

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

O PAPEL DA DINÂMICA MESÔNICA NA
SATURAÇÃO DA MATÉRIA NUCLEAR

Éder Gonçalves

Orientadora: Profa. Dra. Maria Carolina Nemes

Dissertação de Mestrado
São Paulo 1988

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Gonçalves, Eder

O papel da dinâmica mesônica na saturação da matéria nuclear. São Paulo, 1988.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.

Área de Concentração: Física Nuclear

Orientador: Profa. Dra. Maria Carolina Nemes

Unitermos: 1.Saturação da matéria nuclear; 2.Matéria nuclear; 3.Hadro-dinâmica quântica.

USP/IF/SBI - 01/88

Agradeço

à profa. Carolina, pelo muito que aprendi sob a sua orientação e pela confiança e paciência, principalmente na fase final deste trabalho ;

ao prof. Piza, por sua valiosa ajuda sempre que necessária ;

aos meus pais, pelo amor com que empreenderam a luta pela minha educação ;

a todos colegas, pela cordialidade do dia a dia;

à FAPESP, pelo auxílio financeiro .

RESUMO

O problema da saturação da matéria nuclear é analisado no contexto da hidrodinâmica quântica, no limite não relativístico do modelo proposto por J. D. Walecka⁽⁵⁾. No contexto original a saturação da matéria nuclear é obtida como consequência direta de efeitos relativísticos e os mésons escalares e vetoriais são tratados estaticamente. No presente trabalho estudamos o efeito da dinâmica dos mésons na saturação da matéria nuclear, por meio de uma aproximação tipo Born-Oppenheimer ao estado fundamental. Obtemos um limite superior para a curva de saturação decidindo se os efeitos relativísticos, neste modelo, são essenciais à saturação da matéria nuclear e como contribuem os mecanismos ligados a dinâmica mesônica para a mesma.

ABSTRACT

The problem of the saturation of nuclear matter in the non-relativistic limit of the model proposed by J.D. Walecka⁽⁵⁾ is studied. In the original context nuclear matter saturation is obtained as a direct consequence of relativistic effects and both scalar and vector mesons are treated statically. In the present work we investigate the effect of the meson dynamics for the saturation using a Born-Oppenheimer approximation for the ground state. We obtain an upper limit for the saturation curve of nuclear matter and are able to decide how essential is the relativistic treatment of the nucleons for this problem.

ÍNDICE

Introdução	1
1. Aproximação de campo médio na QHD-I	6
2. O limite não relativístico da QHD-I	16
3. Um limite superior para a curva de saturação	25
Conclusão	33
Apêndice A	34
Apêndice B	37
Referências	40

INTRODUÇÃO

No início dos anos cinquenta nosso conhecimento sobre a força nuclear tinha origem basicamente fenomenológica. Nesta época, um dos programas de pesquisa que os físicos nucleares tentavam concretizar era obter as propriedades dos núcleos finitos a partir de um potencial de dois corpos. Este potencial, construído de modo a descrever observáveis associados ao espalhamento e ao estado ligado de dois núcleons, não era univocamente determinado. O conceito de matéria nuclear infinita foi introduzido por Brueckner⁽¹⁾ como um estágio inicial deste programa de pesquisa, servindo, ao mesmo tempo, como um teste adicional para os diferentes tipos de potencial nuclear existentes.

A matéria nuclear é um sistema homogêneo, com simetria de spin-isospin, que contém infinitos núcleons interagindo apenas através da força nuclear. A invariância translacional presente em tal sistema garante que as funções de onda de partícula simples sejam ondas planas, trazendo grandes simplificações para cálculos envolvendo observáveis de muitos corpos. No equilíbrio, os valores das grandezas características deste sistema são extrapolados de propriedades observadas em núcleos finitos. O termo de volume da fórmula semiempírica de massa fornece a energia de ligação por núcleon (ϵ), enquanto a densidade de equilíbrio (ρ_0) é obtida da

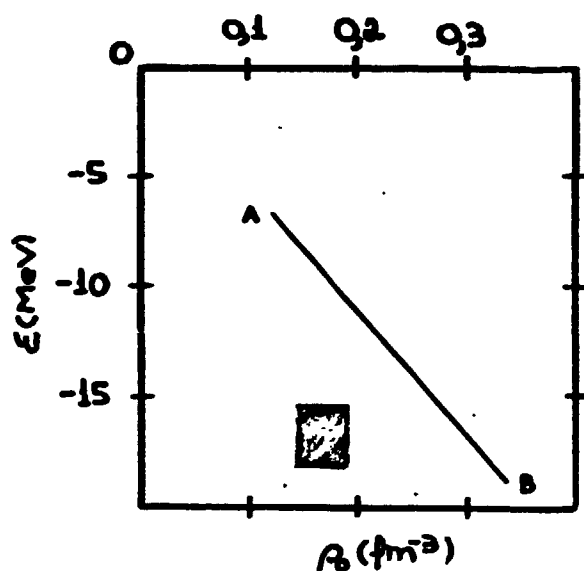
da região central de núcleos pesados. Assim, a chamada propriedade de saturação da matéria nuclear fica

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} \right|_{\rho_0} = 0 \quad ; \quad \mathcal{E}(\rho_0) \approx -16 \text{ MeV}$$

com $\rho_0 = 0,17$ núcleons por fm^3 .

Foi Goldstone⁽²⁾ quem elaborou, baseando-se na teoria de perturbação da QED, uma expansão diagramática para a energia do estado fundamental. Esta expansão, que isola a dependência correta da energia com o número de partículas, tornou possível um ataque ao problema da saturação da matéria nuclear. A presença do coreço fortemente repulsivo no potencial núcleon-núcleon conduz a uma série divergente. Este inconveniente é superado com a substituição do potencial núcleon-núcleon por um potencial efetivo, a chamada matriz de reação⁽²⁾; que é uma soma parcial em todas as ordens da interação de dois corpos. A matriz de reação utilizada na expansão de Goldstone constitui a teoria de Bethe-Brueckner-Goldstone (BBG). Cálculos com a BBG fornecem para o mínimo da função $\mathcal{E}(\rho)$, correspondente ao equilíbrio do sistema, pontos situados ao longo do segmento de reta AB, desenhado na figura da próxima página. Estes resultados estão claramente em desacordo com os dados semi-empíricos, representados na mesma figura pelo retângulo escuro. No segmento de reta AB, conhecido como linha de Coester⁽³⁾, os potenciais

com termo tensorial forte estão concentrados na extremidade A, isto é, saturam próximo da densidade correta mas produzem um sistema pouco ligado. Discrepâncias deste tipo, encontradas mesmo com o uso de potenciais altamente sofisticados — como é o potencial de Paris — levaram ao questionamento da utilização da BBG no tratamento de sistemas nucleares de muitos corpos.



Na resolução deste problema obteve grande sucesso a inclusão de alguns efeitos de correlação entre os núcleons. Estes efeitos de correção resultam em interações dependentes da densidade (ref. 4).

Uma abordagem alternativa capaz de descrever quantitativamente as propriedades da matéria nuclear infinita foi desenvolvida por J.D. Walecka⁽⁵⁾. É a chamada hidrodinâmica quântica I, QHD-I. Neste modelo, onde os núcleons interagem através da troca de mésons escalares (σ)

e vetoriais (w), a saturação da matéria nuclear é obtida no contexto de uma aproximação de campo médio, com os campos mesônicos sendo substituídos por seus valores esperados, que são grandezas clássicas. O mecanismo de saturação, nesta aproximação, está essencialmente vinculado à contração de Lorentz na densidade escalar.

Este resultado colocou em destaque a contribuição que os efeitos relativísticos podem dar a um melhor entendimento das propriedades da matéria nuclear. Um bom exemplo disto é a teoria de "Brueckner-Dirac"⁽⁶⁾ que descreve quantitativamente tanto a saturação da matéria nuclear como o espalhamento núcleon-núcleon.

A relevância dos efeitos relativísticos torna-se mais aparente quando lembramos que o modelo representado pelo potencial estático deduzido da lagrangiana da QHD-I, evidentemente não conduz à saturação. No entanto, um modelo construído com base neste potencial não contém toda a informação dinâmica presente na lagrangiana. Portanto, os resultados obtidos diretamente do potencial estático não são suficientes para decidir se os efeitos relativísticos são essenciais para a saturação da matéria nuclear na QHD-I.

Informações mais detalhadas sobre a teoria da matéria nuclear podem ser encontradas nos trabalhos da referência (7).

Nesta dissertação vamos construir para a QHD-I um limite não relativístico onde a dinâmica mesônica possa ser tratada explicitamente, como foi feito por Negele⁽⁸⁾, que mostra numericamente como os mésons dinâmicos atuam na saturação do modelo não relativístico unidimensional. Em três dimensões o cálculo numérico é mais complicado e não foi realizado. Neste trabalho obtemos um limite superior para a curva de saturação da matéria nuclear com as técnicas propostas em (8) mostrando que no caso de três dimensões, dentro do contexto deste modelo, o mecanismo de saturação só pode estar relacionado com os efeitos relativísticos.

No capítulo inicial fazemos uma breve revisão da aproximação de campo médio na QHD-I. Esta revisão visa mostrar como a atuação da contração de Lorentz conduz à saturação. O limite não relativístico do modelo é construído no segundo capítulo e consiste em descrever a dinâmica dos mésons através de uma equação de Pauli, em substituição à equação de Dirac. Ainda no segundo capítulo comparamos a aproximação de campo médio relativística com a não relativística. O último capítulo é dedicado à obtenção de um limite superior para a densidade de energia de ligação. Este resultado é decisivo no que se refere à questão da saturação da matéria nuclear sem a presença de efeitos relativísticos na QHD-I.

APROXIMAÇÃO DE CAMPO MÉDIO NA QHD-I

A interação entre dois núcleons pode ser qualitativamente bem representada por um potencial do tipo "one-boson-exchange", contendo bósons vetoriais e escalares. Consistente com esse fato, J. D. Walecka⁽⁵⁾ propõe um modelo construído dentro do formalismo da teoria quântica dos campos, visando tratar sistemas nucleares com muitos corpos. Nesse modelo estão presentes três campos: o campo bariônico Ψ , o campo escalar ϕ e o campo vetorial V^μ , que descrevem respectivamente os núcleons, os mésons escalares neutros e os mésons vetoriais neutros. Para completar o modelo, considera-se ainda o acoplamento entre o campo escalar e a densidade bariônica e o acoplamento entre o campo vetorial e a densidade de corrente bariônica.

Adotando a já consagrada notação de Bjorken-Drell⁽⁹⁾, a densidade lagrangiana total, que é covariante, é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & \bar{\Psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_\phi^2 \phi^2) + \frac{1}{2} m_\rho^2 V_\mu V^\mu \\ & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + g_s \bar{\Psi} \Psi \phi - g_v \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi V_\mu \end{aligned} \quad (1.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$, e as massas do núcleon, do méson escalar e do méson vetorial são denotadas respectivamente por: M, m_ϕ e m_ρ .

As equações de movimento, geradas a partir de (1.1),

dão origem ao que se convencionou chamar "Quantum-Hadrodynamics I". Com o que já foi dito fica evidente que a QHD-I é uma teoria efetiva - não leva em consideração a estrutura interna dos núcleons e tem quatro parâmetros que devem ser ajustados a posteriori: as massas dos bósons e as constantes de acoplamento (g_v, g_s).

Substituindo a densidade lagrangiana (1.1) nas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\mu \psi)} = 0 \quad ; \quad c = \psi, \phi, V^\mu$$

obtemos as três equações de movimento que governam a QHD-I

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_v \gamma_\mu) - (M - g_s \phi)] \psi = 0 \quad , \quad (1.2)$$

$$(i\partial_\mu \partial^\mu + m_\phi^2) \phi = g_s \bar{\psi} \psi \quad , \quad (1.3)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\nu^2 V^\nu = g_v \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad . \quad (1.4)$$

A solução deste sistema de equações é muito complicada. Uma das causas desta complicação é o grande valor da constante de acoplamento associada às interações fortes, que impede a utilização das técnicas perturbativas desenvolvidas para a QED. O que precisamos é encontrar uma aproximação que torne simples a resolução destas equações, e, ao mesmo tempo, não interfira de maneira descontrolada nos observáveis que são importantes no estudo da matéria nuclear infinita.

Para mostrar que este sistema conserva o número

bariônico somamos à eq. (1.2) a sua adjunta

$$\bar{\psi}[\gamma^\mu(i\partial_\mu - g_v V_\mu) + (M - g_s \phi)] = 0$$

e obtemos

$$\bar{\psi}\gamma^\mu[\partial_\mu^\rightarrow + \partial_\mu^\leftarrow] = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0,$$

de modo que a densidade de corrente bariônica, $A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, é conservada. Deste resultado é imediata a conservação do número bariônico

$$A = \int_V d^3x A^0 = \int_V d^3x \psi^\dagger\psi$$

No limite de núcleons estáticos ($M \rightarrow \infty$), é das equações (1.3) e (1.4) que surge o potencial efetivo

$$V(r) = \frac{g_v^2}{4\pi} \frac{e^{-m_v r}}{r} - \frac{g_s^2}{4\pi} \frac{e^{-m_s r}}{r}$$

Este potencial, que pode representar qualitativamente o espalhamento núcleon-núcleon, é uma das motivações da QHD-I.

Para resolver o sistema de equações, 1.2 - 1.4, vamos considerar a matéria a alta densidade. Neste caso uma boa aproximação é substituir os campos mesônicos por seus valores esperados, que são grandezas clássicas. Nestas condições

$$\phi \rightarrow \langle \phi \rangle \equiv \phi_0, \quad (1.5)$$

$$V_\mu \rightarrow \langle V_\mu \rangle \equiv \delta_{\mu 0} V_0. \quad (1.6)$$

A última identidade é devida à invariância rotacional.

Esta é a aproximação de campo médio. Ela é do mesmo tipo que a usada quando, para campos intensos, a eletrodinâmica clássica é tomada como limite da QED, (ref. 8).

Usando a aproximação de campo médio as equações de movimento para os campos mesônicos na matéria nuclear ficam

$$\phi_0 = \frac{g_s}{m_s^2} \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \equiv \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s, \quad (1.7)$$

$$V_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \langle \bar{\Psi} \Psi \rangle \equiv \frac{g_v}{m_v^2} \rho_v. \quad (1.8)$$

Como já mostramos que o número de bárions é conservado a densidade bariônica, $\rho_B = A/\text{volume}$, é uma constante do movimento. Então, da equação (1.8) é conhecido diretamente o valor do campo V_0 .

Os núcleons, na aproximação de campo médio, são descritos pela equação de Dirac, agora linearizada

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - g_v \gamma^0 V_0 - M^*) \Psi = 0, \quad (1.9)$$

onde $M^* \equiv M - g_s \phi_0$ é a massa efetiva do núcleon.

As eqs. (1.7), (1.8) e (1.9) governam um mundo físico onde os bárions, descritos por campos quânticos (Ψ), estão imersos num condensado bosônico, descrito por campos mesônicos clássicos (V_0 e ϕ_0). Este novo mundo ainda apresenta as principais características do QHD-I: os graus de liberdade

mesônicos e a covariância.

Devido à invariância translacional da matéria nuclear, escrevemos a solução estacionária com energia positiva da eq. (1.9) como

$$\psi^{(+)} = u(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - iE(\vec{k})t} \quad (1.10)$$

onde $u(\vec{k}, \lambda)$ é um vetor coluna com quatro componentes, que depende do vetor de onda (\vec{k}), e do índice de spin-isospin (λ).

Substituindo (1.10) em (1.9) ficamos com

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*) u(\vec{k}, \lambda) = [E^+(\vec{k}) - g_v V_0] u(\vec{k}, \lambda), \quad (1.11)$$

que tem como auto valor

$$E^+(\vec{k}) = g_v V_0 + (\vec{k}^2 + M^{*2})^{1/2} \equiv g_v V_0 + E^*(\vec{k}),$$

e como auto vetor

$$u(\vec{k}, \lambda) = \left[\frac{E^*(\vec{k}) + M^*}{2E^*(\vec{k})} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E^* + M^*} \end{pmatrix} \chi$$

onde χ é um spinor de Pauli.

Para as soluções estacionárias com energia negativa

$$\psi^{(-)} = v(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + iE(\vec{k})t}$$

temos a eq. (1.9) escrita como

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M^*) v(\vec{k}, \lambda) = -[E^-(\vec{k}) - g_v V_0] v(\vec{k}, \lambda) \quad (1.12)$$

com

$$\tilde{\epsilon}(k) = g_v V_0 - E^*(k) ,$$

e

$$u(\vec{k}, \lambda) = \left[\frac{E^* + M^*}{2E^*} \right]^{1/2} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{E^* + M^*} \chi \\ 1 \end{pmatrix} .$$

O operador de campo $\Psi(\vec{x}, t)$, solução geral da eq. (1.9), é construído pela superposição das soluções das eqs. (1.11) e (1.12), ou seja,

$$\Psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \lambda} [A_{\vec{k}, \lambda} u(\vec{k}, \lambda) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - iE^* t} + B_{\vec{k}, \lambda}^+ v(\vec{k}, \lambda) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + iE^* t}] , \quad (1.13)$$

com os operadores $A_{\vec{k}, \lambda}$ (destrói núcleons) e $B_{\vec{k}, \lambda}^+$ (destrói anti-núcleons) satisfazendo as seguintes relações de anti-comutação

$$\{A_{\vec{k}, \lambda}, A_{\vec{k}', \lambda'}^+\} = \{B_{\vec{k}, \lambda}, B_{\vec{k}', \lambda'}^+\} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'} \quad (1.14)$$

e todas as outros anti-comutadores nulos.

Não devemos esquecer que o nosso interesse está na energia de ligação por núcleon. Para obtê-la vamos usar o tensor energia-momentum, definido por

$$T^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta(\partial_\nu c)} \partial^\mu c - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_0 , \quad (1.15)$$

que permite escrever a densidade de energia, na aproximação de campo médio, como

$$T^{00} = \frac{\delta \mathcal{L}_0^{cm}}{\delta(\partial_\nu c)} \partial^0 c - g^{00} \mathcal{L}_0^{cm} ,$$

onde

$$\mathcal{L}^{cm} = \bar{\Psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^0 g_V V_0^A - M^*) \Psi - \frac{1}{2} m_S^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} m_V^2 V_0^2,$$

é obtida com o uso de (1.7) e (1.8) em (1.1). Assim,

$$T_{cm}^{00} = i \bar{\Psi} \gamma^0 \partial^0 \Psi + \frac{1}{2} m_S^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} m_V^2 V_0^2$$

ou usando a equação de Dirac linearizada

$$T_{cm}^{00} = \Psi^\dagger (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\partial} + \beta M^* + g_V V_0) \Psi + \frac{1}{2} m_S^2 \phi_0^2 - \frac{1}{2} m_V^2 V_0^2.$$

Usamos a expressão acima para construir o operador hamiltoniano

$$H = \int_V d^3x T_{cm}^{00} = \int_V d^3x \Psi^\dagger [-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\partial} + \beta M^*] \Psi + g_V V_0 \int_V d^3x \Psi^\dagger \Psi + \frac{1}{2} (m_S^2 \phi_0^2 - m_V^2 V_0^2) V,$$

que com o uso das eqs. (1.13) e (1.14) fica

$$H = \sum_{\vec{k}\lambda} E^*(\vec{k}) (A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} - B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}\lambda}^\dagger) + g_V V_0 \hat{B} + (m_S^2 \phi_0^2 - m_V^2 V_0^2) \frac{V}{2}$$

onde $\hat{B} = \sum_{\vec{k}\lambda} (A_{\vec{k}\lambda}^\dagger A_{\vec{k}\lambda} + B_{\vec{k}\lambda} B_{\vec{k}\lambda}^\dagger)$ é a densidade bariônica.

Para eliminarmos os infinitos que surgem nesse nível da teoria quântica de campos introduzimos a ordenação normal, de modo que o operador hamiltoniano de campo médio fica definido como

$$H_{\text{eff}} = H - \langle 0|H|0\rangle - \delta H = \\ = \sum_{\mathbf{k}\lambda} E^* (A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}\lambda} + B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}\lambda}) + g_0 V_0 \hat{B} + \frac{1}{2} (m_S^2 V_0^2 - m_V^2 V_0^2) V ,$$

onde: $|0\rangle$ é o vácuo do modelo ,

$$\hat{B} = \sum_{\mathbf{k}\lambda} (A_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger A_{\mathbf{k}\lambda} - B_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger B_{\mathbf{k}\lambda}) ,$$

$$\delta H = - \sum_{\mathbf{k}} \left[(k^2 + M^2)^{1/2} - (k^2 + m^2)^{1/2} \right] .$$

Construimos o estado fundamental da matéria nuclear colocando quatro núcleons em cada estado de momentum \vec{k} , até atingir os estados com $|\vec{k}| \leq k_F$. É neste estado que vamos calcular o valor esperado das observáveis que caracterizam o sistema. A densidade bariônica fica

$$\rho_B = \langle \text{eff} | \bar{\psi} \psi | \text{eff} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda}^{\mathbf{k} \leq k_F} \bar{u} u = \frac{4}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{k} \leq k_F} d^3k = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3 ,$$

e, como já esperavamos, é uma constante do movimento. No caso da densidade escalar temos

$$\rho_S = \langle \text{eff} | \bar{\psi} \psi | \text{eff} \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda}^{\mathbf{k} \leq k_F} \bar{u} u = \frac{4}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{k} \leq k_F} d^3k \frac{M^*}{E^*} \quad (1.16)$$

de modo que a massa efetiva é determinada pela equação transcendental

$$M^* = M - \frac{4g_0^2}{(2\pi)^3 m_S^2} \int_{\mathbf{k} \leq k_F} d^3k \frac{M^*}{(k^2 + m^2)^{1/2}} \quad (1.17)$$

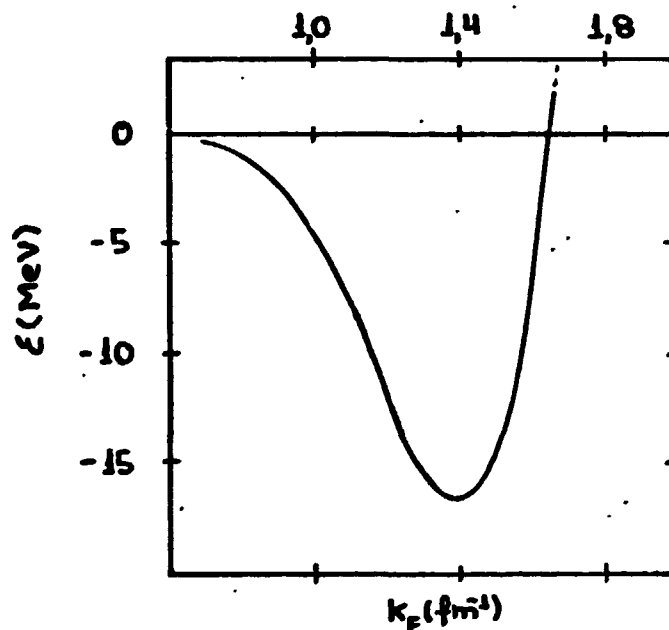
O resultado crucial para a saturação da matéria nuclear é a densidade de energia, neste modelo dada por

$$\mathcal{E} = \langle e_f | H_{cn} | e_f \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k \leq k_f} d^3k E^* - \frac{1}{2} \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \rho_b^2 + \frac{1}{2} \frac{m_\sigma^2}{g_\omega^2} (M - M^*)$$

Escolhendo

$$\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} M^2 = 266,9 \quad \text{e} \quad \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} M^2 = 195,7 \quad (1.16)$$

a equação acima fornece para a curva de saturação o gráfico



que descreve a estabilidade da matéria nuclear em concordância quantitativa com os dados semi-empíricos.

Este modelo permite ainda associar ao bóson escalar o méson σ ($m_\sigma = 540$ MeV) e ao bóson vetorial o méson ω ($m_\omega = 783$ MeV).

Na densidade de equilíbrio ($k_F = 1,42 \text{ fm}^{-3}$) a massa

efetiva, dada pela eq. (1.17), é

$$M^* = 0,56 M.$$

Lembrando que

$$\frac{M^*}{E^*} = (1 - v^2/c^2)^{1/2},$$

reescrevemos a (1.16) como

$$\rho_s = \langle (1 - v^2/c^2)^{1/2} \rangle \rho_B,$$

com a média tomada sobre a velocidade dos núcleons que estão dentro do mar de Fermi.

Quando aumentamos a densidade bariônica a contribuição dos mésons escalares (atrativa) passa a ser menos significativa. É este mecanismo de origem puramente relativística o responsável, na aproximação de campo médio, pela saturação da matéria nuclear na densidade correta.

Nos cálculos com o potencial estático em três dimensões, a não saturação da matéria nuclear está essencialmente vinculada ao fato de que a parte atrativa do potencial não é contrabalançada pela repulsiva mais a energia cinética.

O desenvolvimento da aproximação de campo médio para a QHD-I, como foi feito aqui, teve apenas a intenção de mostrar qual é, neste modelo, o mecanismo de saturação da matéria nuclear. Detalhes aqui omitidos e outras aplicações da QHD são encontradas na ref. (11).

O LIMITE NÃO RELATIVÍSTICO DA QHD-I

Vamos trabalhar no formalismo hamiltoniano. A densidade hamiltoniana é definida como a componente T^{00} do tensor energia-momentum. Assim, da eq (1.15) vem

$$\mathcal{H} = \sum_c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu c)} \partial^\mu c - \mathcal{L} \quad (2.1)$$

onde c representa os campos presentes no modelo e

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu c)} \equiv \Pi_c$$

são os momentos canonicamente conjugados aos campos.

Usando a eq. (1.1) na eq. (2.1) obtemos a densidade de hamiltoniana da QHD-I

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi + \partial_0 \phi \partial_0 \phi - F^{0i} \partial_0 V_j - \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_\phi^2 \phi^2) \\ & - \frac{1}{2} m_V^2 V_\mu V^\mu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - g_s \bar{\psi} \psi \phi + g_V \bar{\psi} \gamma^\mu \psi V_\mu, \end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \psi^\dagger (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\partial} + \beta m) \psi + \frac{1}{2} [\Pi_\phi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m_\phi^2 \phi^2] + \frac{1}{2} [\Pi_V^2 + \frac{1}{m_V^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_V)^2 + \\ & + (\vec{\nabla} \times \vec{V})^2 + m_V^2 V^2] - g_s \bar{\psi} \vec{\Gamma} \psi \cdot \vec{V} - g_s \bar{\psi} \psi \phi + \frac{g_V}{m_V^2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_V) \psi^\dagger \psi + \\ & + \frac{g_V^2}{2 m_V^2} (\psi^\dagger \psi)^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

permitindo a imediata identificação dos termos que geram as equações de movimento para os campos livres.

Para a construção do limite não relativístico é conveniente agruparmos a densidade hamiltoniana dos bárions livres com o termo de interação entre a corrente bariônica e o campo vetorial,

$$\begin{aligned} \psi^\dagger (-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma} + \beta M)\psi - g_v \bar{\psi}\vec{\sigma}\psi\cdot\vec{V} &= \psi^\dagger (-i\vec{\alpha}\cdot\vec{\sigma} + \beta M)\psi - g_v \psi^\dagger \vec{\alpha}\psi\cdot\vec{V} = \\ &= \psi^\dagger [\vec{\alpha}\cdot(\vec{p} - g_v\vec{V}) + \beta M]\psi = \mathcal{H}_D \end{aligned} \quad (2.3)$$

\mathcal{H}_D é uma densidade hamiltoniana de Dirac.

A QHD-I, no limite de bárions não relativísticos, é obtida com a redução da eq. (2.3) a uma densidade hamiltoniana de Pauli.

$$\mathcal{H}_D \rightarrow \mathcal{H}_P = \psi^\dagger \frac{1}{2M} [\vec{\sigma}\cdot(\vec{p} - g_v\vec{V})][\vec{\sigma}\cdot(\vec{p} - g_v\vec{V})]\psi ,$$

onde, agora, as funções de onda são spinores de Pauli (duas componentes). O procedimento que deve ser adotado em tal redução pode ser encontrado em qualquer livro texto de mecânica quântica relativística. Veja, por exemplo, a ref. (10).

Fazendo uso da importante propriedade

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) ,$$

encontramos

$$\mathcal{H}_P = \frac{1}{2M} \psi^\dagger [(\vec{p} - g_v\vec{V})^2 - g_v\vec{\sigma}\cdot(\vec{\sigma}\times\vec{V})]\psi ,$$

ou ainda

$$H_p = \frac{1}{2M} \psi^\dagger [p^2 + g_v^2 v^2 + i g_v (\vec{\sigma} \cdot \vec{v} + 2 \vec{v} \cdot \vec{\sigma})] \psi$$

Na eq. (2.2), ao usarmos H_p no lugar de H_0 ficamos

com

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2M} \psi^\dagger [p^2 + g_v^2 v^2 + i g_v (\vec{\sigma} \cdot \vec{v} + 2 \vec{v} \cdot \vec{\sigma}) - g_v \vec{\sigma} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{v})] \psi + \\ & + \frac{1}{2} [\pi_3^2 + (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})^2 + m_\sigma^2 \phi^2] + \frac{1}{2} [\pi_v^2 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_v)^2}{m_\sigma^2} + (\vec{\sigma} \times \vec{v})^2 + \\ & - g_\sigma \vec{v} \cdot \psi \phi + \frac{g_\sigma}{m_\sigma} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_v) (\psi^\dagger \psi) + \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} (\psi^\dagger \psi)^2] \quad , \quad (2.4) \end{aligned}$$

que é a densidade hamiltoniana do QHD-I na aproximação não relativística, onde estão sendo considerados apenas termos até a primeira ordem em v/c .

Supondo a matéria nuclear ocupando um volume V , preenchido por A núcleons, em primeira quantização o hamiltoniano construído a partir da eq. (2.4) é

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2M} \sum_{n=1}^A \left\{ p_n^2 + g_v^2 v^2(\vec{x}_n) + i g_v [(\vec{\sigma} \cdot \vec{v})_{\vec{x}_n} + 2 \vec{v}(\vec{x}_n) \cdot \vec{\sigma}_n] - g_v \vec{\sigma}_n \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{v})_n + \right. \\ & + \frac{1}{2} \int_V d^3x [\pi_3^2 + (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla})^2 + m_\sigma^2 \phi^2] + \frac{1}{2} \int_V d^3x [\pi_v^2 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_v)^2}{m_\sigma^2} + (\vec{\sigma} \times \vec{v})^2 + \\ & \left. + m_\sigma^2 v^2] + \frac{1}{2} \int_V d^3x \left\{ \frac{g_\sigma}{2m_\sigma} \rho(\vec{x}) \rho(\vec{x}) - \frac{g_\sigma}{m_\sigma} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_v) \rho(\vec{x}) - g_\sigma \phi \rho(\vec{x}) \right\} \right\} \quad , \quad (2.5) \end{aligned}$$

onde $\rho(\vec{x}) = \psi^\dagger(\vec{x}) \psi(\vec{x})$.

Na aproximação de campo médio, descrita no capítulo anterior, vamos obter a densidade de energia para a QHD-I não relativística. Para isto, substituímos as eqs. (1.5) e (1.6) na eq. (2.5), e encontramos

$$H_{cm} = \sum_{n=1}^A \frac{p_n^2}{2M} + \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 V - g_s \rho \phi_0 V + \frac{g_v^2}{2m_v^2} \rho^2 V, \quad (2.6)$$

onde V é o volume ocupado pelo sistema.

Para a matéria nuclear com todos os estados com momentum $|k| \leq k_F$ preenchidos, temos

$$\sum_{n=1}^A \frac{p_n^2}{2M} = \frac{4V}{2M(2\pi)^3} \int_{k \leq k_F} d^3k k^2 = \frac{V}{5\pi^2 M} k_F^5.$$

Portanto a única incógnita que permanece na expressão de H_{cm} é o campo ϕ_0 . Mas, a eq. (1.3) no limite não relativístico fornece

$$\phi_0 = \frac{g_s}{m_s^2} \rho.$$

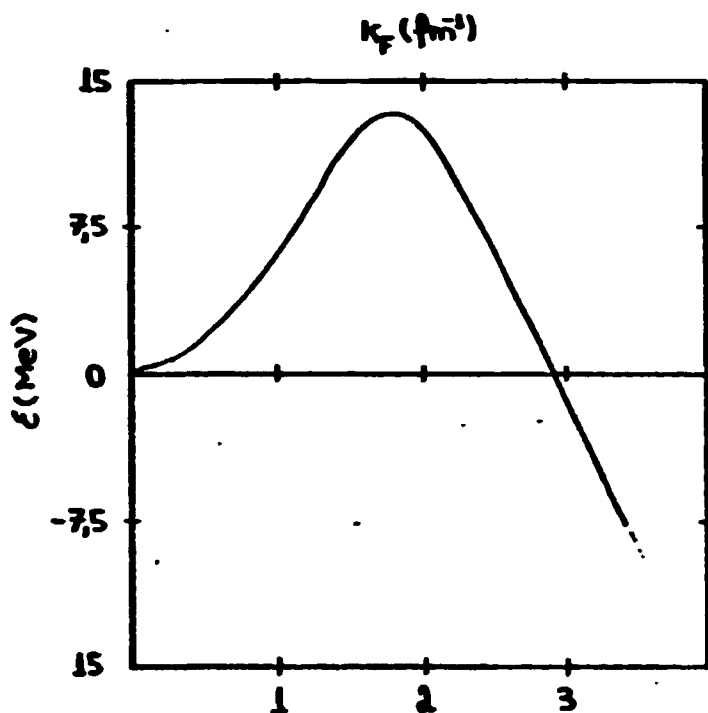
Agora, usando estes resultados na eq. (2.6), podemos escrever

$$E_{cm} = \frac{V}{5\pi^2 M} k_F^5 + \frac{V}{2} \left(\frac{g_v^2}{m_v^2} - \frac{g_s^2}{m_s^2} \right) \rho^2,$$

e, lembrando que $A = \frac{4V}{3\pi^2} k_F^3$, temos

$$\frac{E_{cm}}{A} = \frac{3}{10M} k_F^2 + \frac{1}{3m^2} \left(\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} - \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} \right) k_F^3 \quad (2.7)$$

Este resultado não satura a matéria nuclear independentemente dos parâmetros utilizados. Como exemplo, se usarmos para os parâmetros os valores que saturam a matéria nuclear na aproximação de campo médio relativístico, a eq. (2.7) fornece o gráfico



O resultado equivalente ao (2.7) em uma dimensão satura a matéria nuclear, e é usado na ref. (8) para a escolha das massas dos mésons e das constantes de acoplamento que entram na solução numérica do problema.

Com o objetivo de fazer um cálculo que leve em conta a dinâmica dos mésons, vamos reescrever o hamiltoniano dado pelo eq. (2.5).

Como $\vec{V}(\vec{x})$ e $-\vec{\Pi}_V(\vec{x})$ são variáveis canonicamente conjugadas, definiremos

$$m_V \vec{V} \equiv \vec{\Pi}_V \quad \text{e} \quad -\frac{\vec{\Pi}_V}{m_V} \equiv \vec{V}$$

Com estas mudanças a eq. (a.5) fica

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2M} \sum_{n=1}^A \left\{ P_n^2 + \frac{g_V^2}{m_V^2} (\vec{\Pi}_V)_n^2 - \frac{g_V}{m_V} [(\vec{\sigma} \cdot \vec{\Pi}_V)_n + a(\vec{\Pi}_V)_n \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_n] - \frac{g_V}{m_V} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\sigma} \times \vec{\Pi}_V)_n \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} \int d^3x \left[\Pi_\phi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m_\phi^2 \phi^2 \right] + \frac{1}{2} \int d^3x \left[(\Pi_V)^2 + (\vec{\sigma} \cdot \vec{V})^2 + \frac{(\vec{\sigma} \times \vec{\Pi}_V)^2}{m_V^2} + m_V^2 (V)^2 \right] + \\
 & + \int d^3x \left\{ \frac{g_V^2}{m_V^2} \rho(\vec{x}) \rho(\vec{x}) - \frac{g_V}{m_V} (\vec{\sigma} \cdot \vec{V}) \rho(\vec{x}) - g_S \phi \rho(\vec{x}) \right\}.
 \end{aligned}$$

Como não existe possibilidade de confusão entre as variáveis vetoriais novas e as antigas, vamos suprimir o (1) presente nas novas variáveis.

No hamiltoniano acima os campos mesônicos e os seus momentos canonicamente conjugados são descritos por um conjunto infinito (e contínuo) de coordenadas.

Vamos introduzir condições de contorno periódicas. Assim, passamos a trabalhar com um conjunto discreto de coordenadas mesônicas. Para isto vamos considerar a matéria nuclear confinada num cubo de lado L , de modo que podemos expandir os campos mesônicos, seus momentos canonicamente conjugados e a densidade bariônica em séries de Fourier.

Iniciamos expandindo o campo escalar

$$\phi(\vec{x}) = \sqrt{\frac{a}{L^3}} \left\{ \frac{\phi_0}{a} + \sum_{\vec{k}} \left[\phi_{\vec{k}} \cos \vec{k} \cdot \vec{x} + \tilde{\phi}_{\vec{k}} \sin \vec{k} \cdot \vec{x} \right] \right\} \quad (2.9)$$

onde $\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_1 \hat{x}_1 + n_2 \hat{x}_2 + n_3 \hat{x}_3)$; com n_1, n_2 e n_3 inteiros positivos,

e as componentes de Fourier definidas por

$$\phi_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{a}{L^3}} \int_0^L d^3x \phi(\vec{x}) \cos \vec{k} \cdot \vec{x}$$

$$\tilde{\phi}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{a}{L^3}} \int_0^L d^3x \phi(\vec{x}) \sin \vec{k} \cdot \vec{x}$$

A somatória que aparece na expansão é uma convenção para a somatória tripla

$$\sum_{n_1 > 0} \sum_{n_2 > 0} \sum_{n_3 > 0}$$

A expansão do momentum canonicamente conjugado ao campo $\phi(\vec{x})$ é

$$\Pi_{\vec{x}}(\vec{x}) = -i \sqrt{\frac{a}{L^3}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \phi_0} + \sum_{\vec{k}} \left[\cos \vec{k} \cdot \vec{x} \frac{\partial}{\partial \phi_{\vec{k}}} + \sin \vec{k} \cdot \vec{x} \frac{\partial}{\partial \tilde{\phi}_{\vec{k}}} \right] \right\} \quad (2.10)$$

Usando as eqs. (2.9) e (2.10) junto com as propriedades de ortogonalidade das funções seno e coseno, temos

$$\frac{1}{a} \int d^3x \left[\Pi_{\vec{x}}^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m_S^2 \phi^2 \right] = \frac{1}{a} \sum_{\vec{k}} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \phi_{\vec{k}}^2} + \omega_{\vec{k}}^2 \phi_{\vec{k}}^2 \right\} - \frac{\partial^2}{\partial \phi_0^2} + m_S^2 \phi_0^2, \quad (2.11)$$

onde $w_k^2 = m_v^2 + k^2$. Nesta expressão, a contribuição dos coeficientes dos senos das séries de Fourier está ausente apenas por economia de espaço, pois é idêntica à contribuição dos coeficientes dos cossenos.

Adotando este mesmo tipo de expansão para o campo vetorial, ficamos com

$$\frac{1}{2} \int d^3x \left[(\vec{\pi}_v)^2 + (\vec{\sigma} \cdot \vec{v})^2 + \frac{(\vec{\sigma} \times \vec{\pi}_v)^2}{m_v^2} + m_v^2 v^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_k \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \vec{V}_k^2} + m_v^2 \vec{V}_k^2 + (\vec{k} \cdot \vec{V}_k)^2 - \frac{1}{m_v^2} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{V}_k} \times \vec{k} \right)^2 \right\} - \frac{\partial^2}{\partial \vec{V}_0^2} + m_v^2 \vec{V}_0^2 = H_v .$$

Com a finalidade de facilitar o desenvolvimento dos cálculos, vamos escrever o campo vetorial e seu momentum canonicamente conjugado numa nova base formada pelos versores \hat{e}_k^1, \hat{e}_k^2 e \hat{e}_k^3 , tais que

$$\hat{e}_k^r \cdot \hat{e}_k^s = \delta_{rs} ,$$

de modo que tenhamos $\hat{e}_k^1 \cdot \vec{k} = |\vec{k}|$. Nesta nova base

$$H_v = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial V_k^2} + \Omega_k^2 V_k^2 - \left(\frac{1-k^2}{m_v^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial V_{2k}^2} + m_v^2 V_{2k}^2 + \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1-k^2}{m_v^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial V_{3k}^2} + m_v^2 V_{3k}^2 \right\} - \frac{\partial^2}{\partial V_0^2} + m_v^2 \vec{V}_0^2 \quad (2.12)$$

onde $\Omega_k^2 = m_v^2 + k^2$.

Os termos do hamiltoniano, eq. (2.8), que dependem da densidade bariônica quando são expandidos re-

substituem em

$$-g_5 \int d^3x \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) = -g_5 \left\{ \frac{\phi_0}{a} + \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}} \right\} \quad (2.13)$$

$$\frac{g_5^2}{2m_v^2} \int d^3x \rho(\vec{x}) \rho(\vec{x}) = \frac{g_5^2}{2m_v^2} \left\{ \frac{\phi_0^2}{a} + \sum_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^2 \right\} \quad (2.14)$$

$$-\frac{g_5}{m_v} \int d^3x \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \rho(\vec{x}) = \frac{g_5}{m_v} \sum_{\vec{k}} \sum_{n=1}^{\Lambda} \vec{\nabla}_{\vec{k}} \cdot \vec{\sigma}_n A_{\vec{k}} \quad (2.15)$$

onde usamos

$$\rho(\vec{x}) = \sqrt{\frac{a}{L^3}} \left\{ \frac{\phi_0}{a} + \sum_{\vec{k}} [A_{\vec{k}} \cos \vec{k} \cdot \vec{x} + \tilde{A}_{\vec{k}} \sin \vec{k} \cdot \vec{x}] \right\}$$

E, finalmente, a expansão do hamiltoniano de Pauli é

$$\begin{aligned} H_p = & \frac{1}{2M} \sum_{n=1}^{\Lambda} P_n^2 + \frac{2g_5^2}{L m_v^2} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} [\cos \vec{k} \cdot \vec{x}_n \cos \vec{k}' \cdot \vec{x}_n \frac{\partial}{\partial \vec{V}_{\vec{k}}} \frac{\partial}{\partial \vec{V}_{\vec{k}'}} + \\ & + \sin \vec{k} \cdot \vec{x}_n \sin \vec{k}' \cdot \vec{x}_n \frac{\partial}{\partial \vec{V}_{\vec{k}}} \frac{\partial}{\partial \vec{V}_{\vec{k}'}} + a \cos \vec{k} \cdot \vec{x}_n \sin \vec{k}' \cdot \vec{x}_n \frac{\partial}{\partial \vec{V}_{\vec{k}}} \frac{\partial}{\partial \vec{V}_{\vec{k}'}}] + \\ & - \sqrt{\frac{a}{L^3}} \frac{g_5}{m_v} \sum_{\vec{k}} [-\vec{k} \cdot \sin \vec{k} \cdot \vec{x}_n \frac{\partial}{\partial \vec{V}_{\vec{k}}} + \vec{k} \cdot \cos \vec{k} \cdot \vec{x}_n \frac{\partial}{\partial \vec{V}_{\vec{k}}}] + \\ & + \sqrt{\frac{a}{L^3}} \frac{g_5}{m_v} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{V}_0} + \sum_{\vec{k}} (\cos \vec{k} \cdot \vec{x}_n \frac{\partial}{\partial \vec{V}_{\vec{k}}} + \sin \vec{k} \cdot \vec{x}_n \frac{\partial}{\partial \vec{V}_{\vec{k}}}) \right] \vec{\sigma}_n + \frac{a}{L^3} \frac{\partial^2}{\partial \vec{V}_0^2} + \\ & i g_5 \sqrt{\frac{a}{L^3}} \vec{\sigma} \cdot \sum_{\vec{k}} \sum_{j=1}^3 [\sin \vec{k} \cdot \vec{x}_n \frac{\partial}{\partial \vec{V}_{j\vec{k}}} \vec{k} + \vec{k} \cos \vec{k} \cdot \vec{x}_n \frac{\partial}{\partial \vec{V}_{j\vec{k}}}] \end{aligned} \quad (2.16)$$

Juntando as eqs. (2.11) - (2.16) nós temos a expansão em série de Fourier do hamiltoniano da QHD-I não relativística.

UM LIMITE SUPERIOR PARA A CURVA DE SATURAÇÃO

Agora, utilizando o formalismo hamiltoniano desenvolvido no capítulo anterior, construiremos um limite superior para a densidade de energia como função da densidade bariônica levando em conta a dinâmica dos mésons.

Como pretendemos descrever o estado fundamental por meio de uma aproximação tipo Born-Oppenheimer, inicialmente vamos construir a função de onda dos mésons no limite de núcleons estáticos. Para isto, no hamiltoniano não relativístico fazemos $M \rightarrow \infty$, e o hamiltoniano para núcleons estáticos fica

$$\begin{aligned}
 H_{\text{est}} = & \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \phi_{\mathbf{k}}^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2 \phi_{\mathbf{k}}^2 \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial V_{\mathbf{k}}^2} + S_{\mathbf{k}}^2 V_{\mathbf{k}}^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{3}{F^2} \left[-\left(1 + \frac{k^2}{m_{\mathbf{v}}^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial V_{\mathbf{k}}^2} + m_{\mathbf{v}}^2 V_{\mathbf{k}}^2 \right] \right\} - g_5 \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} + \\
 & + \frac{g_1^2}{2m_{\mathbf{v}}^2} \sum_{\mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}}^2 + \frac{g_2}{m_{\mathbf{v}}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{n=1}^A \vec{\nabla}_{\mathbf{k}} \cdot \vec{\nabla}_n \rho_{\mathbf{k}} + H_0 \quad , \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

com

$$A_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{2}{L^3}} \sum_{n=1}^A \cos \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{x}}_n \quad , \quad (3.2)$$

pois $\rho(\vec{x}) = \sum_{n=1}^A \delta(\vec{x} - \vec{x}_n)$.

Na eq. (3.1), H_0 está representando a contribuição das componentes de Fourier com modo $\mathbf{k}=0$, ou seja,

$$H_0 = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \phi_0^2} + m_s^2 \phi_0^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left(-\frac{\partial^2}{\partial V_{j0}^2} + m_v^2 V_{j0}^2 \right) - g_s \phi_0 \rho_0 + \frac{g_v^2}{4m_v^2} \rho_0^2, \quad (3.3)$$

Ao efetuarmos as mudanças de variáveis

$$\bar{\phi}_k = \phi_k - g_s \frac{\rho_k}{\omega_k^2},$$

$$\bar{V}_{jk} = V_{jk} - \frac{g_v}{m_v \omega_k^2} (k \vec{A}_k)$$

$$\bar{V}_{jk} = V_{jk} m_v / \omega_k \quad ; \text{ com } j=2,3,$$

diagonalizamos o hamiltoniano no limite estático, que passa a ser escrito como

$$H_{\text{est}} = \frac{1}{2} \sum_k \left(-\frac{\partial^2}{\partial \bar{\phi}_k^2} + \omega_k^2 \bar{\phi}_k^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_k \sum_{j=1}^3 \left(-\frac{\partial^2}{\partial \bar{V}_{jk}^2} + \omega_k^2 \bar{V}_{jk}^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{g_s^2}{\omega_k^2} - \frac{g_s^2}{\omega_k^2} \right) \rho_k^2 + H_0. \quad (3.4)$$

Assim, vemos claramente que os modos mesônicos são descritos por osciladores harmônicos desacoplados.

Para encontrarmos a energia associada ao modo $k=0$, fazemos a mudança de variável

$$\bar{\phi}_0 = \phi_0 - \frac{g_s}{m_s^2} \rho_0,$$

na eq. (3.3). Logo, H_0 tem como auto estado

$$|\phi_0\rangle = N_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} m_s^2 \bar{\phi}_0^2 - \frac{1}{2} m_v \sum_{j=1}^3 V_{j0}^2 \right\},$$

onde N_0 é uma constante de normalização. Depois de retirarmos a energia de ponto zero, $\frac{1}{2} (m_s + 3m_v)$, o auto valor de H_0 fica

$$E_{cm} = \frac{1}{4} \left(\frac{g_v^2}{m_v^2} - \frac{g_s^2}{m_s^2} \right) \rho_0^2$$

Usando a eq. (3.2) na expressão acima temos

$$\frac{E_{cm}}{A} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_v^2}{m_v^2} - \frac{g_s^2}{m_s^2} \right) \frac{A}{L^3} \equiv \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{g_v^2}{m_v^2} - \frac{g_s^2}{m_s^2} \right) k_F^3$$

Comparando este resultado com a eq. (2.7), verificamos que o modo mesônico $k=0$ está associado a uma energia de campo médio.

A partir da eq. (3.4), construímos a função de onda para o estado fundamental dos mésons como o produto de infinitas funções de onda de oscilador harmônico, ou seja,

$$\phi(\phi_k, \vec{V}_k) = N \prod_k \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega_k (\phi_k - \chi_k)^2 - \frac{1}{2} \Omega_k (V_k - \xi_k)^2 - \frac{1}{2} \frac{m_v^2}{\Omega_k} (V_{3k}^2 + V_{2k}^2) \right\}, \quad (3.5)$$

onde N é uma constante de normalização e os deslocamentos são dados por

$$\chi_k = \frac{g_v}{\omega_k^2} \rho_k \quad \text{e} \quad \xi_k = \frac{g_v}{m_v \Omega_k^2} (-k \vec{A}_k)$$

Usando uma aproximação tipo Born-Oppenheimer, escrevemos a função de onda para o estado fundamental do sistema como

$$|e_f\rangle = \Lambda(\vec{x}_n) \phi(\phi_k, \vec{V}_k), \quad (3.6)$$

onde $\Lambda(\vec{x}_n)$ é um determinante de Slater composto por $on-$

das planas, que descreve os núcleons, e $\phi(\phi_{\mathbf{k}}, \vec{V}_{\mathbf{k}})$ é a função de onda dos mésons no limite estático, dada pela eq. (3.5).

Um limite superior para a densidade de energia da matéria nuclear, na aproximação não relativística da QHD-I, é

$$E \leq \frac{\langle e\phi | H_{NR} | e\phi \rangle}{\langle e\phi | e\phi \rangle} ,$$

onde $|e\phi\rangle$ é o estado fundamental construído na aproximação de Born-Oppenheimer e o hamiltoniano não relativístico é dado por

$$H_{NR} = H_p + H_{int} ,$$

com

$$H_{int} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left[-\frac{\partial^2}{\partial \phi_{\mathbf{k}}^2} + \omega_{\mathbf{k}}^2 \phi_{\mathbf{k}}^2 + \sum_{j=1}^3 \left(-\frac{\partial^2}{\partial V_{j\mathbf{k}}^2} + \Omega_{\mathbf{k}}^2 V_{j\mathbf{k}}^2 \right) \right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{g_{\sigma}^2}{\Omega_{\mathbf{k}}} - \frac{g_{\omega}^2}{\omega_{\mathbf{k}}} \right) \rho_{\mathbf{k}}^2 + H_0 - E_{vac} ,$$

onde $E_{vac} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\omega_{\mathbf{k}} + 3\Omega_{\mathbf{k}})$ e H_p e H_0 são definidos pelas eqs.

(2.16) e (3.3), respectivamente.

Como estamos supondo o determinante de Slater normalizado à unidade, ficamos com

$$E \leq \frac{1}{\langle \phi | \phi \rangle} \left[\langle \phi | \langle \lambda | H_p | \lambda \rangle | \phi \rangle + \langle \lambda | \langle \phi | H_{int} | \phi \rangle | \lambda \rangle \right] . \quad (3.7)$$

Nesta aproximação para a energia do estado

fundamental, o hamiltoniano de Pauli, como mostramos no apêndice A, contribui com

$$\frac{\langle \phi | K | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \frac{L^3}{5\pi^2 M} k_F^5 + \frac{A}{2M} \left\{ \frac{g_\sigma^2}{L^3} \sum_k \frac{k^2}{\omega_k^2} + \frac{g_\omega^2}{L^3 m_\omega^2} \sum_k \frac{k^4}{\Omega_k^2} - \frac{g_\rho^2}{L^3 m_\rho^2} \sum_k \left(\Omega_k + \frac{2m_\rho^2}{\Omega_k} \right) \right\}.$$

Todas as séries que aparecem na expressão acima são divergentes: as duas primeiras são "correções" à energia cinética dos núcleons, e são decorrentes da localizabilidade dos núcleons presente na função de onda dos mésons; a última é mais uma contribuição para a energia de ponto zero do sistema.

Como nosso interesse está na densidade de energia em função da densidade bariônica, para uma análise melhor dos termos infinitos, escrevemos

$$\frac{\langle \phi | K | \phi \rangle}{A \langle \phi | \phi \rangle} = \frac{L^3}{5\pi^2 M A} k_F^5 + \frac{1}{2M} \left\{ \frac{g_\sigma^2}{L^3} \sum_k \frac{k^2}{\omega_k^2} + \frac{g_\omega^2}{L^3 m_\omega^2} \sum_k \frac{k^4}{\Omega_k^2} - \frac{g_\rho^2}{L^3 m_\rho^2} \sum_k \left(\Omega_k + \frac{2m_\rho^2}{\Omega_k} \right) \right\}.$$

Assim, fica claro que os termos divergentes são independentes da densidade bariônica, e podemos definir

$$\frac{\langle \phi | K | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} \equiv \frac{L^3}{5\pi^2 M} k_F^5, \quad (3.8)$$

de modo que para $k_F = 0$ a densidade de energia seja nula.

Portanto, neste modelo, a única contribuição do hamiltoniano de Pauli relevante para a análise da saturação da matéria nuclear é a energia cinética dos núcleons.

Para o hamiltoniano de interação é imediato que

$$\frac{\langle \Lambda | \langle \Phi | H_{int} | \Phi \rangle | \Lambda \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle} = \frac{1}{2} \langle \Lambda | \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{g_{\sigma}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} - \frac{g_{\pi}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \right) \rho_{\mathbf{k}}^2 \right\} | \Lambda \rangle + E_{cm} \quad ,$$

onde, agora, $\rho_{\mathbf{k}}$ é dado pela eq. (3.2) .

Com isto, quando temos apenas dois núcleons posicionados em \vec{x}_1 e \vec{x}_2 , escrevemos as componentes de Fourier da densidade bariônica como

$$\rho_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{2}{L^3}} (\cos \vec{k} \cdot \vec{x}_1 + \cos \vec{k} \cdot \vec{x}_2) \quad ,$$

$$\tilde{\rho}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{2}{L^3}} (\sin \vec{k} \cdot \vec{x}_1 + \sin \vec{k} \cdot \vec{x}_2) \quad .$$

E, fazendo $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, ficamos com

$$\rho_{\mathbf{k}}^2 + \tilde{\rho}_{\mathbf{k}}^2 = \frac{2}{L^3} (2 + 2 \cos \vec{k} \cdot \vec{x}) \quad .$$

Este resultado nos permite escrever, por exemplo,

$$g_{\sigma}^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{(\rho_{\mathbf{k}}^2 + \tilde{\rho}_{\mathbf{k}}^2)}{\omega_{\mathbf{k}}^2} = \frac{2}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{g_{\sigma}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} + \frac{2}{L^3} g_{\sigma}^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{\cos \vec{k} \cdot \vec{x}}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \quad ,$$

de onde vamos subtrair

$$\frac{2}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{g_{\sigma}^2}{\omega_{\mathbf{k}}^2} \quad ,$$

que corresponde a duas vezes a contribuição dos mésons vetoriais para a energia de um núcleon isolado.

Por outro lado,

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}=0} \frac{\cos \mathbf{k} \cdot \vec{x}}{k^2 + m^2} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-m|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

e podemos escrever

$$\frac{\langle \lambda | \langle \phi | H_{int} | \phi \rangle | \lambda \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \sum_{j=1}^A \langle \lambda | V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_j|) | \lambda \rangle$$

onde fizemos

$$V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_j|) = \frac{g_V^2}{4\pi} \frac{e^{-m_V |\vec{x}_1 - \vec{x}_j|}}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_j|} - \frac{g_S^2}{4\pi} \frac{e^{-m_S |\vec{x}_1 - \vec{x}_j|}}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_j|}$$

Então, a contribuição do hamiltoniano de interação é apenas

$$\frac{\langle \lambda | \langle \phi | H_{int} | \phi \rangle | \lambda \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in k_F} [\langle mn | V | mn \rangle - \langle mn | V | nm \rangle] \quad (3.9)$$

Os elementos de matriz que aparecem na expressão acima estão calculados no apêndice B.

Para construirmos a curva da densidade de energia em função do momentum de Fermi, que permite a análise da saturação, substituímos as eqs. (3.8) e (3.9) na eq. (3.7) e dividimos a expressão resultante pelo número de núcleons,

$$A = 4 \sum_{\mathbf{k} \in k_F} 1 = \frac{4L^3}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{k} \in k_F} d^3k = \frac{4L^3 4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{k_F} dk k^2 = \frac{4L^3}{3\pi^2} k_F^3$$

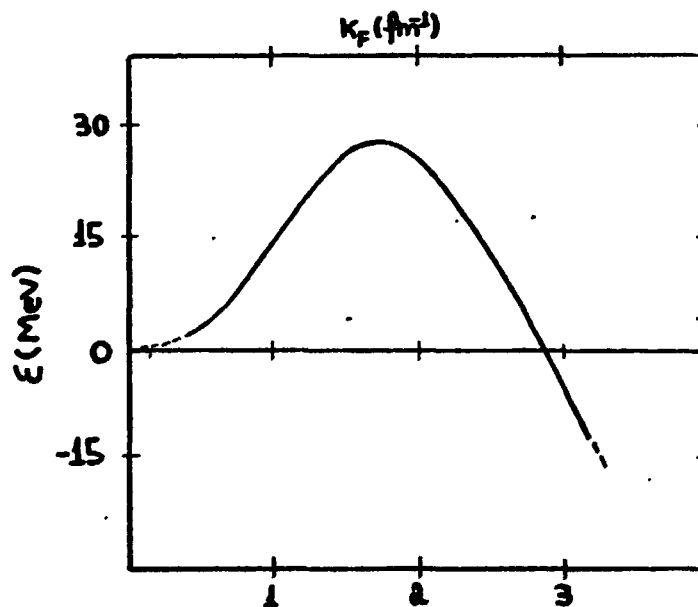
Feito isto, e após o uso dos resultados obtidos no apêndice B, encontramos

$$\epsilon \ll \frac{3}{10M} k_F^2 + \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{g_v^2}{m_v^2} - \frac{g_s^2}{m_s^2} \right) k_F^3 +$$

$$\frac{-3}{48\pi^2 k_F^3} \left\{ g_v^2 \left[2k_F^2 (6k_F^2 - m_v^2) + \frac{m_v^2}{2} (m_v^2 + 12k_F^2) \ln \left(1 + \frac{4k_F^2}{m_v^2} \right) - 16k_F^3 m_v \operatorname{arctg} \left(\frac{2k_F}{m_v} \right) \right] \right.$$

$$\left. - g_s^2 \left[2k_F^2 (6k_F^2 - m_s^2) + \frac{m_s^2}{2} (m_s^2 + 12k_F^2) \ln \left(1 + \frac{4k_F^2}{m_s^2} \right) - 16k_F^3 m_s \operatorname{arctg} \left(\frac{2k_F}{m_s} \right) \right] \right\}. \quad (3.10)$$

Se os parâmetros do modelo ($m_s, g_s, m_v, e g_v$) são escolhidos de modo a produzirem um potencial de dois corpos realístico a expressão acima leva ao colapso do sistema. Isto pode ser visto no gráfico abaixo,



que foi construído a partir da eq. (3.10), com o uso dos parâmetros que levam à saturação da matéria nuclear como descrita no primeiro capítulo.

CONCLUSÃO

No limite não relativístico da QHD-I, estudamos o comportamento da densidade de energia como função da densidade bariônica para a matéria nuclear.

Com a construção do estado fundamental do sistema por meio de uma aproximação tipo Born-Oppenheimer, obtivemos um limite superior para a curva de saturação da matéria nuclear, levando em conta a dinâmica dos mésons. O resultado encontrado, curva da página 31, mostra que mecanismos ligados à dinâmica mesônica não são suficientes para conduzir o sistema à saturação.

Deste resultado, concluímos que na QHD-I a saturação da matéria nuclear só pode ser obtida quando os núcleons são tratados relativisticamente.

APÊNDICE A

Neste apêndice, vamos calcular a contribuição do hamiltoniano de Pauli (eq. 2.16) para a energia do estado fundamental descrito pela aproximação de Born-Oppenheimer (eq. 3.6). Para isso, escrevemos

$$\langle \phi | \mathcal{H}_p | \lambda \rangle = \langle \phi | \mathcal{H}_T | \lambda \rangle + \langle \phi | \mathcal{H}_p^m | \lambda \rangle, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$T = \frac{1}{2M} \sum_{n=1}^{\hat{A}} P_n^2 = -\frac{1}{2M} \sum_{n=1}^{\hat{A}} \nabla_n^2, \quad \text{com } \vec{\nabla}_n = \frac{\partial}{\partial x_n} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y_n} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z_n} \hat{k}.$$

Iniciamos reescrevendo a contribuição do operador energia cinética como

$$\begin{aligned} \langle \phi | \mathcal{H}_T | \lambda \rangle &= \\ &= -\frac{1}{2M} \sum_{n=1}^{\hat{A}} [\langle \phi | \mathcal{H}_T(\vec{\nabla}_n^2) | \lambda \rangle + \langle \mathcal{H}_T(\vec{\nabla}_n^2) | \phi \rangle | \lambda \rangle + 2 \langle \phi | \mathcal{H}_T(\vec{\nabla}_n^2) | \lambda \rangle \langle \vec{\nabla}_n^2 | \phi \rangle]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Lembrando que o determinante de Slater é constituído de ondas planas normalizadas à unidade, é imediato que

$$\langle \mathcal{H}_T(\vec{\nabla}_n^2) | \lambda \rangle = -k_n^2 \quad (\text{A.3})$$

De acordo com a eq. (3.5), temos

$$\langle \vec{\nabla}_n^2 | \phi \rangle = \sum_{\mathbf{k}} [\omega_{\mathbf{k}} (\phi_{\mathbf{k}} - \chi_{\mathbf{k}}) \vec{\nabla}_n^2 \chi_{\mathbf{k}} + \Omega_{\mathbf{k}} (\psi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}}) \vec{\nabla}_n^2 \xi_{\mathbf{k}}] | \phi \rangle, \quad (\text{A.4})$$

e

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_n^2 |\phi\rangle = & \sum_k [w_k (\vec{\nabla}_n \chi_k)^2 + w_k (\phi_k - \chi_k) \vec{\nabla}_n^2 \chi_k - \Omega_k (\vec{\nabla}_n \xi_k)^2 + \Omega_k (V_{1k} - \xi_k) \vec{\nabla}_n^2 \xi_k] |\phi\rangle + \\ & + \sum_{kk'} [w_k w_{k'} (\phi_k - \chi_k) (\phi_{k'} - \chi_{k'}) \vec{\nabla}_n \chi_k \vec{\nabla}_n \chi_{k'} + \Omega_k \Omega_{k'} (V_{1k} - \xi_k) (V_{1k'} - \xi_{k'}) \vec{\nabla}_n \xi_k \vec{\nabla}_n \xi_{k'} + \\ & + 2w_k \Omega_{k'} (\phi_k - \chi_k) (V_{1k'} - \xi_{k'}) \vec{\nabla}_n \chi_k \vec{\nabla}_n \xi_{k'}] |\phi\rangle \end{aligned}$$

de modo que,

$$\begin{aligned} \langle \phi | \vec{\nabla}_n^2 | \phi \rangle = & \sum_k [w_k (\vec{\nabla}_n \chi_k)^2 - \Omega_k (\vec{\nabla}_n \xi_k)^2] \langle \phi | \phi \rangle + \\ & + \sum_k [w_k^2 (\vec{\nabla}_n \chi_k)^2 \langle \phi | (\phi_k - \chi_k)^2 | \phi \rangle + \Omega_k^2 (\vec{\nabla}_n \xi_k)^2 \langle \phi | (V_{1k} - \xi_k)^2 | \phi \rangle] \end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\langle \phi | \vec{\nabla}_n^2 | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = -\frac{1}{2} \sum_k [w_k (\vec{\nabla}_n \chi_k)^2 + \Omega_k (\vec{\nabla}_n \xi_k)^2]$$

pois, por exemplo,

$$\int d\phi_k (\phi_k - \chi_k)^2 e^{-w_k (\phi_k - \chi_k)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{w_k}}$$

Agora, usando as definições da página 27 para os deslocamentos, escrevemos

$$\vec{\nabla}_n \chi_k = -\sqrt{\frac{2}{l^3}} \frac{g_s}{w_k} \vec{k} \text{sen} \vec{k} \cdot \vec{x}_n \Rightarrow (\vec{\nabla}_n \chi_k)^2 = \frac{2g_s^2}{l^3} \frac{k^2}{w_k^2} \text{sen}^2 \vec{k} \cdot \vec{x}_n$$

$$\vec{\nabla}_n \xi_k = -\sqrt{\frac{2}{l^3}} \frac{g_v}{m_v \Omega_k} \kappa \vec{k} \text{cos} \vec{k} \cdot \vec{x}_n \Rightarrow (\vec{\nabla}_n \xi_k)^2 = \frac{2g_v^2}{m_v^2 l^3} \frac{k^4}{\Omega_k^4} \text{cos}^2 \vec{k} \cdot \vec{x}_n$$

e, considerando também as contribuições dos coeficientes dos senos das expansões em série de Fourier

$$(\vec{\nabla}_n \tilde{\chi}_k)^2 = \frac{2g_s^2}{l^3} \frac{k^2}{\omega_k} \cos^2 \vec{k} \cdot \vec{x}_n \quad ,$$

$$(\vec{\nabla}_n \tilde{\xi}_k)^2 = \frac{2g_v^2}{m_v^2 l^3} \frac{k^4}{\Omega_k^4} \sin^2 \vec{k} \cdot \vec{x}_n \quad ,$$

ficamos com

$$\frac{\langle \phi | (-\vec{\nabla}_n^2) | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \frac{\langle \Lambda | \langle \phi | (-\vec{\nabla}_n^2) | \phi \rangle | \Lambda \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \frac{g_s^2}{l^3} \sum_k \frac{k^2}{\omega_k^2} + \frac{g_v^2}{l^3 m_v^2} \sum_k \frac{k^4}{\Omega_k^2} \quad . \quad (A5)$$

Para a parte mesônica do hamiltoniano de Pauli, apesar da aparente complexidade, temos apenas

$$\langle \phi | H_p^m | \phi \rangle = \frac{2}{l^3} \frac{g_v^2}{m_v^2} \langle \phi | \left\{ \sum_k \sum_{j=1}^3 \left[\cos^2 \vec{k} \cdot \vec{x}_n \frac{\partial^2}{\partial V_{jk}^2} + \sin^2 \vec{k} \cdot \vec{x}_n \frac{\partial^2}{\partial V_{jk}^2} \right] \right\} | \phi \rangle \quad .$$

Usando a eq.(3.5), temos

$$\frac{\partial^2}{\partial V_{1k}^2} | \phi \rangle = [\Omega_k^2 (v_{1k} - \xi_k)^2 - \Omega_k] | \phi \rangle \quad , e$$

$$\frac{\partial^2}{\partial V_{jk}^2} | \phi \rangle = \left[-\frac{m_v^2}{\Omega_k} + \frac{m_v^4}{\Omega_k^2} V_{jk}^2 \right] | \phi \rangle \quad \text{para } j=2,3 \quad ,$$

Portanto,

$$\frac{\langle \phi | H_p^m | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = \frac{\langle \Lambda | \langle \phi | H_p^m | \phi \rangle | \Lambda \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle} = -\frac{g_v^2}{l^3 m_v^2} \sum_k \left(\Omega_k + \frac{2m_v^2}{\Omega_k} \right) \quad . \quad (A6)$$

Finalmente, da eq.(A.4) vem

$$\langle \phi | \langle \Lambda | \vec{\nabla}_n | \Lambda \rangle \vec{\nabla}_n | \phi \rangle = 0 \quad . \quad (A7)$$

APÊNDICE B

Como exemplo de cálculo dos elementos de matriz que aparecem na eq. (3.9), vamos considerar apenas um "Yukawa",

$$\frac{g_V^2}{4\pi} \frac{e^{-m_V r}}{r}$$

As funções de onda presentes no determinante de Slater são ondas planas, ou seja,

$$|n\rangle = L^{-3/2} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}}$$

Usando este fato, escrevemos

$$\begin{aligned} \langle mn | \frac{e^{-m_V r}}{r} | mn \rangle &= \frac{1}{L^6} \int d^3r_1 d^3r_2 e^{-i(\vec{k}_m \cdot \vec{r}_1 + \vec{k}_n \cdot \vec{r}_2)} \frac{e^{-m_V r}}{r} e^{i(\vec{k}_m \cdot \vec{r}_1 + \vec{k}_n \cdot \vec{r}_2)} = \\ &= \frac{1}{L^6} \int d^3r_1 d^3r_2 \frac{e^{-m_V |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{1}{L^6} \int d^3r' \int d^3r \frac{e^{-m_V r}}{r} = \\ &= \frac{4\pi}{L^3} \int_0^\infty dr r e^{-m_V r} = \frac{4\pi}{L^3 m_V^2} \end{aligned}$$

Então, a soma sobre todos os pares de núcleons é

$$\sum_{m,n \in A} \langle mn | \frac{e^{-m_V r}}{r} | mn \rangle = \frac{4\pi}{L^3 m_V^2} 4 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int_{\vec{k}_n \neq \vec{k}_r} d^3k_n 4 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int_{\vec{k}_m \neq \vec{k}_r} d^3k_m =$$

$$= \frac{L^3}{m_v^2 \pi^5} \int_0^{k_F} dk_n 4\pi k_n^2 \int_0^{k_F} dk_m 4\pi k_m^2 = \frac{16 L^3}{9 \pi^3 m_v^2} k_F^6 \quad (B.1)$$

Para o termo de exchange, temos

$$\langle mn | \frac{e^{-m_v r}}{r} | nm \rangle = \frac{1}{L^6} \int d^3 r_1 d^3 r_2 e^{-i(\vec{k}_m \cdot \vec{r}_1 + \vec{k}_n \cdot \vec{r}_2)} \frac{e^{-m_v r}}{r} e^{i(\vec{k}_n \cdot \vec{r}_1 + \vec{k}_m \cdot \vec{r}_2)} =$$

$$= \frac{1}{L^6} \int d^3 r_1 d^3 r_2 e^{i(\vec{k}_m - \vec{k}_n) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \frac{e^{-m_v r}}{r} = \frac{1}{L^3} \int d^3 r e^{i(\vec{k}_n - \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} \frac{e^{-m_v r}}{r} =$$

$$= \frac{4\pi}{L^3} \frac{1}{m_v^2 + |\vec{k}_n - \vec{k}_m|^2}$$

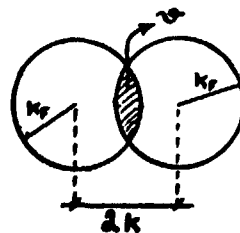
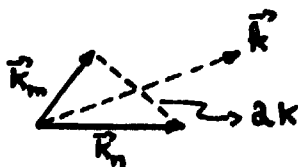
Agora, a soma sobre todos os pares de núcleons, fica

$$\sum_{mn \in A} \langle mn | \frac{e^{-m_v r}}{r} | nm \rangle = \frac{L^3}{\pi^5} \int d^3 k_m d^3 k_n \frac{1}{m_v^2 + |\vec{k}_n - \vec{k}_m|^2}$$

Para a resolução das integrais acima, fazemos as mudanças de variáveis

$$\vec{K} = \frac{\vec{k}_n - \vec{k}_m}{2} \quad ; \quad \text{momentum do centro de massa}$$

$$\vec{k} = \vec{k}_n + \vec{k}_m \quad ; \quad \text{momentum relativo}$$



de modo que ,

$$\sum_{m,n \in A} \langle mn | \frac{e^{-m_v r}}{r} | nm \rangle = \frac{8L^3}{\pi^5} \int d^3k \frac{1}{m_v^2 + 4k^2} \int d\left(\frac{k}{a}\right) = \frac{32L^3}{\pi^4} \int_0^{k_F} dk \frac{k^2}{m_v^2 + 4k^2} \frac{2\pi(2k_F^3 - k^3 - 3k_F^2 k)}{3} =$$

$$= \frac{L^3}{3\pi^3} \left[2k_F^2(6k_F^2 - m_v^2) + \frac{m_v^2}{2}(m_v^2 + 12k_F^2) \ln\left(1 + \frac{4k_F^2}{m_v^2}\right) - 16k_F^3 m_v \operatorname{arctg}\left(\frac{2k_F}{m_v}\right) \right] \quad (B.2)$$

Usando as eqs. (B.1) e (B.2), para o potencial

$$V(r) = \frac{g_V^2}{4\pi} \frac{e^{-m_v r}}{r} - \frac{g_S^2}{4\pi} \frac{e^{-m_S r}}{r}$$

temos

$$\sum_{m,n \in A} [\langle mn | V | mn \rangle - \langle mn | V | nm \rangle] = \frac{4L^3}{9\pi^4} \left(\frac{g_V^2}{m_v^2} - \frac{g_S^2}{m_S^2} \right) k_F^6 -$$

$$- \frac{L^3}{12\pi^4} \left[2k_F^2(6k_F^2 - m_v^2) + \frac{m_v^2}{2}(m_v^2 + 12k_F^2) \ln\left(1 + \frac{4k_F^2}{m_v^2}\right) - 16k_F^3 m_v \operatorname{arctg}\left(\frac{2k_F}{m_v}\right) \right] +$$

$$+ \frac{L^3}{12\pi^4} \left[2k_F^2(6k_F^2 - m_S^2) + \frac{m_S^2}{2}(m_S^2 + 12k_F^2) \ln\left(1 + \frac{4k_F^2}{m_S^2}\right) - 16k_F^3 m_S \operatorname{arctg}\left(\frac{2k_F}{m_S}\right) \right].$$

REFERÊNCIAS

1. K.A. Brueckner, C.A. Levinson and H.M. Mahmoud, Phys. Rev. 95, 217 (1954).
2. J. Goldstone, Proc. Roy. Soc. (London) A239, 267 (1957).
3. F. Coester, S. Cohen, B.D. Day and C.M. Vicent, Phys. Rev. C1, 769 (1970).
4. J.W. Negele, Phys. Rev. C1, 1260 (1970).
5. J. D. Walecka, Ann. Phys. 83, 491 (1974).
6. M.R. Anastasio et al., Phys. Reports 100, 327 (1983).
7. B.D. Day, Rev. Mod. Phys. 39, 719 (1967),
H.A. Bethe, Ann. Rev. Nucl. Sci. 21, 93 (1971).
8. B.D. Serot, S.E. Koonin and J.W. Negele, Phys. Rev. C28, 1679 (1983).
9. J.D. Bjorken and S.D. Drell, "Relativistic Quantum Fields",
Mc Graw-Hill, New York, 1965.
10. V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz and L.M. Pitaevskii, "Relativistic
Quantum Theory", Vol. 4 of Course of Theoretical Physics, Part 1,
Pergamon Press (1979).
11. B.D. Serot and J.D. Walecka, Advances in Nuclear Physics 16, 1 (1986).