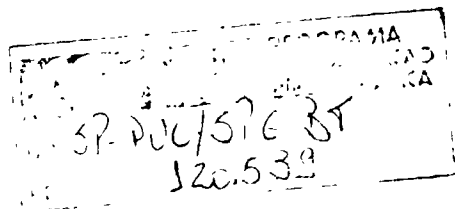


BR9023023
INIS-BR--1951

CÁLCULO DO RAIOS NUCLEAR A PARTIR DO DECAIMENTO ALFA



**Tese apresentada como exigência parcial
para a obtenção do título de**

Doutor em Física

por

Ronaldo Barreiro de Castro

Dedico à minha mãe, Emilia, à minha esposa Vera Lúcia, à minha irmã Maria Norma, pelo estímulo e perseverança e as minhas filhas Juliana, Moníca e Carolina.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Doutor Arnaldo Augusto Nora Antunes, meu orientador neste trabalho, por seu apoio, incentivo e dedicação no desenvolvimento e conclusão.

Ao Professor Doutor Marcello Damy de Souza Santos, coordenador do Grupo de Física Nuclear Experimental, pelas discussões elucidativas e sugestões no encaminhamento deste trabalho.

Ao Magnífico Reitor Roberto dos Santos Vieira da Universidade do Amazonas, pela cooperação recebida durante a realização deste trabalho.

A Fundação Universidade do Amazonas pelo apoio financeiro concedido durante o período do curso de doutoramento.

Ao Departamento de Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade do Amazonas pela ajuda dióatica.

A Direção do Centro de Ciências Matemáticas, Físicas e Tecnológicas da PUC-SP, pelas ótimas condições de trabalho.

A Comissão Nacional de Energia Nuclear pelo fornecimento dos artigos científicos.

As funcionárias Regina Ressurreição Danza e Silva e Balbina de Oliveira Melo da Biblioteca do Centro de Ciências Matemáticas, Físicas e Tecnológicas na obtenção de revistas científicas.

Ao Francisco Olímpio da Silva, pelo trabalho profissional de datilografia.

O Autor.

Comissão Julgadora

Paulo Álvaro Moya

modiscus

W. V. B.

Bueno

José M. J. Mendes

R E S U M O

Ronaldo Barreiro de Castro

Usando o tratamento da Teoria Quântica para o Decaimento Alfa, deduziremos uma fórmula, a fim de determinarmos o raio nuclear do estado s , isto é, um modelo nuclear com camada esférica. Usaremos a hipótese de que seja possível individualizar a partícula alfa e o núcleo filho, no momento da emissão da partícula alfa. Nestas condições será aplicado o tratamento de um problema de dois corpos como partículas pontuais, repelindo-se de acordo com a Lei de Coulomb.

Adotando novos valores de constantes físicas fundamentais, determinadas experimentalmente, por substituição dos valores numéricos em nossa fórmula, serão obtidos novos valores do raio nuclear. Estes valores serão comparados com os obtidos na literatura.

A B S T R A C T

Using a Quantum Theory approach for the Alpha-Decay process, a formula is deduced for determination of the nuclear radius of the s-state, that is, a nuclear model with a spherical shell. We will use the hypothesis that it is possible to individualize the alpha particle and the daughter nucleus in the moment of the alpha particle emission. In these conditions, we will use the treatment of a two body problem considered as point particles, repelling each other by Coulomb's Law.

Using the new values of the fundamental physical constants, experimentally determined, by substitution of their numerical values in our formula, new values of nuclear radii are obtained. These values are compared with those found in the literature.

Í N D I C E

CAPÍTULO 1. INTRODUÇÃO GERAL	9
CAPÍTULO 2. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS	11
2.1. Equação de Schrödinger independente do tempo	11
2.2. Estudo da Equação de Schrödinger na região I do poço nuclear	14
2.3. Estudo da Equação de Schrödinger na região III, fora da barreira de potencial	14
CAPÍTULO 3. MÉTODO W.K.B.	16
3.1. Aproximação W.K.B. na região II da barreira do potencial	16
3.2. Cálculo do coeficiente de transmissão	19
3.3. Equação da continuidade	20
3.4. Cálculo do fator e^{2S_0}	28
3.5. Meia vida, $T_{1/2}$	31
CAPÍTULO 4. RESULTADOS TEÓRICOS	33
4.1. Análise quantitativa	33
4.2. Descrição dos cálculos	33
4.3. Comparação com os resultados obtidos por outros pesquisadores	39
4.4. Conclusão	46
BIBLIOGRAFIA	48

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO GERAL

O primeiro sucesso da aplicação da Teoria Quântica ao fenômeno nuclear — Decaimento Alfa foi obtido, independentemente, por Gurney-Condon e Gamow, em 1928. O sucesso da teoria motivou inúmeros pesquisadores a desenvolverem métodos matemáticos mais rigorosos, como os propostos por Bethe em 1937 e Preston em 1947.

No presente trabalho investigaremos a estrutura hiperfina do raio nuclear, propondo um método que nos parece ser o mais simples, dos correntemente usados — o cálculo do raio nuclear a partir do Decaimento Alfa. Exemplificaremos com as séries do urânio, actínio e tório, a fim de podermos compreender um pouco mais as propriedades dos núcleos.

O estudo do decaimento alfa será fundamentado no problema de dois corpos, partícula alfa e o núcleo filho, como partículas pontuais que se repelem de acordo com a Lei de Coulomb.

No capítulo 2 serão estabelecidas as equações fundamentais, partindo da Equação de Schrödinger, independente do tempo.

No capítulo 3 aplicaremos o método de Wentzel, Kramers e Brillouin (W.K.B.) para analisar o decaimento alfa.

No capítulo 4 os resultados teóricos obtidos serão aplicados para calcular o raio nuclear, partindo de valores experimentais das energias de desintegração citadas na literatura. Os resultados obtidos serão comparados com os valores disponíveis na literatura e exporemos nossas conclusões.

Os valores usados das constantes fundamentais constam do Handbook of Chemistry and Physics, 66th Edition, 1985-1986, C.R.C., Press.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

2.1. EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER INDEPENDENTE DO TEMPO

Para descrevermos o sistema formado pela partícula alfa e o núcleo filho usaremos a equação de Schrödinger na forma

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \frac{z_A z_F e^2}{r}\right) \psi(r) = E_D \psi(r) \quad (1)$$

supondo um núcleo com Z prótons e N nêutrons, com energia potencial de interação entre o núcleo filho z_F e a partícula alfa z_A dada por

$$U(r) = \frac{z_A z_F e^2}{r}.$$

A aproximação que se faz para resolver a equação consiste em supor que no instante da emissão das partículas alfa possamos individualizá-las e aos núcleos filhos. Se considerarmos que eles se movem em um potencial de campo central e se admitirmos desprezível a interação próton-próton é possível algum

tipo de movimento orbital, como indicam Mayer e Jensen (My-1).
Desenvolvendo (1) em coordenadas esféricas e sendo o momento angular orbital

$$-\frac{L^2}{\hbar^2} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2)$$

tem-se

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \psi(r)}{\partial r}) - \frac{L^2 \psi(r)}{r^2 \hbar^2} \right] + U(r) \psi(r) = E_D \psi(r)$$

ou

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \psi(r)}{\partial r}) \right] + \frac{L^2 \psi(r)}{2\mu r^2} + U(r) \psi(r) = E_D \psi(r)$$

Desenvolvendo os operadores tem-se

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{2r}{r^2} \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} r^2 \frac{\partial^2 \psi(r)}{r^2} \right] + \frac{L^2}{2\mu r^2} \psi(r) + U(r) \psi(r) = E_D \psi(r)$$

ou

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r^2} \right] + \frac{L^2}{2\mu r^2} \psi(r) + U(r) \psi(r) = E_D \psi(r)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[2 \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r^2} \right] + \frac{L^2}{2\mu r^2} r \psi(r) + U(r) r \psi(r) = E_D r \psi(r)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial \psi(r)}{\partial r} + \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r^2} \right] + \frac{L^2}{2\mu r^2} r \psi(r) + U(r) r \psi(r) = E_D r \psi(r)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial \psi(r)}{\partial r} + \left(\frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi(r)}{\partial r} \right) \right) \right] + \frac{L^2}{2\mu r^2} r \psi(r) + U r \psi(r) = E_D r \psi(r)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial \psi(r)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial \psi(r)}{\partial r}) \right] + \frac{L^2}{2\mu r^2} r \psi(r) + U r \psi(r) = E_D r \psi(r)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\psi(r) + r \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} \right) \right] + \frac{L^2}{2\mu r^2} r\psi(r) + U(r) r\psi(r) = E_D r\psi(r) \\
 & - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial r} \psi(r) + r \frac{\partial \psi(r)}{\partial r} \right) \right] + \frac{L^2}{2\mu r^2} r\psi(r) + U(r) r\psi(r) = E_D r\psi(r) \\
 & - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r\psi(r)) \right) \right] + \frac{L^2}{2\mu r^2} r\psi(r) + U(r) r\psi(r) = E_D r\psi(r) \quad (3)
 \end{aligned}$$

a suposição mais simples que se faz inicialmente é que se trate de um problema de força central agindo ao longo do raio r que une a partícula alfa e o núcleo filho. Admitindo que o estado quântico mais baixo e mais estável é o estado s dotado de simetria esférica, a função de onda s só depende de r e a equação (3) pode ser simplificada para

$$u(r) = r\psi(r) \quad (4)$$

ficando então

$$\frac{d^2}{dr^2} u(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E_D - U(r)] u(r) = 0. \quad (5)$$

Será aplicada a equação (5) nas 3 regiões da figura 1.

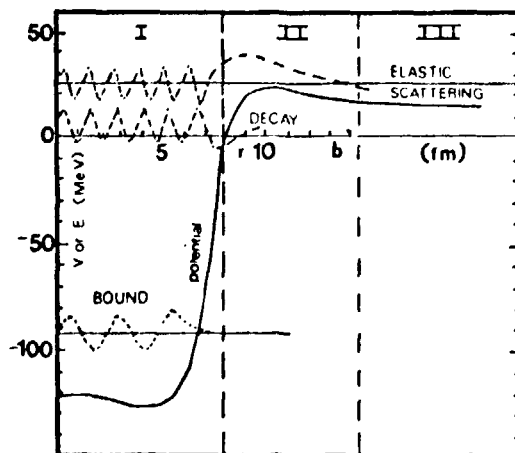


Figura 1

A figura representa o raio nuclear r , em função da energia E , de acordo com Marquez (Mq-1).

2.2. ESTUDO DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NA REGIÃO I DO POÇO NUCLEAR

Nesta região a energia potencial de Coulomb $U(r) = 0$ e a equação (5) fica

$$\frac{d^2 u_I}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} E_D u_I = 0 \quad (6)$$

fazendo

$$K_I^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E_D \quad (7)$$

teremos uma solução em função de seno e cosseno que de maneira geral podemos escrever

$$u_I = A \exp(iK_I r) + B \exp(-iK_I r) \quad (8)$$

onde o primeiro termo representa a onda incidente na barreira de potencial e o segundo a onda refletida.

2.3. ESTUDO DA EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NA REGIÃO III, FORA DA BARREIRA DE POTENCIAL

De maneira análoga podemos escrever

$$\frac{d^2 u_{III}}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} E_D u_{III} = 0 \quad (9)$$

fazendo

$$K_{III}^2 = K_I^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E_D \quad (10)$$

cuja solução é

$$u_{III} = E \exp(iK_I r) \quad (11)$$

CAPÍTULO 3

MÉTODO W.K.B

3.1. APROXIMAÇÃO W.K.B. NA REGIÃO II DA BARREIRA DE POTENCIAL

Nesta região usaremos a Aproximação W.K.B. que é um método de solução para se obter a função de onda quando $U_{(r)} > E_D$

$$\frac{d^2 u_{II}}{dr^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} (U_{(r)} - E_D) u_{II} = 0 \quad (12)$$

fazendo

$$K_{II}^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (U_{(r)} - E_D) \quad (13)$$

cuja solução é da forma proposta por Davydov (Dv-1)

$$u_{II} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{(r)}\right) \quad (14)$$

derivando e substituindo

$$\frac{d u_{II}}{dr} = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial S_{(r)}}{\partial r} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{(r)}\right)$$

$$\frac{d^2 u_{II}}{dr^2} = -\frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\partial S(r)}{\partial r} \right)^2 \exp \left(\frac{i}{\hbar} S(r) \right) + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 S(r)}{\partial r^2} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S(r) \right)$$

substituindo na equação (12)

$$-\frac{1}{\hbar^2} (\nabla S(r))^2 \exp \left(\frac{i}{\hbar} S(r) \right) - \frac{i}{\hbar} \nabla^2 S(r) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S(r) \right) - K_{II}^2 \exp \left(\frac{i}{\hbar} S(r) \right) = 0$$

$$K_{II}^2 = \frac{i}{\hbar} \nabla^2 S(r) - \frac{1}{\hbar^2} (\nabla S(r))^2 \quad (15)$$

desenvolvendo $S(r)$ em série de potência de acordo com Wentzel (Wz-1)

$$S(r) = S_0 + \frac{\hbar}{i} S_1 + \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 S_2 + \dots \quad (16)$$

e substituindo na equação (15)

$$K_{II}^2 = \frac{i}{\hbar} (\nabla^2 S_0 + \nabla^2 \frac{\hbar}{i} S_1) - \frac{1}{\hbar^2} \left[(\nabla S_0 + \nabla \frac{\hbar}{i} S_1)^2 \right] =$$

$$K_{II}^2 = \frac{i}{\hbar} \nabla^2 S_0 + \nabla^2 S_1 - \frac{1}{\hbar^2} \left[(\nabla S_0)^2 + 2\nabla S_0 \nabla \frac{\hbar}{i} S_1 + (\nabla \frac{\hbar}{i} S_1)^2 \right] =$$

$$K_{II}^2 = \frac{i}{\hbar} \nabla^2 S_0 + \nabla^2 S_1 - \frac{1}{\hbar^2} \left[(\nabla S_0)^2 + 2\nabla S_0 \nabla \frac{\hbar}{i} S_1 - (\nabla \frac{\hbar}{i} S_1)^2 \right] =$$

$$K_{II}^2 = \frac{i}{\hbar} \nabla^2 S_0 + \nabla^2 S_1 - \frac{1}{\hbar^2} (\nabla S_0)^2 - \frac{2}{i\hbar} \nabla S_0 \nabla S_1 + (\nabla S_1)^2 =$$

$$i\hbar^2 K_{II}^2 = i^2 \hbar^2 \nabla^2 S_0 + i\hbar^2 \nabla^2 S_1 - i (\nabla S_0)^2 - 2\hbar \nabla S_0 \nabla S_1 + i\hbar^2 (\nabla S_1)^2$$

quando a largura da barreira b não for muito grande poderemos considerar apenas os termos de ordem $(\nabla S_0)^2$

$$i \hbar^2 K_{II}^2 = -i (vS_0)^2$$

$$\frac{d S_0}{dr} = \pm \sqrt{-\hbar^2 K_{II}^2} = \pm \sqrt{i^2 \hbar^2 K_{II}^2}$$

integrando entre limites definidos fica

$$S_0 = \pm \int_r^b i \hbar K_{II} dr$$

substituindo na equação (14)

$$u_{II} = C \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_r^b (-i \hbar K_{II}) dr \right) + D \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_r^b (i \hbar K_{II}) dr \right) =$$

$$u_{II} = C \exp \left(\int_r^b K_{II} dr \right) + D \exp \left(- \int_r^b K_{II} dr \right) \quad (17)$$

definindo \hat{S}_0 por

$$S_0 = \pm \int_r^b K_{II} dr \quad (18)$$

as funções de onda podem ser escritas

$$u_I = A \exp (i K_I r) + B \exp (-i K_I r)$$

$$u_{II} = C \exp (S_0) + D \exp (-S_0)$$

$$u_{III} = E \exp (i K_I r)$$

3.2. CÁLCULO DO COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO

O coeficiente de transmissão G será definido como a probabilidade de a partícula atravessar a barreira

$$G = \frac{S_{III} \text{ (fluxo de probabilidade transmitida)}}{S_I \text{ (fluxo de probabilidade incidente)}}$$

e o vetor fluxo de probabilidade será dado por Gamow (Ga-1)

$$S = \frac{\hbar}{2\mu i} (u \nabla u^* - u^* \nabla u) \quad (19)$$

para

$$u_{III} = E \exp(i K_I r)$$

$$\nabla u_{III} = \frac{d}{dr} [(E \exp(i K_I r))] = i K_I E \exp(i K_I r)$$

e

$$u_{III}^* = E^* \exp(-i K_I r)$$

$$\nabla u_{III}^* = \frac{d}{dr} (E^* \exp(-i K_I r)) = -i K_I E^* \exp(-i K_I r)$$

logo o fluxo é

$$\begin{aligned} S_{III} &= \frac{\hbar}{2\mu i} \left[(E \exp(i K_I r)) (-i K_I E^* \exp(-i K_I r)) - \right. \\ &\quad \left. - (E^* \exp(-i K_I r)) (i K_I E \exp(i K_I r)) \right] = \\ &= S_{III} = \frac{\hbar}{2\mu i} \left[(-i K_I E E^*) - (i K_I E^* E) \right] = \\ &= S_{III} = \frac{\hbar}{2\mu i} (-2 i K_I E E^*) = S_{III} = \frac{\hbar K_I}{-\mu} |E|^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Na solução relativa à região I, desprezando a onda refletida e admitindo que a normalização seja feita para $A=1$, tem-se:

$$u_I = \exp(i K_I r)$$

$$\nabla u_I = \frac{d}{dr} (\exp(i K_I r)) = i K_I \exp(i K_I r)$$

e

$$u_I^* = \exp(-i K_I r)$$

$$\nabla u_I^* = \frac{d}{dr} (\exp(-i K_I r)) = -i K_I \exp(-i K_I r)$$

dessas expressões decorre para o fluxo:

$$S_I = \frac{\hbar K_I}{-\mu} \quad (21)$$

e

$$G = \frac{\hbar K_I |E|^2}{-\mu} \times \frac{-\mu}{\hbar K_I} = |E|^2. \quad (22)$$

3.3. EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

As constantes E, B, C e D serão determinadas desde que saibamos como as funções de onda se comportam nos pontos a e b. Inicialmente igualaremos

$$u_I = u_{II} \text{ no ponto } r \text{ (início da barreira } r=0)$$

$$u_I = 1 + B$$

$$u_{II} = C + D$$

$$u_I = u_{II}$$

$$1 + B = C + D \quad (a)$$

e a derivada

$$\frac{du_I}{dr} = \frac{du_{II}}{dr}$$

$$\frac{du_I}{dr} = i K_I \exp(i K_I r) - i K_I B \exp(-i K_I r) = i K_I - i K_I B = \frac{du_I}{dr} = i K_I (1 - B)$$

e

$$\frac{du_{II}}{dr} = K_{II} C \exp(S_0) - K_{II} D \exp(-S_0) = \frac{du_{II}}{dr} = K_{II} C - K_{II} D$$

$$\frac{du_{II}}{dr} = K_{II} (C - D)$$

$$\frac{du_I}{dr} = \frac{du_{II}}{dr} \text{ no ponto } r \text{ (início da barreira } r = 0)$$

$$i K_I (1 - B) = K_{II} (C - D) \quad (b)$$

as condições agora para

$$u_{II} = u_{III} \text{ (no ponto b)}$$

$$C \exp(S_0) + D \exp(-S_0) = E \exp(i K_I b) \quad (c)$$

$$\frac{du_{II}}{dr} = K_{II} C \exp(S_0) - K_{II} D \exp(-S_0)$$

$$\frac{du_{III}}{dr} = i K_I E \exp(i K_I r) = i K_I E \exp(i K_I b)$$

$$\frac{du_{II}}{dr} = \frac{du_{III}}{dr}$$

$$K_{II} (C \exp(S_0) - D \exp(-S_0)) = i K_I E \exp(i K_I b) \quad (d)$$

temos agora o sistema

$$C + D = 1 + B \quad (a)$$

$$C - D = \frac{i K_I}{K_{II}} (1 + B) \quad (b)$$

somando (a) + (b) fica

$$2 C = 1 + \frac{i K_I}{K_{II}} + B - \frac{i K_I}{K_{II}} B =$$

$$2 C = \frac{1}{K_{II}} (K_{II} + i K_I + K_{II} B - i K_I B) =$$

$$2 C = \frac{1}{K_{II}} [(K_{II} + i K_I) + B (K_{II} - i K_I)] =$$

chamando

$$K_{II} + i K_I = \gamma$$

$$K_{II} - i K_I = \gamma^*$$

fica

$$C = \frac{1}{2K_{II}} (\gamma + B \gamma^*) \quad (23)$$

subtraindo (a) - (b)

$$2 D = 1 + B - \frac{i K_I}{K_{II}} + \frac{i K_I}{K_{II}} B =$$

$$2 D = \frac{1}{K_{II}} [(K_{II} - i K_I) + B (K_{II} + i K_I)] =$$

$$2 D = \frac{1}{K_{II}} (\gamma^* + B \gamma) =$$

$$D = \frac{1}{2K_{II}} (\gamma^* + B \gamma) \quad (24)$$

para o sistema

$$C \exp (S_0) + D \exp (-S_0) = E \exp (i K_I b) \quad (c)$$

$$C \exp (S_0) - D \exp (-S_0) = \frac{i K_I}{K_{II}} E \exp (i K_I b) \quad (d)$$

somando (c) + (d) fica

$$2 C \exp (S_0) = E \exp (i K_I b) + \frac{i K_I}{K_{II}} E \exp (i K_I b) =$$

$$2 C \exp (S_0) = \frac{(K_{II} + i K_I)}{K_{II}} E \exp (i K_I b) =$$

$$2 C \exp (S_0) = \frac{\gamma}{K_{II}} E \exp (i K_I b) =$$

$$C \exp (S_0) = \frac{\gamma}{2K_{II}} E \exp (i K_I b): \exp (S_0) =$$

$$C = \frac{\gamma}{2K_{II}} E \exp (i K_I b - S_0) = \frac{\gamma}{2K_{II}} E \exp (-(S_0 - i K_I b)) \quad (25)$$

subtraindo (c) - (d)

$$2 D \exp (-S_0) = E \exp (i K_I b) - \frac{i K_I}{K_{II}} E \exp (i K_I b) =$$

$$2 D \exp (-S_0) = \frac{(K_{II} - i K_I)}{K_{II}} E \exp (i K_I b): \exp (-S_0) =$$

$$D = \frac{\gamma^*}{2K_{II}} E \exp (S_0 + i K_I b) \quad (26)$$

igualando as equações (23) = (25) e (24) = (26)

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{2K_{II}} E \exp (-(S_0 - i K_I b)) = \frac{J}{2K_{II}} (\gamma + B \gamma^*) \\ \frac{\gamma^*}{2K_{II}} E \exp (S_0 + i K_I b) = \frac{1}{2K_{II}} (\gamma^* + B \gamma) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma E \exp(-(S_0 - i K_I b)) = \gamma + B \gamma^* \\ \gamma^* E \exp(S_0 + i K_I b) = \gamma^* + B \gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} -B \gamma^* + \gamma E \exp(-(S_0 - i K_I b)) = \gamma \\ -B \gamma + \gamma^* E \exp(S_0 + i K_I b) = \gamma^* \end{cases}$$

utilizando a Regra de Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\gamma^* & \gamma \exp(-(S_0 - i K_I b)) \\ -\gamma & \gamma^* \exp(S_0 + i K_I b) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -\gamma^{*2} \exp(S_0 + i K_I b) + \gamma^2 \exp(-(S_0 - i K_I b))$$

$$E = \frac{\Delta E}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -\gamma^* & \gamma \\ -\gamma & \gamma^* \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-\gamma^{*2} + \gamma^2}{-\gamma^{*2} \exp(S_0 + i K_I b) + \gamma^2 \exp(-(S_0 - i K_I b))}$$

voltando a equação (22)

$$G = |E|^2$$

colocando o valor de E acima fica

$$G = \frac{|-(K_{II} - i K_I)^2 + (K_{II} + i K_I)^2|^2}{|-(K_{II} - i K_I)^2 \exp(S_0 + i K_I b) + (K_{II} + i K_I)^2 \exp(-(S_0 - i K_I b))|^2} =$$

$$G = \frac{|-(K_{II}^2 - 2K_{II} i K_I + i^2 K_I^2) + (K_{II}^2 + 2K_{II} i K_I + i^2 K_I^2)|^2}{|-(K_{II} - i K_I)^2 \exp(S_0 + i K_I b) + (K_{II} + i K_I)^2 \exp(-(S_0 - i K_I b))|^2} =$$

$$G = \frac{|4 i K_I K_{II}|^2}{\left| -(K_{II} - i K_I)^2 \exp(S_0 + i K_I b) + (K_{II} + i K_I)^2 \exp(-(S_0 - i K_I b)) \right|^2}$$

resolvendo separadamente

$$\left| 4 i K_I K_{II} \right|^2 = \left| 16 i^2 K_I^2 K_{II}^2 \right| = 16 K_I^2 K_{II}^2$$

e

$$\begin{aligned} & \left| -(K_{II} - i K_I)^2 \exp(S_0 + i K_I b) + (K_{II} + i K_I)^2 \exp(-(S_0 - i K_I b)) \right|^2 = \\ & = \left| \left[-(K_{II} - i K_I)^2 \exp(S_0) + (K_{II} + i K_I)^2 \exp(-S_0) \right] \exp(i K_I b) \right|^2 = \\ & = \left| \left[-(K_{II} - i K_I)^2 \exp(S_0) + (K_{II} + i K_I)^2 \exp(-S_0) \right] \right|^2 \left| \exp(i K_I b) \right|^2 \end{aligned}$$

sabendo que

$$\left| \exp(i K_I b) \right|^2 = \left| \cos K_I b + i \operatorname{sen} K_I b \right|^2 = \cos^2 K_I b - \operatorname{sen}^2 K_I b = 1$$

fica

$$\begin{aligned} & \left| -(K_{II} - i K_I)^2 \exp(S_0) + (K_{II} + i K_I)^2 \exp(-S_0) \right|^2 = \\ & = \left| -(K_{II}^2 - 2i K_I K_{II} + i^2 K_I^2) \exp(S_0) + (K_{II}^2 + 2i K_{II} K_I + i^2 K_I^2) \exp(-S_0) \right|^2 = \\ & = \left| -K_{II}^2 \exp(S_0) + 2i K_{II} K_I \exp(S_0) + K_I^2 \exp(S_0) + K_{II}^2 \exp(-S_0) + \right. \\ & \quad \left. + 2i K_{II} K_I \exp(-S_0) - K_I^2 \exp(-S_0) \right|^2 = \left| -(K_{II}^2 - K_I^2) \exp(S_0) + \right. \\ & \quad \left. + (K_{II}^2 - K_I^2) \exp(-S_0) + 2i K_{II} K_I \exp(S_0) + 2i K_{II} K_I \exp(-S_0) \right|^2 = \\ & = \left| (K_{II}^2 - K_I^2) (\exp(-S_0) - \exp(S_0)) + 2i K_I K_{II} (\exp(-S_0) + \exp(S_0)) \right|^2 = \\ & = (K_{II}^2 - K_I^2)^2 (\exp(-S_0) - \exp(S_0))^2 + 4 K_I^2 K_{II}^2 (\exp(-S_0) + \exp(S_0))^2 \end{aligned}$$

a equação (22) fica

$$G = \frac{16 K_I^2 K_{II}^2}{(K_{II}^2 - K_I^2)^2 (\exp(-S_0) - \exp(S_0))^2 + 4K_I^2 K_{II}^2 (\exp(-S_0) + \exp(S_0))^2} \quad (: 4) =$$

$$= G = \frac{4K_I^2 K_{II}^2}{(K_{II}^2 - K_I^2)^2 \left(\frac{\exp(-S_0) - \exp(S_0)}{2}\right)^2 + 4K_I^2 K_{II}^2 \left(\frac{\exp(-S_0) + \exp(S_0)}{2}\right)^2}$$

sabendo que

$$\sinh S_0 = \frac{\exp(S_0) - \exp(-S_0)}{2} \quad \text{e} \quad \cosh S_0 = \frac{\exp(S_0) + \exp(-S_0)}{2}$$

$$G = \frac{4K_I^2 K_{II}^2}{(K_{II}^2 - K_I^2)^2 (-\sinh S_0)^2 + 4K_I^2 K_{II}^2 \cosh^2 S_0} =$$

$$= G = \frac{4K_I^2 K_{II}^2}{(K_{II}^2 - K_I^2)^2 \sinh^2 S_0 + 4K_I^2 K_{II}^2 \cosh^2 S_0}$$

sabendo que

$$\cosh^2 S_0 = 1 + \sinh^2 S_0$$

$$G = \frac{4K_I^2 K_{II}^2}{(K_{II}^2 - K_I^2)^2 \sinh^2 S_0 + 4K_I^2 K_{II}^2 (1 + \sinh^2 S_0)} =$$

$$= G = \frac{4K_I^2 K_{II}^2}{(K_{II}^2 - K_I^2)^2 \sinh^2 S_0 + 4K_I^2 K_{II}^2 + 4K_I^2 K_{II}^2 \sinh^2 S_0} =$$

$$= G = \frac{4K_I^2 K_{II}^2}{K_{II}^4 \sinh^2 S_0 - 2K_I^2 K_{II}^2 \sinh^2 S_0 + K_I^4 \sinh^2 S_0 + 4K_I^2 K_{II}^2 + 4K_I^2 K_{II}^2 \sinh^2 S_0}$$

$$= G = \frac{-4K_I^2 K_{II}^2}{K_{II}^4 \sinh^2 S_0 + 2K_I^2 k_{II}^2 \sinh^2 S_0 + K_I^4 \sinh^2 S_0 + 4K_I^2 K_{II}^2} =$$

$$= G = \frac{4K_I^2 K_{II}^2}{(K_{II}^2 + K_I^2)^2 \sinh^2 S_0 + 4K_I^2 K_{II}^2}$$

substituindo os valores de K_I^2 , K_{II}^2 e \sinh^2

$$G = \frac{4 \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} E_D\right) \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} (U(r) - E_D)\right]}{\left[\frac{2\mu}{\hbar^2} E_D + \frac{2\mu}{\hbar^2} (U(r) - E_D)\right]^2 \sinh^2 S_0 + 4 \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} E_D\right) \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} (U(r) - E_D)\right]} =$$

$$= G = \frac{(8 \mu E_D) [2 \mu (U(r) - E_D)]}{[2 \mu E_D + 2 \mu U(r) - 2 \mu E_D]^2 \sinh^2 S_0 + (8 \mu E_D) [2 \mu (U(r) - E_D)]} =$$

$$= G = \frac{16 \mu^2 E_D (U(r) - E_D)}{4 \mu^2 U(r)^2 \sinh^2 S_0 + 16 \mu^2 E_D (U(r) - E_D)} \div 4\mu^2 =$$

$$G = \frac{4 E_D (U(r) - E_D)}{U(r)^2 \sinh^2 S_0 + 4 E_D (U(r) - E_D)}$$

ou

$$G^{-1} = \left[\frac{U(r)^2 \sinh^2 S_0 + 4 E_D (U(r) - E_D)}{4 E_D (U(r) - E_D)} \right]^{-1} = \left[\frac{U(r)^2 \sinh^2 S_0}{4 E_D (U(r) - E_D)} + \frac{4 E_D (U(r) - E_D)}{4 E_D (U(r) - E_D)} \right]^{-1} =$$

$$G^{-1} = \left[1 + \frac{U(r)^2 \sinh^2 S_0}{4 E_D (U(r) - E_D)} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{U(r) \left(\frac{\exp(S_0) - \exp(-S_0)}{2} \right)^2}{4 E_D (U(r) - E_D)} \right]^{-1} =$$

$$G^{-1} = \left[1 + \frac{U_{(r)}^2 (\exp(2S_0) - 2 \exp(S_0) \exp(-S_0) + \exp(-2S_0))}{4} \times \frac{1}{4 E_D (U_{(r)} - E_D)} \right]^{-1} =$$

para valores positivos e crescentes de S_0 , $\exp(2S_0) \gg \exp(-2S_0)$

$$G^{-1} = \left[1 + \frac{U_{(r)}^2 (\exp(2S_0) - 2)}{4} \times \frac{1}{4 E_D (U_{(r)} - E_D)} \right]^{-1}$$

substituindo os valores de $U_{(r)}$ e E_D

$$\begin{aligned} G^{-1} &= \left[1 + \frac{\frac{Z_A^2 Z_F^2 e^4}{r^2} (\exp(2S_0) - 2)}{4} \times \frac{1}{4 \frac{Z_A^2 Z_F^2 e^4}{b} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)} \right]^{-1} = \\ &= G^{-1} = \left[1 + \frac{\frac{Z_A^2 Z_F^2 e^4}{4 r^2} (\exp(2S_0) - 2) \times \frac{1}{\frac{Z_A^2 Z_F^2 e^4}{b} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)}}{4} \right]^{-1} = \\ &= G^{-1} = \left[1 + \frac{\exp(2S_0) - 2}{16 \frac{r^2}{b} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)} \right]^{-1} = G^{-1} = \left[1 + \frac{\exp(2S_0) - 2}{16 \left(\frac{r}{b} - \frac{r^2}{b^2}\right)} \right]^{-1} \quad (27) \end{aligned}$$

3.4. CÁLCULO DO FATOR e^{2S_0}

Já sabemos pela equação (18) que

$$2S_0 = 2 \int_r^b K_{II} dr \quad e$$

pela solução (13)

$$K_{II} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2 \mu (U(r) - E_D)}$$

que fica

$$2S_0 = \sqrt{\frac{4 \times 2 \mu}{\hbar^2}} \int_r^b \sqrt{\frac{Z_A Z_F e^2}{r} - E_D} dr =$$

$$2S_0 = \sqrt{\frac{8 \mu}{\hbar^2}} \int_r^b \sqrt{Z_A Z_F e^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{E_D}{Z_A Z_F e^2} \right)} dr$$

fazendo de acordo com Fermi (Fe-1), (Ma-1)

$$\frac{1}{b} = \frac{E_D}{Z_A Z_F e^2} \quad (28)$$

substituindo fica

$$2S_0 = \sqrt{\frac{8 \mu Z_A Z_F e^2}{\hbar^2}} \int_r^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} dr \quad (29)$$

vamos resolver a integral da equação (29)

$$I = \int_r^b \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} dr = \int_r^b \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{r}{b}} dr = \quad (30)$$

$$I = \int_r^b \frac{1}{\sqrt{r}} \sqrt{1 - \frac{r}{b}} dr$$

fazendo $\frac{r}{b} = \sin^2 \theta$ ou $r = b \sin^2 \theta$, extraíndo a raiz quadrada dos dois membros fica

$$\sqrt{r} = \sqrt{b} \operatorname{sen} \theta$$

diferenciando $r = b \operatorname{sen}^2 \theta$ e fica $dr = 2 b \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta$ e substituindo na integral

$$I = \int_r^b \frac{1}{\sqrt{b} \operatorname{sen} \theta} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta} 2 b \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta =$$

$$I = \int_r^b \frac{2 b}{\sqrt{b}} \sqrt{\cos^2 \theta} \cos \theta d\theta =$$

$$I = \int_r^b \frac{2 b \sqrt{b}}{\sqrt{b} \sqrt{b}} \cos \theta \cos \theta d\theta =$$

$$I = \int_r^b 2 \sqrt{b} \cos^2 \theta d\theta =$$

$$I = 2 \sqrt{b} \left[\int_r^b \frac{1}{2} (1 + \cos 2 \theta) d\theta \right] =$$

$$I = \frac{2 \sqrt{b}}{2} \left[\int_r^b d\theta + \int_r^b \cos 2 \theta d\theta \right] =$$

$$I = \sqrt{b} \left[\theta \Big|_r^b + \frac{\operatorname{sen} 2 \theta}{2} \Big|_r^b \right] =$$

$$I = \sqrt{b} \left[\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2 \theta \right]_r^b$$

OBSERVAÇÃO: já vimos que

$$\text{sen } \theta = \sqrt{\frac{r}{b}} \quad \text{e} \quad \theta = \text{arc sen } \sqrt{\frac{r}{b}}$$

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1 \quad \text{e} \quad \text{cos } \theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}$$

$$\text{sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \text{ cos } \theta$$

$$\text{sen } 2\theta = 2 \sqrt{\frac{r}{b}} \sqrt{1 - \frac{r}{b}}$$

substituindo estas observações na integral I fica

$$I = \sqrt{b} \left[\text{arc sen } \sqrt{\frac{b}{b}} - \text{arc sen } \sqrt{\frac{r}{b}} + \frac{1}{2} (2 \sqrt{\frac{b}{b}} \sqrt{1 - \frac{b}{b}}) - \frac{1}{2} (2 \sqrt{\frac{r}{b}} \sqrt{1 - \frac{r}{b}}) \right] =$$

$$I = \sqrt{b} \left[\text{arc sen } 1 - \text{arc sen } \sqrt{\frac{r}{b}} + 1 (0) - \sqrt{\frac{r}{b}} \sqrt{1 - \frac{r}{b}} \right] =$$

$$I = \sqrt{b} \left[\frac{\pi}{2} - \text{arc sen } \sqrt{\frac{r}{b}} - \sqrt{\frac{r}{b} - \frac{r^2}{b^2}} \right] =$$

$$I = \sqrt{b} \left[\text{arc cos } \sqrt{\frac{r}{b}} - \sqrt{\frac{r}{b} - \frac{r^2}{b^2}} \right]$$

substituindo na equação (29)

$$2S_0 = \sqrt{\frac{8 \mu Z_A Z_A e^2}{\hbar^2} b} \text{ arc cos } \sqrt{\frac{r}{b}} - \sqrt{\frac{r}{b} - \frac{r^2}{b^2}} \quad (31)$$

3.5. MEIA VIDA $T_{1/2}$

O tempo que o fluxo de partículas alfa leva para ir da região I a região III, através da região II é dado por

Gamow (Ga-2) e também por Gurney-Condon (Co-1) como sendo

$$T = \frac{r}{v_A} \cdot G \quad (32)$$

onde v_A é a velocidade da partícula alfa em relação ao núcleo

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \times E_D}{m_A \left(1 + \frac{m_A}{m_F}\right)}} \quad (33)$$

sendo a constante de desintegração o inverso do tempo do fluxo de partículas, a meia vida $T_{1/2}$ é definida como sendo

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\frac{r}{v_A} G^{-1}} \quad (34)$$

CAPÍTULO 4

RESULTADOS TEÓRICOS

4.1. ANÁLISE QUANTITATIVA

A emissão espontânea das partículas alfa e o efeito de penetração através da barreira de energia potencial, conduziu-nos a equação (34), que contém o raio nuclear r . Inserindo o valor de r , obteremos a meia vida e esta será comparada com as meias vidas, obtidas experimentalmente.

Os valores calculados, como será visto a seguir, serão valores médios, para cada energia de desintegração. O valor médio e o desvio padrão são definidos como

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$
$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n-1}}$$

4.2. DESCRIÇÃO DOS CÁLCULOS

O cálculo do raio nuclear para a cadeia natural do urânio-238 que se desintegra com uma energia de

$$E_D = 4,197 \times 10^6 \text{ eV}$$

em tório-234 será desenvolvido da seguinte maneira

$$E_D = 4,197 \times 10^6 \times 1,6021917 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

$$E_D = 6,72 \times 10^{-6} \text{ erg}$$

a) Cálculo da largura da barreira b

$$b = \frac{Z_A Z_A e^2}{E_D} = \frac{2 \times 90 \times (4,80294 \times 10^{-10})^2}{6,72 \times 10^{-6}}$$

$$b = 61,75 \times 10^{-13} \text{ cm}$$

os valores da largura da barreira para as séries naturais do urânio, actínio e tório estão nas tabelas 1, 2 e 3.

Tabela 1 - Série do Urânio ($4n + 2$)

ISÓTOPO PAI Z_P	ISÓTOPO FILHO Z_F	ENERGIA MeV	LARGURA b DA BARREIRA, 10^{-13} cm
${}_{92}\text{U}^{238}$	${}_{90}\text{Th}^{234}$	4,197	61,75
${}_{92}\text{U}^{234}$	${}_{90}\text{Th}^{230}$	4,856	53,37
${}_{90}\text{Th}^{230}$	${}_{88}\text{Ra}^{226}$	4,771	53,11
${}_{88}\text{Ra}^{226}$	${}_{86}\text{Rn}^{222}$	4,870	50,85
${}_{86}\text{Rn}^{222}$	${}_{84}\text{Po}^{218}$	5,590	43,27
${}_{84}\text{Po}^{218}$	${}_{82}\text{Pb}^{214}$	6,114	38,62
${}_{85}\text{At}^{218}$	${}_{83}\text{Bi}^{214}$	6,883	34,72
${}_{83}\text{Bi}^{214}$	${}_{81}\text{Tl}^{210}$	5,618	41,52
${}_{84}\text{Po}^{214}$	${}_{82}\text{Pb}^{210}$	7,833	30,14
${}_{84}\text{Po}^{210}$	${}_{82}\text{Pb}^{206}$	5,407	43,67

os valores da tabela 1 estão na curva da figura 2.

Tabela 2 - Série do Actínio ($4n + 3$)

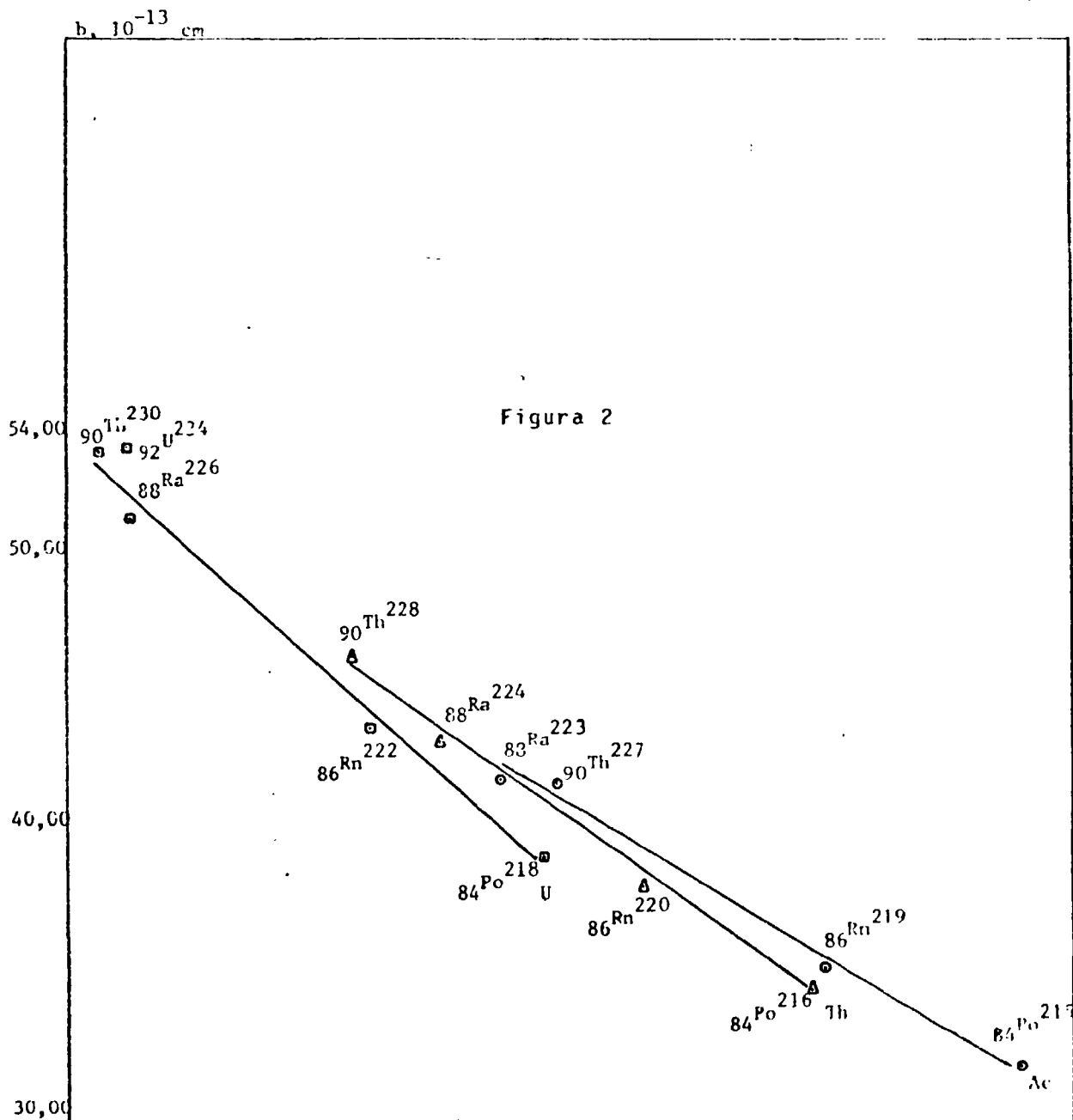
ISÓTOPO PAI Z_P	ISÓTOPO FILHO Z_F	ENERGIA MeV	LARGURA b 10^{-13} cm
${}_{92}\text{U}^{235}$	${}_{90}\text{Th}^{231}$	4,6793	55,38
${}_{91}\text{Pa}^{231}$	${}_{89}\text{Ac}^{227}$	5,148	49,78
${}_{89}\text{Ac}^{227}$	${}_{87}\text{Fr}^{223}$	5,043	49,68
${}_{87}\text{Fr}^{223}$	${}_{85}\text{At}^{219}$	5,43	45,07
${}_{85}\text{At}^{219}$	${}_{83}\text{Bi}^{215}$	6,390	37,40
${}_{90}\text{Th}^{227}$	${}_{88}\text{Ra}^{223}$	6,146	41,23
${}_{88}\text{Ra}^{223}$	${}_{86}\text{Rn}^{219}$	5,979	41,42
${}_{86}\text{Rn}^{219}$	${}_{84}\text{Po}^{215}$	6,946	34,82
${}_{84}\text{Po}^{215}$	${}_{82}\text{Pb}^{211}$	7,526	31,37
${}_{85}\text{At}^{215}$	${}_{83}\text{Bi}^{211}$	8,178	29,22
${}_{83}\text{Bi}^{211}$	${}_{81}\text{Tl}^{207}$	6,279	37,15
${}_{84}\text{Po}^{211}$	${}_{82}\text{Pb}^{207}$	7,594	31,09

os valores da tabela 2 estão na curva da figura 2.

Tabela 3 - Série do Tório ($4n$)

ISÓTOPO PAI Z_P	ISÓTOPO FILHO Z_F	ENERGIA MeV	LARGURA b 10^{-13} cm
${}_{90}\text{Th}^{232}$	${}_{88}\text{Ra}^{228}$	4,081	62,09
${}_{90}\text{Th}^{228}$	${}_{88}\text{Ra}^{224}$	5,520	45,91
${}_{88}\text{Ra}^{224}$	${}_{86}\text{Rn}^{220}$	5,789	42,78
${}_{86}\text{Rn}^{220}$	${}_{84}\text{Po}^{216}$	6,404	37,77
${}_{84}\text{Po}^{216}$	${}_{82}\text{Pb}^{212}$	6,906	34,19
${}_{85}\text{At}^{216}$	${}_{83}\text{Bi}^{212}$	7,947	30,07
${}_{83}\text{Bi}^{212}$	${}_{81}\text{Tl}^{208}$	6,090	38,30
${}_{84}\text{Po}^{212}$	${}_{82}\text{Pb}^{208}$	8,953	26,37

os valores da tabela 3 estão na curva da figura 2.



A figura representa a largura da barreira de potencial b , em função da energia E , para as séries do Urânio, Actínio e Tório.

b) Cálculo da velocidade v_A da partícula alfa

$$v_A = \sqrt{\frac{2 \times 6,72 \times 10^{-6}}{4,00 \left(1 + \frac{4,00}{234,03}\right) \times 1,66 \times 10^{-24}}} \text{ cm/s}$$

$$v_A = 1,41 \times 10^9 \text{ cm/s}$$

inserindo os valores do raio nuclear r temos a frequência de vibração inicial

$$\lambda_0 = \frac{v_A}{r} = \frac{1,41 \times 10^9}{9,32 \times 10^{-13}} = 1,51 \times 10^{21} \text{ s}^{-1}$$

c) Cálculo do fator $2S_0$

$$2S_0 = \sqrt{\frac{8 \times \frac{4,00 \times 234,03}{4,00 + 234,03} \times 1,66 \times 10^{-24} \times 2 \times 90 \times (4,80 \times 10^{-10})^2 \times 61,75 \times 10^{-13}}{1,05 \times 10^{-27}}} \times$$

$$\times \arccos \sqrt{\frac{9,32}{61,75}} - \sqrt{\frac{9,32}{61,75} - \frac{(9,32)^2}{(61,75)^2}}$$

$$2S_0 = 89,34$$

d) Inserindo os valores a, b, c na equação (31)

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{1,51 \times 10^{21} \left(1 + \frac{e^{89,34} - 2}{16 \left(\frac{9,32}{61,75} - \frac{(9,32)^2}{(61,75)^2}\right)}\right)^{-1}}$$

$$T_{1/2} \approx 4,49 \times 10^9 \text{ anos}$$

os valores de r para os demais isótopos estão nas tabelas que seguem

Tabela 4 - Série do Urânio

ISÓTOPO PAI Z_P	ISÓTOPO FILHO Z_F	ENERGIA E (MeV)	RAIO NUCLEAR r, 10^{-13} cm
${}_{92}\text{U}^{258}$	${}_{90}\text{Th}^{254}$	4,197	$9,32 \pm 0,01$
${}_{92}\text{U}^{254}$	${}_{90}\text{Th}^{250}$	4,856	$8,80 \pm 0,01$
${}_{90}\text{Th}^{250}$	${}_{88}\text{Ra}^{226}$	4,771	$8,78 \pm 0,01$
${}_{88}\text{Ra}^{226}$	${}_{86}\text{Ra}^{222}$	4,870	$8,69 \pm 0,01$
${}_{86}\text{Rn}^{222}$	${}_{84}\text{Po}^{218}$	5,590	$8,59 \pm 0,01$
${}_{84}\text{Po}^{218}$	${}_{82}\text{Pb}^{214}$	6,114	$8,42 \pm 0,01$
${}_{85}\text{At}^{218}$	${}_{83}\text{Bi}^{214}$	6,883	$8,05 \pm 0,01$
${}_{83}\text{Bi}^{214}$	${}_{81}\text{Tl}^{210}$	5,618	$9,04 \pm 0,01$
${}_{84}\text{Po}^{214}$	${}_{82}\text{Pb}^{210}$	7,833	$8,25 \pm 0,01$
${}_{84}\text{Po}^{210}$	${}_{82}\text{Pb}^{206}$	5,407	$7,70 \pm 0,01$

os valores da tabela 4 estão na curva da figura 3.

Tabela 5 - Série do Actínio

ISÓTOPO PAI Z_P	ISÓTOPO FILHO Z_F	ENERGIA E (MeV)	RAIO NUCLEAR r, 10^{-13} cm
${}_{92}\text{U}^{235}$	${}_{90}\text{Th}^{231}$	4,6793	$7,69 \pm 0,01$
${}_{91}\text{Pa}^{231}$	${}_{89}\text{Ac}^{227}$	5,148	$7,95 \pm 0,01$
${}_{89}\text{Ac}^{227}$	${}_{87}\text{Fr}^{223}$	5,043	$9,43 \pm 0,01$
${}_{87}\text{Fr}^{223}$	${}_{85}\text{At}^{219}$	5,43	$10,87 \pm 0,01$
${}_{85}\text{At}^{219}$	${}_{83}\text{Bi}^{215}$	6,390	$8,51 \pm 0,01$
${}_{90}\text{Th}^{227}$	${}_{88}\text{Ra}^{223}$	6,146	$7,79 \pm 0,01$
${}_{88}\text{Ra}^{223}$	${}_{86}\text{Rn}^{219}$	5,979	$7,80 \pm 0,01$
${}_{86}\text{Rn}^{219}$	${}_{84}\text{Po}^{215}$	6,946	$7,95 \pm 0,01$
${}_{84}\text{Po}^{215}$	${}_{82}\text{Pb}^{211}$	7,526	$8,21 \pm 0,01$
${}_{85}\text{At}^{215}$	${}_{83}\text{Bi}^{211}$	8,178	$8,01 \pm 0,01$
${}_{83}\text{Bi}^{211}$	${}_{81}\text{Tl}^{207}$	6,279	$7,85 \pm 0,01$
${}_{84}\text{Po}^{211}$	${}_{82}\text{Pb}^{207}$	7,594	$6,74 \pm 0,01$

os valores da tabela 5 estão na curva da figura 3.

Tabela 6 - Série do Tório

ISÓTOPO PAI Z_P	ISÓTOPO FILHO Z_F	ENERGIA E (MeV)	RÁIO NUCLEAR r_n $= 10^{-13}$ cm
$^{90}\text{Th}^{232}$	$^{88}\text{Ra}^{228}$	4,081	$8,92 \pm 0,01$
$^{90}\text{Th}^{228}$	$^{88}\text{Ra}^{224}$	5,520	$8,70 \pm 0,01$
$^{88}\text{Ra}^{224}$	$^{86}\text{Rn}^{220}$	5,780	$8,59 \pm 0,01$
$^{86}\text{Rn}^{220}$	$^{84}\text{Po}^{216}$	6,404	$8,54 \pm 0,01$
$^{84}\text{Po}^{216}$	$^{82}\text{Pb}^{212}$	6,906	$8,54 \pm 0,01$
$^{85}\text{At}^{216}$	$^{83}\text{Bi}^{212}$	7,247	$8,15 \pm 0,01$
$^{83}\text{Bi}^{212}$	$^{81}\text{Tl}^{208}$	6,090	$7,49 \pm 0,01$
$^{84}\text{Po}^{212}$	$^{82}\text{Pb}^{208}$	8,955	$8,06 \pm 0,01$

os valores da tabela 6 estão na curva da figura 5.

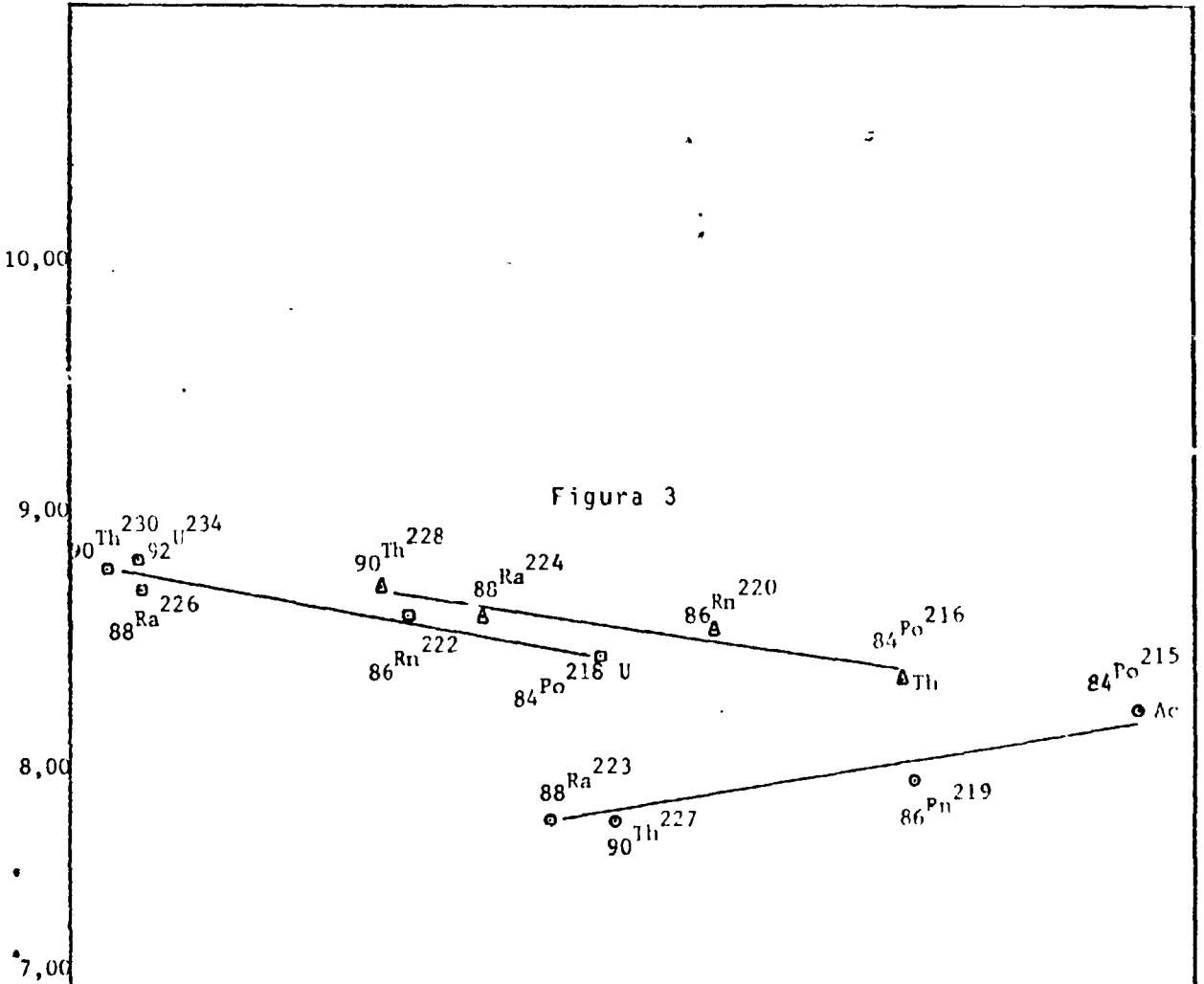
4.3. COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS OBTIDOS POR OUTROS PESQUISADORES

É útil fazermos comparações com os trabalhos sobre o raio nuclear r_n , mais frequentemente encontrados na literatura. As tabelas a seguir mostram os valores das diversas séries e seus autores:

Tabela 7 - Série do Urânio

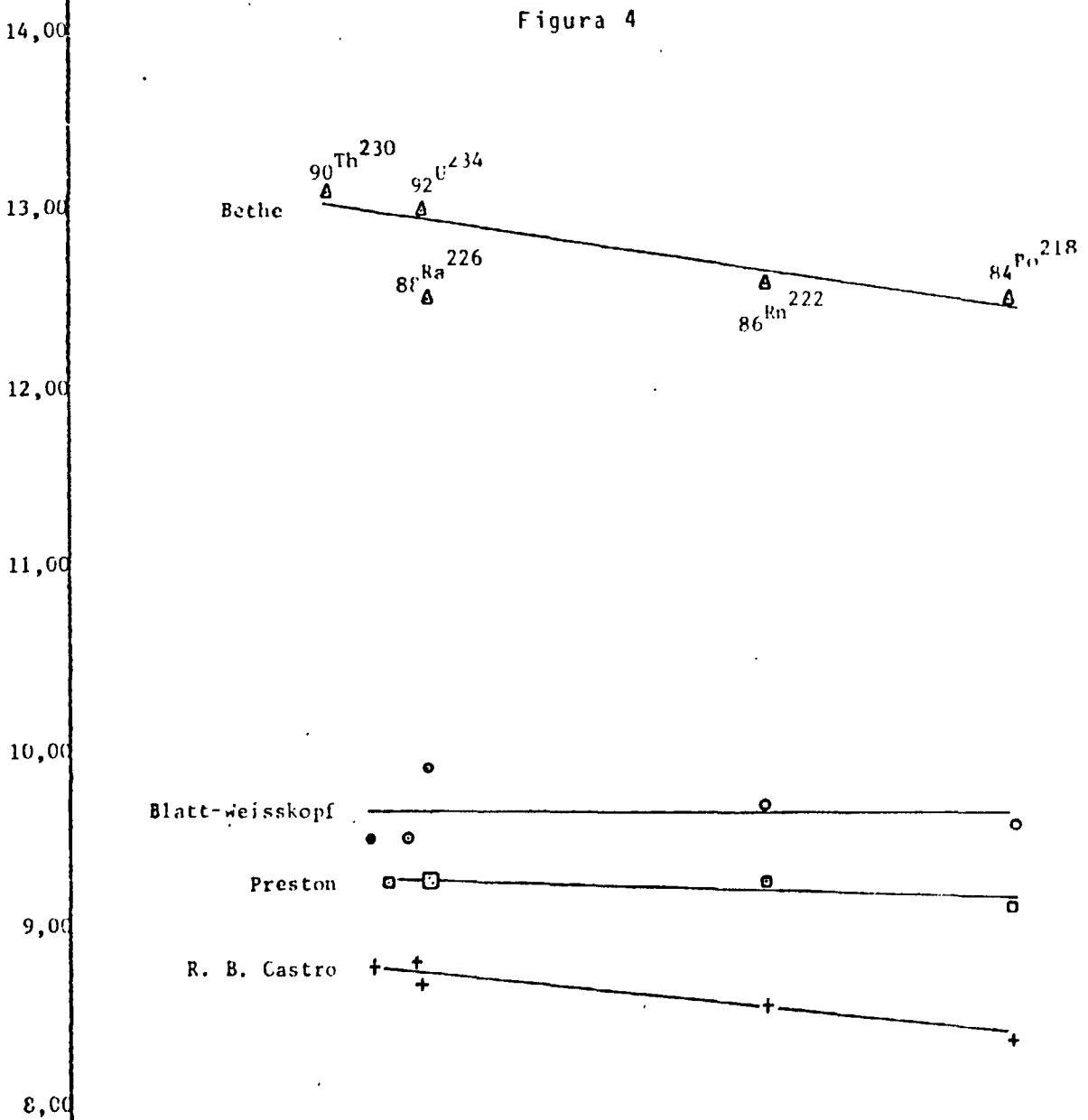
ISÓTOPOS	BÉTHÉ (Be-1)		FRÉSTON (Pr-1)		BLATT-WEISSHOFF (We-1)		M. R. CÁSTRO	
	E (MeV)	$r_n \cdot 10^{-13}$ cm	E (MeV)	$r_n \cdot 10^{-13}$ cm	E (MeV)	$r_n \cdot 10^{-13}$ cm	E (MeV)	$r_n \cdot 10^{-13}$ cm
$^{92}\text{U}^{238}$ $^{90}\text{Th}^{234}$	4,15	13,2	4,31	9,37	4,25	9,6	4,197	9,52
$^{92}\text{U}^{235}$ $^{90}\text{Th}^{231}$	4,26	13,0	4,80	9,26	4,84	9,5	4,856	8,80
$^{90}\text{Th}^{230}$ $^{88}\text{Ra}^{226}$	4,67	13,1	4,80	9,26	4,76	9,5	4,771	8,78
$^{88}\text{Ra}^{226}$ $^{86}\text{Rn}^{222}$	4,88	12,5	4,679	9,29	4,88	9,9	4,870	8,69
$^{86}\text{Rn}^{222}$ $^{84}\text{Po}^{218}$	5,59	12,6	5,589	9,28	5,59	9,7	5,599	8,59
$^{84}\text{Po}^{218}$ $^{82}\text{Th}^{214}$	6,11	12,5	6,112	9,14	6,12	9,6	6,111	8,42
$^{85}\text{At}^{218}$ $^{83}\text{Bi}^{214}$	-	-	-	-	-	-	6,883	8,05
$^{83}\text{Bi}^{214}$ $^{81}\text{Tl}^{210}$	5,61	10,9	-	-	5,61	9,2	5,618	9,01
$^{84}\text{Po}^{214}$ $^{82}\text{Th}^{210}$	7,83	13,9	-	-	7,83	9,3	7,833	8,25
$^{84}\text{Po}^{210}$ $^{82}\text{Th}^{206}$	5,40	11,5	5,410	8,27	5,40	8,3	5,407	7,70

os valores da tabela 7 estão na curva da figura 1.

$r, 10^{-13} \text{ cm}$


A figura representa o raio nuclear r , séries do Urânio, Actínio e Tório, em função da energia E .

$r, 10^{-13}$ cm



A figura representa o raio nuclear r , para a série do Urânio, em função da energia E .

Tabela 8 - Série do Actínio

ISÓTOPOS	BETHÉ (Be-1)		PRESTON (Pr-1)		BLATT-WEISSKOPF (We-1)		R. B. CASTRO	
	E (MeV)	$r, 10^{-13}$ cm	E (MeV)	$r, 10^{-13}$ cm	E (MeV)	$r, 10^{-13}$ cm	E (MeV)	$r, 10^{-13}$ cm
$^{92}\text{U}^{235}$ $^{90}\text{Th}^{231}$	-	-	-	-	-	-	4,679	7,69
$^{91}\text{Pa}^{231}$ $^{89}\text{Ac}^{227}$	5,16	11,6	5,09	8,68	-	-	5,118	7,93
$^{89}\text{Ac}^{227}$ $^{87}\text{Fr}^{223}$	-	-	-	-	5,01	9,6	5,013	9,43
$^{87}\text{Fr}^{223}$ $^{85}\text{At}^{219}$	-	-	-	-	-	-	5,43	10,87
$^{85}\text{At}^{219}$ $^{83}\text{Bi}^{215}$	-	-	-	-	-	-	6,300	8,31
$^{90}\text{Th}^{227}$ $^{88}\text{Ra}^{223}$	6,16	11,4	-	-	6,16	8,8	6,140	7,79
$^{86}\text{Ra}^{223}$ $^{86}\text{Rn}^{219}$	5,82	12,0	-	-	5,82	9,7	5,979	7,80
$^{86}\text{Rn}^{219}$ $^{84}\text{Po}^{215}$	6,95	12,0	6,953	8,70	6,94	9,6	6,916	7,95
$^{84}\text{Po}^{215}$ $^{82}\text{Pb}^{211}$	7,51	12,8	7,508	8,99	7,50	9,5	7,526	8,21
$^{85}\text{At}^{215}$ $^{83}\text{Bi}^{211}$	-	-	-	-	8,15	9,3	8,178	8,01
$^{83}\text{Bi}^{211}$ $^{81}\text{Tl}^{207}$	6,74	10,6	6,739	7,9	-	-	6,279	7,83
$^{84}\text{Po}^{211}$ $^{82}\text{Pb}^{207}$	7,58	13,9	-	-	-	-	7,504	6,74

Tabela 9 - Série do Tório

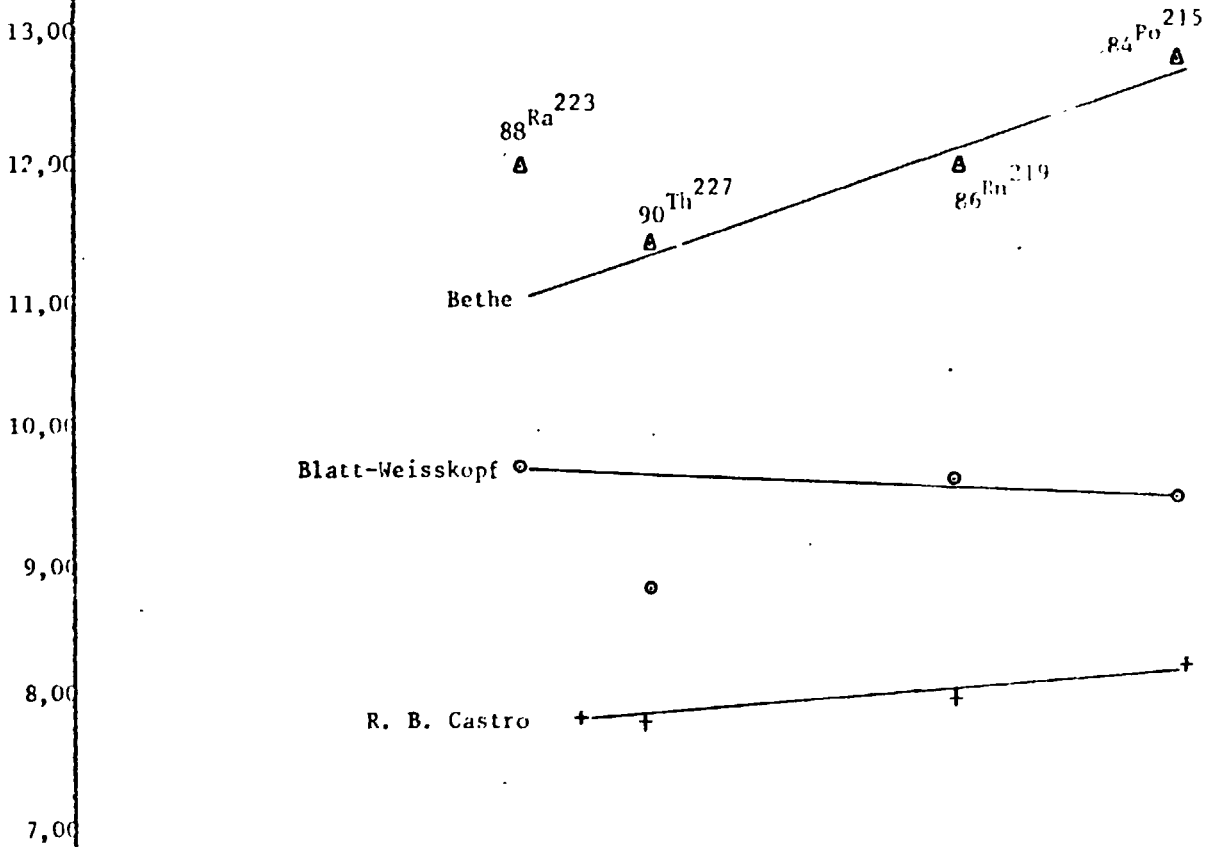
ISÓTOPOS	BETHÉ (Be-1)		PRESTON (Pr-1)		BLATT-WEISSKOPF (We-1)		R. B. CASTRO	
	E (MeV)	$r, 10^{-13}$ cm	E (MeV)	$r, 10^{-13}$ cm	E (MeV)	$r, 10^{-13}$ cm	E (MeV)	$r, 10^{-13}$ cm
$^{90}\text{Th}^{232}$ $^{88}\text{Ra}^{228}$	4,34	11,3	3,99	9,92	4,05	9,8	4,081	8,92
$^{90}\text{Th}^{228}$ $^{88}\text{Ra}^{224}$	5,52	12,3	5,517	9,33	5,52	9,5	5,520	8,70
$^{88}\text{Ra}^{224}$ $^{86}\text{Rn}^{220}$	5,79	12,5	5,786	9,29	5,78	9,8	5,784	8,59
$^{86}\text{Rn}^{220}$ $^{84}\text{Po}^{216}$	6,47	12,3	6,400	9,28	6,39	9,7	6,404	8,51
$^{84}\text{Po}^{216}$ $^{82}\text{Pb}^{212}$	6,90	12,7	6,904	9,12	6,89	9,3	6,906	8,34
$^{85}\text{At}^{216}$ $^{83}\text{Bi}^{212}$	-	-	-	-	-	-	7,937	8,13
$^{83}\text{Bi}^{212}$ $^{81}\text{Tl}^{208}$	6,20	10,6	6,1607	7,5	6,20	8,0	6,000	7,49
$^{84}\text{Po}^{212}$ $^{82}\text{Pb}^{208}$	8,95	13,9	-	-	8,95	9,0	8,953	8,06

os valores das tabelas 8 e 9 estão nas curvas das figuras 5 e 6 respectivamente.

Concluindo as tabelas comparativas apresentamos a tabela a seguir com os valores das meias vidas, obtidas experimentalmente.

$r, 10^{-13} \text{ cm}$

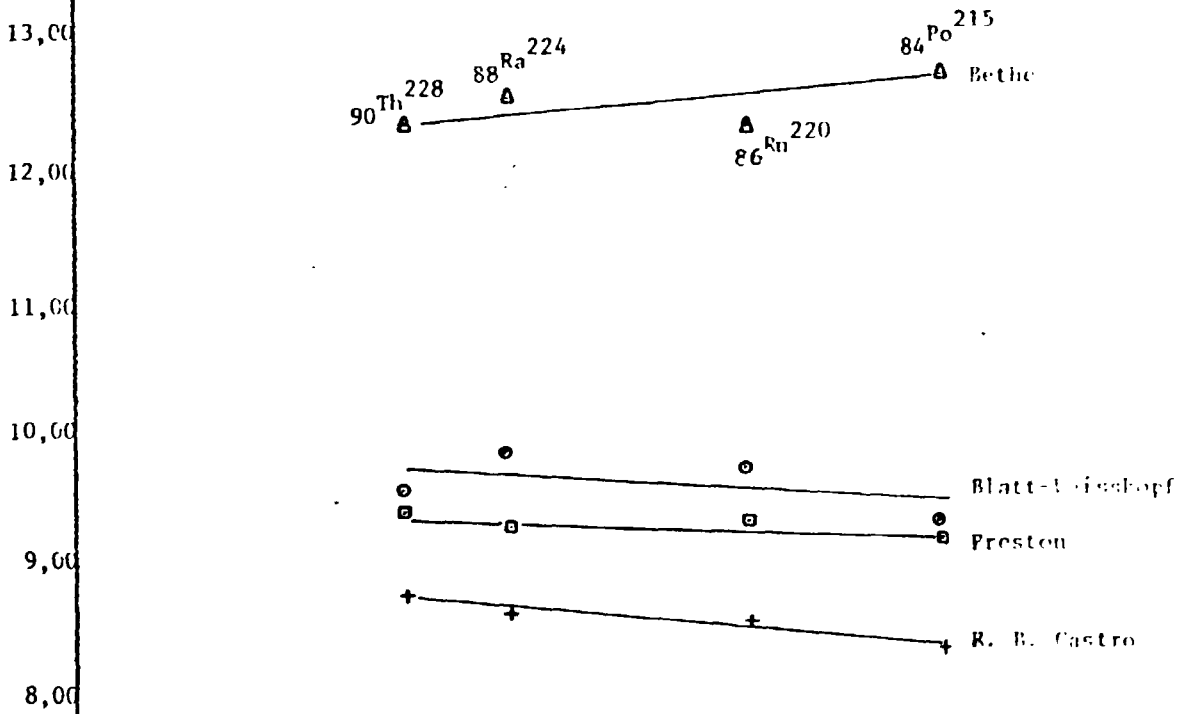
Figura 5



A figura representa o raio nuclear r , para a série do Actínio, em função da energia E .

$r, 10^{-13} \text{ cm}$

Figura 6



A figura representa o raio nuclear r , para a série de Tório, em função da energia E .

Tabela 10 - Série do Urânio

Z _p	Z _f	GAMOV (Ca-1)		BLATT-WEISSKOPF (We-2)		KAPLAN (Ka-1)		D. E. CARD (Ca-1)		HANDEJOK		R. B. CASTRO	
		E MeV	T _{1/2}	E MeV	T _{1/2}	E MeV	T _{1/2}	E MeV	T _{1/2}	E MeV	T _{1/2}	E MeV	T _{1/2}
90 ²³⁸ U _f	90 ²³¹ Th _f	4,05	4,5 = 10 ⁹ a	4,25	4,51 = 10 ⁹ a	4,20	4,50 = 10 ⁹ a	4,2	4,2 = 10 ⁹ a	4,197	4,46 = 10 ⁹ a	4,197	4,49 = 0,19 × 10 ⁹ a
92 ²³⁴ U _{fz}	90 ²³⁰ Th _{fz}	4,63	~10 ⁶ a	4,84	2,35 = 10 ³ a	4,768	2,50 = 10 ³ a	4,8	2,5 = 10 ³ a	4,856	2,45 = 10 ³ a	4,856	2,2 = 0,11 × 10 ³ a
90 ²³⁰ Th _{fz}	88 ²²⁶ Ra _{fz}	4,54	7,6 = 10 ⁴ a	4,76	1 = 10 ³ a	4,68	8,0 = 10 ⁴ a	4,7	8,0 = 10 ⁴ a	4,771	7,54 = 10 ⁴ a	4,771	7,72 = 0,35 × 10 ⁴ a
88 ²²⁶ Ra _{fz}	86 ²²² Rn _{fz}	4,793	1590 a	4,88	1700 a	4,777	1620 a	4,8	1620 a	4,870	1600 a	4,870	1662 ± 69 a
86 ²²² Rn _{fz}	84 ²¹⁸ Po _{fz}	5,48	3,825 d	5,59	3,83 d	5,386	3,82 d	5,5	3,8 d	5,590	3,82 d	5,590	3,85 ± 0,16 d
84 ²¹⁸ Po _{fz}	82 ²¹⁴ Pb _{fz}	6,1124	3,05 min	6,12	3,05 min	5,998	3,05 min	6,0	3,1 min	6,114	3,11 ± 0,02 min	6,114	3,11 ± 0,12 min
85 ²¹⁵ At _{fz}	83 ²¹⁴ Bi _{fz}	-	-	-	-	6,63	1,5 = 2,0 sec	6,6	2 sec	6,885	1,6 = 0,4 sec	6,883	1,64 ± 0,07 sec
83 ²¹⁴ Bi _{fz}	81 ²¹⁰ Tl _{fz}	-	-	5,61	7,6 d	5,51	19,7 min	5,5	2,0 min	-	-	5,618	19,68 ± 0,76 min
84 ²¹⁴ Po _{fz}	82 ²¹⁰ Pb _{fz}	7,683	1,9 = 10 ⁻⁴ sec	7,83	1,5 = 10 ⁻⁴ sec	7,683	1,61 = 10 ⁻⁴ sec	7,7	1,6 = 10 ⁻⁴ sec	7,835	163 μs	7,835	165,24 ± 0,06 μs
84 ²¹⁰ Po _{fz}	82 ²⁰⁶ Pb _{fz}	5,3003	136,3 d	5,40	138,3 d	5,300	135,3 d	5,3	135 d	5,407	135,4 d	5,407	136,22 ± 5,32 d

Tabela 11 - Série do Actínio

Z _p	Z _f	GAMOV		D. E. CARD		BLATT-WEISSKOPF		KAPLAN		HANDBOOK		R. B. CASTRO	
		E MeV	T _{1/2}	E MeV	T _{1/2}	E MeV	T _{1/2}	E MeV	T _{1/2}	E MeV	T _{1/2}	E MeV	T _{1/2}
92 ²³⁵ U _{fz}	90 ²³¹ Th _{fz}	5,01	1,25 = 10 ⁸ a	4,4	7,1 = 10 ⁸ a	-	-	4,559	7,10 = 10 ⁸ a	4,6793	7,08 = 10 ⁸ a	4,6793	6,96 ± 0,32 × 10 ⁸ a
91 ²³¹ Pa _{fz}	89 ²²⁷ Ac _{fz}	-	-	5,0	3,4 = 10 ⁶ a	-	-	5,046	3,43 = 10 ⁶ a	5,148	3,27 = 10 ⁶ a	5,148	3,33 ± 0,15 × 10 ⁶ a
89 ²²⁷ Ac _{fz}	81 ²²³ Fr _{fz}	-	-	4,9	22 a	5,04	1810 a	4,94	21,6 a	5,043	21,77 ± 0,03 a	5,043	21,21 ± 0,85 a
87 ²²³ Fr _{fz}	85 ²¹⁹ At _{fz}	-	-	-	-	-	-	5,34	22 min	-	-	5,43	21,99 ± 0,78 min
85 ²¹⁹ At _{fz}	83 ²¹⁵ Bi _{fz}	-	-	-	-	-	-	6,27	0,9 min	6,390	54 s	6,390	53,97 ± 2,19 s
90 ²²⁷ Th _{fz}	88 ²²³ Ra _{fz}	6,051	18,9 d	-	-	6,16	93 d	6,03	18,17 d	6,146	18,72 d	6,146	18,75 ± 0,83 d
88 ²²³ Ra _{fz}	86 ²¹⁹ Rn _{fz}	5,719	11,2 d	5,7	11 d	5,82	20,2 d	5,864	11,68 d	5,979	11,43 ± 0,02 d	5,979	11,66 ± 0,51 d
86 ²¹⁹ Rn _{fz}	84 ²¹⁵ Po _{fz}	6,826	3,92 d	6,8	3,9 s	6,94	4,7 s	6,810	3,92 s	6,946 (1)	3,96 s	6,946	3,99 ± 0,17 s
84 ²¹⁵ Po _{fz}	82 ²¹¹ Pb _{fz}	7,368	2 × 10 ⁻³ s	7,4	1,8 = 10 ⁻³ s	7,50	1,8 = 10 ⁻³ s	7,37	1,83 = 10 ⁻³ s	7,526	1,78 μs	7,526	1,78 ± 0,07 × 10 ⁻³ s
85 ²¹⁵ At _{fz}	83 ²¹¹ Ra _{fz}	-	-	8,0	10 ⁻⁴ s	8,15	10 ⁻⁴ s	8,00	10 ⁻⁴ s	8,178	100 μs	8,178	101,13 ± 4,03 μs
83 ²¹¹ Bi _{fz}	81 ²⁰⁷ Tl _{fz}	-	-	6,6	2,2 min	-	-	6,617	2,15 min	6,279	2,14 ± 0,02 min	6,279	2,15 ± 0,09 min
84 ²¹¹ Po _{fz}	82 ²⁰⁷ Pb _{fz}	-	-	7,4	0,52 s	-	-	7,441	0,52 s	7,594	0,52 s	7,594	0,52 ± 0,02 s

Tabela 12 - Série do Tório

Z_p	Z_f	CANDU		BLATT-WEISSKOPF		RAPLAN		MARBORCK		R. B. CASTRO		D. E. CARO	
		E MeV	$T_{1/2}$	E MeV	$T_{1/2}$	E MeV	$T_{1/2}$	E MeV	$T_{1/2}$	E MeV	$T_{1/2}$	E MeV	$T_{1/2}$
90Th ²³²	83Ra ²²⁶ (CSTRM)	4,23	$1,65 \times 10^{10}$ a	4,05	$1,39 \times 10^{10}$ a	4,007	$1,39 \times 10^{10}$ a	4,051	$1,4 \times 10^{10}$ a	4,041	$1,41 \times 10^{10}$ a	4,0	$1,4 \times 10^{10}$ a
90Th ²²⁸ (RaTh)	88Ra ²²⁴ (Thx)	5,420	1,90 a	5,52	2,64 a	5,423	1,910 a	5,520	1,913 a	5,520	$1,92 \pm 0,03$ a	5,4	1,9 a
88Ra ²²⁴ (Thx)	86Rn ²²⁰ (EaTh)	5,6825	3,64 d	5,78	3,8 d	5,681	3,64 d	5,739	$3,66 \pm 0,04$ d	5,789	$3,67 \pm 0,15$ d	5,7	3,6 d
86Rn ²²⁰ (EaTh)	84Po ²¹⁶ (ThA)	6,2832	54,5 s	6,39	54,5 s	6,280	51,5 s	6,404	$55,6 \pm 0,1$ s	6,404	$54,32 \pm 2,19$ s	6,3	52 sFR
84Po ²¹⁶ (ThA)	82Pb ²¹² (ThB)	6,7759	0,145 s	6,89	0,158 s	6,774	0,16 s	6,906	0,15 s	6,906	$0,15 \pm 0,006$ s	6,8	0,16 s
83Ac ²¹⁶	83Bi ²¹² (ThC)	-	-	-	-	7,79	3×10^{-4} s	7,947	300 μ s	7,947	$300,94 \pm 11,95$ μ s	-	-
83Bi ²¹² (ThC)	81Tl ²⁰⁸ (ThC')	-	-	6,20	11 h	6,086	60,5 min	6,090	$1,009 \pm 0,101$ h	6,090	$1,02 \pm 0,04$ h	6,1	61 min
84Po ²¹² (ThC')	82Pb ²⁰⁸ (ThD)	-	-	8,95	$3,0 \times 10^{-7}$ s	8,780	$3,0 \times 10^{-7}$ s	8,953	0,3 μ s	8,953	$0,30 \pm 0,01$ μ s	8,8	3×10^{-7} s

4.4. CONCLUSÃO

Evidências experimentais mostram que se Z é par e $A - Z$ também par, em particular, o momento angular do núcleo é zero ($M_y = 2$). Como as partículas alfa formadas estão no mesmo estado s , os valores dos raios nucleares devem ser constantes. Entretanto, os valores obtidos para:

a) série do urânio - apresentam uma variação percentual entre o menor e o maior raio, a partir do $92U^{234}$ até o $84Po^{213}$ de 4,58% para os valores de Bethe; 1,61% para os valores de Preston; 4,04% para os valores de Blatt-Weisskopf; e 4,32% para os valores de R. B. Castro.

b) série do actínio - apresentam entre o $90Th^{227}$ e o $84Po^{215}$ uma variação de 10,94% para Bethe; 22,4% para Blatt-Weisskopf; e 6,26% para os valores de R. B. Castro.

c) série do tório - apresentam entre o ${}_{90}\text{Th}^{228}$ e o ${}_{84}\text{Po}^{216}$ uma variação de 3,15% para Bethe; 2,30% para Preston; 5,10% para Blatt-Weisskopf; e 4,14% para os valores de R.B. Castro.

Tendo em vista essa variação percentual, é possível admitir que as partículas alfa, série do urânio e tório, no momento da emissão encontram-se no mesmo estado s. Para a variação da série do actínio é justificável supor que as partículas alfa não estavam no mesmo estado.

Como pode ser verificado os raios nucleares das séries por nós calculados, apresentam valores menores que os obtidos por outros pesquisadores. Provavelmente isso se deve ao emprego de técnicas relativas ao problema de dois corpos, isto é, individualizamos as partículas alfa e o núcleo filho, reduzindo assim o problema de muitos corpos a uma interação entre a partícula alfa emitida e o núcleo filho.

Se tivéssemos considerado a preexistência da partícula alfa, dentro do núcleo, na qual existem evidências experimentais em estudos de Efeito Fotonuclear (Da-1) de que isto ocorra, seu movimento seria complicado e não existiria um potencial central bem definido. Desta forma os valores por nós calculados são cerca de 7% menores do que os calculados por outros pesquisadores, com exceção de Bethe que aplica a teoria de muitos corpos e obtém um valor médio de $12,3 \times 10^{-13}$ cm \pm 10% (Be-2), incluindo neste valor o raio nuclear da partícula alfa.

B I B L I O G R A F I A

- (Be-1) - BETHE, H. A. - *Rev. Mod. Phys.*, 2, 166, (1937).
- (Be-2) - BETHE, H. A. - *Rev. Mod. Phys.*, 2, 163, (1937).
- (Ca-1) - CARO, D. E., MACDONELL, J. A. e SPICER, B. M. - *Modern Physics*, 213, (1971).
- (Co-1) - GURNEY, R. W. e CONDON, E. U. - *Phys. Rev.*, 2, 133, (1929).
- (Da-1) - SOUZA SANTOS, M. D. e COLABORADORES. - *Proceedings of the International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, Volume 2, Physics; Research Reactors, Nações Unidas, N. Y., 182, (1956).
- (Dv-1) - DAVYDOV, A. S. - *Quantum Mechanics*, Pergamon International, 71, (1976).
- (Fe-1) - FERMI, E. - *Nuclear Physics University of Chicago Press*, 58, (1937).
- (Ga-1) - GAMOW, G. - *Z. Phys.*, 51, 208, (1928).
- (Ga-2) - GAMOW, G. - *Structure of Atomic Nuclei and Nuclear Transformations*, Oxford, At the Clarendon Press, 98, (1937).

- (Ga-3) - GAMOW, G. - *Structure of Atomic Nuclei and Nuclear Transformations*, Oxford, At the Clarendon Press, 258, (1937).
- (Ka-1) - KAPLAN, I. - *Física Nuclear*, Guanabara Dois, 207, (1978).
- (Ma-1) - MARMIER, P. e SHELDON, E. - *Physics of Nuclei and Particles*, Academic Press, N. Y., 317, (1962).
- (Mq-1) - MARQUEZ, L. - *Phys. Rev.*, C 2, 1065, (1982).
- (My-1) - MAYER, M. G. e JENSEN, J. H. D. - *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*, N. Y., John Wiley & Sons, (1955).
- (My-2) - MAYER, M. G. - *Phys. Rev.*, 1, 16, (1950).
- (Pr-1) - PRESTON, M. A. - *Phys. Rev.*, 12, 870, (1947).
- (We-1,2) - BLATT, J. M. e WEISSKOPF, V. F. - *Theoretical Nuclear Physics*, 578, (1952).
- (Wz-1) - WENTZEL, G. - *Z. Phys.*, 38, 526, (1926).