Ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции
Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова

А.В. Добряков

ИАЭ-4827/6

РАВНОВЕСИЕ ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА С НЕОДНОРОДНЫМ ПОЛЕМ НА ОСИ И БЕЗ ПРОДОЛЬНОГО ТОКА

Москва — ЦНИИатоминформ — 1989

УДК 533.6.9.01

Ключевые слова: магнитное поле, магнитные поверхности, равновесие плазмы, плазменный шнур, смещение, кожух.

В первом порядке по $\beta = 8\pi p/B^2$ и кривизне рассмотрено равновесие плазменного шнура с неоднородным полем на оси, которая не обладает симметрией. Предполагается, что шнур находится внутри идеально проводящего кожуха круглого сечения. Показано, что смещение шнура существенно зависит от формы этого кожуха. В качестве примера рассмотрено равновесие плазмы в магнитной ловушке Дракон.

The equilibrium of a plasma column with a inhomogeneous nonuniform field along an axis than has not any symmetry has been considered for the first order of $\beta = 8\pi p/B^2$ and the curvature. The column is assumed to be inside an ideally—conducting sheath with a circular cross-section. It is shown that the column shift depends noticeably on the shape of this sheath. The plasma equilibrium has been considered as an example in a drakon magnetic trap.

Редактор Т.И. Титкова
Технический редактор С.К. Сведлова
Корректор Л.В. Пономарева

Подписано в печать 10.03.89. Т-09204. Формат 60x90/16
Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,1
Тираж 130. Цена 20 коп. Заказ 135. Индекс 3624

Подготовлено к изданию и отпечатано
в Институте атомной энергии им. И.В. Курчатова
123182, Москва, пл. Академика Курчатова

1. ВВЕДЕНИЕ

Впервые равновесие плазменного шнура с пространственной осью было рассмотрено В.Д. Шафрановым в 1964 г. [1, 2]. При этом продольное магнитное поле на оси считалось однородным. Такое рассмотрение справедливо для большого класса пространственных систем (в частности для винтовых торов). Пространственные замкнутые плазменные ловушки привлекательны возможностью бестокового удержания плазмы в них и, следовательно, отсутствием связанных с этим током неустойчивостей. Кроме того, в пространственных системах достигаются большие значения вращательного преобразования, и поэтому предельные равновесные значения $\beta = 8\pi p/B^2$ могут быть значительно выше, чем, например, в токамаках.

Однако проведенное в [1, 2] рассмотрение охватывает не все виды пространственных систем. В последнее время выяснилось, что системы с неоднородным полем на оси тоже представляют определенный интерес. Например, недавно был обнаружен новый метод обеспечения устойчивости плазмы созданием среднего минимума "B" (магнитной ямы) с помощью продольной неоднородности магнитной конфигурации при круглых магнитных поверхностях [3]. Этот метод создания магнитной ямы рассматривался применительно к магнитной ловушке Дракон, подробно описанной в [3 – 6]. Поэтому в настоящей работе равновесие плазмы при неоднородном поле на оси рассматривается (в качестве примера) и в этой ловушке.

Ранее уже были проведены некоторые расчеты равновесия при неоднородном поле на оси [7]. Определялось смещение парциальных магнитных поверхностей относительно магнитной оси, положение и поле на которой считались известными. Однако влияние на равновесие плазмы внешних условий (идеально проводящего кожуха, проводников с током и т.д.) рассмотрено не было. Поэтому в данной работе, как и в [1], предполагается, что плазма помещена в идеально проводящий кожух, относительно которого определяется смещение шнура. При этом становится видно влияние формы кожуха на равновесие плазмы.

Рассмотрение проводится в параксиальном приближении с использованием разложения в степенной ряд по β. При разложении удерживаются старшие члены, т.е. рассматривается первый порядок по кривизне и β; проводится также разложение и в степенной ряд по ρ (расстоянию от координатной s-оси). Газокинетическое давление в пределах шнура считается постоянным; магнитные поверхности предполагаются круглыми.

В разд. 2 предлагаемой работы рассматривается структура магнитного поля, в разд. 3 исследуется равновесное положение плазменного шнура, в разд. 4 результаты из разд. 2 и 3 рассматриваются применительно к магнитной ловушке Дракон (с учетом ее специфики), разд. 5 посвящен выводам.

2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим структуру магнитного поля. Все последующие расчеты проводятся в подвижной системе координат Мерсье (ρ, ω, s) с метрикой

$$(dr)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2 (d\omega)^2 + (1 - k\rho\cos\theta)^2 (ds)^2 .$$

В рамках используемого параксиального приближения при медленном изменении в зависимости от s реальных физических величин, предполагается, что $k\rho \sim (\rho/f) . (df/ds) \ll 1$, где $f(s)$ — функция, описывающая какую-либо физическую величину. Кроме того, параметр β тоже считается малым.

При сделанных предположениях исследование равновесия удобно проводить методом возмущений, где за нулевое приближение принимается система с прямой осью ($k = 0$). За s-ось системы координат Мерсье примем центральную ось плазменного шнура.

Граница плазмы (которая является магнитной поверхностью) приближенно описывается соотношением $\rho_{гп} = a\sqrt{B_0(0)/B_0}$, где B_0 — магнитное поле на оси шнура; a — радиус плазменного шнура при $s = 0$ (например, минимальное значение $\rho_{гп}$). В рассматриваемом приближении выражения для B_i^0 и B_e^0 — магнитного поля внутри и вне шнура — имеют вид

$$B_{si}^0 = B_0, \quad B_{\rho i}^0 = -\frac{1}{2}\frac{dB_0}{ds}\rho, \tag{1}$$

$$B_{se}^0 = \sqrt{B_0^2 + 8\pi p}, \quad B_{\rho e}^0 = -\frac{1}{2}\frac{dB_0}{ds}\frac{1}{\sqrt{B_0^2 + 8\pi p}}\left[\rho B_0 + \frac{8\pi p a^2 B_0(0)}{B_0^2 \rho}\right]. \tag{2}$$

В случае принятого профиля давления плазмы токи текут только по поверхности шнура. Для описания магнитного поля в этом случае удобно использовать скалярный потенциал Φ ($B = \text{grad}\Phi$), для которого справедливо уравнение Лапласа

$$\Delta\Phi \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(h_s\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\omega}(h_s\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}) + \frac{\partial}{\partial s}(\frac{1}{h_s}\frac{\partial\Phi}{\partial s}) = 0,$$

где

$$h_s = 1 - k\rho\cos\theta = 1 - k(s)\rho\cos[\omega - \alpha(s)]\,;\ \alpha(s) = \int_0^s \varkappa(s)ds.$$

Представляя Φ в виде $\Phi = \Phi_0 + \tilde{\Phi}$ (где Φ_0 соответствует нулевому приближению по кривизне) для $\tilde{\Phi}$ в линейном по кривизне приближении во внутренней (занятой плазмой) и внешней областях, получаем уравнения

$$\frac{\partial^2\tilde{\Phi}_i}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi_i}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}_i}{\partial\omega^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_i}{\partial s^2} = -\frac{3}{2}k\rho\cos\theta - \rho\frac{\partial}{\partial s}(kB_0\cos\theta), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\Phi}_e}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{\Phi}_e}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\tilde{\Phi}_e}{\partial\omega^2} + \frac{\partial\tilde{\Phi}_e}{\partial s^2} = -\frac{k\rho}{\sqrt{B_0^2 + 8\pi p}}\frac{dB_0}{ds}\left[\frac{3}{2}B_0 + \frac{4\pi p a^2 B_0(0)}{B_0^2\rho^2}\right] \times$$

$$\times\cos\theta - \rho\frac{\partial}{\partial s}(kB^0_{se}\cos\theta). \quad (4)$$

Дополнительными условиями к этим уравнениям являются требование тангенциальности к плазменной поверхности на ней магнитного поля

$$(\vec{n}\cdot\vec{B})\Big|_{ГП} = 0 \quad (5)$$

и баланс давлений на границе плазмы

$$B_i^2\Big|_{ГП} + 8\pi p = B_e^2\Big|_{ГП}\,. \quad (6)$$

Здесь n — нормаль к границе плазмы; помета "$|_{ГП}$" означает, что соответствующая величина вычисляется на этой границе.

Заметим, что последний член $\partial^2\Phi/\partial s^2$ в левых частях (3), (4) много меньше остальных и поэтому во многих случаях может быть опущен. Если правую часть (4) разложить в степенной ряд по $\beta = 8\pi p/B^2$, то нулевой член разложения совпадает с правой частью уравнения (3). Далее будет показано, что решение однородного уравнения (4) содержит часть, пропорциональную β; у которой нет малости, связанной с параксиальностью, и которая поэтому много больше пропорциональной β части решения неоднородного уравнения. Поэтому в рассматриваемом приближении можно в правой части (4) пренебречь p (т.е. считать, что p = 0).

С учетом сказанного можно найти частное решение неоднородных уравнений (3, 4)

$$\widetilde{\Phi}^{HO}_{i,e} = -\frac{\rho^3}{8}\left[\frac{3}{2}k\frac{dB_0}{ds}\cos\theta + \frac{\partial}{\partial s}(kB_0\cos\theta)\right]. \tag{7}$$

Решение (7) соответствует вакуумному случаю. Для выполнения граничных условий (5), (6) к (7) необходимо добавить решения однородных уравнений (3), (4).

Однородные решения, соответствующие вакуумному случаю, ищем в виде $\widetilde{\Phi}^0_{i,e} = \widetilde{\Phi}_b(\omega, s)\,\rho$. Уравнение для $\widetilde{\Phi}_b$ выглядит так:

$$\ddot{\widetilde{\Phi}}_b + \widetilde{\Phi}_b = 0, \tag{8}$$

где точкой обозначена производная по ω.

Решение уравнения (8) представляет собой первую гармонику от ω или θ:

$$\widetilde{\Phi}_b = P_1(s)\sin\theta + Q_1(s)\cos\theta, \tag{9}$$

где P (s) и Q (s) — пока произвольные функции от s.

В необходимом приближении условие (5) принимает вид

$$(\vec{n}_0\cdot\vec{B}_1 + \vec{n}_1\cdot\vec{B}_0)\Big|_{\Gamma\Pi} = 0, \tag{10}$$

где

$$\vec{n}_0\Big|_{\Gamma\Pi} = \left\{1{,}0; -\frac{d}{ds}\rho_{\Gamma\Pi}(s)\right\},\quad \vec{n}_1\Big|_{\Gamma\Pi} = 0,$$

или

$$\widetilde{\Phi}_b - \frac{3}{8}\left[\frac{3}{2}k\frac{dB_0}{ds}\cos\theta + \frac{\partial}{\partial s}(kB_0\cos\theta)\right] + \frac{a}{2B_0}\sqrt{\frac{B_0(0)}{B_0}}\times$$

$$\times\, kB_0\rho_{\Gamma\Pi}\cos\theta = 0,$$

откуда следует, что

$$\widetilde{\Phi}_b = \frac{a^2}{16}\frac{B_0(0)}{B_0}\left[k\frac{dB_0}{ds}\cos\theta + 6\frac{\partial}{\partial s}(k\,B_0\cos\theta)\right]. \tag{11}$$

Условие (6) приближенно можно представить в виде

$$\vec{B}^0_i\cdot\vec{B}^1_i = \vec{B}^0_e\cdot\vec{B}^1_e. \tag{12}$$

Здесь

$$\vec{B}^1_{i,e} = \left\{\frac{\partial\widetilde{\Phi}_{i,e}}{\partial\rho},\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial\widetilde{\Phi}_{i,e}}{\partial\omega},\ B_0k\rho\cos\vartheta + \frac{\partial\widetilde{\Phi}_{i,e}}{\partial s}\right\}.$$

В равернутой форме (11) выглядит так:

$$B^0_{\rho i}B^1_{\rho i} + B^2_{0i}k\rho_{\Gamma\Pi}\cos\theta + B_{0i}\frac{\partial\widetilde{\Phi}_i}{\partial s} =$$

$$= B^0_{\rho e}B^1_{\rho e} + B^2_{0e}k\rho_{\Gamma\Pi}\cos\theta + B_{0e}\frac{\partial\widetilde{\Phi}_e}{ds},$$

где

$$B^0_\rho = -\frac{1}{2}\frac{dB_0}{ds}\rho_{\Gamma\Pi},$$

или

$$B_{0i}\frac{\partial\widetilde{\Phi}_i}{ds} - B_{0e}\frac{\partial\widetilde{\Phi}_e}{ds} = 8\pi pk\rho_{\Gamma\Pi}\cos\theta + B^0_{\rho e}B^1_{\rho e} - B^0_{\rho i}B^1_{\rho i}. \qquad (13)$$

Из (13) видно, что для выполнения условия баланса давлений на границе плазмы требуется дополнительный член в потенциале, пропорциональный давлению и не содержащий малости из-за параксиальности. Поскольку внутри плазмы магнитное поле уже однозначно определено, то такой член может быть лишь во внешней области и его следует искать в виде $\widetilde{\Phi}_p = \widetilde{\Phi}^1\rho + \widetilde{\Phi}^{-1}/\rho$. Здесь для $\widetilde{\Phi}^1$ и $\widetilde{\Phi}^{-1}$, как и ранее, из однородных уравнений (3.4) можно получить

$$\ddot{\widetilde{\Phi}}{}^1 + \widetilde{\Phi}^1 = 0, \quad \ddot{\widetilde{\Phi}}{}^{-1} + \widetilde{\Phi}^{-1} = 0, \qquad (14)$$

откуда следует, что $\widetilde{\Phi}^1$ и $\widetilde{\Phi}^{-1}$ представимы в виде первой гармоники от ω или θ. Так как мы ищем в $\widetilde{\Phi}$ часть, пропорциональную р, то в (13) следует исключить члены, пропорциональные Φ_i, B_i, поскольку последние р не содержат. Для $\widetilde{\Phi}_p$ требуется выполнение условия (5), которое в соответствующем приближении сводится к требованию

$$\left.\frac{\partial\widetilde{\Phi}_0}{\partial\rho}\right|_{\Gamma\Pi} = \widetilde{\Phi}^1 - \widetilde{\Phi}^{-1}/\rho^2_{\Gamma\Pi} = 0. \qquad (15)$$

С учетом (15) из (13) для $\widetilde{\Phi}_p$ следует уравнение

$$-\frac{\partial\widetilde{\Phi}_p}{\partial s} = \frac{8\pi p}{B_0}ka\sqrt{B_0(0)/B_0}\cos\theta. \qquad (16)$$

Будучи решением уравнения (16), $\widetilde{\Phi}_p$ заведомо удовлетворяет в рассматриваемом приближении и уравнению Лапласа. Для $\widetilde{\Phi}^1$ и $\widetilde{\Phi}^{-1}$, в свою очередь, отсюда также легко получить уравнения. Например, для $\widetilde{\Phi}^1$ уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial s}(\tilde{\Phi}^1/\sqrt{B_0}) = -4\pi p\frac{k}{B_0^{3/2}}\cos\theta . \qquad (17)$$

Решение уравнения (17), как и в однородном случае [1], можно представить в виде ряда Фурье. При этом необходимо выполнить условие однозначности

$$f(\rho,\omega,s) = f(\rho,\omega + 2m\pi + n\alpha(L),\ s + nL), \qquad (18)$$

где m и n — любые целые числа.

Представляя $\tilde{\Phi}^1$ аналогично однородному случаю в виде $\tilde{\Phi}^1 = \sqrt{B_0}\times$ $\times \mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}\Phi_n \exp[i(\omega - æ_n s)]$ и разлагая $(k/B_0^{3/2})\cos[\omega - \alpha(s)]$ в ряд

$$\frac{k}{B_0^{3/2}}\cos[\omega - \alpha(s)] = \mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n \exp[i(\omega - æ_n s)], \qquad (19)$$

где

$$K_n = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{k(s)}{B_0^{3/2}(s)}\exp[i(æ_n s - \alpha)]ds \quad (æ_n = æ_0 - 2\pi m/L,\ æ_0 = \alpha(L)/L),$$

для Φ_n находим

$$\Phi_n = -iK_n/æ_n . \qquad (20)$$

Условие (18) при этом выполняется автоматически.

В дальнейшем, однако, будет показано, что в случае магнитной ловушки Дракон решение уравнения (17) удобнее представлять в интегральном виде.

3. МАГНИТНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ

Теперь рассмотрим положение магнитных поверхностей и плазменного шнура.

Как уже отмечалось, за нулевое приближение принимается система с прямой осью. При деформации (искривлении) системы магнитные поверхности деформируются, а идеально проводящий кожух сохраняет вмороженный в него магнитный поток. При этом кожух может сам совпадать с магнитной поверхностью. В последнем случае магнитный поток через поверхность кожуха равен нулю.

Магнитный поток, пронизывающий элемент поверхности кожуха, равен $d\Phi = (\vec{B}_0 + \vec{B}_1).(\vec{n}_0 + \vec{n}_1)(dS_0 + dS_1)$. Согласно теореме вмороженности $d\Phi = d\Phi_0 = n_0.B_0 dS_0$. Пренебрегая членами высшего порядка малости, получаем

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{B}_1 + \vec{B}_0 \cdot \vec{n}_1 + \vec{n}_0 \cdot \vec{B}_0 dS_1/dS_0 = 0 \qquad (21)$$

В рамках разложения в степенной ряд по β, вакуумную и плазменную части смещения будем рассчитывать отдельно.

Рассмотрим два наиболее важных случая: 1 кожух совпадает с вакуумной магнитной поверхностью (радиус кожуха приближенно описывается соотношением $\rho_K^0 = b\sqrt{B^0(0)}/B_0$, где $b = \rho_K^0(0)$); 2. Кожух имеет постоянный радиус $\rho_K^0 = const = b$.

Остановимся сперва на первом случае.

Определим вначале вакуумную часть смещения, для чего предположим, что плазма отсутствует. Уравнение (21) при этом принимает вид

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{B}_1 + \vec{B}_0 \cdot \vec{n}_1 = 0. \qquad (22)$$

При определении положения вакуумных магнитных поверхностей (в отличие от положения плазменного шнура) удобнее всего за s-ось системы координат Мерсье принять магнитную ось. Тогда поправка $\tilde{\Phi}$ к потенциалу магнитного поля имеет вид (7) и не содержит добавочного члена (11), являющегося решением однородного уравнения для $\tilde{\Phi}$. Уравнение парциальной магнитной поверхности имеет вид $\rho(\omega, s) = \rho_0(s) + \delta_\Pi(\omega, s)$, где $\rho_0(s)$ – радиус магнитной поверхности; $\delta_\Pi(\omega, s)$ – ее смещение, которое зависит от какой-либо величины, идентифицирующей данную магнитную поверхность (например, $\rho_0(0)$), как от параметра. Поэтому далее в списке аргументов, от которых зависит δ_Π, будем указывать и $\rho_0(0)$. Магнитное поле $\vec{B}_0$ описывается формулами (1). Выражения для n_0 и n_1 выглядят так:

$$\vec{n}_0 = \left\{ 1, 0, -\frac{d}{ds}\rho_0(s) \right\}, \qquad (23)$$

$$\vec{n}_1 = \left\{ 0, -\frac{1}{\rho_0(s)} \frac{\partial \delta_\Pi(\rho_0(0), \omega, s)}{\partial s}, -\frac{\partial \delta_\Pi(\rho_0(0), \omega, s)}{\partial s} \right\}. \qquad (24)$$

С учетом сказанного перепишем (21) в развернутой форме

$$\frac{\partial \delta_\Pi(\rho_0(0), \omega, s)}{\partial s} + \frac{1}{2B_0}\frac{dB_0}{ds}\delta_\Pi(\rho_0(0), \omega, s) =$$

$$= -\frac{\rho_0^2(0)B_0(0)}{16B_0^{3/2}}\left[k\frac{dB_0}{ds}\cos\theta + 6\frac{\partial}{\partial s}(kB_0\cos\theta)\right], \qquad (25)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial s}\,[\sqrt{B_0}\;\delta_\Pi(\rho_0(0), \omega, s)] = -\frac{\rho_0^2(0)B_0(0)}{16B_0^{3/2}}\,\{k\frac{dB_0}{ds}\cos\theta +$$

$$+ 6\,\frac{\partial}{\partial s}\,(kB_0\cos\theta)]\,. \qquad (26)$$

При получении (25) было также учтено, что $\partial\tilde{\Phi}/\partial\rho$, $(d\rho_0(s)/ds).B_0 k\rho\cos\theta \gg$ $\gg (\partial\tilde{\Phi}/\partial s).(d\rho_0(s)/ds)$. При однородном на оси поле (B_0 = const(s)) уравнение (26) имеет простое (известное ранее) решение $\delta_\Pi(\omega, s) = -(3/8)\,kb^2\cos\theta$, которое определяется локальными параметрами магнитной конфигурации. В общем же случае при $B_0(s) \neq$ const решение уравнения (26) зависит от этих параметров интегрально. Такое решение можно искать в виде $\delta_\Pi(\rho_0(0), \omega, s) = \Delta_1(s).\cos\theta + \Delta_2(s).\sin\theta$. Тогда для $\Delta_1(s)$ и $\Delta_2(s)$ получается система из двух дифференциальных уравнений первого порядка, метод решения которой изложен в [8]. Для этого следует ввести новую комплексную функцию $\sigma(s) = \Delta_1(s) - i\Delta_2(s)$, для которой нетрудно получить уравнение

$$\sigma'(s) - i(\varkappa + \frac{i}{2}\,\frac{1}{B_0}\,\frac{dB_0}{ds})\sigma = -\,B_0(0)\rho_0^2(0)F(s), \qquad (27)$$

где

$$F(s) = \frac{1}{16\,B_0^2}\,[k\frac{dB_0}{ds} + 6\,\frac{d(kB_0)}{ds} - 6ik\varkappa B_0]\,,$$

периодическое решение которого выглядит так:

$$\sigma(s) = -\,\rho_0^2(0)\,\frac{B_0^{3/2}(0)}{\sqrt{B_0}}\,\frac{e^{i\alpha(s)}}{e^{i\alpha(L)} - 1}\int_s^{s+L}[F(s')\sqrt{\frac{B_0}{B_0(0)}}\,]\exp[-i\alpha(s')]\,ds'\,. \qquad (28)$$

При этом $\Delta_1(s)$ и $\Delta_2(s)$ вычисляются как соответственно действительная и мнимая части $\sigma(s)$. При определении смещения поверхности кожуха относительно центра парциальной магнитной поверхности за координатную s-ось удобно принять центральную ось парциальной магнитной поверхности. Тогда это смещение может быть вычислено как разность $\delta_\Pi(b, \omega, s) - \delta_\Pi(\rho_0(0), \omega, s)$, где оба значения δ_Π определяются по указанной схеме.

Теперь определим плазменную часть смещения, связывая s-ось с центральной осью шнура.

Поверхность кожуха при наличии плазмы в системе уже не является магнитной, и поэтому в уравнении (21) член $n_0.B_0 dS_1/dS_0$ не равен нулю.

Однако можно показать, что в рассматриваемом приближении им можно пренебречь. Для этого рассмотрим этот член подробнее.

Элемент площади поверхности кожуха равен $dS = \rho_K d\omega dl$, где ρ_K – расстояние от оси до элемента поверхности кожуха в перпендикулярной плоскости; dl – элемент длины на этой поверхности вдоль оси системы равен

$$dl = \sqrt{\frac{1}{4}\frac{\rho_K^2}{B_0^2}\left(\frac{dB_0}{ds}\right) + (1 - k\rho_K \cos\theta)^2}\ ds. \qquad (29)$$

Здесь $\rho_K = b\sqrt{B_0(0)/B_0} + \delta_K$; $\delta_K = \delta_П (b, \omega, s)$.

Представляя dS в виде $dS = dS_0 + dS_1$, где dS_0 и dS_1 – части dS, имеющие соответственно нулевой и первый порядок малости, для dS_0 и dS_1 имеем приближенные соотношения

$$dS_0 \approx b\sqrt{B_0(0)/B_0}\ ds d\omega;\quad dS_1 \approx \left[\delta_K - kb^2 \frac{B_0}{B_0(0)}\cos\theta\right] ds d\omega. \qquad (30)$$

Приближенное выражение для скалярного произведения $n_0 . B_0$ выглядит так:

$$n_0 \cdot B_0 \approx \frac{4\pi p}{B_0^2}(1 - a^2/b^2)\frac{dB_0}{ds} b\sqrt{B_0(0)/B_0}. \qquad (31)$$

После подстановки в (21) вычисленных ранее явных выражений для n_0, B_0, n_1, B_1, а также с учетом (30), (31), становится видно, что член $n_0 \times$ $\times B_0 dS_1/dS_0$ в (21) по сравнению с двумя другими дополнительно содержит малость $\sim\beta$. Поэтому, как уже отмечалось, этим членом можно пренебречь, и уравнение (21) сводится к уравнению (22), которое в рассматриваемом приближении принимает вид

$$\tilde{\Phi}^1 (1 - a^2/b^2) - B_0 \frac{\partial \delta_K}{\partial s} - \frac{1}{2}\frac{dB_0}{ds}\delta_K = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial s}(\sqrt{B_0}\ \delta_K) = (1 - a^2/b^2)\tilde{\Phi}^1/\sqrt{B_0}, \qquad (32)$$

где a и b – соответственно радиус плазмы и кожуха при $s = 0$.
Далее с учетом уравнения (17) можно получить

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}(\sqrt{B_0}\ \delta_K) = -4\pi(1 - a^2/b^2)p\frac{k}{B_0^{3/2}}\cos\theta. \qquad (33)$$

В общем случае решение уравнения (33) можнс представить в виде ряда Фурье. Представляя $\sqrt{B_0}\delta_K$ в виде ряда $\sqrt{B_0}\delta_K = \mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta_n \exp[i(\omega - \text{æ}_n s)]$ и разлагая, как и ранее, $k/B_0^{3/2}\cos\theta = \mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n \exp[i(\omega - \text{æ}_n s)]$, ($K_n$ и æ_n определяются формулой (19)) для δ_n можно получить выражение

$$\delta_n = 4\pi(1 - a^2/b^2)pK_n/\text{æ}_n^2 . \tag{34}$$

Таким образом, полное выражение для δ_K имеет вид

$$\delta_K = \frac{4\pi p}{\sqrt{B_0}}(1 - a^2/b^2)\mathrm{Re}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{K_n}{\text{æ}_n^2}\exp i(\omega - \text{æ}_n s). \tag{35}$$

Рассмотрим далее второй случай, когда кожух имеет постоянный радиус b.

Следует отметить, что от одного лишь изменения формы кожуха при неизменности оси и поля на ней, структура магнитного поля в объеме не меняется. Поэтому магнитное поле внутри и вне шнура описывается теми же формулами, что и в предыдущем случае. Однако как будет показано далее, смещение магнитных поверхностей и шнура относительно кожуха существенно меняется при изменении формы последнего.

Как и прежде, рассмотрим сначала вакуумное смещение. При решении вакуумной задачи магнитную ось будем считать координатной s-осью. При этом смещение магнитных поверхностей относительно магнитной оси $\delta_П(\rho_0(0), \omega, s)$ по-прежнему определяется из уравнений (25, 26) по указанной ранее схеме. Но смещение δ_K будет уже другим. Для определения δ_K следует использовать уравнение (21). Выражения для B_0, n_0, n_1 на поверхности кожуха имеют вид

$$\vec{B}_0 = \left\{-\frac{1}{2}\frac{dB_0}{ds}b,\ 0,\ B_0\right\},\quad \vec{n}_0 = \{1, 0, 0\}, \tag{36}$$

$$\vec{n}_1 = \left\{0,\ -\frac{1}{b}\frac{\partial\delta_K(\omega, s)}{\partial\omega},\ -\frac{\partial\delta_K(\omega, s)}{\partial s}\right\}. \tag{37}$$

Потенциал $\tilde{\Phi}$ магнитного поля $\vec{B}_1$ описывается формулой (7), а выражения для dS_0 и dS_1 можно записать так:

$$dS_0 = b\,d\omega ds;\quad dS_1 = [\delta_K(\omega, s) - kb^2\cos\theta]\,d\omega ds. \tag{38}$$

После подстановки соответствующих величин уравнение (21) принимает следующую форму:

$$\frac{\partial}{\partial s}[B_0\delta_K(\omega, s)] = -\frac{b^2}{16}\left[k\frac{dB_0}{ds}\cos\theta + 6\frac{\partial}{\partial s}(kB_0\cos\theta)\right]. \tag{39}$$

Уравнение (39) не сводится к уравнению (26), но решение его, как и решение (26), можно искать в виде $\delta_К(\omega, s) = \Delta_1(s)\cos\theta + \Delta_2(s)\sin\theta$. Тогда, следуя изложенной выше процедуре, которая использовалась для решения уравнения (26), для комплексной комбинации $\sigma(s) = \Delta_1(s) - \Delta_2(s)$ можно получить уравнение, которое интегрируется аналогично уравнению (27). Далее также, как и в предыдущем случае, можно определить смещение поверхности кожуха относительно центра парциальной магнитной поверхности, которое вычисляется как разность $\delta_К(\omega, s) - \delta_П(\rho_0(0), \omega, s)$.

Теперь рассмотрим плазменную часть смещения (связывая s-ось с центральной осью шнура). Для этого опять воспользуемся уравнением (21). Однако в отличие от предыдущего случая, членом $n_0.B_0dS_1/dS_0$ пренебрегать уже нельзя.

Выражения для величин $\vec{B}_0, \vec{n}_0, \vec{n}_1, dS_0, dS_1$, входящих в (21), даются формулами (36) – (38). Потенциал Φ_p магнитного поля B определяется уравнением (16). Подставляя в (21) явные выражения входящих в него величин и исключая вакуумные члены, для плазменной части смещения $\delta_К$ получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial s}(B_0\delta_К) = \widetilde{\Phi}^1\left[1 - \frac{a^2}{b^2}\,\frac{B_0(0)}{B_0}\right], \tag{40}$$

которое отличается от аналогичного уравнения, справедливого при другой форме кожуха. Уравнение (40) не допускает такого же простого решения в виде ряда Фурье, как уравнение (33), и его следует искать в виде квадратур, аналогично решению уравнений (26) и (39). Предварительно из уравнения (17) необходимо определить коэффициент $\widetilde{\Phi}^1$. Решение уравнения (17) в данном случае удобно также искать в интегральном виде изложенным ранее методом. Техника отыскания решений уравнений во всех указанных случаях одна и та же, однако общий вид этих решений представляется весьма громоздким, и поэтому нет смысла их здесь приводить. Следует лишь отметить, что в отличие от магнитного поля смещение магнитной конфигурации относительно кожуха существенно зависит от формы последнего.

Как и при однородном поле на оси, полученные соотношения можно использовать для качественной оценки по порядку величины предельного равновесного значения параметра β. Такая оценка может быть получена из условия равенства смещения плазменного шнура (там, где это смещение максимально) начальному зазору (при $p \to 0$) между шнуром и кожухом. Следует, однако, отметить, что поскольку магнитное поле непостоянно вдоль оси системы, то параметр $\beta = 8\pi p/B^2$ тоже зависит от s, и поэтому при $B_0(s) \neq \text{const}$ более целесообразно говорить о максимальном значении давления $p(p^*)$. Пренебрегая вакуумной частью смещения (которая значительно меньше плазменной при близких к критическим значениях p), в случае, если кожух совпадает с магнитной поверхностью, получаем

$$p^* \sim A/\Sigma, \tag{41}$$

где

$$A = \frac{\sqrt{B_0(0)}b^2}{4\pi(a+b)}; \quad \Sigma = \max\left\{ \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{K_n}{\varkappa_n^2} \exp\left[i(\omega - \varkappa_n s)\right] \right\}.$$

Коэффициент A достигает своего минимального значения $\sqrt{B_0(0)}\,b/8\pi$ при максимальном использовании объема магнитного поля, т.е. если плазма занимает весь этот объем (при $a = b$).

В разд. 4 рассмотрим равновесие плазмы в магнитной ловушке Дракон. Решения уравнения для потенциала магнитного поля $\tilde{\Phi}_p$ и смещения δ_K получены в интегральном виде с учетом специфики этой ловушки.

4. СЛУЧАЙ МАГНИТНОЙ ЛОВУШКИ ДРАКОН

Магнитная ловушка Дракон [3 – 6] состоит из длинных пробкотронов, соединенных специальными криволинейными замыкателями (КРЭЛами). При увеличении длины прямых участков и давления плазмы в системе необходимо, чтобы в прямых участках не менялось бы смещение плазменного шнура. Поэтому в области слабого поля на прямой секции (которая наиболее пригодна в качестве реакторной части установки) производная смещения по длине оси $(\partial\delta_K/\partial s)$ должна быть равна нулю. Из уравнений, полученных в разд. 3 следует, что в рассматриваемом приближении, независимо от формы кожуха, указанное требование сводится к двум уравнениям

$$\tilde{\Phi}_p = 0, \quad \frac{dB_0}{ds} = 0. \tag{42}$$

За начало отсчета s принимается центр КРЭЛа, а его длину будем обозначать через l. Длину всей системы обозначим через L.

В области однородного поля второе из условий (42) выполняется автоматически, а для выполнения первого нужно специальным образом подобрать геометрию и магнитную конфигурацию КРЭЛа. Если потребовать выполнение первого условия (42) на всем прямом участке (что всегда и делается в ловушке Дракон), то смещение δ_K может изменяться лишь в относительно короткой переходной области неоднородного поля. При этом в области слабого поля на прямом участке ось плазменного шнура остается параллельной оси системы.

С учетом сказанного рассмотрим равновесие плазмы в КРЭЛе.

Решение уравнения (17) можно записать в виде

$$\tilde{\Phi}^1/\sqrt{B_0} = (\tilde{\Phi}^1/\sqrt{B_0})\Big|_{-l/2} - 4\pi p \int\limits_{-l/2}^{s} \frac{k}{B_0^{3/2}} \cos[\omega - \alpha(s)]\,ds. \tag{43}$$

Далее, принимая во внимание (42), получаем

$$\tilde{\Phi}^1 = -4\pi p\sqrt{B_0}\,[q_1(s)\cos\omega + q_2(s)\sin\omega], \tag{44}$$

где

$$q_1(s) = \int\limits_{-l/2}^{s} \frac{k}{B_0^{3/2}} \cos\alpha ds' \quad \text{и} \quad q_2(s) = \int\limits_{-l/2}^{s} \frac{k}{B_0^{3/2}} \sin\alpha ds' \; -$$

— две функции, с помощью которых первое из условий (42) можно выразить так:

$$q_1(l/2) = 0; \quad q_2(l/2) = 0. \tag{45}$$

В симметричных относительно своего центра КРЭЛах второе из условий (45) выполняется всегда в силу нечетности подынтегральной функции, и заботиться следует лишь о выполнении первого условия.

Теперь определим плазменную (наиболее важную) часть смещения шнура. Будем рассматривать только симметричные КРЭЛы.

Предположим, что кожух совпадает с вакуумной магнитной поверхностью. Пусть на всем прямом участке поле однородно. Тогда в КРЭЛе из уравнения (33) с учетом (44), используя интегрирование по частям, получаем

$$\delta_K = \sqrt{\frac{B_{00}}{B_0}}\,\delta_K\Big|_{-l/2} - \frac{4\pi p}{\sqrt{B_0}}(1 - a^2/b^2)\Big\{[sq_1(s) -$$

$$- \int\limits_{-l/2}^{s} s'\frac{k\cos\alpha}{B_0^{3/2}}ds']\cos\omega + [sq_2(s) - \int\limits_{-l/2}^{s} s'\frac{k\sin\alpha}{B_0^{3/2}}ds']\sin\omega\Big\}, \tag{46}$$

где B_{00} — значение поля B_0 в прямом участке.

При этом требуется определить величину $\delta_K|_{-l/2}$. Для этого рассмотрим δ_K на другом конце КРЭЛа, т.е. при $s = l/2$. Принимая во внимание, что $\int_{-l/2}^{l/2} s\,(k\cos\alpha/B_0^{3/2})\,ds = 0$, как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах, а также условия (45) (условия "драконности"), имеем

$$\delta_K\Big|_{l/2} = \delta_K\Big|_{-l/2} + \frac{4\pi p}{\sqrt{B_0}}(1 - a^2/b^2)\Big(\int_{-l/2}^{l/2} s\frac{k\sin\alpha}{B_0^{3/2}}\,ds\Big)\sin\omega. \qquad (47)$$

Заметим, что в силу симметрии КРЭЛа, величины $\delta_K|_{l/2}$ и $\delta_K|_{-l/2}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\delta_K\Big|_{-l/2} &= C\cos[\omega - \alpha(L/4)],\\ \delta_K\Big|_{l/2} &= C\sin[\omega + \alpha(L/4)],\end{aligned} \qquad (48)$$

где C — константа; $\alpha(L/4)$ — угол вращательного преобразования на четверти длины системы.

Этот угол равен $\alpha(l/2) + \gamma$, где γ — угол скачка нормали на стыке КРЭЛа с прямым участком. Далее из (47) и (48) находим константу C:

$$C = \frac{2\pi p}{\sqrt{B_{00}}\,\sin\alpha(L/4)}(1 - a^2/b^2)\int_{-l/2}^{l/2} s\frac{k\sin\alpha}{B_0^{3/2}}\,ds. \qquad (49)$$

После подстановки (48) и (49) в (46) смещение δ_K в КРЭЛе принимает вид

$$\delta_K = \frac{2\pi p}{\sqrt{B_0}}(1 - a^2/b^2)\Big\{[2(\int_{-l/2}^{s} s'\frac{k\cos\alpha}{B_0^{3/2}}\,ds' - sq_1) + \\ + \operatorname{ctg}\alpha(L/4)\int_{-l/2}^{l/2} s\frac{k\sin\alpha}{B_0^{3/2}}\,ds]\cos\omega + [2(\int_{-l/2}^{s} s'\frac{k\sin\alpha}{B_0^{3/2}}\,ds' - \\ - s q_2) - \int_{-l/2}^{l/2} s\frac{k\sin\alpha}{B_0^{3/2}}\,ds]\sin\omega\Big\}. \qquad (50)$$

Пусть теперь кожух имеет постоянный радиус b.

Решение уравнения (40) можно записать так:

$$\delta_K = \frac{B_{00}}{B_0}\delta_K\Big|_{-l/2} + \frac{1}{B_0}\int_{-l/2}^{s}\tilde{\Phi}^1\Big(1 - \frac{a^2}{b^2}\frac{B_0(0)}{B_0}\Big)ds'. \qquad (51)$$

Подставляя в (51) выражения для Φ^1 из (44), получаем

$$\delta_K = \frac{B_{00}}{B_0}\delta_K\Big|_{-l/2} - \frac{4\pi p}{B_0}\Big\{[\int_{-l/2}^{s}\sqrt{B_0}\Big(1 - \frac{a^2}{b^2}\frac{B_0(0)}{B_0}\Big)q_1\,ds']\cos\omega + \\ + [\int_{-l/2}^{s}\sqrt{B_0}\Big(1 - \frac{a^2}{b^2}\frac{B_0(0)}{B_0}\Big)q_2\,ds']\sin\omega\Big\}. \qquad (52)$$

При постоянном радиусе кожуха (в отличие от формы кожуха, рассмотренной ранее) интегрирование по частям не позволяет уйти в выражении для δ_K от повторного интегрирования, и поэтому при получении (52) оно не использовалось. Как и ранее, в (52) необходимо определить $\delta_K|_{-l/2}$. Для этого сначала находим $\delta_K|_{l/2}$:

$$\delta_K\Big|_{l/2} = \delta_K\Big|_{-l/2} - \frac{4\pi p}{B_{00}} \int\limits_{-l/2}^{l/2} \sqrt{B_0}\,(1 - \frac{a^2}{b^2}\frac{B_0(0)}{B_0})q_2\,ds. \qquad (53)$$

Затем, как и прежде, для δ_K с учетом (48) можно получить выражение

$$\delta_K = -\frac{2\pi p}{B_0}\Big\{[\mathrm{ctg}\,\alpha(L/4)\int\limits_{-l/2}^{l/2}\sqrt{B_0}\,(1 - \frac{a^2}{b^2}\frac{B_0(0)}{B_0})q_2\,ds +$$

$$+2\int\limits_{-l/2}^{s}\sqrt{B_0}\,(1 - \frac{a^2}{b^2}\frac{B_0(0)}{B_0})q_1\,ds']\cos\omega + [2\int\limits_{-l/2}^{s}\sqrt{B_0}\,(1 -$$

$$-\frac{a^2}{b^2}\frac{B_0(0)}{B_0})q_2\,ds' - \int\limits_{-l/2}^{l/2}\sqrt{B_0}\,(1 - \frac{a^2}{b^2}\frac{B_0(0)}{B_0})q_2\,ds]\sin\omega\Big\}. \qquad (54)$$

Из сравнения выражений (50) и (54) для δ_K следует, что в частном случае магнитной ловушки Дракон, как и в общем случае произвольной пространственной системы, смещение плазменного шнура существенно зависит от формы кожуха.

Далее на прямом участке (т.е. в реакторной области) оценим максимальное значение β. Для такой оценки нужно знать место, где смещение шнура максимально.

В [3, 4] было введено понятие центрирующего КРЭЛа, отличительной особенностью которого является равенство нулю смещения плазменного шнура на прямом участке. Это дополнительное требование может быть сформулировано в виде интегрального соотношения. В частности, если кожух является вакуумной магнитной поверхностью, то как следует из формул (47) – (49), условие центрирования для симметричных относительно своего центра КРЭЛов выглядит следующим образом:

$$\int\limits_{0}^{l/2} s\,\frac{k\sin\alpha}{B_0^{3/2}}\,ds = 0. \qquad (55)$$

В таких КРЭЛах смещение шнура достигает своего максимального значения в их центральной части, например, при $s = 0$. Однако в [9] было показано, что несмотря на ряд преимуществ центрирующего КРЭЛа, для его создания требуется значительное увеличение длины по сравнению с нецентрирующим. Поэтому остановимся на коротких нецентрирующих КРЭЛах, для которых наиболее вероятно, что смещение шнура в них максимально на стыках с прямыми участками.

Будем следовать процедуре, изложенной в разд. 3. Максимальное значение $p\,(p^*)$ оценим из условия равенства смещения шнура на прямом участке начальному зазору (при $p \to 0$) между шнуром и кожухом, т.е. полагая, что $C = \sqrt{B_0(0)/B_{00}}(b - a)$. Тогда для максимального значения давления получаем

$$p^* = \frac{b^2}{a + b}\,\frac{B_{00}^2}{4\pi}\,\frac{\sqrt{\Pi}}{J}\,\sin\alpha(L/4), \qquad (56)$$

где $J = \int\limits_0^{L/2} s\,(k\sin\alpha/(B_0/B_{00})^{3/2})\,ds$.

Отсюда, в свою очередь, следует оценка и для максимального значения β на прямом участке

$$\beta_{max} = a\,\frac{\sqrt{\Pi}}{J}\,\sin\alpha(L/4),$$

где $\Pi = B_0(0)/B_{00}$.

Полученные в данном разделе результаты могут быть использованы для исследования равновесия плазмы в ловушке Дракон, и, в частности, для сравнения равновесных параметров КРЭЛов.

5. ВЫВОДЫ

В работе получены уравнения, определяющие равновесное положение плазменного шнура с пространственной осью, который находится внутри идеально проводящего кожуха круглого сечения. Показано, что изменение формы кожуха при неизменности оси и поля на ней не влечет за собой изменения структуры магнитного поля в объеме, однако приводит к заметному изменению смещения шнура относительно кожуха. При выбранной конкретной форме кожуха получена формула для оценки предельного равновесного давления.

Применение полученных общих соотношений проиллюстрировано на примере магнитной ловушки Дракон. Для этой ловушки, в частности, показано, что хотя изменение формы кожуха и влечет за собой изменение смещения шнура относительно него, но при этом не влияет на равновесность КРЭЛов (т.е. на условия "драконности").

Следует также отметить, что полученные в данной работе формулы и результаты являются обобщением на неоднородный случай ранее известных (полученных при B_0 (s) = const).

В заключение автор выражает благодарность Б.А. Трубникову за постановку задачи и В.М. Глаголеву за стимулирование работы.

Список литературы

1. Шафранов В.Д. Равновесие плазменного шнура, не обладающего осевой симметрией. – Ядерный синтез, 1964, т. 1, вып. 4, № 2, с. 114.
2. Там же, т. 11, с. 232.
3. Glagolev V.M., Kadomtsev B.B., Shafranov V.D., Trubnikov B.A. Clozed magnetic trap with rectilinear sections. – In: Proc. of X Europ. Conf. on Nucl. Fus. and Plasma Phys. (USSR, Moscow, 1981), vol. 1, Rep. E-8.
4. Arsenin V.V., Glagolev V.M., Kadomtsev B.B. et al. Closed magnetic traps with rectilinear sections. – In: Proc. of IX Intern. Conf. on Nucl. Fus. and Plasma Phys. (USA, Baltimore, 1982), Rep. IAEA CN-41/Q-6.
5. Трубников Б.А., Глаголев В.М. Плазменная ловушка Дракон с магнитной ямой при круглых магнитных поверхностях. – Физика плазмы, 1984, т. 10, вып. 2, с. 288.
6. Трубников Б.А., Глаголев В.М., Лазарев С.Л., Добряков А.В. Стабилизация плазмы в ловушке Дракон. – Физика плазмы, 1985, т. 11, вып. 2, с. 155.
7. Михайловский А.Б. МГД-устойчивость гофрированных тороидальных систем: Препринт ИАЭ-3720/6. – М., 1983.
8. Соловьев Л.С., Шафранов В.Д. Замкнутые магнитные конфигурации для удержания плазмы. – М.: Госатомиздат, 1967, вып. 5, с. 3.
9. Артеменков Л.И. и др. Дракон – замкнутая ловушка с большим β: Препринт ИАЭ-4230/7. – М., 1985, с. 5.

Препринт ИАЭ-4827/6. М., 1989