объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р4-89-696

В.К.Игнатович

О ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ПЕРЕНОСА

Направлено в журнал "Доклады АН СССР"

1989

1. ВВЕДЕНИЕ

При решении задач о распространении излучения в однородной среде В. Амбарцумян[1] в 40-е годы сформулировал принцип инвариантности, согласно которому отражение излучения от полубесконечной среды не меняется, если от нее отнять слой конечной или бесконечно малой толщины. В дальнейшем этот принцип широко использовался Чандрасекаром[2] при исследовании процессов переноса излучения в мутных средах.

В 1974 г. Енгибарян и Мнацаканян[3] сформулировали общую систему интегро-дифференциальных уравнений, которая позволяет описать отражение и пропускание произвольного излучения средой конечной толщины. Принцип состоит в том, что от среды толщиной z отщепляется слой толщиной dz и полное рассеяние определяется с учетом переотражений между слоями dz и z-dz и граничных условий на крайних поверхностях слоя z.

В этой же работе показано, что рассеяние на конечном слое можно выразить через отражение полубесконечной среды, и сформулирована соответствующая система уравнений. Однако она не была решена. По этой причине в дальнейшем рассеяние на слое вещества конечной толщины описывалось только с помощью интегро-дифференциальных уравнений[4,5].

Заметим, что в[3] рассматривалась общая задача взаимодействия излучения со средой, применимая и к волновым и к диффузионным процессам. Что касается волновых процессов, то принцип, аналогичный принципу инвариантности, использовался еще Дарвином[6] в 1914 г. при описании дифракции на слоистой системе. В работе[7] показано, что формулировка Дарвина недостаточно корректна, и использование принципа инвариантности[1] позволяет ее усовершенствовать.

В работах[8,9] была решена одномерная квантовомеханическая задача о распространении частицы в произвольном периодическом потенциале, содержащем конечное число периодов, когда отражение и пропускание одного, отдельно взятого, периода считается известным. При этом отражение и пропускание потенциала конечной длины выражалось через отражение потенциала полубесконечной длины, которое в свою очередь выражалось через амплитуды отражения и пропускания одного периода.

Таким образом, здесь была решена частная задача из круга проблем, сформулированных в[3]. В работе[10] было показано, что метод, используемый в[8,9] и названный там методом рекуррентных соотношений, применим и для трехмерных задач рассеяния на сферически-симметричном потенциале и для одномерных задач диффузии.

В работе[11] решена задача дифракции на одноатомном трехмерном кристалле конечной толщины. Таким образом, была решена еще одна частная задача из круга проблем, очерченных в[3]. В результате стало возможным заново сформулировать эти проблемы и записать их решение в общем виде.

2. ОТРАЖЕНИЕ ОТ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ПРОСТРАНСТВА

Найдем уравнение для отражения R от полубесконечной плоской среды в предположении, что отражение R_L и пропускание T_L слоя толщины L известны. Всюду далее мы считаем, что среда занимает полупространство $x>0$, а ее протяженность вдоль осей y и z бесконечна.

Выделим из среды мысленно слой толщины L около поверхности. Тогда отражение R от всего полупространства можно представить в виде суммы

$$R=\vec{R}_L+\overleftarrow{T}_L R(1-\overleftarrow{R}_L R)^{-1}\vec{T}_L, \tag{1}$$

где первое слагаемое описывает отражение от выделенного слоя, а второе представляет собой произведение, сомножители которого, если читать их справа налево, описывают следующий процесс. Сначала излучение проходит через выделенный слой (множитель $\vec{T}_L$), затем многократно переотражается (множитель $R(1-\overleftarrow{R}_L R)^{-1}$) между оставшимся полупространством (отражение от которого, согласно принципу инвариантности, тоже равно R) и выделенным слоем, и, наконец выходит через выделенный слой наружу (множитель $\overleftarrow{T}_L$). В принципе отражение и пропускание выделенного слоя справа и слева может быть разным, поэтому соответствующие величины снабжены стрелками, указывающими направление, в котором происходит отражение и пропускание.

Очевидно, что уравнение (1) остается справедливым и при бесконечно малом $L=dx$. В этом случае и отражение и пропускание выделенного слоя также бесконечно малы:

$$R_L=\rho dx, \qquad T_L=1-\tau dx, \tag{2}$$

и уравнение (1) приводится к виду:

$$R\overleftarrow{\rho}R-\overleftarrow{\tau}R-R\vec{\tau}+\vec{\rho}=0. \tag{3}$$

Если ρ и τ - интегральные операторы, то уравнение (3) представляет собой нелинейное интегральное уравнение, решение которого в общем виде неизвестно, но в каждом конкретном случае может быть найдено точно или приближенно.

Например, в случае решения одномерного уравнения Шредингера для скалярной частицы в периодическом потенциале[8] с симметричным периодом (это ограничение абсолютно непринципиально, но позволяет не выписывать стрелок) уравнение (1), записанное через амплитуды отражения r и пропускания t одного периода, оказывается простым квадратным уравнением относительно R:

$$R=r+tR(1-rR)^{-1}t, \tag{4}$$

и его решение равно

$$R=[\sqrt{(r-1)^2+t^2}\mp\sqrt{(r-1)^2-t^2}]/[\sqrt{(r-1)^2+t^2}\pm\sqrt{(r-1)^2-t^2}]. \tag{5}$$

Из этих двух решений нужно выбрать то, которое обращается в ноль при отсутствии отражения на одном периоде, т.е. при $r=0$. Таким решением является

$$R=[\sqrt{(r-1)^2+t^2}-\sqrt{(r-1)^2-t^2}]/[\sqrt{(r-1)^2+t^2}+\sqrt{(r-1)^2-t^2}]. \tag{6}$$

Определив R, можно вернуться к уравнению (1) и попытаться найти R_L и T_L. Однако найти две величины из одного уравнения не представляется возможным. Поэтому необходимо сформулировать второе уравнение.

3.ФУНКЦИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Второе уравнение определяет функцию распространения излучения внутри среды. В большинстве физических задач излучение внутри полубесконечной среды убывает пропорционально $\exp(-qx)$. Именно величина q и представляет основной интерес. В принципе могут быть и другие функции распространения, как, например, при диффузии во внешнем поле/12/, или при распространении волн в сферически-симметричных потенциалах/10/. Любая другая функция может быть тоже записана в экспоненциальном виде, но величина q при этом должна зависеть от x. Мы пока ограничимся однородной средой и будем считать, что q не зависит от x, но будем иметь в виду, что q может быть оператором.

Возвращаясь обратно к среде с выделенным слоем толщины L, легко находим, что с одной стороны излучение, падающее на полупространство за слоем, должно быть ослаблено в $\exp(-qL)$ раз, а с другой стороны оно определяется пропусканием первого слоя и многократным переотражением между ним и оставшимся полупространством, т.е. для $\exp(-qL)$ можно записать уравнение:

$$\exp(-qL)=(1-\overleftarrow{R}_L R)^{-1}\overrightarrow{T}_L. \tag{7}$$

При бесконечно малом L уравнение (7) приобретает вид:

$$q \vec{=} \overleftarrow{\rho}R. \tag{8}$$

Таким образом, определив, например, из (3) отражение R, мы с помощью (8) сразу получаем q, после чего (7) можно рассматривать как уравнение относительно R_L и T_L. Система уравнений (1) и (7) становится разрешимой. Конечно, в рассматриваемом нами общем случае, когда отражение и пропускание слоя могут быть несимметричными, двух уравнений тоже недостаточно. Требуются еще два. Но эти два дополнительных уравнения получаются естественным образом.

Действительно, строго говоря, величины R и q в уравнениях (1), (3), (7), (8) для несимметричных сред следует также снабдить стрелкой: $\leftrightarrow$. Тогда, записав уравнения (1) и (7) для противоположного направления, получим полную систему уравнений для определения величин R_L и T_L:

$$\overleftarrow{R}=\overrightarrow{R}_L+\overleftarrow{T}_L\overrightarrow{R}(1-\overleftarrow{R}_L\overrightarrow{R})^{-1}\overrightarrow{T}_L, \qquad \overrightarrow{R}=\overleftarrow{R}_L+\overrightarrow{T}_L\overleftarrow{R}(1-\overrightarrow{R}_L\overleftarrow{R})^{-1}\overleftarrow{T}_L, \tag{9}$$

$$\exp(-\overrightarrow{q}L)=(1-\overleftarrow{R}_L\overrightarrow{R})^{-1}\overrightarrow{T}_L, \qquad \exp(-\overleftarrow{q}L)=(1-\overrightarrow{R}_L\overleftarrow{R})^{-1}\overleftarrow{T}_L. \tag{10}$$

4. ОТРАЖЕНИЕ И ПРОПУСКАНИЕ СЛОЯ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Решим систему (9), (10). Для этого выразим T_L из уравнений (10):

$$\overrightarrow{T}_L=(1-\overleftarrow{R}_L\overrightarrow{R})\overrightarrow{e}, \qquad \overleftarrow{T}_L=(1-\overrightarrow{R}_L\overleftarrow{R})\overleftarrow{e}, \tag{11}$$

где для упрощения формул принято обозначение $\overleftrightarrow{e}=\exp(-\overleftrightarrow{q}L)$. Подставим (11) в (9), в результате получим R_L:

$$\overrightarrow{R}_L=(\overrightarrow{R}-\overleftarrow{e}\overrightarrow{R}\overrightarrow{e})(1-\overleftarrow{R}\overleftarrow{e}\overrightarrow{R}\overrightarrow{e})^{-1}, \qquad \overleftarrow{R}_L=(\overleftarrow{R}-\overrightarrow{e}\overleftarrow{R}\overleftarrow{e})(1-\overrightarrow{R}\overrightarrow{e}\overleftarrow{R}\overleftarrow{e})^{-1}. \tag{12}$$

Подставив (12) в (11), после небольших преобразований получим

$$\overrightarrow{T}_L=(1-\overleftarrow{R}\overrightarrow{R})(1-\overrightarrow{e}\overleftarrow{R}\overleftarrow{e}\overrightarrow{R})^{-1}\overrightarrow{e}, \qquad \overleftarrow{T}_L=(1-\overrightarrow{R}\overleftarrow{R})(1-\overleftarrow{e}\overrightarrow{R}\overrightarrow{e}\overleftarrow{R})^{-1}\overleftarrow{e}. \tag{13}$$

Полученные формулы решают поставленную задачу.

Заметим, что используемая здесь методика применима не только к однородным средам. В работе /13/ показано, как метод рекуррентных соотношений позволяет разработать новый эффективный алгоритм для численного решения уравнения Шредингера с произвольным потенциалом. Такой же прием можно использовать и для задач транспортировки в произвольных неоднородных средах.

Автор приносит искреннюю благодарность И.М.Франку за интерес к работе и ее поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян В.А. ДАН СССР, 1943, т. 38, с. 257; Научные труды АН АрмССР, Ереван, 1960, т. 1, с. 232.
2. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М., ИЛ, 1953.
3. Енгибарян Н.Б. и Мнацаканян М.А. О линейных задачах переноса. ДАН СССР, 1974, т. 213, № 3, с. 533.
4. Айвазян А.П. Теория дифракции рентгеновских лучей в кристаллах, основанная на принципе инвариантности. Межвузовский сборник

научних трудов. Физика, Ереван, изд-во Ереванского государственного университета, 1984, вып. 3, с. 144.
5. Bezirganyan P.H. and Aivazyan A.P. Application of the Invariance Principle for the Diffraction of X-Rays in Real Crystals. Phys. stat. sol (a), 1987, v. 100, № 2, p. 389.
6. Darwin C.G. Phil. Mag., 1914, v. 27, pp. 315, 675.
7. Айвазян А.П. Строгий вариант дарвиновской теории рассеяния идеальными кристаллами. Межвузовский сборник научных трудов, Физика, Ереван, изд-во Ереванского государственного университета, 1984, вып. 3, с. 134.
8. Игнатович В.К. Этюд об одномерном периодическом потенциале. УФН, 1986, т. 150, с. 145
9. Игнатович В.К. Физика ультрахолодных нейтронов. М, Наука, 1986г, гл. 5.
10. Ignatovich V.K. Remarkable capability of the recursive relations method. Am. J. Phys., september, 1989.
11. Игнатович В.К. Новый подход к динамической теории дифракции на идеальном трехмерном кристалле. Препринт ОИЯИ Р4-88-693, Дубна, 1988.
12. Игнатович В.К. Диффузия ультрахолодных нейтронов по нейтроноводу в присутствии гравитационного поля. Препринт ОИЯИ Р4-87-402, Дубна, 1987.
13. Игнатович В.К. Новый метод решения одномерного уравнения Шредингера. Препринт ОИЯИ Р4-87-878, Дубна, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 октября 1989 года.

Игнатович В.К. Р4-89-696

О линейных задачах переноса

Сформулированы и решены уравнения, определяющие перенос излучения в плоских средах конечной толщины через отражение и затухание излучения в полубесконечной среде.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод автора

Ignatovich V.K. P4-89-696

On Linear Transport Problems

The equations, governing the transport of radiation in plane media of finite thickness are formulated and solved in terms reflection and extinction of radiation in the case of semi infinite media.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989

10 коп.

Редактор Б.Б.Колесова. Макет Т.Е.Попеко.

Подписано в печать 06.10.89.
Формат 60х90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 0,64.
Тираж 425. Заказ 42629.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Дубна Московской области.