

REPUBLICA ARGENTINA
COMISION NACIONAL DE ENERGIA ATOMICA
GERENCIA DE INVESTIGACIONES
División Fusión Nuclear

**ENFRIAMIENTO DE IONES CONFINADOS EN
TRAMPAS DE POTENCIAL PRODUCIDO POR
CAMPOS DE RADIACION ELECTROMAGNETICA**

J.R. SOBĚHART

Buenos Aires
1990

Enfriamiento de iones confinados en trampas de potencial producido por campos de radiación electromagnética

J.R. Soběhart

División Fusión Nuclear, Gerencia de Investigaciones

Comisión Nacional de Energía Atómica

Abstract:

The probability distributions for the ground state and the excited state of a two-level ion trapped in an harmonic potential well are studied. The ion is excited by electromagnetic radiation and relaxes back due to either spontaneous or stimulated emission. The photon statistics is considered Poissonian and the momentum transfer between the electromagnetic field and the ion is assumed discrete. The present results are closely related to the quantum treatment in the heavy particle limit as well as to those derived from previous semiclassical models.

Resumen:

Las funciones de distribución correspondientes al estado excitado y al estado fundamental de un ion de dos niveles internos, confinado y sometido a un flujo de radiación electromagnética son determinadas. El ion es excitado por radiación cuasiresonante y decae irreversiblemente al estado fundamental por emisión espontánea. La estadística de los procesos de absorción y emisión es considerada Poissoniana, y la transferencia de momento entre el ion y el campo de radiación se asume discreta. Se determina la dinámica del enfriamiento resultante de la interacción entre el campo de radiación y el ion. Los resultados obtenidos están estrechamente vinculados con las estimaciones del cálculo cuántico en el límite de iones pesados y con otros tratamientos semiclásicos previos.

1. Introducción.

El confinamiento de pocos iones en trampas de potencial [1-3] permite el estudio de la correlación y evolución de los iones y su respuesta colectiva ante perturbaciones externas.

Estos sistemas de pocos iones confinados resultan particularmente interesantes debido a que se pueden aplicar para su estudio dinámico tanto modelos puramente cuánticos como estimaciones semiclásicas [4-6], lo que permite refinar los modelos de origen clásico y determinar sus límites de validez y aplicación.

Una de las razones para el estudio de estos sistemas de iones confinados es que pueden ser utilizados para realizar determinaciones espectroscópicas de alta resolución. Para ello es necesario suprimir efectos indeseables como el ensanchamiento Doppler de las líneas resultante de la distribución de velocidades del conjunto de iones atrapados. Este inconveniente, debido a la temperatura finita del sistema, se reduce disminuyendo la energía media por ion como se describe a continuación.

Los iones confinados pueden ser enfriados hasta temperaturas muy por debajo de las centésimas de grado Kelvin. La reducción de la temperatura de los iones a la escala del miliKelvin es posible aplicando un haz de luz láser cuya frecuencia es menor pero cercana a la frecuencia de transición electrónica de algún nivel del ion. Si el ion se mueve en la dirección contraria al láser, la absorción de la radiación es incrementada debido al corrimiento Doppler que sufre la frecuencia de la luz como consecuencia del movimiento del ion.

La vida media del nivel excitado está relacionada con las propiedades estadísticas del campo de radiación. El proceso irreversible de decaimiento espontáneo es el resultado de la existencia de infinitos modos de oscilación del campo electromagnético en los que puede caer la radiación emitida [7-9]. La emisión espontánea, distribuida arbitrariamente en el espacio, produce la variación del momento del ion dado que este debe compensar el cambio en el momento del campo de radiación.

A esta técnica de enfriamiento de iones se la denomina genéricamente *enfriamiento por láser (laser cooling)* [8-14].

Existen empero otras técnicas de enfriamiento de átomos que han dado lugar a temperaturas finales bastante menores que las obtenidas para iones por enfriamiento por láser.

Sin embargo, dado que estas técnicas han sido empleadas para átomos neutros no serán discutidas en el presente trabajo.

La reciente posibilidad de confinar no solo un número reducido de iones sino iones individuales [2,15-17], manteniéndolos libres de colisiones durante largos períodos de tiempo, ha producido experimentos de espectroscopía de asombrosa resolución [18]. Esto ha incentivado a proponer este tipo de experimentos como base para la obtención de patrones de tiempo y de frecuencia [19].

A la escala de temperatura del miliKelvin, la repulsión electrostática entre iones comienza a ser dominante en la dinámica del sistema y son posibles transiciones de fase de un estado caótico a estructuras ordenadas que se asemejan a sólidos cristalinos [1-3]. Sin embargo, cabe destacar que la distancia entre iones en estas estructuras ordenadas es cientos de miles de veces la que caracteriza a las sustancias sólidas que se observan en la naturaleza. De hecho, las estructuras formadas se mantienen a expensas del campo externo de confinamiento, ya que los iones se repelen mutuamente debido a su interacción coulombiana. Variaciones de los potenciales de atrapamiento o del número de iones confinados implican enormes diferencias de estructura cuasicristalina.

Desafortunadamente, el enfriamiento de un sistema de varios iones no es completamente similar al caso de iones aislados y se observa la destrucción del confinamiento para ciertas condiciones de la trampa [20]. Varios mecanismos se han propuesto para describir la dinámica de los iones atrapados así como la causa de la destrucción del confinamiento [19-21].

La existencia de modelos simples que permitan entender la dinámica del proceso de enfriamiento y que sean, además, lo suficientemente flexibles para anexarles posteriormente fenómenos más complejos como las interacciones entre iones, es de gran importancia.

El propósito del presente trabajo es comunicar los resultados de una descripción semiclásica de iones con dos niveles electrónicos confinados en potenciales armónicos, en el límite de alta dilución.

Los iones son excitados por la absorción y posterior emisión de radiación electromagnética, simulando la transferencia de momento entre los iones y el campo de radiación con procesos discretos e independientes unos de otros, cuya distribución temporal posee

estadística Poissoniana.

Se muestra que los resultados obtenidos son consistentes con los derivados de la mecánica cuántica en el límite de iones pesados [12].

El presente modelo conduce a una generalización de las estimaciones obtenidas mediante el tratamiento semiclásico basado en una descripción de Fokker-Planck [8].

En la sección 2 se discuten los aspectos básicos del modelo, mientras que en la sección 3 se detallan los resultados numéricos y analíticos obtenidos. La sección 4 contiene la discusión de los aspectos relevantes de presente modelo.

2. Interacción de iones confinados y campos de radiación.

En la presente sección se determinan las propiedades macroscópicas del sistema de iones confinados, como su distribución de velocidades y temperatura, mediante la simulación de los procesos microscópicos de interacción entre la radiación electromagnética y los iones.

El tratamiento es semiclásico, considerando sólo el carácter discreto de la radiación como una manifestación de origen cuántico. La interacción entre el ion y el campo de radiación se reduce a un proceso de transferencia de energía entre el fotón y el electrón que es excitado, mientras que el momento del cuanto de radiación modifica la velocidad del ion.

Los procesos de absorción y posterior emisión de la radiación electromagnética son asumidos completamente estocásticos, y la descripción se realiza sobre conjuntos de átomos no interactuantes caracterizados por una distribución de probabilidad $P(x, v, t)$ en el espacio de fase.

El modelo es de carácter unidimensional y la trampa confinante se aproxima por un potencial armónico. Estas aproximaciones permiten realizar un estudio detallado de los procesos que ocurren en el espacio de fase del sistema y, a su vez, presentan la suficiente relevancia física debido a que los pseudopotenciales armónicos constituyen la aproximación usual en las evaluaciones teóricas [8].

En lo siguiente consideraremos un sistema atómico simple que se mueve a una ve-

locidad v y está compuesto por dos niveles separados por una energía $\hbar\nu$, donde ν es la frecuencia de la transición electrónica.

La interacción del sistema atómico con un campo de radiación electromagnética, de frecuencia Ω y número de onda $q = \Omega/c$, se manifiesta por la absorción y emisión de fotones. La absorción de los fotones componentes del campo será incrementada si la desintonía de la transición electrónica, $\Delta = \Omega - \nu$, es compensada por el corrimiento Doppler que producido por el movimiento del ion.

La absorción de un cuanto de radiación reduce la energía del campo en $\hbar\Omega$ pero, además, el ion gana un momento $\hbar q$ lo que le produce una pequeña variación de su velocidad $\hbar q/m$, siendo m la masa del ion.

La descripción clásica de la interacción de iones de dos niveles con radiación cuasiresonante conduce a un tratamiento estadístico del tipo Fokker-Planck que parte de la ecuación de movimiento [8]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \left(\frac{\hbar q}{m}\right) \frac{\chi^2}{2} \frac{\Gamma}{(\Delta - q \cdot v)^2 + \Gamma^2} \approx -\omega^2 x_s - \beta \frac{dx}{dt}, \quad (1a)$$

donde

$$x_s = \left(\frac{\hbar q}{m}\right) \frac{\chi^2}{2\omega^2} \frac{\Gamma}{\Delta^2 + \Gamma^2} \quad \text{y} \quad \beta = -\frac{2\epsilon\chi^2\Delta\Gamma}{(\Delta^2 + \Gamma^2)^2}. \quad (1b)$$

siendo ω la frecuencia de oscilación del ion en la trampa, $v = dx/dt$ la velocidad del ion, y $\Gamma = \gamma/2$, donde γ es el ancho total de la línea de transición electrónica del ion.

La presencia de la función Lorentziana en la ecuación (1a) puede ser interpretada [8] tomando en cuenta que, en cada proceso de absorción y posterior emisión de fotones, la energía de la radiación emitida se conserva con una incerteza total del orden de $\hbar\gamma$.

El parámetro $\epsilon = \hbar q^2/2m$ es la energía, en unidades de frecuencia, relacionada con el cambio de velocidad $\hbar q/m$ que recibe el ion como consecuencia de una absorción o emisión [8].

La interacción entre el campo de radiación y el ion está caracterizada por el parámetro $\chi = \mu E/\hbar$, donde μ es el momento dipolar del ion y E es la amplitud del campo eléctrico de la radiación incidente.

Las ecuaciones (1a) y (1b) indican la existencia de una presión de radiación promedio que desplaza la posición de equilibrio del ion en la trampa y, además, la presencia de

una fuerza disipativa si la frecuencia del láser es menor que la frecuencia de la transición electrónica.

La validez de las ecuaciones (1a) y (1b) está restringida a variaciones de la velocidad del ion en tiempos mucho mayores que la vida media del nivel excitado, $\omega \ll \gamma$. A esta aproximación se la conoce como límite de partícula pesada [8,12] dado que la frecuencia de la trampa ω está relacionada con la amplitud de la energía potencial confinante V_0 y la masa del ion m mediante la expresión $\omega^2 = V_0/m$.

En este límite, la absorción y emisión de fotones ocurre principalmente cuando el ion tiene una velocidad cuasiresonante [7,8] $v \approx \Delta/q$ y el espectro de absorción de bandas, resultante de los niveles discretos del oscilador armónico cuántico, no puede ser resuelto apropiadamente como ocurre en el caso $\omega > \gamma$ [23].

La estocasticidad de los procesos de absorción y emisión de radiación produce, además de la deflexión y el frenamiento del ion, una dispersión de su velocidad. Esta dispersión es inherente al proceso de emisión espontánea debido a que el fotón emitido tiene cualquier dirección, y está caracterizada por un coeficiente de difusión del tipo Browniano [8], $D \approx \hbar\epsilon\Gamma/m$. La figura 1 indica como una absorción seguida de una emisión espontánea produce una dispersión del momento del ion en la dirección del haz de luz incidente en el caso general de un ion moviéndose en tres dimensiones.

La ecuación de movimiento de la distribución de probabilidad del ion en el espacio de fase derivada de la ecuación de movimiento (1a) resulta

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vP) - \frac{\partial}{\partial v}(\omega^2(x - x_s)P) = \frac{\partial}{\partial v}(\beta vP) + \frac{\partial}{\partial v}\left(D\frac{\partial P}{\partial v}\right), \quad (2)$$

Esta ecuación tiene una solución de estado estacionario

$$P(x, v) = \frac{m\beta\omega}{2\pi D} \exp\left(-\frac{\beta m(v^2 + \omega^2(x - x_s)^2)}{2D}\right), \quad (3)$$

La expresión (3) indica que el proceso de enfriamiento reduce la energía del ion hasta valores del orden del ancho de la línea de transición, que es la indeterminación en la radiación emitida por el ion [7,8]

$$E_f \approx \frac{Dm}{\beta} \sim \hbar\Gamma. \quad (4)$$

En el caso en que el ancho de la línea de la transición sea extremadamente pequeño, es la energía asociada a los cambios de velocidad sufridos por el ion en los procesos de absorción y emisión, $\hbar^2 q^2/2m$, la que limita la energía final [22].

Si bien el tratamiento semiclásico expuesto indica adecuadamente el límite de energía que se puede obtener mediante el enfriamiento por láser, adolece de una descripción detallada de la naturaleza de dos niveles del ion. Además, este tratamiento no incluye correctamente la transferencia de momento entre el campo de radiación y el ion a órdenes mayores que el segundo (difusión) en los momentos del proceso estocástico.

Para obtener el comportamiento de cada uno de los niveles del ion, tal como se obtiene del tratamiento cuántico [11-14], introducimos la siguiente ecuación de movimiento del ion en el estado fundamental

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = k \sum_{t_a} \delta(t - t_a), \quad (5a)$$

así como la correspondiente ecuación para el estado excitado

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = -k \sum_{t_c} \delta(t - t_c) + k' \sum_{t_s} \delta(t - t_s). \quad (5b)$$

donde por simplicidad hemos definido $k = \hbar q/m$, que representa la variación de la velocidad del ion como consecuencia de la absorción de un fotón de momento $\hbar q$.

La absorción de fotones ocurre a los tiempos t_a con una frecuencia de eventos $r(v)$ que depende tanto de la velocidad del ion como de la intensidad del campo de radiación aplicado. Por otro lado, la emisión de fotones se realiza por dos posibles mecanismos: la emisión inducida por el campo aplicado, producida al tiempo t_c con la misma frecuencia de eventos $r(v)$ que posee el proceso de absorción, o por emisión espontánea, producida al tiempo t_s con frecuencia de eventos constante e igual a γ .

Todos los procesos se asumen independientes unos de otros con estadística temporal Poissoniana. Cuando los procesos de absorción y emisión están correlacionados con la evolución de los niveles del ion, la estadística no es Poissoniana [8,10,25,26]. Este tipo de procesos no será tratado en el presente trabajo.

La frecuencia de absorción $r(v)$ es aproximada por una Lorentziana [8,10] con semian-

cho igual a Γ

$$r(v) = \frac{\Upsilon^2}{2} \frac{\Gamma}{(\Delta - q \cdot v)^2 + \Gamma^2}, \quad (6)$$

En el presente modelo de absorción y emisión de fotones, el acoplamiento con el campo de radiación es considerado suficientemente débil como para que el decaimiento espontáneo del estado excitado sea del tipo exponencial [24]. Además, los modos de oscilación del campo electromagnético en los que decae el fotón emitido son asumidos como un baño térmico [10].

La probabilidad de emitir espontáneamente un fotón de momento hq' se asume igual a $1/2$ si $q' = q$ o $q' = -q$. Si el problema fuese multidimensional, el momento del fotón emitido proyectado en una dirección arbitraria podría tomar todos los valores comprendidos en el intervalo $[-q, q]$.

Considerando las ecuaciones de movimiento (5), la ecuación de evolución de la distribución de probabilidad para el estado fundamental resulta

$$\begin{aligned} P_f(x, v, t + \Delta t) &= P_f(x - v\Delta t, v + \omega^2 x \Delta t, t)(1 - r\Delta t) \\ &\quad + P_e(x - v\Delta t, v + \omega^2 x \Delta t + k, t)r\Delta t \\ &\quad + P_e(x - v\Delta t, v + \omega^2 x \Delta t + k', t)\gamma\Delta t + O(\Delta t^2), \end{aligned} \quad (7a)$$

mientras que para el estado excitado tenemos

$$\begin{aligned} P_e(x, v, t + \Delta t) &= P_e(x - v\Delta t, v + \omega^2 x \Delta t, t)(1 - (r + \gamma)\Delta t) \\ &\quad + P_f(x - v\Delta t, v + \omega^2 x \Delta t - k, t)r\Delta t + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (7b)$$

La expansión a orden $O(\Delta t^2)$

$$P(x - v\Delta t, v + \omega^2 x \Delta t, t) = P(x, v, t) + \Delta t \left(-\frac{\partial}{\partial x}(vP) + \frac{\partial}{\partial v}(\omega^2 x P) \right) + O(\Delta t^2) \quad (8)$$

conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vP_f) - \frac{\partial}{\partial v}(\omega^2 x P_f) &= -r(v)P_f + \\ &\quad r(v+k)P_e(x, v+k, t) + \frac{\gamma}{2}(P_e(x, v+k, t) + P_e(x, v-k, t)) \end{aligned} \quad (9a)$$

y

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vP_e) - \frac{\partial}{\partial v}(\omega^2 x P_e) = -(r(v) + \gamma)P_e + r(v-k)P_f(x, v-k, t). \quad (9b)$$

que son un sistema de ecuaciones no locales acopladas en la velocidad del ion. Ambas distribuciones deben satisfacer la condición de normalización

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dx [P_f + P_e] \right) = 0 \quad (10)$$

La expansión de las ecuaciones (9) en serie de Taylor con respecto al parámetro k conduce a la siguientes expresiones

$$\frac{\partial P_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vP_f) - \frac{\partial}{\partial v}(\omega^2 x P_f) = -rP_f + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n}(rP_e) + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} P_e}{\partial v^{2n}} \quad (11a)$$

y

$$\frac{\partial P_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vP_e) - \frac{\partial}{\partial v}(\omega^2 x P_e) = -(r + \gamma)P_e + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial v^n}(rP_f) \quad (11b)$$

que indican que las ecuaciones (9) contienen la información a todo orden en el momento transferido al ion. La ecuación de Fokker-Planck está contenida en la presente expansión (11), y el término de difusión puede ser considerado la manifestación cuántica del proceso de absorción y emisión de radiación [8].

3. Dinámica del enfriamiento por láser.

El proceso de enfriamiento por radiación se caracteriza por la multiplicidad de sus escalas de tiempo, difiriendo entre ellas en órdenes de magnitud. Sin embargo, existen básicamente dos escalas de tiempo [8,12]. Una asociada con la transición a un régimen de cuasiequilibrio con el campo de radiación [12], $t_{e,q}$, y otra representativa del proceso de enfriamiento.

La menor de las escalas de tiempo es del orden γ^{-1} , mientras que la mayor envuelve millones de absorciones y emisiones [8] y está fijada por la transferencia de momento entre el ion y el campo de radiación [8,12].

Si la velocidad máxima del ion, v_0 , es mayor que el valor resonante $v = \Delta/q$ podemos estimar fácilmente el tiempo necesario para reducir la energía del ion al valor resonante $m\Delta^2/2q^2$.

El intervalo de tiempo δt durante el cual el ion mantiene una velocidad cuasiresonante $(\Delta - \Gamma)/q \leq v \leq (\Delta + \Gamma)/q$ es del orden

$$\delta t \approx \frac{\gamma}{qv_o\omega} \quad (12)$$

El número de absorciones y emisiones durante ese período es

$$N \approx \nu(v_{res})\delta t \approx \frac{\lambda^2}{qv_o\omega} \quad (13)$$

válido si los procesos de emisión son suficientemente rápidos, $\gamma\delta t \gg 1$. La variación de la energía cinética del ion durante un proceso completo de absorción y emisión resulta

$$\delta E = \frac{1}{2}m \left(\left(v + \frac{\hbar q}{m} - \frac{\hbar q'}{m} \right)^2 - v^2 \right) = \frac{\gamma}{r(v) + \gamma} \left(-\hbar qv + \frac{\hbar^2 q^2}{m} \right). \quad (14)$$

Assumiendo que los procesos de absorción y emisión son producidos cuando el ion posee una velocidad resonante $v \approx \Delta/q$, la variación de energía resulta

$$\delta E \approx \frac{\gamma}{r(v_{res}) + \gamma} \hbar \Delta, \quad (15)$$

Consecuentemente, el tiempo de enfriamiento t_{enf} es

$$\gamma t_{enf} \approx \frac{E_o}{N\delta E} \frac{2\pi\gamma}{\omega} \sim \pi \frac{mqv_o^3}{h\gamma\Delta} \left(1 + \frac{\gamma^2}{\chi^2} \right) \quad (16)$$

siendo E_o la energía inicial del ion.

Es importante destacar la magnitud de las escalas de tiempo involucradas en la evolución de las distribuciones de probabilidad de los distintos estados del ion. El cociente entre las dos escalas de tiempo estimadas es del orden $t_{eq}/t_{enf} \approx (N\delta E/E_o)(\omega/\gamma) \sim 10^{-4}$ para $\Delta \sim -\gamma$, $\chi \sim \gamma$ y cualquier energía inicial moderada.

Una simple determinación de la forma funcional de las distribuciones de probabilidad indica que, si la distribución inicial es del tipo Maxwell-Boltzmann con dispersión E_o y energías $m(\omega^2 x^2 + v^2)/2$, rápidamente se establecen distribuciones con características resonantes

$$P_f(x, v) \sim e^{-m[\omega^2 x^2 + v^2]/2E_o} (1 - r(v)t) \quad (17a)$$

y

$$P_e(x, v) \sim r(v)t e^{-m[\omega^2 x^2 + v^2]/2E_0} \quad (17b)$$

válidas para $r(v)t \ll 1$. Además, se obtienen los niveles de población del estado fundamental y del estado excitado

$$P_f^{st} \approx \frac{r(v) + \gamma}{2r(v) + \gamma} \quad y \quad P_e^{st} \approx \frac{r(v)}{2r(v) + \gamma} \quad (17c)$$

que han sido derivados en forma más rigurosa en el marco del tratamiento cuántico [10,26].

Las figuras 2 a 5 muestran la evolución de las distribuciones de probabilidad en el espacio de fase para un campo de radiación moderado $\chi = \gamma$, $\Delta = -\gamma$, $\gamma = 2.5 \cdot 10^7/s$. La temperatura inicial se asume 10^3 veces mayor que la escala final de energía $\hbar\gamma$.

El eje vertical, que corresponde a la velocidad del ion, es del orden de $100\sqrt{2\hbar\gamma/m}$. El eje horizontal, que corresponde a la coordenada del ion, está dimensionalizado en forma análoga para observar una gran extensión del espacio de fase.

Las figuras muestran la rápida formación de distribuciones resonantes acorde con las ecuaciones (17). Los valores de saturación, predichos por (17c), varían suavemente en tiempos del orden del proceso de enfriamiento por láser.

Las figuras 6 y 7 muestran la dependencia de la distribución del nivel fundamental y del estado excitado, calculados en el centro de la trampa para distintos tiempos, como función de la velocidad del ion. Se observa que las distribuciones de probabilidad se contraen, siendo la energía final del último gráfico similar al valor resonante como lo habíamos estimado previamente. La energía final del ion, $\sim \hbar\gamma$, es órdenes de magnitud menor que el ancho observado en las figuras, por lo que aparecería como una singularidad. La escala de tiempo necesaria para alcanzar esta energía final es considerablemente mayor a los intervalos de tiempo indicados en las figuras.

Como caso límite, las evaluaciones numéricas de la evolución temporal para el mismo campo de radiación pero con $\Delta = 0$ muestran que la dinámica general es dispersiva, aumentando la incerteza en la localización del ion en cada proceso de absorción y emisión. En lo siguiente estimaremos este proceso dispersivo en el caso de desintonía arbitraria, el cual conduce a la distribución final de probabilidad en el espacio de fase.

Cuando la amplitud del campo de radiación aplicado es nula, el ion sigue su trayectoria clásica en el espacio de fase y la distribución de probabilidad resulta singularmente localizada. Una amplitud de radiación pequeña, pero finita, produce una dispersión de la velocidad del ion que debe anularse suprimiendo la radiación aplicada.

Esto nos permite introducir la siguiente expansión en el parámetro k

$$P_f(x, v, t) = F_f^0 + kF_{f1} + k^2F_{f2} + \dots \quad \text{y} \quad P_e(x, v, t) = F_e^0 + kF_{e1} + k^2F_{e2} + \dots \quad (18)$$

Al final del proceso de enfriamiento por láser la velocidad del ion es pequeña y, por lo tanto, podemos aproximar

$$v(r) = r_0 + k(\beta_1 r) + k^2(\beta_2 v^2) + \dots \quad (19)$$

En ausencia de radiación, la órbita característica del ion en el espacio de fase está dada por las variables R y θ definidas por

$$x = \frac{R}{\omega} \cos \theta \quad \text{y} \quad v = R \sin \theta, \quad (20)$$

Utilizando estas coordenadas y aproximando a orden $O(k)$, tenemos las soluciones de las ecuaciones (9)

$$F_f^0 = F_f^0(R), \quad F_e^0 = F_e^0(R), \quad \frac{F_e^0(R)}{F_f^0(R)} = \frac{r_0}{r_0 + \gamma} \quad (21)$$

A orden $O(k^2)$, asumiendo que las perturbaciones lineales tienen la misma relación que las de orden $O(k)$ ($F_{e1}/F_{f1} \approx F_e^0/F_f^0$) e introduciendo la transformación $F_f^0 = e^\phi$, obtenemos

$$\phi(R) = \frac{\gamma\beta_1}{r_0} \frac{(2r_0 + \gamma)}{(2r_0 + \gamma)^2 + \gamma^2} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} \right), \quad (22)$$

que implica una energía final

$$E_f = \frac{m}{2} \langle \omega^2 x^2 + v^2 \rangle \simeq h \left(\frac{\Delta^2 + \Gamma^2 + \chi^2/2}{4|\Delta|} \right) \left(1 + \left(\frac{\Delta^2 + \Gamma^2}{\Delta^2 + \Gamma^2 + \chi^2/2} \right)^2 \right). \quad (23)$$

La expresión (23) tiene un comportamiento singular en el límite $\Delta = 0$ para el cual la velocidad del ion es dispersada pero no reducida.

En el límite $\Delta^2 + \Gamma^2 \gg \chi^2/2$ el valor de la energía final es cercano a la predicción del tratamiento cuántico [12].

El corrimiento de la posición de equilibrio del ion en la trampa armónica, que obtuviéramos de la ecuación de movimiento (1a), corresponde a los términos de orden $O(k^2)$ del desarrollo de las distribuciones de probabilidad

$$kF_{f1} = 2 \frac{\beta_1 \gamma^2 kx}{(2r_0 + \gamma)^2 + \gamma^2} F_f^0(R) \quad \text{and} \quad kF_{e1} = 2 \frac{\beta_1 \gamma^2 kx}{(2r_0 + \gamma)^2 + \gamma^2} F_e^0(R). \quad (24)$$

Las soluciones numéricas de las ecuaciones (9) muestran distribuciones de probabilidad en acuerdo con los valores estimados por las expresiones (18-24) en un amplio rango de valores de los parámetros de confinamiento.

La expresión de la energía final (24) como función de la desintonía del sistema concuerda con la simulación de Monte Carlo de las ecuaciones de movimiento (5). Cabe destacar que aún para períodos de integración de las ecuaciones de movimiento relativamente pequeños, la coincidencia entre la simulación numérica y el resultado analítico es satisfactoria.

Los valores de la energía final obtenidos de las soluciones numéricas de las ecuaciones (9) en el caso de equilibrio difieren ligeramente de la estimación analítica (24) y de los resultados de la simulación de Monte Carlo debido a problemas de carácter numérico.

La figura 8 muestra la energía final como función de la desintonía del sistema obtenida de la simulación numérica, la curva analítica y las estimaciones de Monte Carlo.

5. Discusión.

En el presente trabajo se muestra que el proceso de enfriamiento por láser de iones confinados en trampas de potencial puede ser interpretado semiclásicamente en términos del intercambio de momento entre el ion y el campo de radiación electromagnética. La interacción entre el campo de radiación y los iones ha sido simulada mediante procesos de transferencia discreta de momento. Los procesos de absorción y emisión se asumen independientes y con estadística Poissoniana.

Como consecuencia del carácter estocástico de la distribución espacial de los fotones emitidos espontáneamente, se produce una dispersión de la velocidad del ion y éste no

queda localizado en el espacio de fase. Cuando la energía asociada a las variaciones de velocidad del ion producida por los procesos de absorción y emisión es despreciable, la magnitud de la dispersión está dada, básicamente, por la incerteza de energía con que es emitida espontáneamente la radiación.

La dinámica general del enfriamiento por láser fue estudiada dando por resultado una expresión para la energía final acorde con las estimaciones cuánticas, y corroborada por las soluciones numéricas de las ecuaciones (9) y por una simulación de Monte Carlo de las ecuaciones de movimiento (5).

Agradecimientos.

El autor agradece la valiosa colaboración del Dr. L.G. Reyna del T.J. Watson Research Center, IBM Research Division, quien facilitó los resultados de la simulación de Monte Carlo, brindando, además, numerosas sugerencias sobre el contenido del presente trabajo.

Referencias.

- 1- W. Neuhauser, M. Hohenstatt, and P. E. Toschek, *Appl. Phys.* 17, 123-129 (1978)
- 2- F. Diedrich, J. C. Bergquist, W. M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* 62, 403-406 (1989)
- 3- S. L. Gilbert, J. J. Bollinger, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.* 60, 2022-2025 (1988)
- 4- J. Hoffnagle, R. G. DeVoe, L.G. Reyna, and R. G. Brewer, *Phys. Rev. Lett.* 61, 255-258 (1988)
- 5- F. Diedrich, E. Peik, J. M. Chen, W. Quint, and H. Walter, *Phys. Rev. Lett.* 26, 2931-2934 (1987)
- 6- J. P. Sciffer and A. Rahman, *Z. Phys. A* 331, 71-74 (1988)
- 7- S. Stenholm, *Physica Scripta T* 22, 69-72 (1988)
- 8- S. Stenholm, *Rev. Mod. Phys.* 58, 699-739 (1986)
- 9- R. C. Thompson, *Physica Scripta T* 22, 318-320 (1988)
- 10- S. Stenholm, *Appl. Phys.* 15, 287-296 (1978)
- 11- S. Stenholm, *Phys. Rev. A* 27, 2513-2522 (1983)
- 12- J. Javanainen, and S. Stenholm, *Appl. Phys.* 21, 283-291 (1980)
- 13- J. Javanainen, and S. Stenholm, *Appl. Phys.* 24, 71-84 (1981)
- 14- J. Javanainen, and S. Stenholm, *Appl. Phys.* 24, 151-162 (1981)
- 15- H. A. Klein, A. S. Bell, G. P. Barwood, and P. Gill, *Appl. Phys. B* 50, 13-17 (1990)
- 16- T. Sauter, R. Blatt, W. Neuhauser, and P. E. Toschek, *Physica Scripta T* 22, 128-132 (1988)
- 17- P. Toschek, *Physica Scripta T* 23, 170-175 (1988)
- 18- W. Itano, J. Bergquist, R. Hulet, and D. Wineland, *Physica Scripta T* 22, 79-84 (1988)
- 19- I. Siemers, R. Blatt, T. Sauter, and W. Neuhauser, *Physica Scripta T* 22, 240-242 (1988)
- 20- R. G. DeVoe, J. Hoffnagle, and R. G. Brewer, *Phys. Rev. A* 39, 4362-4365 (1989)
- 21- L. S. Cutler, C. A. Flory, R. P. Giffard, and M. D. McGuire, *Appl. Phys. B* 39, 251-259 (1986)

- 22- R. Blatt, G. Lafyatis, W. D. Phillips, S. Stenholm, and D. J. Wineland, *Physica Scripta* T22, 216-223, (1988)
- 23- W. Neuhauser, M. Hohenstatt, and P. Toschek, *Phys. Rev. Lett.* 41, 233-236 (1978)
- 24- M. Lewenstein, J. Zakrewski, and T. Mossberg *Phys. Rev. A* 38, 808-819 (1988)
- 25- N. B. Delone, and V. P. Krainov, in *Atoms in Strong Light Fields*, (Ed. Springer-Verlag, Berlin, 1985) chapters. 1-3, 8
- 26- B. Mollow, *Phys. Rev.* 188, 1969-1975 (1969)

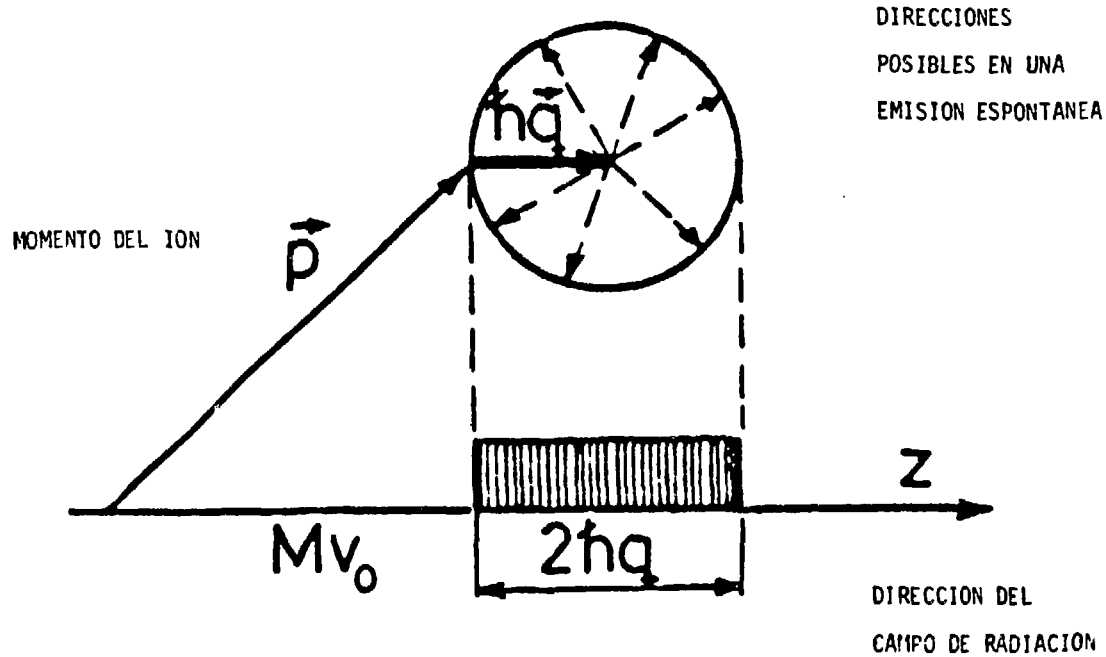


Fig.1: dispersión producida por la absorción y posterior emisión espontánea de radiación en la dirección de propagación del campo electromagnético.

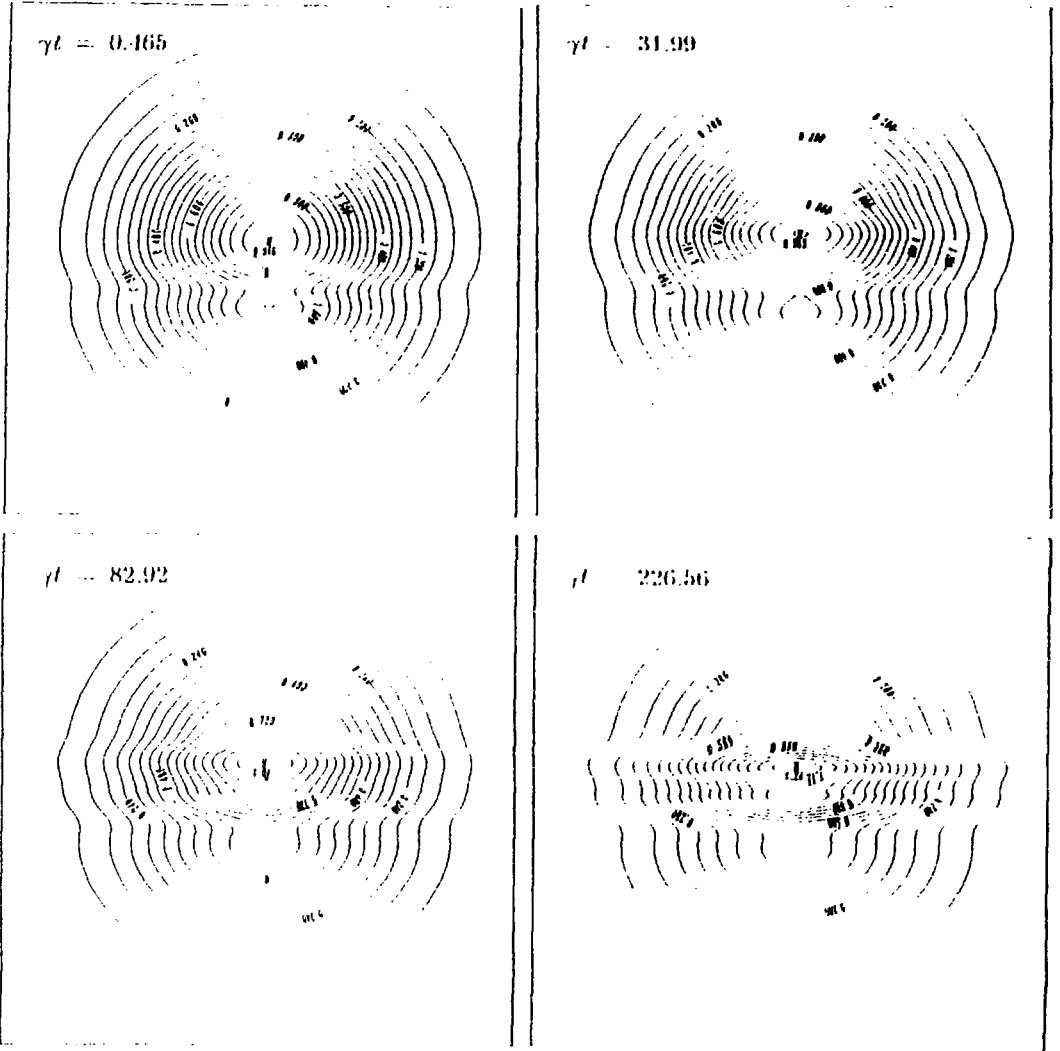


Fig. 2: distribución de probabilidad del estado fundamental en el espacio de fase, evaluado a distintos tiempos para $\gamma = 2.510^7 1/s$, $\Delta = -\gamma$, $\chi = \gamma$, $\omega = 0.1\gamma$, $E_0 = 10^3 \hbar \gamma$, $\sqrt{2\hbar/m\gamma q} = 0.11$.

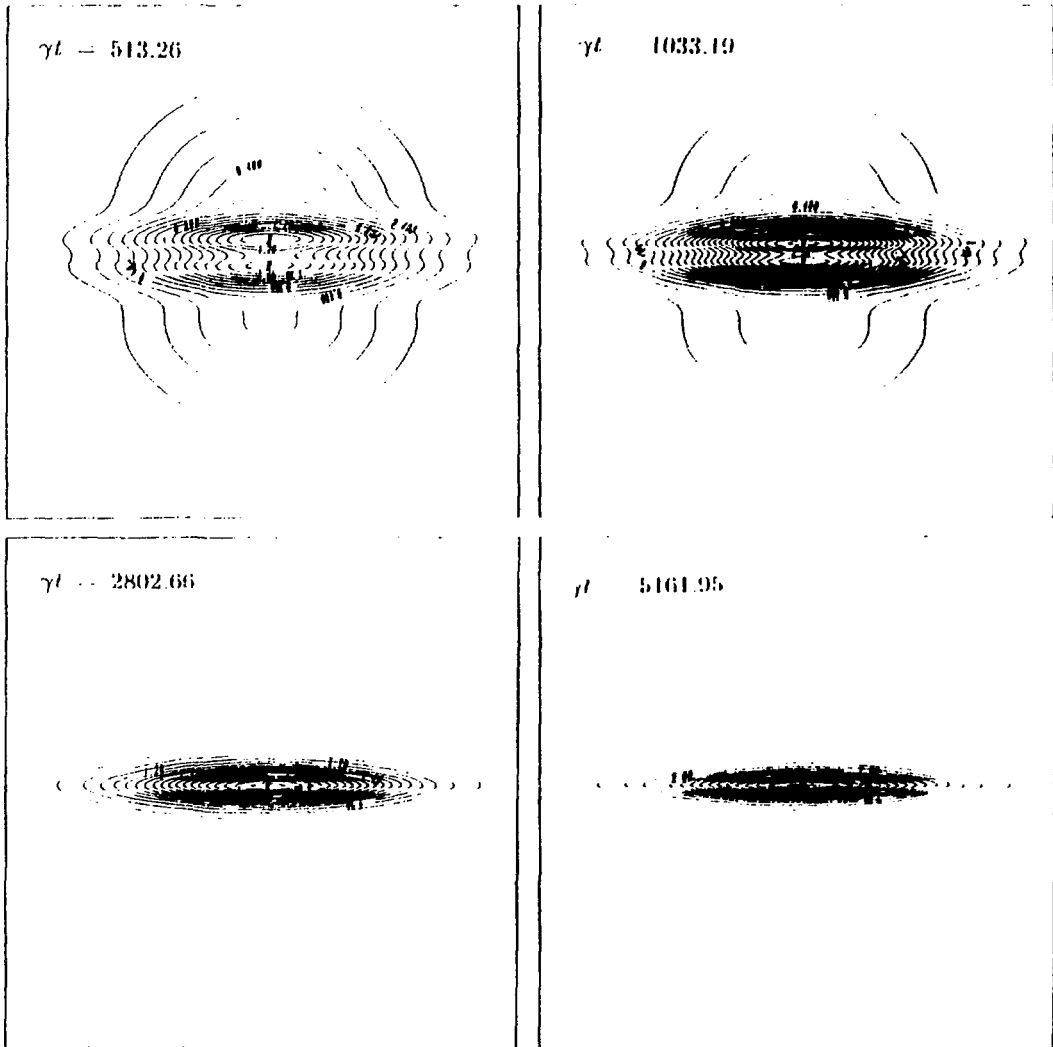


Fig. 3: distribución de probabilidad del estado fundamental en el espacio de fase, evaluado a distintos tiempos para $\gamma = 2.510^7/s$, $\Delta = -\gamma$, $\chi = \gamma$, $\omega = 0.1\gamma$, $E_0 = 10^3\hbar\gamma$, $\sqrt{2\hbar/m\gamma q} = 0.11$.

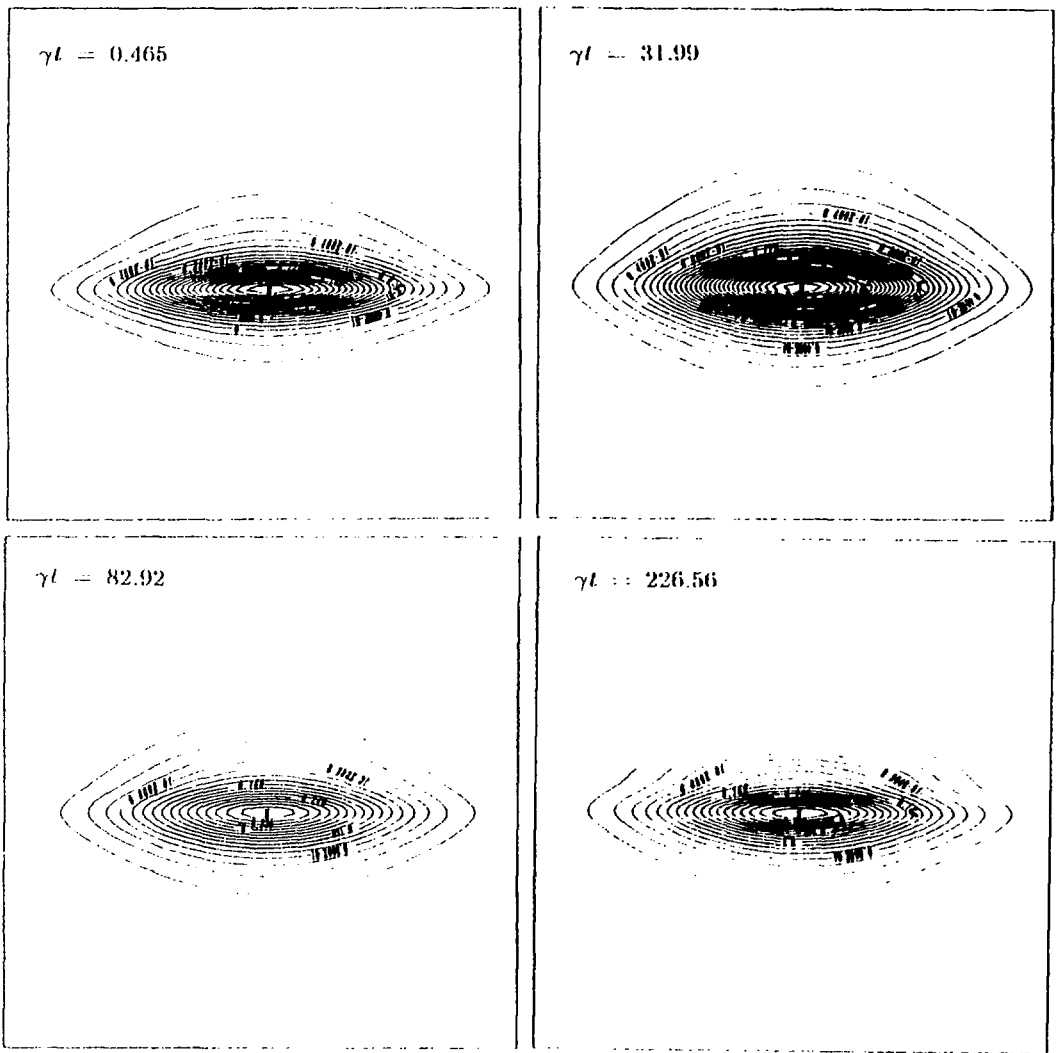


Fig. 4: distribución de probabilidad del estado excitado en el espacio de fase, evaluado a distintos tiempos para $\gamma = 2.510^7 1/s$, $\Delta = -\gamma$, $\chi = \gamma$, $\omega = 0.1\gamma$, $E_0 = 10^3 \hbar \gamma$, $\sqrt{2\hbar/m\gamma q} = 0.11$.

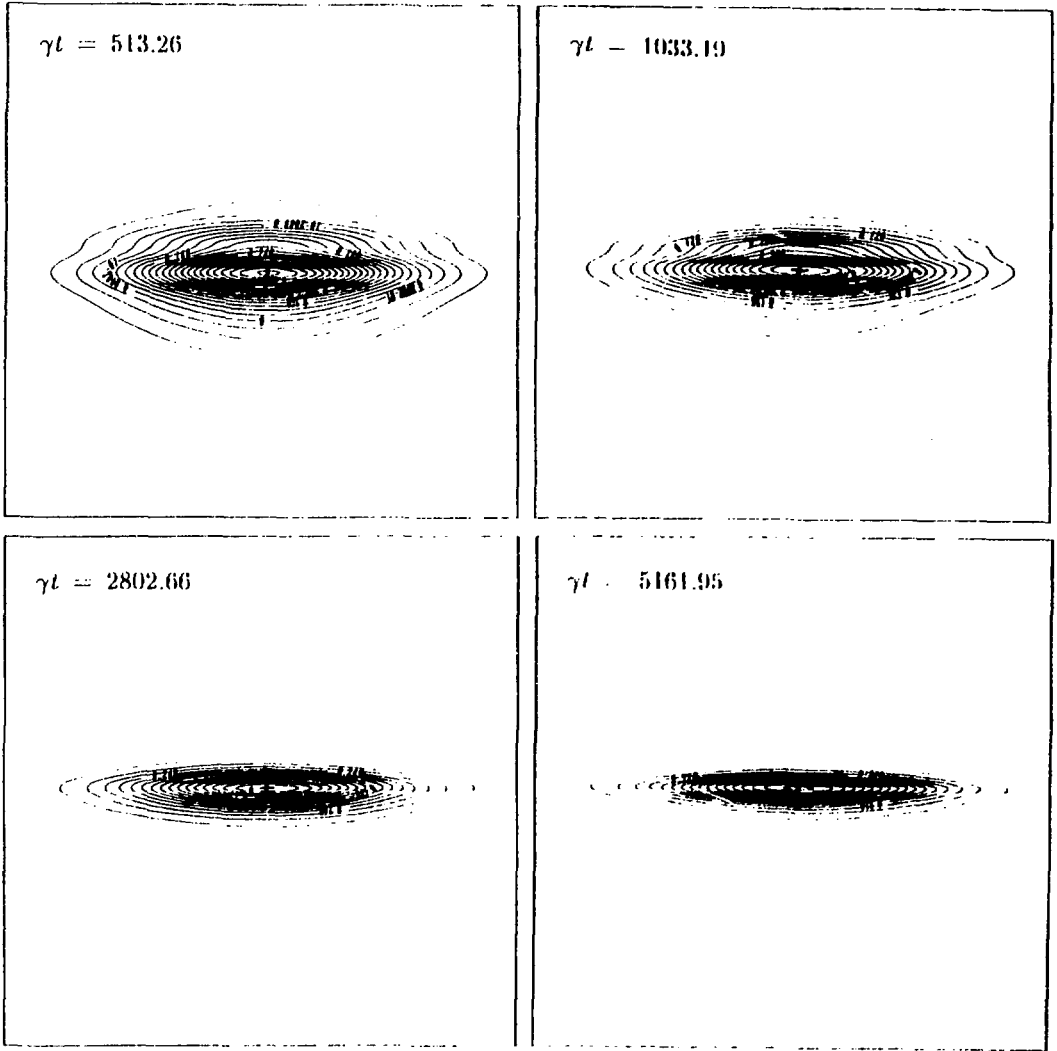


Fig. 5: distribución de probabilidad del estado excitado en el espacio de fase, evaluado a distintos tiempos para $\gamma = 2.510^7 1/s$, $\Delta = -\gamma$, $\chi = \gamma$, $\omega = 0.1\gamma$, $E_0 = 10^3 \hbar \gamma$, $\sqrt{2\hbar/m\gamma q} = 0.11$.

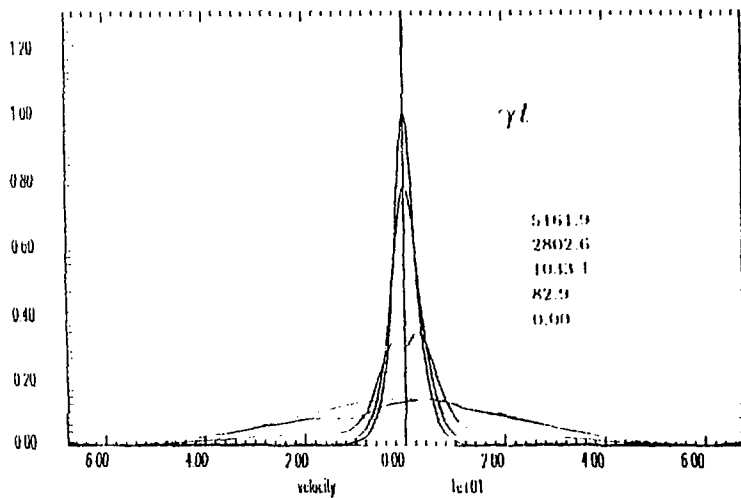
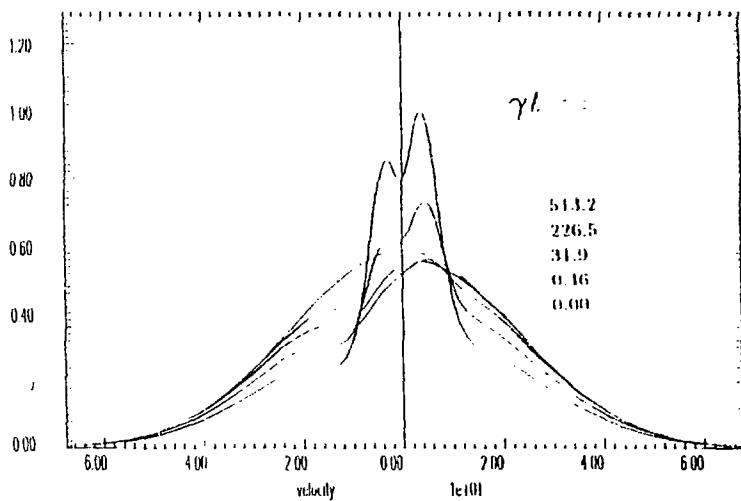


Fig. 6: distribución de probabilidad del estado fundamental en el espacio de fase, evaluado a distintos tiempos para $\gamma = 2.5 \cdot 10^7 \text{ 1/s}$, $\Delta = -\gamma$, $\chi = \gamma$, $\omega = 0.1\gamma$, $E_0 = 10^3 \hbar \gamma$, $\sqrt{2\hbar/m\gamma q} = 0.11$.

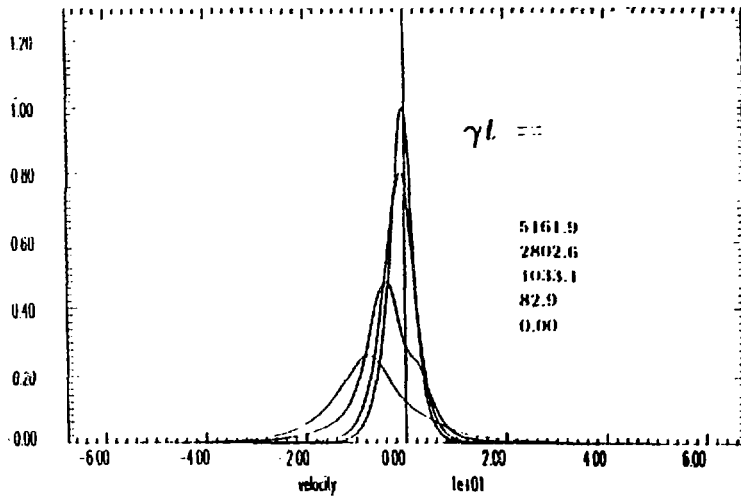
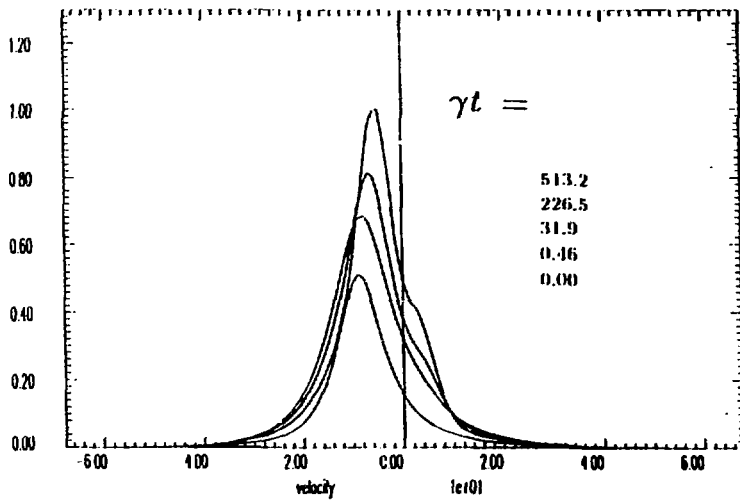


Fig. 7: distribución de probabilidad del estado excitado en el espacio de fase, evaluado a distintos tiempos para $\gamma = 2.510^7 1/s$, $\Delta = -\gamma$, $\chi = \gamma$, $\omega = 0.1\gamma$, $E_0 = 10^8 \hbar \gamma$, $\sqrt{2\hbar/m\gamma q} = 0.11$.

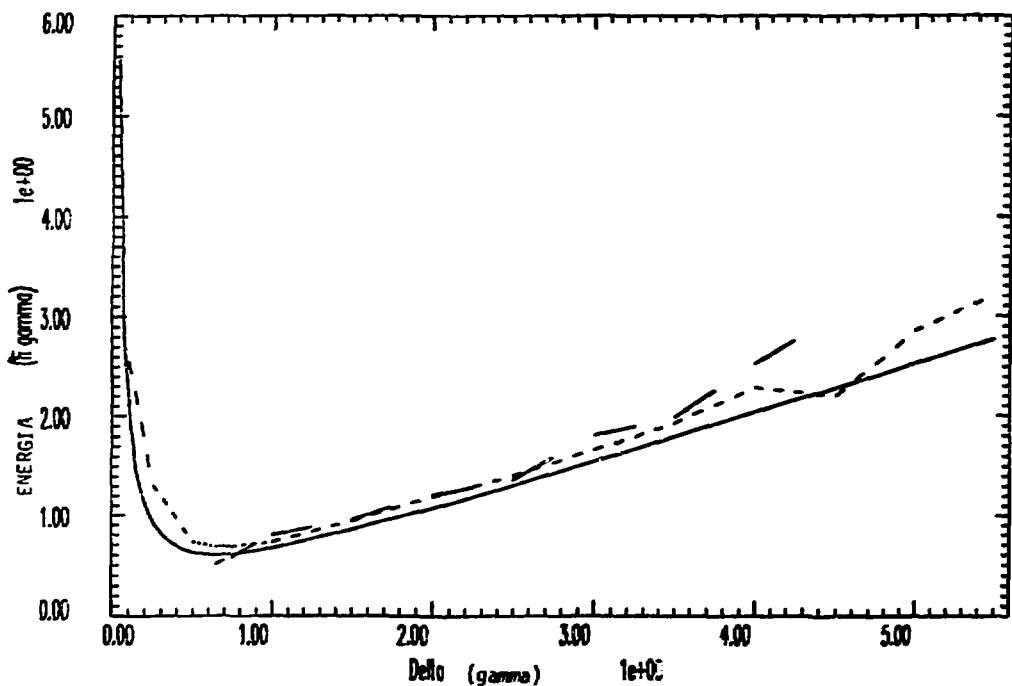


Fig. 8: energía final del ion como función de la desintonía Δ para $\gamma = 2.510^7 1/s$; $\chi = \gamma$, $\omega = 0.1\gamma$, $\sqrt{2\hbar/m\gamma q} = 0.11$: simulación de Monte Carlo (línea punteada), estimación analítica (línea sólida), estimación numérica (trazo rayado).