaine 1)	Décomposition 2 (interface intégrée au domaine 2)	Décomposition 3 (décomposition de dissection)
Condition de convergence	$\frac{D}{\sum h^2} < \frac{7}{6}$	$\frac{D}{\sum h^2}$ quelconque	$\frac{D}{\sum h^2} < \frac{\sqrt{10}-1}{6}$

$$\frac{7}{6} \approx 1,167$$

$$\frac{\sqrt{10}-1}{6} \approx 0,360$$

Tableau 5

4) CONCLUSION

Sur les exemples étudiés, il a été établi que le critère de convergence de la méthode de JACOBI par blocs est de la forme : $\frac{D}{\sum h^2} < C$, où C est une constante appartenant à $]0, +\infty]$, qui dépend d'une part de la géométrie du problème, d'autre part de la décomposition envisagée.

III - ETUDE DE LA CONVERGENCE DE LA METHODE DE JACOBI PAR BLOCS ASSOCIEE A UNE DECOMPOSITION DU DOMAINE, DANS LE CADRE DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS DE LAGRANGE [5]

Ce paragraphe est consacré à une étude de la convergence de la méthode de JACOBI par blocs associée à une décomposition du domaine, dans le cadre d'une méthode d'éléments finis de LAGRANGE.

Une triangulation du domaine et un élément de LAGRANGE sont supposés fixés, de même qu'une décomposition. La matrice du système linéaire est notée A.

Notation : Pour une matrice carrée quelconque M, munie d'une structure par blocs, on note $\text{Diag}(M)$ la matrice constituée des blocs diagonaux de M et $M' = 2 \text{Diag}(M) - M$.

La matrice A est symétrique définie positive, aussi utilisera-t-on le critère consistant à examiner si A' est définie positive.

1) EXEMPLES GÉNÉRAUX

Le résultat de base est le suivant :

proposition : Etant donné M une matrice symétrique définie positive.

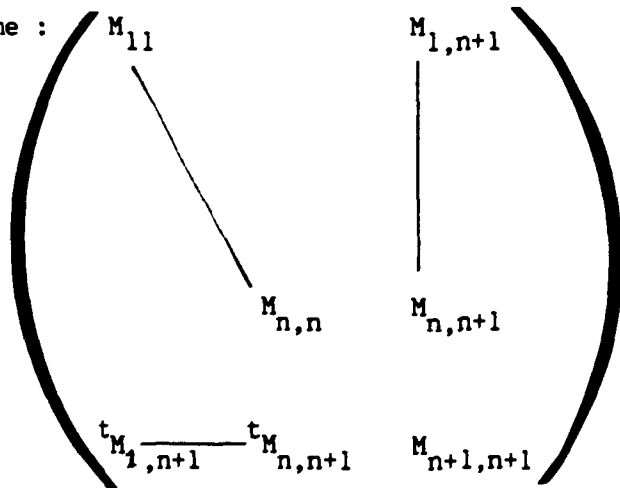
Si M est munie d'une structure à deux blocs

ou

Si M est tridiagonale par blocs

ou

Si M est de la forme :



alors M' est symétrique définie positive.

On en déduit que : pour une décomposition en deux parties

pour une décomposition en lignes (2D) ou en plan (3D)

pour une décomposition de type dissection

A' est symétrique définie positive, et par suite la méthode de JACOBI par blocs converge.

2) ETUDE THÉORIQUE GÉNÉRALE

2.a) Notation

A_K : contribution de K à la matrice A

\hat{A}_K : matrice carrée extraite de A_K correspondant aux noeuds de K ; elle est d'ordre N^2 , où N^2 est le nombre d'inconnues par rectangle.

A'_K : contribution de K à A' ; on a : $A'_K = 2 \text{Diag}(A_K) - A_K$.

\hat{A}'_K : matrice carrée extraite de A'_K correspondant aux noeuds de K ;
on a $A'_K = 2 \text{Diag}(\hat{A}_K) - \hat{A}_K$

$T_i = \{K \in T_h / K \text{ est réparti sur } i \text{ sous-domaines}\}$, la répartition s'entend en tant que répartition au point de vue des noeuds (T_h désignant la triangulation).

A_i : contribution des éléments K de T_i à la matrice A

A'_i : contribution des éléments K de T_i à A' ; on a $A'_i = 2\text{Diag}(A_i) - A_i$

\hat{A}'_i : matrice carrée extraite de A'_i correspondant aux noeuds des éléments K de T_i ; on a : $\hat{A}'_i = 2 \text{Diag}(\hat{A}_i) - \hat{A}_i$.

On a les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} A' = \sum_i A'_i \\ \forall i, A'_i = \sum_{K \in T_i} A'_K \end{array} \right.$$

2.b) Résultat de convergence

Généralement, $T_1 \neq \emptyset$; si tel est le cas, $A'_1 = A_1$ est symétrique positive.

En pratique, on a aussi $T_2 = \emptyset$. En ce cas, pour tout élément K de T_2 , la structure par blocs de la matrice symétrique positive \hat{A}'_K est une structure à deux blocs, donc \hat{A}'_K est symétrique positive et par suite A'_K l'est aussi ; par conséquent, A'_2 est symétrique positive.

Supposons que pour tout $i \geq 3$ et tout K de T_i , \hat{A}'_K soit symétrique positive ; les matrices A'_K concernées sont alors symétriques positives, et par suite : pour $i \geq 3$, A'_i est symétrique positive. Il s'ensuit que A' est symétrique positive. Si l'une des matrices A'_i est définie positive, il en est de même de A' mais pour que A'_i soit inversible (*), il est nécessaire que tout noeud de la triangulation appartienne à un élément K de T_i , ce qui ne sera pas le cas en général.

(*) on rappelle que pour une matrice symétrique positive M , on a l'équivalence : M définie positive $\iff M$ inversible.

Le théorème de convergence est le suivant :

Théorème : Si pour tout élément K de $\bigcup_{i \geq 3} T_i$, la matrice \hat{A}'_K est symétrique définie positive, et si \hat{A}'_1 et \hat{A}'_2 sont inversibles, alors A' est symétrique définie positive et la méthode de JACOBI par blocs associée à la décomposition est convergente.

Remarque : Si $T_1 = \emptyset$ (resp. $T_2 = \emptyset$), l'hypothèse concernant \hat{A}'_1 (resp. \hat{A}'_2) est à ne pas formuler dans l'énoncé du théorème.

Si pour $i \geq 3$ $T_i = \emptyset$, l'hypothèse concernant les matrices \hat{A}'_K pour $K \in T_i$ est à ne pas formuler dans l'énoncé du théorème.

Démonstration du théorème

- On a déjà remarqué que la matrice A' était symétrique positive, moyennant des hypothèses plus faibles que celles du théorème.
- Pour tout vecteur X , les notations suivantes sont adoptées :
 - pour tout élément K de la triangulation, X_K est le vecteur constitué des composantes de X relatives aux noeuds de K .
 - pour tout i , X_i est le vecteur constitué des composantes de X relatives aux noeuds des éléments K de T_i .
- Soit X un vecteur quelconque tel que ${}^t X A' X = 0$

$${}^t X A' X = \sum_i {}^t X A'_i X = \sum_i \left(\sum_K {}^t X A'_K X \right).$$

$$\text{donc : } \begin{cases} \forall i & {}^t X A'_i X = 0 \\ \forall K & {}^t X A'_K X = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{les matrices } A'_i \text{ et } A'_K \text{ étant toutes} \\ \text{symétriques positives.} \end{array}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} \forall i & {}^t X A'_i X = {}^t X_i \hat{A}'_i X_i \\ \forall K & {}^t X A'_K X = {}^t X_K \hat{A}'_K X_K \end{cases}$$

$$\text{en conséquence : } \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ \forall i \geq 3 & \forall K \in T_i \quad X_K = 0 \end{cases}$$

ceci au vu des hypothèses du théorème. Donc $X = 0$

- A' est donc symétrique définie positive, et la méthode de JACOBI par blocs associée à la décomposition du domaine est convergente.

Remarque : L'hypothèse : \hat{A}'_2 est inversible peut être remplacée par l'hypothèse plus forte : pour tout K de T_2 , \hat{A}'_K est définie positive. Cependant, pour un élément K de T_2 :

\hat{A}'_K définie positive $\iff \hat{A}_K$ définie positive, et \hat{A}_K n'est pas définie positive si Σ est nulle dans K et si K est un élément intérieur.

En pratique, les ensembles T_i susceptibles d'être non vides sont T_1, T_2, T_4 (et éventuellement T_8 en dimension 3). Il convient donc d'étudier à quelles conditions \hat{A}'_K est définie positive pour un élément K de T_4 .

2.c) $K \in T_4$, conditions pour que \hat{A}'_K soit définie positive : cas particulier de l'élément de LAGRANGE linéaire

L'étude est menée dans le cadre de la dimension 2. On considère un rectangle K de la triangulation, appartenant à T_4 ; les longueurs des côtés de K sont notées : hx et hy . On suppose que les fonctions D et Σ sont constantes sur K .

La matrice élémentaire \hat{A}'_K s'écrit, à une permutation des noeuds près :

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

avec :

$$a = \frac{D}{3} \left(\frac{hy}{hx} + \frac{hx}{hy} \right) + \frac{\Sigma hx hy}{9}$$

$$b = \frac{D}{6} \left(-2 \frac{hy}{hx} + \frac{hx}{hy} \right) + \frac{\Sigma hx hy}{18}$$

$$c = \frac{D}{6} \left(\frac{hy}{hx} - 2 \frac{hx}{hy} \right) + \frac{\Sigma hx hy}{18}$$

$$d = -\frac{D}{6} \left(\frac{hy}{hx} + \frac{hx}{hy} \right) + \frac{\Sigma hx hy}{36}$$

$$\text{Donc : } A'_K = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ -b & a & -d & -c \\ -c & -d & a & -b \\ -d & -c & -b & a \end{pmatrix}$$

et ses valeurs propres sont :

$$\begin{pmatrix} a - b - c - d \\ a + b - c + d \\ a - b + c + d \\ a + b + c - d \end{pmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que \hat{A}'_K soit définie positive est que ses quatre valeurs propres soient strictement positives. Le calcul des quatre valeurs propres en fonction de D , Σ , hx , hy et l'étude de leur signe permet de montrer que \hat{A}'_K est définie positive si et seulement si on se situe dans l'un des cas suivants :

$$1) \quad \frac{1}{hx^2} - \frac{2}{hy^2} > 0 \quad \text{et} \quad m(hx, hy) \Sigma < D < M(hx, hy) \Sigma$$

$$2) \quad \frac{1}{hy^2} - \frac{2}{hx^2} > 0 \quad \text{et} \quad m(hy, hx) \Sigma < D < M(hy, hx) \Sigma$$

$$3) \quad \frac{1}{hx^2} - \frac{2}{hy^2} > 0, \quad \frac{1}{hy^2} - \frac{2}{hx^2} < 0 \quad \text{et} \quad m(hx, hy) \Sigma < D$$

$$4) \quad \left(\frac{1}{hx^2} = \frac{2}{hy^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{hy^2} = \frac{2}{hx^2} \right) \quad \text{et} \quad m(hx, hy) \Sigma < D \quad \text{et} \quad 0 < \Sigma$$

$$\text{avec : } m(hx, hy) = \frac{1}{24} \left(\frac{1}{hx^2} + \frac{2}{hy^2} \right)^{-1} \quad \text{et} \quad M(hx, hy) = \frac{5}{12} \left(\frac{1}{hx^2} - \frac{2}{hy^2} \right)^{-1}$$

On remarque que, avec $hx = hy$, en raffinant le maillage, on parviendra à satisfaire la condition ; mais si $\frac{hx}{hy}$ reste constant avec $\frac{hx}{hy} > \sqrt{2}$, lorsque hx et hy tendent vers 0, le terme $M(hy, hx) \Sigma$ tend vers 0 et par conséquent la condition n'est plus vérifiée, ceci ne signifiant pas que la matrice A' n'est pas définie positive.

3) EXEMPLES

3.a) Premier exemple

Le cadre de cet exemple est le suivant :

- Ω est un rectangle : $\Omega =]A,B[\times]C,D[$, avec $B-A = 2(D-C) = 2h$

- la condition aux bords est :
$$\left\{ \begin{array}{ll} u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ D \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right.$$

avec :
$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_0 = \{A\} \times [C,D] \\ \Gamma_1 = ([A,B] \times \{C\}) \cup (\{B\} \times [C,D]) \cup ([A,B] \times \{D\}) \end{array} \right.$$

- la triangulation est définie par : $\bar{\Omega} = K_1 \cup K_2$,

où : $K_1 = [A,M] \times [C,D]$, $K_2 = [M,B] \times [C,D]$ et $M = \frac{A+B}{2}$

- les fonctions D et \sum sont constantes sur Ω .

- l'élément fini est l'élément de LAGRANGE linéaire.

Le domaine Ω est décomposé en quatre régions suivant les coupes :

$X = \frac{M+B}{2}$ et $Y = \frac{C+D}{2}$. Les noeuds et la décomposition sont représentés sur la figure 6.

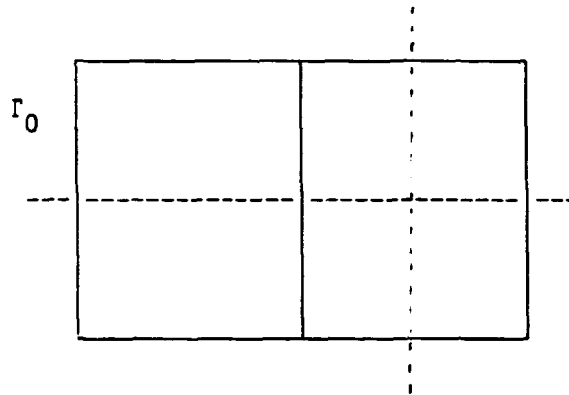


Figure 6

On a : $T_2 = \{K_1\}$, $T_4 = \{K_2\}$ et $T_i = \emptyset$ pour $i \notin \{2, 4\}$

D'après l'étude précédente, $A'_4 = \hat{A}'_{K_2}$ est définie positive si et seulement si $\sum h^2 < D$. L'étude théorique permet de conclure que si $\frac{\sum h^2}{48} < D$, alors A' est définie positive et la méthode de JACOBI par blocs converge.

D'autre part, une étude directe consistant à étudier le signe des valeurs propres de A' , montre que :

A' est définie positive $\iff r \sum h^2 < D$

où $r = \frac{-174 + \sqrt{31752}}{1476}$

On note que : $r \approx 0,003$ et $\frac{1}{48} \approx 0,021$

3.b) Deuxième exemple

Le cadre de cet exemple est le suivant :

- Ω est un rectangle : $\Omega =]A,B[\times]C,D[$, avec $B-A = 3(D-C) = 3h$

- la condition aux bords est : $\left\{ \begin{array}{ll} u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ D \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right.$

avec : $\Gamma_0 = (\{A\} \times]C,D]) \cup (\{B\} \times]C,D])$, $\Gamma_1 = (]A,B[\times \{C\}) \cup (]A,B[\times \{D\})$

- la triangulation est définie par : $\bar{\Omega} = K_1 \cup K_2 \cup K_3$,

où $K_1 = [A,M] \times [C,D]$, $K_2 = [M,N] \times [C,D]$, $K_3 = [N,B] \times [C,D]$

$$\text{et : } M = A + \frac{B-A}{3} , \quad N = A + 2 \frac{B-A}{3}$$

- les fonctions D et \sum sont constantes sur Ω

- l'élément fini est l'élément de LAGRANGE linéaire.

Le domaine est décomposé en quatre sous-domaines par les coupes : $X = \frac{A+B}{2}$
et $Y = \frac{C+D}{2}$. Les noeuds et la décomposition sont représentés sur la figure 7.

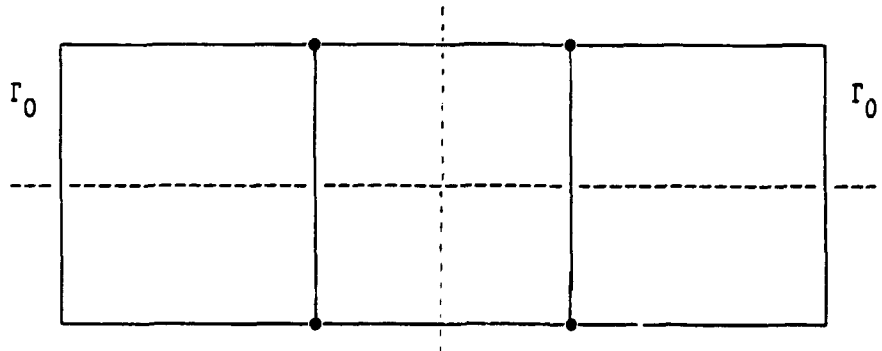


Figure 7

On a ici : $T_2 = \{K_1, K_3\}$, $T_4 = \{K_2\}$ et $T_i = \emptyset$ pour $i \notin \{2,4\}$

D'après l'étude conduite auparavant, $A'_4 = \hat{A}'_{K_2}$ est définie positive si et seulement si : $\frac{\sum h^2}{48} < D$. L'étude théorique permet de conclure que si $\frac{\sum h^2}{48} < D$, alors A' est définie positive et la méthode de JACOBI par blocs est convergente.

L'étude directe, consistant à calculer les quatre valeurs propres de A' montre qu'elles sont strictement positives et par conséquent que A' est définie positive. Il s'ensuit que la méthode de JACOBI par blocs est convergente.

4) CONCLUSION

Une étude directe conduit à une condition de convergence nécessaire et suffisante de la forme $D > C \sum h^2$, o C est une constante appartenant à $[0, +\infty[$, qui dépend d'une part de la géométrie du problème, d'autre part de l'élément fini et de la décomposition. L'étude théorique, bien que donnant des résultats moins précis, comme on a pu le vérifier sur les exemples, a l'avantage de pouvoir s'appliquer dans des cas pour lesquels une étude directe se révèle quasiment impossible et elle fournit une condition de convergence suffisante ne dépendant que de l'élément fini et de la décomposition.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J.J DUDERSTADT, L.J. HAMILTON
"Nuclear Reactor Analysis"
John Wiley & Sons, Inc., 1976

- [2] R. DAUTRAY, J.L. LIONS
"Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques"
Collection du Commissariat à l'Energie Atomique, Masson, 1984

- [3] P.G. CIARLET
"The Finite Element Method for Elliptic Problems"
North Holland, 1978

- [4] P.A. RAVIART, J.M. THOMAS
"A Mixed Finite Element Method for 2nd order Elliptic Problems"
Mathematical Aspects of Finite Element Methods, Lecture Notes in Mathematics 606, Springer Verlag, 1977

- [5] F. COULOMB
"Algorithmes Parallèles pour la résolution de l'équation de diffusion par les méthodes éléments finis et par les méthodes nodales"
Thèse de l'Université P. et M. CURIE, 1989

- [6] F. COULOMB
"Domain Décomposition and Mixed Finite Elements for the Neutron Diffusion Equation"
Proceedings of the Second International Symposium of Domain Decomposition Methods, Los Angeles 14 - 16 January 1988, (SIAM)