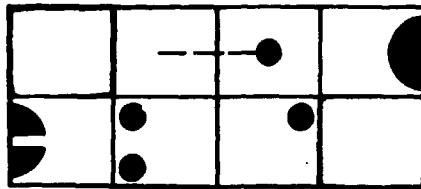


BR 9127183
INIS- BR. - 2808

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA



*Modelo Perturbativo da Teoria de Difusão
Multigrupo para Análise Cinética de
Reatores Nucleares*

Geraldo Martins Souza

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA NUCLEAR

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E TÉCNICAS NUCLEARES
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

*Modelo Perturbativo da Teoria de Difusão
Multigrupo para Análise Cinética de
Reatores Nucleares*

Geraldo Martins Souza

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Ciências e Técnicas Nucleares da UFMG, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências.

BELO HORIZONTE
OUT/1989



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

ESCOLA DE ENGENHARIA - Departamento de Engenharia Nuclear
CURSO DE POS-GRADUACAO EM CIENCIAS E TECNICAS NUCLEARES

TITULO DA DISSERTACAO: "Modelo Perturbativo da Teoria de Difusao
Multigrupo para Analise Cinetica de
Reatores Nucleares".

NOME DO AUTOR: Geraldo Martins Souza

Dissertacao defendida e aprovada pela

Comissao Examinadora assim constituída:

Boris Cimbleis

Prof. Boris Cimbleis

Pedro Ponzoni Filho

Prof. Pedro Ponzoni Filho

Wagner Sacco

Prof. Wagner Sacco

Zieli Dutra Thome Filho

Prof. Zieli Dutra Thome Filho

Orientador:

Jair Carlos Mello

Prof. Jair Carlos Mello

Belo Horizonte, 22 de dezembro de 1989
(data da defesa)

AREA DE CONCENTRACAO: Energia Nuclear

*Para
Valci e Athos*

AGRADECIMENTOS

O trabalho científico é um corpo de idéias embasado na experiência e observação com o objetivo de produzir conhecimento e gerar resultados que oriente o homem na sua atitude objetiva, frente a natureza, em busca da satisfação de suas necessidades.

Ao fazer estes agradecimentos quero dirigí-los àquelas pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para que estas idéias e experiências fossem sistematizadas e gerassem a forma e conteúdo do presente trabalho.

Agradeço aos meus colaboradores:

Professor Dr. Jair Carlos Mello pela orientação e discussões proficuas para o esclarecimento e ordenamento das idéias básicas deste trabalho;

Professor Dr. Augusto Gandini, que despertou-me o interesse pelo assunto em um Curso de "Teoria de Perturbações Generalizadas", ministrado na Primavera de 1983 na COPPE;

Professores Zielli Dutra Tomé, Aquilino S. Martinez e Fernando de Carvalho, da COPPE, pelo incentivo, deles recebido, quando lá estive em 1983;

Professores Emílio de Vasconcellos Paes, Omar Campos Ferreira, Arysio Nunes dos Santos, Geraldo A.C. Tupynambá, Carlos W. Urban, Fernando Lobo Vaz de Mello, Delmiro Schmidt de Andrade, Arno Heeren de Oliveira e Ângela Fortini M. Ferreira, pelo apoio e incentivo no CCTN;

A minha esposa Valci, pelo apoio e preparação do manuscrito;

**A Engenheira Helia Castelli pela contribuição com as
figuras;**

**A Secretária do CCTN, Ana Maria, pela datilografia e
ao pessoal da Secretaria do DEN;**

Ao PRONUCLEAR, pelo suporte financeiro;

**Ao Departamento de Engenharia Nuclear da EEUFMG, através
do CCTN pela oportunidade da realização
deste Curso.**

SUMÁRIO

| | |
|---|----|
| RESUMO..... | 01 |
| ABSTRACT | 03 |
| INTRODUÇÃO..... | 05 |
| CAPÍTULO I - Desenvolvimento da Lei de Fick em Altas Ordens para a Densidade de Corrente de Nêutrons..... | 09 |
| CAPÍTULO II - Equações dos Campos Escalres Diretos do Reator..... | 17 |
| II.1 - Equação que Governa o Fluxo Neutrônico..... | 18 |
| II.2 - Equação que Governa os Precusosres de Nêutrons..... | 24 |
| CAPÍTULO III - Importância Neutrônica..... | 32 |
| CAPÍTULO IV - Desenvolvimento da Lei de Fick em Altas Ordens para a Densidade de Corrente de Importância.... | 36 |
| CAPÍTULO V - Equações dos Campos Importância do Reator..... | 41 |
| V.1 - Equação que Governa a Importância Neutrônica.. | 43 |
| V.2 - Equação da Importância dos Precusores..... | 45 |
| CAPÍTULO VI - Comportamento do Reator..... | 55 |
| CAPÍTULO VII - Solução das Equações Diretas e Adjuntas..... | 60 |
| CAPÍTULO VIII - Formulação Perturbativa da Expressão da Reatividade | 62 |
| CAPÍTULO IX - Vida Média Efetiva dos Nêutrons Prontos..... | 66 |
| CAPÍTULO X - Equação da Reatividade..... | 69 |
| CAPÍTULO XI - Interpretação Cinética da Região de Armadilha- mento de Fluxo..... | 75 |
| CAPÍTULO VII - Discussão e Conclusões..... | 78 |
| APÊNDICE | 82 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 85 |

RESUMO

O escopo deste trabalho é o desenvolvimento de uma teoria de perturbações multigrupo para a análise cinética de reatores nucleares. As equações que descrevem o comportamento do reator foram apresentadas na sua maior generalidade e escritas em notação compacta de matrizes e vetores. Na dedução destas equações foram introduzidos operadores e fatores discretizantes os quais foram determinados por comparação com as equações convencionais. A Lei de Fick foi desenvolvida em altas ordens para corrente de nêutrons e importância. As soluções das equações dos campos diretos e adjuntos foram representadas por combinações das autofunções dos operadores B e B^* e a igualdade, em módulo, dos autovalores foi estabelecida matematicamente. No estabelecimento da expressão que define a reatividade, a perturbação do operador B , foi introduzida de sacoplada para a forma e nível do fluxo. A vida média efetiva dos nêutrons prontos foi obtida das equações do reator e do princípio

de conservação da importância. O desenvolvimento da equação de Nordheim, ainda que modificado, foi baseado em Gandini. Finalmente, uma interpretação matemática da região de armadilhamento de fluxo foi aventada.

ABSTRACT

The scope of this work is the development of a multigroup perturbation theory for the purpose of Kinetic and dynamic analysis of nuclear reactors. The equations that describe the reactor behavior were presented in all generality and written in the shorthand notation of matrices and vectors. In the derivation of these equations indetermined operators and discretizing factors were introduced and then determined by comparision with conventional equations. Fick's Law was developed in higher orders for neutron and importance current density. The solution of the direct and adjoint fields were represented by combination of the eigenfunctions of the B and B* operators and the eigenvalue modulus equality was stablished mathematically. In the derivation of the reactivity expression the B operator perturbation was split in two non coupled to the flux form and level. The prompt neutrons effective mean life was derived from reactor equations

and importance conservation. The establishment of the Nordheim's equation, although modified, was based on Gandini. Finally, a mathematical interpretation of the flux-trap region was averted.

INTRODUÇÃO

O Reator Nuclear é um dispositivo constituído de uma gama complexa de materiais com composição, propriedades e características necessárias e suficientes para iniciar e manter, de maneira autosustentada e controlada, a reação em cadeia, com o objetivo de produzir uma saída estável de potência, gerar radioisótopos e núclídeos físséis e servir de suporte para pesquisas .

Quando este dispositivo funciona numa condição de estado permanente, dizemos que ele está no seu estado crítico. Tal estado crítico representa um delicado equilíbrio entre dois processos dinâmicos antagônicos: a taxa de produção e desaparecimento de nêutrons.

O estabelecimento deste equilíbrio e como restaurá-lo, após o mesmo ser perturbado, é uma tarefa de suma importância na teoria dos reatores nucleares. O segmento desta teoria que objetiva o

estudo e análise do comportamento neutrônico do sistema quando a condição de equilíbrio associada ao estado crítico é rompida, denomina-se *cinética de reatores*. Trata-se, geralmente, da evolução espaço-temporal da distribuição neutrônica em conexão com a composição do sistema, quando a reatividade do mesmo é alterada. Ou seja, uma perturbação é introduzida nos seus parâmetros.

Na sua forma mais fundamental, a cinética dos reatores trata da distribuição de probabilidades dependentes do tempo. Os eventos nucleares individuais não são previsíveis de forma determinística. Tudo o que se pode dizer é que há uma certa probabilidade associada a cada evento. Afortunadamente, entretanto, as populações de nêutrons dos reatores são bastante elevadas, permitindo um tratamento determinístico dos mesmos através da definição e introdução de grandezas médias. Com este procedimento, teremos um reator 'determinístico' cujo comportamento em "média" poderá ser analisado em qualquer instante posterior, dadas as condições iniciais, as características do mesmo e as equações diferenciais que regem, puntual e instantaneamente, a tendência de comportamento do sistema.

A abordagem convencional da cinética puntual, satisfatória nos casos em que a forma do fluxo pode ser considerada invariável no tempo, ou seja, onde os efeitos de perturbações localizados, rapidamente se distribuem a todo o sistema, pode ser e, em muitas circunstâncias o é, insuficiente para o cálculo onde as distorções de fluxo forem bastante acentuadas, no espaço de fase. Formalmente estas perturbações são vistas como uma alteração nos parâmetros do reator, podendo afetar um, alguns ou todos. No cotidiano das

operações dos reatores elas surgem como consequência de introdução de instrumentação e materiais diversos para a experiência, nos reatores de pesquisa; Como irradiação neutrônica não uniforme dos elementos combustíveis, surgindo como consequência, depleções e "venenos" localizados. Condições acidentais de funcionamento podem advir tais como a ebulição nos reatores moderados e arrefecidos com fluidos, ou, em condições mais extremas, a fusão de elementos combustíveis.

Em princípio, um cálculo de cinética espacial multi-grupo, no qual as perturbações são representadas por constantes de grupo apropriadas dependentes do espaço e do tempo é suficiente. No entanto, em virtude de sua natureza intrínseca, este cálculo terá que ser efetuado em duas ou três dimensões, acarretando um enorme dispendio de tempo sendo, em consequência, oneroso e quase proibitivo. Afortunadamente este tipo de problema pode, através da abordagem alternativa propiciada pelo desenvolvimento da teoria de perturbações, ser realísticamente tratado com um custo, em máquina, comparativamente menor.

Por ser o modelo de difusão suficientemente acurado para a representação, análise e cálculo dos reatores de fissão, bem como produzir soluções analíticas mais simples, objetivamos, neste trabalho, desenvolver uma teoria de perturbação do mesmo. Sendo o ponto frágil deste modelo o termo que descreve o transporte e difusão de nêutrons, cuja expressão matemática é conhecida como Lei de Fick, uma extensão desta Lei, para altas ordens, foi desenvolvida incrementando-se, desta forma, a precisão do modelo de difusão.

As equações dos campos diretos (neutrônico) e adjunto (importância) foram deduzidas na sua maior generalidade e escri

tas em notação compacta de matrizes e vetores. Nesta notação, o vetor anteposto ao operador matricial é sempre um vetor linha, enquanto o vetor posposto é sempre um vetor coluna, as operações sendo efetuadas de modo convencional.

Os parâmetros cinéticos, reatividade e vida média dos nêutrons rápidos foram obtidos como expressões exatas, no sentido de que, nas suas deduções, nenhuma simplificação foi introduzida além das hipóteses básicas delineadoras do modelo.

I - DESENVOLVIMENTO DA LEI DE FICK EM ALTAS ORDENS PARA A DENSIDADE DE CORRENTE DE NÊUTRONS

Na física de reatores o modelo de difusão obtido como uma simplificação do modelo mais completo de Boltzmann, apresenta algumas restrições de aplicabilidade. Estas restrições estão associadas principalmente ao termo que descreve o transporte dos nêutrons. A expressão matemática deste termo, que relaciona a densidade de corrente de nêutrons e fluxo escalar é conhecida em física de reatores como Lei de Fick, devido à analogia formal com a lei do mesmo nome usada na teoria clássica do fenômeno da difusão em líquidos e gases.

Dentre as várias maneiras de se obter a Lei de Fick, a mais precisa, direta e convincente é baseada na definição da corrente de nêutrons, propriedades difusoras do sistema admitido, infinito, isotrópico e homogêneo e na série de Taylor do fluxo. Nesta dedução uma aproximação em primeira ordem é introduzida, por se

reter, no seu desenvolvimento, apenas os dois primeiros termos da série. Isto acarretará uma série de hipóteses restritivas, limitando a aplicabilidade e precisão do modelo de difusão, notadamente nos reatores de pequenas dimensões, elevado gradiente e fluxo neutro.

Sabemos da matemática que se uma função é representável pela sua série de Taylor, então a aproximação entre função e série está condicionada a dois parâmetros antitéticos: o número de termos da série usados para representá-la e a proximidade do intervalo de expansão. Fixado o grau de aproximação, a proximidade do intervalo e o número de termos da série terão infinitos pontos de conciliação. No entanto, fixando-se um destes parâmetros o outro estará automaticamente determinado.

Desde que a lei de Fick é a base da formulação teórica do modelo de difusão e fator limitante na aplicabilidade prática do mesmo resolvemos, com respaldo nas considerações do parágrafo precedente, desenvolve-la em altas ordens, o que permitirá uma variação mais acentuada do fluxo bem como uma maior flexibilidade na magnitude do intervalo de expansão da série, incorporando-se assim, uma precisão incremental ao modelo de difusão.

Se considerarmos um sistema ideal, no caso, um reator homogêneo, isotrópico e infinito, onde os nêutrons movimentam-se caoticamente, eles terão, em média, transporte nulo, pois a configuração estável de estados equiprováveis que maximiza a entropia do sistema já foi alcançada. Como a Lei de Fick expressa a tendência universal entrópica dos sistemas difusores, a dedução da referida Lei sob tais hipóteses é algo contraditória.

A abordagem aqui apresentada vem de considerar um sistema entrópico. Tal sistema se caracteriza em seu aspecto dinâmico por apresentar processos espontâneos que o conduzem a uma configuração mais estável. A direção generalizada de tais processos é aquela na qual a estabilidade do sistema é alcançada com o menor dispêndio em energia e máxima de entropia. Esta direção é representada matematicamente pelo gradiente de uma propriedade do sistema que varie de ponto a ponto. Como a isotropia e homogeneidade do reator são fundamentais para a simplificação das expressões matemáticas, a finitude do sistema será introduzida como hipótese para que haja sentido físico falar-se em corrente de nêutrons. Em razão de o fluxo ser exatamente representado e o grau de absorção do sistema ser limitado apenas pelas propriedades físicas dos materiais, a expressão integral de nêutrons convergirá rapidamente, no espaço, permitindo-se uma aproximação razoável entre o infinito matemático e a fronteira física finita do sistema.

Sendo o meio não ideal haverá, em cada instante, uma direção segundo a qual os nêutrons migrarão, em média, "preferencialmente". Entre todas as orientações possíveis de nêutrons de dada energia, em torno da posição \vec{r} , aquela que torna máximo o número de nêutrons que atravessam perpendicularmente a unidade de área, na unidade de tempo, permite a definição do vetor corrente de nêutrons que denotaremos por $\vec{J}(\vec{r}, t)$. Matematicamente,

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \int_{\Omega} \phi(\vec{r}, t) \vec{n} d\Omega \quad \text{e} \quad \phi(\vec{r}, t) = \int_{\Omega} \phi(\vec{x}, t) d\vec{\Omega}$$

Para estabelecermos o relacionamento matemático entre $J(r, t)$ e o fluxo escalar $\phi(r)$, vamos reportar à figura geométrica seguinte:

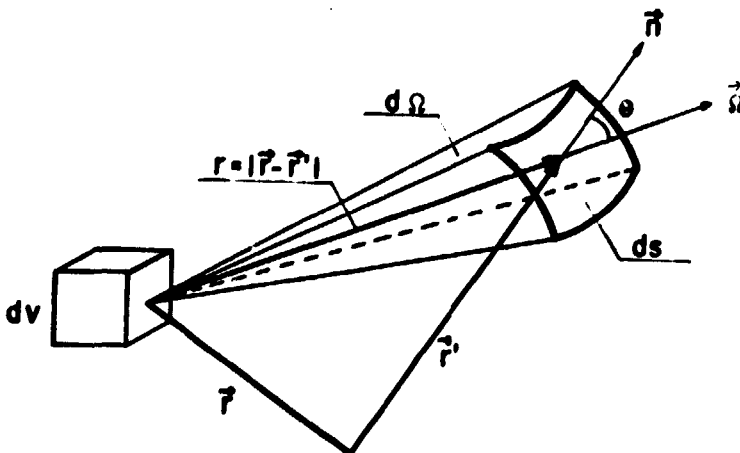


Figura 1

Sendo Σ_S a seção macroscópica de choque de difusão, o número de colisões elásticas em dV , na unidade de tempo será

$$\Sigma_S \phi(\vec{r}, t) dV \quad (I.1)$$

Como é suposição básica que o meio seja isotrópico, todas as direções são equiprováveis. Em particular, a probabilidade associada à direção do unitário \vec{n} , será dada por

$$\frac{\vec{n} \cdot \vec{n}}{4\pi r^2} ds = \frac{\cos \theta}{4\pi r^2} \quad (I.2)$$

Ao se difundir através do meio, o nêutron poderá ser absorvido ou desviado de sua direção original. Denotamos as probabilidades relativas a tais eventos por Σ_a e Σ_s , respectivamente. Em função da natureza destes eventos, o número de nêutrons, após o trajeto $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$, que conservam a direção inicial, será dado pela probabilidade de transmissão exponencial

$$e^{-\Sigma r} \quad (I.3)$$

onde $\Sigma = \Sigma_a + \Sigma_s$.

Agora, as expressões (I.1), (I.2) e (I.3), relativamente, denotam eventos independentes. Por esta razão estas expressões, combinadas como fatores, representarão o número de nêutrons que, procedentes de colisões em dV , alcançam e atravessam o elemento de área ds , na unidade de tempo

$$J(\vec{r}, t) ds = ds \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Sigma_S \phi(\vec{r}, t)}{4\pi r^2} dV e^{-\Sigma r} \cos \theta dr d\theta d\varphi \quad (I.4)$$

Tomando o elemento de volume em coordenadas esféricas, substituindo em (I.4), e simplificando, teremos:

$$J(\vec{r}, t) = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \phi(\vec{r}, t) e^{-\Sigma r} \cos\phi \sin\phi dr d\phi d\phi \quad (I.5)$$

A integração da expressão (I.5) exige o conhecimento prévio da função fluxo, $\phi(\vec{r}, t)$, que por sua vez satisfaz, simultaneamente à equação da difusão. Assim, estamos diante de um sistema de equações integro-diferencial. O expediente usual empregado na solução direta da expressão (I.5), é o desenvolvimento da função fluxo em série Taylor. Assim procedendo teremos:

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi(0) + \frac{r}{1!} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{r^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \dots + \frac{r^n}{n!} \frac{\partial^n \phi}{\partial r^n} \quad (I.6)$$

onde $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$. Ou, colocando-a em forma compacta de somatório, ficamos com

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{n=0}^N \frac{r^n}{n!} \frac{\partial^n \phi}{\partial r^n} \quad (I.7)$$

em que $\frac{\partial^n \phi}{\partial r^n}$ é a derivada direcional de ordem n do fluxo. Portanto o fluxo deverá ser uma função definida em R^3 e de classe C^n , ou seja, uma função real do espaço tridimensional n -vezes continuamente diferenciável. Por outro lado, o gradiente e a derivada direcional de uma função relacionam-se da seguinte forma

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \nabla \phi \cdot \vec{\Omega} \quad (I.8)$$

sendo $\hat{\Omega}$ o unitário que especifica a direção da derivada.

Para a derivada direcional de ordem n teremos

$$\frac{\partial^n \phi}{\partial r^n} = \nabla^n \phi \cdot (\hat{\Omega})^n = \nabla^n \phi \cos^n \theta \quad (I.9)$$

Substituindo (I.9) em (I.7), resulta

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{n=0}^N \frac{r^n}{n!} \nabla^n \phi \cos^n \theta \quad (I.10)$$

Aqui, ao invés de tomar apenas os dois primeiros termos da série, como convencionalmente é feito, manteremos N termos, o número suficiente para produzir a aproximação desejada.

Entrando com a expressão (I.10) em (I.5), teremos

$$J(\vec{r}, t) = \frac{\Sigma_S}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\sum_{n=0}^N \frac{r^n}{n!} \nabla^n \phi \cos^{n+1} \theta \sin \theta \right) e^{-\Sigma r} dr d\theta d\varphi \quad (I.11)$$

Esta expressão pode ser separada em três integrais independentes

$$J(\vec{r}, t) = \frac{\Sigma_S}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sum_{n=0}^N \nabla^n \phi \cos^{n+1} \theta \sin \theta d\theta \int_0^\infty \sum_{n=0}^N \frac{r^n}{n!} e^{-\Sigma r} dr \quad (I.12)$$

cujas soluções são as seguintes

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \quad (I.13)$$

$$\int_0^\pi \sum_{n=0}^N \nabla^n \phi \cos^{n+1} \theta \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par} \\ N & \\ - \sum_{n=0} \frac{2}{(n+2)} \frac{\nabla^n \phi}{\Sigma^{n+1}} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (I.14)$$

pois $\nabla^n \phi$ é constante.

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^N \frac{\Gamma^n}{n!} e^{-\Sigma r} dr = \sum_{n=0}^N \frac{\Gamma(n+1)}{n! \Sigma^{n+1}} = \frac{1}{\Sigma^{n+1}} \quad (I.15)$$

pois $\Gamma(n+1) = n!$ para $n \in \mathbb{Z}^+$

Substituindo (I.13) e (I.15) em (I.12) e fazendo as simplificações necessárias, resulta

$$J = - \sum_{n=0}^N \frac{\Sigma_s}{(n+2) \Sigma^{n+1}} \nabla^n \phi \quad (I.16)$$

Nesta expressão n é sempre ímpar.

Observamos que o gradiente generalizado ∇^n , é um operador de ordem ímpar que quando aplicado a ϕ produz um campo vetorial cujas contribuições simétricas cancelam-se mutuamente, como pode ser visto nos resultados da expressão (I.14)

$$\text{Fazendo-se } D^n = \frac{\Sigma_s}{(n+2) \Sigma^{n+1}} \quad (I.17)$$

a expressão (I.16) assumirá a seguinte forma

$$J = - \sum_{n=1}^N D^n \nabla^n \phi \quad (I.18)$$

onde n é um número ímpar positivo que indica a ordem de cada termo do desenvolvimento.

Tomando-se apenas o primeiro termo, ou seja, fazendo-se $n=1$, em (I.16), obtemos a expressão convencional da Lei de Fick em Física de Reatores.

$$J = - \frac{\Sigma_s}{3 (\Sigma_a + \Sigma_s)^2} \nabla \phi \quad (1.20)$$

A existência de um gradiente de ordem n (ímpar) fará a parecer um laplaciano de ordem $n+1$ (par). O gradiente é um operador que indica quão rapidamente está variando uma função, quando passa-se de uma curva de nível a outra infinitamente próxima, segundo a direção de máxima variação desta função; o laplaciano é um operador relacionado à forma da curva sendo proporcional à fuga das partículas do sistema. Estes operadores atuam apenas nas coordenadas especiais, o que será essencial na separação de variáveis quando da solução das equações da difusão.

A seguir obteremos as equações que governam o fluxo e densidade de precursores na forma dependente do tempo para o modelo de difusão.

II - EQUAÇÃO DOS CAMPOS ESCALARES DIRETOS DO REATOR

Considerações preliminares

- (a)- As equações de balanço que contabilizam os processos que ocorrem com os nêutrons serão escritas para um elemento arbitrário de volume do espaço de fase, mas que seja representativo do sistema para que nele ocorram todos os processos físicos relevantes em um reator de fissão;
- (b)- Fenômenos quânticos, flutuações estatísticas, interações nêutron-nêutrons e considerações relativísticas não serão aqui consideradas;
- (c)- Interações eletromagnéticas e gravitacionais são praticamente inexistentes devido à natureza dos fenômenos envolvidos;

- (d) - O espectro de energia dos nêutrons, contínuo, será discretizado em um número finito, N , de grupos energéticos, as equações sendo escritas para um grupo genérico, g .
- (e) - A sistemática dedutiva adotada se processará em dois passos sequenciais. Primeiro, através de um balanço local de probabilidades, obteremos a variação temporal dos processos em uma posição fixa arbitrária do espaço de fase. Os parâmetros que caracterizam o sistema serão introduzidos de maneira genérica, através de operadores adequados. No passo seguinte, introduzimos a discretização do espectro energético dos nêutrons. Este procedimento propiciará a determinação da forma e dos elementos dos operadores.

II.1 - EQUAÇÃO QUE GOVERNA O FLUXO NEUTRÔNICO

Quando um nêutron é introduzido ou produzido internamente por fissão no reator, um dos seguintes eventos poderá ocorrer no espaço de fase: (1) ser absorvido pelo meio sem provocar fissão; (2) provocar fissão e produzir dois ou mais nêutrons quase instantaneamente (nêutrons prontos); (3) perder gradualmente a energia nos processos de colisão elástica e inelástica; (4) fuga dos nêutrons através da superfície externa do elemento de volume considerado; (5) produção de nêutrons com um certo retardo de tempo em relação aos nêutrons prontamente produzidos em fissão por decaimento dos fragmentos de fissão. Estes fragmentos são conhecidos como precursores de nêutrons e, os nêutrons por eles produzidos são denominados nêutrons atrasados, retardados ou diferidos.

Das considerações precedentes podemos, literalmente,

montar a seguinte equação, para contabilização dos processos probabilísticos que ocorrem no elemento de volume $d\vec{x}$, em torno da posição \vec{x} , no tempo t (observe que \vec{x} é um vetor no espaço de fase. Especifica conjuntamente energia e espaço):

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Nêutrons existentes em } d\vec{x} \text{ em } t + \delta t & = & \text{Nêutrons existentes em } d\vec{x} \text{ no tempo } t \\
 & + & \text{Contribuições líquidas ao elemento de volume } d\vec{x} \text{ devidas aos nêutrons prontos no lapso } \delta t \\
 & + & \text{Contribuições devidas ao decaimento dos precursores em } d\vec{x} \text{ no lapso } \delta t
 \end{array} \quad (\text{II.1.1})$$

Como é nossa intenção escrevermos as equações em notação compacta de operadores matriciais e vetores, identificaremos cada termo da expressão (II.1.1) com um operador ou vetor apropriados, o relacionamento matemático entre as diversas grandezas sendo obtido através da passagem ao limite. Assim procedendo teremos:

$$\begin{aligned}
 n(\vec{x}, t + \delta t) d\vec{x} &= n(\vec{x}, t) d\vec{x} + M(\vec{x}, t) n(\vec{x}, t) d\vec{x} \delta t + \\
 N(\vec{x}, t) C(\vec{x}, t) d\vec{x} \delta t & \quad (\text{II.1.2})
 \end{aligned}$$

onde $n(\vec{x}, t)$ é a densidade de nêutrons no espaço de fase no tempo t ;

$C(\vec{x}, t)$ é a concentração de precursores no espaço de fase no tempo t ;

$M(\vec{x}, t)$ e $N(\vec{x}, t)$ representam, respectivamente, a taxa líquida de produção de nêutrons prontos e diferidos em $d\vec{x}$ no tempo t .

Dividindo ambos os membros de (II.1.2) por $d\vec{x} \delta t$, trans-

pondo e tomando o limite com δt tendendo a zero, teremos

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{n(\vec{x}, t + \delta t) - n(\vec{x}, t)}{\delta t} &= \frac{\partial n(\vec{x}, t)}{\partial t} = \\ &= M(\vec{x}, t)n(\vec{x}, t) + N(\vec{x}, t)C(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (\text{II.1.3})$$

Para determinar a forma e os elementos de M e N introduziremos a discretização do espectro neutrônico e de precursores de nêutrons. A discretização significa, aqui, a discriminação de grupos de partículas por uma propriedade que as caracterize. Fixada a posição, os nêutrons diferenciam-se pela energia; os precursores, pelas suas constantes de decaimento. Introduzindo em (II.1.3) os fatores discretizantes, $f(E)$ e $g(\lambda)$ para nêutrons e precursores, respectivamente, teremos

$$f(E)^{-1} \frac{\partial [f(E)n(r, t)]}{\partial t} = M(r, t)f(E)n(r, t) + N(r, t)g(\lambda)C(r, t) \quad (\text{II.1.4})$$

Para determinar a forma e os elementos dos operadores da equação (II.1.4) vamos escrever a equação da difusão multigrupo na forma convencional, para um grupo genérico, g .

$$\begin{aligned} \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t}(\vec{r}, t) &= \nabla \cdot D_g^n \nabla \phi_g(\vec{r}, t) - \Sigma_g^t \phi_g(\vec{r}, t) + \\ &+ \sum_{h=1}^{g-1} \Sigma_{h \rightarrow g}^s \phi_h(\vec{r}, t) + (1-\beta) \chi_g^p \sum_{h=1}^N v_h \Sigma_h^f \phi_h(\vec{r}, t) + \quad (\text{II.1.5}) \\ &+ \chi_g^d \sum_{m=1}^M \lambda_m C_m(\vec{r}, t) \quad (g = 1, 2, 3, \dots, N) \end{aligned}$$

onde a quantidade D_g^n é o coeficiente de difusão no grupo g ; Σ_g^a , Σ_g^s ($\Sigma_g^t = \Sigma_g^a + \Sigma_g^s$) e Σ_g^f são, respectivamente, as seções macroscópicas de absorção, espalhamento e fissão para nêutrons do grupo g ; a

probabilidade por unidade de fluxo de que um nêutron do grupo h ingresse no grupo g , por difusão, é denotada por $\chi_{h \rightarrow g}^s$; o parâmetro ν_h é o número médio de nêutrons por fissão induzida por nêutrons do grupo h ; ν_g é a velocidade média dos nêutrons do grupo g , admitidos monoenergéticos; ϕ_g e ϕ_h denotam os respectivos fluxos do grupo g e h ; C_m , λ_m , β_m são, respectivamente, a concentração média de precursores, constante de decaimento e fração de nêutrons diferidos produzidos; χ_g^p e χ_g^d são as frações, no grupo g , dos espectros de nêutrons prontos e difereidos.

Extendendo os somatórios da equação (II.1.5) para N grupos e definindo as seguintes matrizes

$$\chi_p = \begin{bmatrix} \chi_1 & \chi_1 & \cdots & \chi_1 \\ \chi_2 & \chi_2 & \cdots & \chi_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \chi_N & \chi_N & \cdots & \chi_N \end{bmatrix} \quad (N \times N) \tag{II.1.6}$$

$$F = \begin{bmatrix} \nu_1 \Sigma_1^f & & & \\ & \ddots & & \\ & & \nu_g \Sigma_g^f & \\ & & & \ddots \\ & & & & \nu_N \Sigma_N^f \end{bmatrix} \quad (N \times N) \tag{II.1.7}$$

$$A = \begin{bmatrix} \nabla \cdot D_1^n \nabla^n - \Sigma_1^t & & & \\ \Sigma_{1 \rightarrow 2}^s & \nabla \cdot D_2^n \nabla^n - \Sigma_2^t & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \Sigma_{1 \rightarrow N}^s & \Sigma_{2 \rightarrow N}^s & \nabla \cdot D_N^n \nabla^n - \Sigma_N^t \end{bmatrix} \quad (N \times N) \tag{II.1.8}$$

$$X_d = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad (M \times N) \quad (II.1.9)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \lambda_m & \\ \bigcirc & & \lambda_m \end{bmatrix} \quad (II.1.10)$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{v_1} & & \bigcirc \\ \dots & \dots & \\ \bigcirc & & \frac{1}{v_N} \end{bmatrix} \quad (N \times N) \quad (II.1.11)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad (II.1.12)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_N \end{bmatrix} \quad (II.1.13)$$

podemos escrevê-la na seguinte forma

$$v^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial t} = [A + (1-\beta)\chi_p F] \phi + \chi_d \Lambda C \quad (\text{II.1.14})$$

Comparando (II.4) com (II.14) obtemos

$$f(E) = v, \quad M = [A + (1-\beta)\chi_p F], \quad \phi = f(E)n = vn$$

$$N = N(\vec{r}, t) \quad g(\lambda) = \chi_d \quad g(\lambda) = \chi_d \Lambda, \quad g(\lambda) = \Lambda, \quad N(\vec{r}, t) = \chi_d$$

Assim teremos, em forma compacta

$$v^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial t} = M\phi + NC \quad (\text{II.1.15})$$

Dessa forma determinamos os operadores M e N que são matriciais e cujos elementos constituintes que podem ser de natureza algébrica, diferencial e integral, descrevem os eventos probabilísticos associados aos fenômenos nucleares que ocorrem nos reatores de fissão.

Na equação (II.1.15), temos duas variáveis dependentes ϕ e C; portanto, será necessário a obtenção de uma segunda equação relacionando ϕ e C, para o equacionamento completo do sistema físico.

11.2 - EQUAÇÃO QUE GOVERNA OS PRECURSORES DE NÊUTRONS

Como mencionado anteriormente, os nuclídeos ao serem fissionados produzem, além dos nêutrons instantâneos ou prontos, fragmentos, numa gama variada e complexa de espécimes nucleares. Dentre estes, alguns encerram em seu núcleo um excesso de nêutrons em relação aos prótons numa razão que produz instabilidade. Em virtude disto, estes fragmentos decaem rapidamente, para nuclídeos mais estáveis, emitindo o excedente de nêutrons. Estes nêutrons por serem produzidos com um certo retardo de tempo em relação aos nêutrons prontamente produzidos em fissão, recebem o nome de nêutrons atrasados, retardados ou diferidos. O tempo de produção de cada nêutron diferido é determinado pela constante de decaimento de cada fragmento, λ_m . A fração de nêutrons diferidos de espécie m é β_m , sendo $C(\vec{x}, t)$ a concentração dos precursores na posição \vec{x} no tempo t .

A mesma distribuição espacial e energética para nêu-

trons e precursores será admitida. Contudo é necessário ressaltar a necessidade de correção, espacial, nos reatores de combustíveis fluidos, (onde o precursor se movimenta, antes de emitir o nêutron). A correção em energia é sempre necessária pois os nêutrons diferidos são menos energéticos que os prontos¹.

Os eventos físicos aqui relevantes para a contabilidade dos processos que ocorrem em $d\vec{x}$, elemento de volume do espaço de fase, em torno de \vec{x} , no tempo t , são: (1) Geração de precursores de nêutrons diferidos em fissão; (2) desaparecimento de precursores por decaimento.

Literalmente, podemos escrever a seguinte equação

$$\begin{array}{rcccc}
 \text{precursores} & & \text{precursores} & \text{precursores pro} & \text{desapareci-} \\
 \text{existentes} & = & \text{que existiam} & \text{duzidos em fis-} & \text{mento de pre} \\
 \text{em } d\vec{x} \text{ em} & & \text{em } d\vec{x} \text{ no tem} & \text{são em } d\vec{x} \text{ no} & \text{cursores de} \\
 t + \delta t & & \text{po } t & \text{lapso } \delta t & d\vec{x} \text{ por decai} \\
 & & & & \text{mento no lap} \\
 & & & & \text{so } \delta t
 \end{array} \quad (\text{II.2.1})$$

Identificando cada termo literal de (II.2.1) com um símbolo apropriado, podemos transformá-la em

$$C(\vec{x}, t + \delta t) d\vec{x} = C(\vec{x}, t) d\vec{x} + P(\vec{x}, t) n(\vec{x}, t) d\vec{x} \delta t - Q(\vec{x}, t) C(\vec{x}, t) d\vec{x} \delta t \quad (\text{II.2.2})$$

onde $C(\vec{x}, t)$ é a concentração de precursores no espaço de fase no tempo t ;

¹ Vide Lamarsh, J.R., Nuclear Reactor Theory, pág.436, item 12.5.

$n(\vec{x}, t)$ é a densidade de nêutrons no espaço de fase no tempo t ;

$P(\vec{x}, t), Q(\vec{x}, t)$ ⁽²⁾ representam, respectivamente, a probabilidade líquida de produção e decaimento de precursores, em $d\vec{v}$ no tempo t .

Dividindo ambos os membros de (II.2.2) por $dx\delta t$, transpondo e tomando o limite quando δt tende a zero, temos

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{C(x, t + \delta t) - C(x, t)}{\delta t} = \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = P(x, t)n(x, t) + Q(x, t)C(x, t) \quad (\text{II.2.3})$$

Introduzindo os fatores discretizantes indeterminados $f(E)$ e $g(\lambda)$, teremos

$$(f(E))^{-1} \frac{\delta f(E)C(\vec{r}, t)}{\delta t} = P(\vec{r}, t)f(E)n(\vec{r}, t) + Q(\vec{r}, t)g(\lambda)C(\vec{r}, t) \quad (\text{II.2.4})$$

Tomando, agora, a forma convencional desta equação no modelo multigrupo

$$\frac{\partial C_m(\vec{r}, t)}{\partial t} = \beta_m \sum_{h=1}^N v_h \sum_h^f \phi_h(\vec{r}, t) - \lambda_m C_m(\vec{r}, t) \quad (\text{II.2.5})$$

$$(m = 1, 2, 3 \dots, M)$$

(²) Por ser Q ainda um operador indeterminado, o sinal menos não é necessário

Após desenvolver o somatório e definir as seguintes ma
trizes

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \dots & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_2 & \dots & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_N & \beta_N & \dots & \beta_N \end{bmatrix} (M \times N) \quad (\text{II.2.6})$$

$$F = \begin{bmatrix} v_1 \Sigma_1^f & & & \\ & v_g \Sigma_g^f & & \\ & & & \\ & & & v_N \Sigma_N^f \end{bmatrix} (N \times N) \quad (\text{II.2.7})$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \lambda_m & \\ & & & \dots \\ & & & & \lambda_M \end{bmatrix} (M \times M) \quad (\text{II.2.8})$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.9}) \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.10})$$

a equação (II.2.5) tomará a seguinte forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \beta F \phi - \Lambda C \quad (\text{II.2.11})$$

Comparando (II.2.4) com (II.2.11), temos

$$g(\lambda) = \Lambda, \quad f(E)n(\vec{r}, t) = \phi, \quad f(E) = v$$

$$P(\vec{r}, t) = \beta F \quad Q(\vec{r}, t) = Q'(\vec{r}, t)g(\lambda) = -\Lambda$$

$$Q'(\vec{r}, t) = I$$

Assim a equação (II.2.4) se reduzirá a

$$\frac{\partial C}{\partial t} = P\phi + QC \quad (\text{II.2.12})$$

A equação (II.2.12) juntamente com a equação (I.1.15) descrevem, matematicamente o reator, a menos das condições de contorno e iniciais.

$$v^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial t} = M\phi + NC$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = P\phi + QC \quad (\text{II.2.13})$$

Que é um sistema de equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem nas variáveis $\phi(\vec{r}, t)$ e $C(\vec{r}, t)$. Este sistema poderá ser colocado numa forma mais compacta ainda, definindo as seguintes supermatrizes

$$B = \begin{bmatrix} M & N \\ P & Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + (1 - \beta)\chi_p F & \chi_d \Lambda \\ \beta F & -\Lambda \end{bmatrix} \quad (\text{II.2.14})$$

$$T = \begin{bmatrix} V^{-1} & \text{O} \\ \text{O} & I \end{bmatrix} \quad (II.2.15) \quad \psi = \begin{bmatrix} \phi \\ C \end{bmatrix} \quad (II.2.16)$$

onde I é uma matriz identidade ($M \times M$), introduzida apenas para composição da supermatriz T , não afetando os valores numéricos

$$T \frac{\partial \psi}{\partial t} = B \psi + S \quad (II.2.17)$$

em que S é um vetor coluna que representa uma fonte independente de nêutrons, possível de ser introduzida no reator.

Estas equações, dentro do conjunto de hipóteses básicas sob o qual foram deduzidas descreverão o comportamento neutrônico espaço-temporal do reator. No entanto, por tratar-se de equações diferenciais parciais, haverá um número infinito de funções que satisfaz identicamente o sistema (II.2.17). Matematicamente isto se deve ao método de obtenção das equações diferenciais parciais; fisicamente, devido ao fato de nosso sistema ainda não estar caracterizado em relação ao seu exterior. Tal caracterização é normalmente feita, em física matemática, através da introdução de condições de contorno apropriadas. Condições de contorno são expressões matemáticas que descrevem, de maneira aproximada, as conexões e interações do sistema isolado para estudo com o seu complemento.

As condições de contorno usualmente empregadas são as de Neumann, Dirichlet e mistas. Esta última sendo uma combinação das outras duas.

No modelo de difusão usa-se normalmente a condição de

contorno mixta que tomará a seguinte forma geral

$$d\nabla\phi_g(R,t) + \phi_g(R,t) = 0 \quad (\text{II.2.18})$$

onde R denota a fronteira exterior e d a distância extrapolada média.

Nas interfaces internas a continuidade da densidade de precursores, fluxo e corrente de nêutrons têm que ser asseguradas.

$$\begin{aligned} C_m(\vec{r}_+, t) &= C_m(\vec{r}_-, t) \\ \phi_g(\vec{r}_+, t) &= \phi_g(\vec{r}_-, t) \end{aligned} \quad (\text{II.2.19})$$

$$D_g^n(\vec{r}_+, t) \nabla^n \phi_g(\vec{r}_+, t) = D_g^n(\vec{r}_-, t) \nabla^n \phi_g(\vec{r}_-, t)$$

Para referenciar o momento do início dos processos, temos condições iniciais da forma

$$\phi_g(\vec{r}, 0) = g_g(\vec{r}) \quad (\text{II.2.20})$$

$$C_m(\vec{r}, 0) = h_m(\vec{r})$$

Deve-se acrescentar ainda, que as funções anteriores deverão ser contínuas, positivas e finitas.

Definido e equacionado o problema devemos, em seguida, buscar uma solução para o mesmo. Não trataremos, aqui, de métodos numéricos fartamente encontrados na literatura /2,4 /, mas sim de uma solução analítica que fará uso do conceito de autofunções. Este

método potente e elegante, aplica-se, de maneira "ad-hoc", à física de reatores através do conceito de importância neutrônica.

Na forma em que o sistema (II.2.17) se encontra este método não se aplica. Isto se deve ao fato de tais equações não geram um sistema completo de autofunções que propiciaria a representação de quaisquer função do conjunto solução de (II.2.17) em termos das mesmas.

Afortunadamente o conceito de importância retroindicado, subsequentemente introduzido, produzirá um sistema de equações adjunto ao (II.2.17) que nos proporcionará um conjunto de autofunções biortogonais suficiente para a representação de qualquer função solução do sistema como anteriormente mencionado.

III - IMPORTÂNCIA NEUTRÔNICA

O comportamento espaço-temporal de um reator, na aproximação da difusão, é normalmente descrito pelo sistema compacto de equações (II.2.17), em termos dos campos escalares, $\Phi(\vec{r}, t)$ e $C(\vec{r}, t)$, que aqui chamaremos de campos diretos ou entrópicos, por apresentarem um sentido direto de causalidade em oposição aos campos importância ou adjuntos. As variáveis, tempo e energia (esta discretizada na aproximação da difusão multigrupo), conferem ao reator duas assimetrias peculiares. A assimetria associada ao tempo é intrínseca a todo sistema difusor não conservativo e é devida à entropização do mesmo, na busca inexorável de estados equiprováveis. A assimetria associada à energia é própria dos reatores nucleares na descrição multigrupo e pode ser interpretada em termos da importância neutrônica.

No seu processo de alentecimento* o nêutron, gradualmente, aumenta a sua efetividade ao processo de fissão, adquirindo eficiência máxima no grupo térmico. Na absorção de um nêutron térmico poderá haver a produção de dois ou mais nêutrons rápidos. Como não há razão alguma para se supor que a probabilidade de produção de um nêutron rápido, por nêutrons térmicos, seja a mesma que a do alentecimento de um nêutron rápido até energias do grupo térmico, fica aqui caracterizada esta segunda assimetria.

Estas assimetrias podem, de maneira ad hoc ser eliminadas na física de reatores, através do uso do conceito de importância neutrônica como sugerido anteriormente.

Aqui, ao invés da abordagem formal convencional, em que um conjunto de equações adjunto ao sistema (IL2.17) é obtido e em seguida, os campos escalares a elas associados identificados com a importância, após interpretação física, preferimos o procedimento de conceituar e definir a importância à luz de conceitos físicos fundamentais pertinentes e, a seguir, deduzir as equações, através de um balanço de probabilidades localizadas segundo o ponto de vista descritivo de Euler.

A importância nos proporciona, além de resultados físicos que caracterizam um processo de medição, um acurado e potente método para análise do comportamento cinético do reator, quando perturbações localizadas são introduzidas nos parâmetros do mesmo.

(*) Os textos que tratam da física de reatores, em português, usam a palavra moderação para designar a moderação propriamente dita, termalização e difusão.

Suponhamos que em dado momento, digamos t_f , introduzimos uma série de detectores no reator. A resposta destes medidores será a característica observável no tempo t_f , que dependerá do tipo de medidor escolhido e dos propósitos da medição e denotará a contribuição de um dos membros da população ativa do sistema à leitura em t_f .

Estes medidores poderão ter uma distribuição arbitrária, mas com saídas superpostas para produzir uma leitura única (devido à linearidade do sistema esta é uma asserção inteiramente plausível). A esta distribuição identificaremos um campo escalar, simbolicamente representado por $\phi^*(\vec{r}, t)$ ou $C^*(\vec{r}, t)$ que denotará a importância de nêutrons ou precursores conforme o caso. Aqui, as variáveis independentes são espaço e tempo que compõem explicitamente e energia, implicitamente. Em última análise, estas variáveis são determinadas pelo processo de medição escolhido.

Enquanto os campos entrópicos, $\phi(\vec{r}, t)$ e $C(\vec{r}, t)$, descrevem a distribuição dos nêutrons e precursores no sistema devido a condições associadas ao passado, os campos adjuntos, $\phi^*(\vec{r}, t)$ e $C^*(\vec{r}, t)$, descrevem a contribuição de cada membro ativo da população a um evento detectável no futuro. Temos uma condição inicial arbitrária associada aos campos entrópicos, mas uma condição final arbitrária para os campos adjuntos. Somente uma combinação escalar adequada destes campos propiciará uma descrição ou representação do reator em termos de causa (nêutrons) e efeito (importância).

A importância é uma quantidade que se conserva por

descrever processos associados a entidades físicas (nêutrons e precursores) que são estaticamente idênticas (os princípios conservativos são estáticos), a menos das suas características cinético-dinâmicas (quantidade de movimento), que não é invariante quando o nêutron se difunde, devido às interações com o meio. Como o nêutron toma contato com gerações futuras através de sua progênie, quanto mais recuado no tempo, maior a importância do mesmo. Isto confere à importância associada a cada nêutron um caráter decrescente no tempo e a equação que a governa um caráter reverso no tempo.

IV - DESENVOLVIMENTO DA LEI DE FICK EM ALTAS ORDENS PARA A DENSIDADE DE CORRENTE DE IMPORTÂNCIA

No modelo de difusão a dependência direcional do fluxo e importância não é explicitamente introduzida como acontece no modelo de transporte de Boltzmann. Devido a isto o termo que descreve o transporte, aqui, é representado por uma corrente líquida média de probabilidades que flui no sentido entrópico para os eventos relacionados aos nêutrons e no sentido antientrópico para eventos associados à importância dos mesmos.

Consideremos um meio difusor de nêutrons no estado estacionário. Tomemos um elemento arbitrário de volume, dv , identificado pelo vetor posicional \vec{r} , com seção macroscópica de espalhamento (difusão) Σ_s . Os nêutrons, inicialmente em dv , difundirão centrífuga e isotropicamente, em todas as direções. Para descrever este processo de difusão e transporte introduzimos, anteriormente, o conceito de densidade de corrente de nêutrons que é consequência da tendência entropico-maximizadora inerente aos sistemas difusores.

Em sentido inverso e na mesma proporção está o aporte de importância, ao elemento de volume dv , em consequência do princípio de conservação da importância. Ao afluxo unitário de nêutrons de dv , corresponderá, em contrapartida, um aporte unitário de importância. Desta forma um gradiente de concentração de nêutrons potencializará o aparecimento de um gradiente de importância em sentido contrário.

Para descrição matemática deste fenômeno vamos introduzir a definição de corrente de importância que simbolicamente denotaremos por $\vec{J}^*(\vec{r}, t)$. É uma corrente média de probabilidades por unidade de fluxo, obtida como um máximo entre todas as orientações possíveis de aporte de importância a dV . Matematicamente,

$$\vec{J}^*(\vec{r}, t) = \int_{\Omega} \phi^*(\vec{r}, t) (-\vec{\Omega}) d\Omega$$

sendo $\phi^*(\vec{r}, t)$ a importância associada a cada nêutron, na posição \vec{r} , no tempo t .

Reportemos à figura geométrica seguinte, em tudo semelhante à figura (I.1), apenas com a inversão do sentido do vetor unitário \vec{n} .

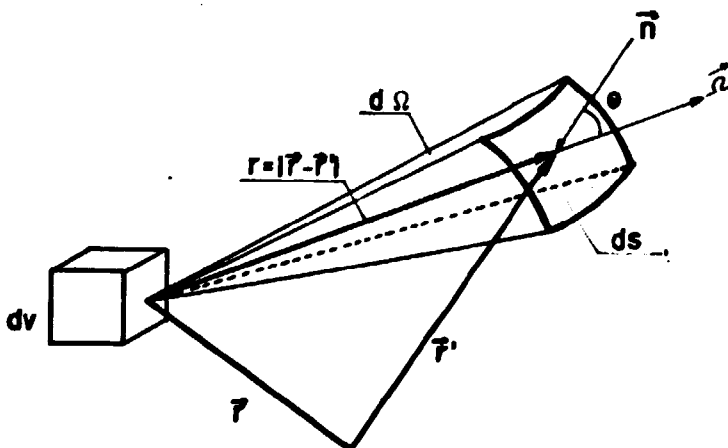


Figura 2

Os nêutrons, inicialmente em dv , num meio difusor infinito, isotrópico e entrópico difundirão centrífuga e isotropicamente em todas as direções. No lapso δt , estes nêutrons estarão as sociados a outras regiões do sistema, pois, em consequência da entropia inerente aos sistemas difusores, a tendência é a eliminação de excessos e deficiências localizadas. Isto acarretará o que chamamos, anteriormente, corrente de nêutrons. Em consequência deste transporte de nêutrons potencializado pelos gradientes de concentrações dos mesmos e da conservação da importância, aparecerá um outro gradiente, não físico, oposto.

Este gradiente está relacionado à efetividade dos nêutrons em interagir com detetores neutrônicos, ou seja, à importância neutrônica. Como esta é uma quantidade que se conserva, haverá um afluxo de importância ao elemento de volume dv na mesma razão em que os nêutrons escapam do mesmo. Desta forma teremos uma corrente de importância por unidade de fluxo em torno de \vec{r} , no tempo t .

A probabilidade de que um nêutron em torno de \vec{r} possa alcançar \vec{r}' , sem sofrer um processo de difusão ou absorção, é dado pela probabilidade de transmissão exponencial

$$e^{-\Sigma|\vec{r}-\vec{r}'|} = e^{-\Sigma r} \quad (\text{IV.1})$$

onde $\Sigma = \Sigma_a + \Sigma_s$

E, a probabilidade de que este nêutron interaja com o meio através de um processo de difusão, na distância elementar, dr , após o trajeto $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$ é dada por

$$\Sigma_s dr \quad (IV.2)$$

Σ_s é a seção macroscópica de difusão.

Enquanto a probabilidade associada ao elemento de ângulo sólido $d\hat{\Omega}$ e à direção do unitário $(-\vec{n})$ será

$$\frac{(-\vec{n}) \cdot \vec{\Omega} d\Omega}{4\pi} = - \frac{\cos\theta}{4\pi} d\Omega \quad (IV.3)$$

Combinando as probabilidades anteriores como produtos de vido à natureza dos eventos envolvidos, tomando a importância por partícula na posição \vec{r} , como $\phi^*(\vec{r})$, e estendendo a todo o sistema através de integração em coordenadas esféricas, teremos

$$\vec{J}^*(\vec{r}, t) = - \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \phi^*(\vec{r}, t) e^{-\Sigma r} \cos\theta \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (IV.4)$$

Observando a expressão (IV.4), notamos a identidade formal entre ela e a expressão (I.5), a menos do sinal. O sinal negativo na corrente de importância aparece devido a inversão em relação a corrente física de nêutrons. Desta forma, usando os resultados anteriormente obtidos, quando da dedução da corrente de nêutrons, teremos

$$J^* = \sum_{n=1}^N \frac{\Sigma_s}{(n+2) \Sigma^{n+1}} \nabla^n \phi^*(\vec{r}) \text{ com } n \text{ ímpar} \quad (IV.5)$$

Tomando-se apenas o primeiro termo de (IV.5), ou seja, fazendo-se $n = 1$, obtemos a expressão convencional da Lei de Fick

para a corrente de importância

$$J^* = \frac{\Sigma_s}{3 \Sigma^2} \nabla \phi^* \quad (\text{IV.6})$$

Como o nêutron só produzirá importância onde houver sistema físico qualitativamente suficiente, as condições de contorno de $\vec{J}(\vec{r}, t)$ e $\vec{J}^*(\vec{r}, t)$ serão idênticas. A superfície extrapolada será, portanto, comum a ambas.

V - EQUAÇÕES DOS CAMPOS IMPORTÂNCIA DO REATOR

A parte formal do procedimento dedutivo das equações adjuntas é o mesmo desenvolvido quando da obtenção das equações dos campos entrôpicos, fluxos de nêutrons e densidade de precursores, apresentadas anteriormente.

Seguindo o método de abordagem onde supomos a interação localizada de nêutrons e núcleos no espaço de fase e escrevendo as alterações que se processam no mesmo, pela contabilidade dos processos, através do princípio de conservação das entidades envolvidas, obteremos, na passagem ao limite, as relações entre as diversas grandezas relevantes.

A principal vantagem da introdução das equações adjuntas decorre do fato de elas permitirem o tratamento variacional do reator bem como produzirem um sistema biortogonal de autofunções suficiente para representar qualquer função do mesmo em termo delas, além de nos permitir descrever o sistema por uma caracterís-

tica observável, pois agora, o sistema será tratado através de um funcional bilinear da importância e fluxo neutrônicos.

V.1 - EQUAÇÃO QUE GOVERNA A IMPORTÂNCIA NEUTRÔNICA

Como largamente frisado em toda extensão deste trabalho, o modelo de difusão emerge do balanço local de probabilidades em um elemento fixo arbitrário de volume do reator. Tomemos este elemento fixo arbitrário de volume no espaço de fase. Em seguida escreveremos as alterações de importância nele efetuadas no lapso δt . No transcurso deste lapso de tempo poderá ocorrer um dos seguintes eventos revelantes, para o reator de fissão, no elemento de volume $d\vec{x}$. (1) o nêutron através do processo de difusão e sucessivas colisões com o meio poderá escapar de $d\vec{x}$; (2) poderá ser absorvido e provocar fissão, ou simplesmente ser capturado, não mais contribuindo à reação em cadeia; (3) se provocar fissão, alguns produtos dela, instáveis, por possuírem em seu núcleo, nêutrons em excesso, produzirão nêutrons com um certo retardo de tempo, em relação àqueles diretamente produzidos em fissão. Estes fragmentos emisso-

res de nêutrons são denominados precursores de nêutrons.

A cada evento envolvendo o nêutron no espaço de fase está associada uma probabilidade. Estes eventos são altamente dependentes da energia e portanto das alterações cinético-dinâmicas ocorrida devido à mudanças no estado de movimento dos nêutrons nos seus processos de alentecimento e difusão. Dado que estas alterações não são instantâneas, decorre que a importância é uma variável do espaço de fase e tempo.

Fixando-se o elemento de volume $d\vec{x}$, em torno da posição \vec{x} e escrevendo o balanço de processos ocorridos em $d\vec{x}$, no lapso δt , determinaremos as variações temporais da importância no espaço de fase. Literalmente, podemos escrever a seguinte equação

$$\begin{array}{rclcl}
 \text{importância em} & & \text{importância} & & \text{produção de} & & \text{produção de} & & \\
 d\vec{x} \text{ no tempo} & = & \text{que existia} & + & \text{importância} & + & \text{importância} & & \\
 t + \delta t & & \text{em } d\vec{x} \text{ no} & & \text{em } d\vec{x} \text{ no} & & \text{em } d\vec{x} \text{ no} & & (V.1.1) \\
 & & \text{tempo } t & & \text{lapso } \delta t \text{ de} & & \text{lapso } \delta t & & \\
 & & & & \text{vido aos neu-} & & \text{aos precur-} & & \\
 & & & & \text{trons prontos} & & \text{sores} & &
 \end{array}$$

Para obter uma equação matemática temos que substituir a expressão literal por símbolos apropriados. Na passagem do finito ao infinitamente pequeno através do processo de limite, teremos, puntualmente, a razão de alteração entre as grandezas relevantes na forma de uma equação diferencial. A conexão entre acontecimentos espacial e temporalmente distanciados será levada a termo pelo processo de integração ou aproximação em termos de diferenças finitas. Identificando a cada termo literal da expressão um símbolo apro-

priado, teremos

$$\begin{aligned} \phi^*(x, t + \delta t) dx &= \phi^*(x, t) dx + H(x, t) \phi^*(x, t) dx \delta t + & (V.1.2) \\ &+ L(x, t) C^*(x, t) dx \delta t \end{aligned}$$

onde $\phi^*(\vec{x}, t)$ é a importância por nêutron no espaço de fase no tempo t ;

$C^*(\vec{r}, t)$ é a importância por precursor no espaço de fase no tempo t ;

$H(\vec{x}, t)$ e $L(\vec{x}, t)$ representam, respectivamente, a taxa de variação de importância devido aos processos ocorridos com nêutrons e precursores em $d\vec{x}$ no lapso δt .

Dividindo, ambos os membros de (V.1.2) por $d\vec{x} \delta t$, transpondo e tomando o limite com $\delta t \rightarrow 0$ — tendendo a zero, ficamos com

$$\begin{aligned} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\phi^*(\vec{x}, t + \delta t) - \phi^*(x, t)}{\delta t} &= \frac{\partial \phi^*(\vec{x}, t)}{\partial t} = H(\vec{x}, t) \phi^*(\vec{x}, t) + & (V.1.3) \\ &+ L(\vec{x}, t) C^*(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Para determinarmos a forma e os elementos de $H(\vec{x}, t)$ e $L(\vec{x}, t)$ o procedimento, ainda que semelhante, não será o mesmo adotado quando da dedução das equações de campos entrópicos. Isto se deve ao fato de a função adjunta, diferentemente do fluxo, não mudar de forma com uma mudança de variável. Se $\phi^*(v_0)$ é o efeito de um nêutron de velocidade v_0 , teremos a mesma efetividade para $\phi^*(E_0)$ ou $\phi^*(u_0)$. Desta forma temos que $\phi^*(v_0) \equiv \phi^*(E_0) \equiv \phi^*(U_0)$.

Em razão disto teremos que introduzir a discretização apenas em energia pois $\phi^*(\vec{x}, t) \equiv \phi^*(\vec{r}, t)$ e $C^*(\vec{x}, t) \equiv C^*(\vec{r}, t)$. Então

$$\frac{\partial \phi^*(\vec{r}, t)}{\partial t} = H(\vec{r}, t) f^*(E) \phi^*(\vec{r}, t) + L(\vec{r}, t) f^*(E) C^*(\vec{r}, t) \quad (V.1.4)$$

ou premultiplicando-se (VII.4) por $f^*(E)^{-1}$, temos

$$f^*(E)^{-1} \frac{\partial \phi^*(\vec{r}, t)}{\partial t} = H(\vec{r}, t) \phi^*(\vec{r}, t) + L(\vec{r}, t) C^*(\vec{r}, t) \quad (V.1.5)$$

Escrevendo a equação (V.1.1) para um grupo genérico, g , resulta a seguinte expressão que é obtida, *mutatis mutandis*, de maneira análoga à expressão multigrupo dos campos diretos

$$-\frac{1}{vg} \frac{\partial \phi_g^*(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot D_g^n \nabla^n \phi_g^*(\vec{r}, t) - \Sigma_g^t \phi_g^*(\vec{r}, t) + \sum_{h=1}^{g-1} \sum_{h \neq g}^s \phi_h^*(\vec{r}, t) + \quad (V.1.6)$$

$$+ (1-\beta)vg \sum_g^f \sum_{h=1}^N \chi_h^D \phi_h^*(\vec{r}, t) + vg \sum_g^f \sum_{m=1}^M \beta_m C_m^*(\vec{r}, t)$$

Esta expressão poderá ser escrita em forma compacta definindo as seguintes matrizes e vetores

$$A = \begin{bmatrix} \nabla \cdot D_1^n - \Sigma_1^t & \Sigma_{1 \rightarrow 2}^s & \dots & \Sigma_{1 \rightarrow N}^s \\ & \nabla \cdot D_2^n \nabla^n - \Sigma_2^t & \dots & \Sigma_{2 \rightarrow N}^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bigcirc & & & \nabla \cdot D_N^n \nabla^n - \Sigma_N^t \end{bmatrix} \quad (N \times N) \quad (V.1.7)$$

$$F^* = \begin{bmatrix} v_1 \Sigma_1^f & & & \bigcirc \\ & v_g \Sigma_g^f & & \\ & & & \\ \bigcirc & & & v_N \Sigma_N^f \end{bmatrix} (N \times N) \quad (V.1.8)$$

$$\chi_p^* = \begin{bmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \dots & \chi_N \\ \chi_1 & \chi_2 & \dots & \chi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \chi_1 & \chi_2 & \dots & \chi_N \end{bmatrix} (N \times N) \quad (V.1.9)$$

$$\beta^* = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_N \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_N \end{bmatrix} (N \times M) \quad (V.1.10)$$

$$\phi^* = \begin{bmatrix} \phi_1^* \\ \phi_2^* \\ \vdots \\ \phi_N^* \end{bmatrix} \quad (V.1.11)$$

$$C^* = \begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ \vdots \\ C_N^* \end{bmatrix} \quad (V.1.12)$$

$$-v^{-1} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} = [A^* + (1-\beta) \chi_p^* F^*] \phi^* + \beta^* F^* C^* \quad (V.1.13)$$

Comparando (V.1.13) com (V.1.5) resulta

$$f^*(E) = -V$$

$$H = A^* + (1-\beta)\chi_p^* F^* = M^*$$

$$L = \Lambda^* F^* = P^*$$

E a expressão (V.1.13) ficará determinada na seguinte forma

$$-V^{-1} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} = M^* \phi^* + P^* C^* \quad (V.1.14)$$

O sinal negativo na derivada temporal indica que a importância por partícula é decrescente no tempo.

É consequência da conservação da importância total e da redução da importância por partícula com o tempo. A descrição do reator por um funcional bilinear do fluxo e importância, obtida como uma combinação escalar destas, produzirá um sistema conservativo, estacionário, pois este procedimento eliminará a assimetria associada à variável tempo, inerente aos sistemas difusores não conservativos. Isto propiciará o tratamento matemático do reator através do potente e elegante método do cálculo das variações.

V.2 - EQUAÇÃO DA IMPORTÂNCIA DOS PRECURSORES

Os precursores de nêutrons atrasados ou diferidos são, como anteriormente dito, produtos de fissão instáveis, com excesso de nêutrons em seu núcleo e, de cuja estabilidade, alcançada por decaimento, resulta a emissão de nêutrons. Cada precursor é caracterizado pela sua constante de decaimento, λ_m . Como os precursores contribuem para a reação em cadeia, a cada um está associada determinada probabilidade de produzir importância no reator. Tomando o elemento de volume $d\vec{x}$ do espaço de fase, verificamos que, em relação aos precursores, nele poderá ocorrer: (1) produção de precursores em fissão; (2) decaimento de precursores com conseqüente produção de nêutrons.

A cada processo está relacionada certa contribuição à reação em cadeia. Literalmente, a equação de conservação da importância para precursores em $d\vec{x}$, virá como

importância dos precursores em \vec{x} no tempo $t + \delta t$ = importância dos precursores em \vec{x} no tempo t + variação de importância em $d\vec{x}$ no lapso δt devido à produção de precursores + variação de importância em $d\vec{x}$ no lapso δt devido ao decaimento dos precursores

(V.2.1)

Simbolicamente podemos representá-la da seguinte maneira

$$C^*(\vec{x}, t + \delta t) d\vec{x} = C^*(\vec{x}, t) d\vec{x} + J(\vec{x}, t) \phi^*(\vec{x}, t) d\vec{x} \delta t + K(\vec{x}, t) C^*(\vec{x}, t) d\vec{x} \delta t \quad (\text{V.2.2})$$

onde $C^*(\vec{x}, t)$ importância por precursor no espaço de fase no tempo t ;
 $\phi^*(\vec{x}, t)$ importância por nêutron no espaço de fase no tempo t ;
 $J(\vec{x}, t)$ e $K(\vec{x}, t)$ são, respectivamente, taxa de variação de importância em $d\vec{x}$ devido à produção de precursores e desaparecimento dos mesmos

Dividindo-se ambos os membros de (V.2.2) por $d\vec{x} \delta t$, transpondo e tomando o limite quando δt tende a zero, teremos

$$\frac{\partial C^*(\vec{x}, t)}{\partial t} = J(\vec{x}, t) \phi^*(\vec{x}, t) + K(\vec{x}, t) C^*(\vec{x}, t) \quad (\text{V.2.3})$$

introduzindo o fator discretizante $g(\lambda)$,

$$\frac{\partial C^*(\vec{r}, t)}{\partial t} = J(\vec{r}, t)g(\lambda) \phi^*(\vec{r}, t) + K(\vec{r}, t)g(\lambda)C^*(\vec{r}, t) \quad (V.2.4)$$

Escrevendo a equação (V.2.1) para a espécie m ter-

MOS

$$-\frac{\partial C_m^*(\vec{r}, t)}{\partial t} = \lambda_m \sum_{n=1}^N X_n^d \phi_n^*(r, t) - \lambda_m C_m^*(\vec{r}, t) \quad (V.2.5)$$

Esta equação, após desenvolver o somatório e definir as seguintes matrizes

$$\Lambda^* = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \bigcirc \\ & & & \\ & & \lambda_m & \\ & & & \\ \bigcirc & & & \\ & & & \\ & & & \lambda_M \end{bmatrix} \quad (V.2.6)$$

$$X_d^* = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_M \\ X_1 & X_2 & \dots & X_M \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_1 & X_2 & \dots & X_M \end{bmatrix} \quad (V.2.7)$$

tomará a seguinte forma

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} = \Lambda^* X_d^* \phi^* - \Lambda^* C^* \quad (V.2.8)$$

Comparando (V.2.8) com (V.2.4) determinamos

$$g(\lambda) = \Lambda^* \quad e \quad K(\vec{r}, t) = -I \quad (V.2.9)$$

$$J(\vec{r}, t) = \Lambda^* \chi_d^* = N^* \quad (\text{V.2.10})$$

$$Q^* = -\Lambda^* \quad (\text{V.2.11})$$

Desta forma (V.2.4) se transformará na seguinte equação

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} = N^* \phi^* + Q^* C^* \quad (\text{V.2.12})$$

O sistema adjunto de equação será

$$-V^{-1} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} = M^* \phi^* + P^* C^* \quad (\text{V.2.13})$$

$$-\frac{\partial C^*}{\partial t} = N^* \phi^* + Q^* C^*$$

onde todos os operadores e vetores já foram determinados.

O sistema (V.2.13) poderá, ainda, ser escrito na seguinte forma super compacta

$$-T \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = B^* \psi^* \quad (\text{V.2.14})$$

Definindo as seguintes supermatrizes

$$B^* = \begin{bmatrix} M^* & P^* \\ N^* & Q^* \end{bmatrix} \quad (\text{V.2.15})$$

$$T = \begin{bmatrix} V^{-1} & \text{O} \\ \text{O} & I \end{bmatrix} \quad (\text{V.2.16})$$

$$\psi^* = \begin{bmatrix} \phi^* \\ C^* \end{bmatrix} \quad (\text{V.2.17})$$

A supermatriz T não leva os asteriscos devido ao fato de a transposta de uma matriz diagonal ser idêntica a ela mesma. A matriz identidade, $I(M \times M)$, mais uma vez foi usada apenas para composição de supermatriz T . Sendo identidade, a matriz I terá apenas um caráter operacional, não afetando os valores numéricos.

Observemos que cada matriz do sistema adjunto é a transposta da matriz homóloga do sistema entrópico. Esta transposição é a responsável pela eliminação da assimetria em energia que aparece na descrição da difusão multigrupo do reator.

Sendo a equação (V.2.12) formalmente idêntica à (II.2.17) teremos condições de contorno também idênticas em forma, ou seja,

$$dV \phi_g^*(R, t) + \phi_g^*(R, t) = 0 \quad (\text{V.2.18})$$

onde R e d denotam, como antes, a fronteira exterior e distância extrapolada média para a importância neutrônica. A continuidade nas interfaces internas será assegurada pelas seguintes expressões

$$C_m^*(\vec{r}_+, t) = C_m^*(\vec{r}_-, t) \quad (\text{V.2.19})$$

$$\phi_g^*(\vec{r}_+, t) = \phi_g^*(\vec{r}_-, t) \quad (\text{V.2.20})$$

$$D_g^n(\vec{r}_+, t) \nabla^n \phi_g^*(\vec{r}_+, t) = D_g^n(\vec{r}_-, t) \nabla^n \phi_g^*(\vec{r}_-, t) \quad (\text{V.2.21})$$

Os campos diretos por apresentarem um sentido normal de causalidade, têm condições iniciais arbitrárias associadas; os campos ajuntos apresentam um comportamento reverso no tempo e, portanto a eles, associaremos condições finais arbitrárias da forma

$$\phi_g^*(\vec{r}, tf) = g_g(\vec{r}) \quad (\text{V.2.22})$$

$$C_m^*(\vec{r}, tf) = h_m(\vec{r}) \quad (\text{V.2.23})$$

Acrescenta-se ainda que as funções adjuntas, a exemplo das funções diretas, devem ser de classe C^n em R^3 , positivas e finitas em seu domínio de definição.

Neste ponto o sistema está totalmente caracterizado matematicamente, pelo seguinte conjunto de equações e suas condições iniciais e de contorno

$$\begin{aligned} T \frac{\partial \psi}{\partial t} &= B\psi + S \\ -T \frac{\partial \psi^*}{\partial t} &= B^* \psi^* \end{aligned} \quad (\text{V.2.24})$$

que são equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem nas variáveis $\psi(\vec{r}, t)$ e $\psi^*(\vec{r}, t)$.

VI - COMPORTAMENTO DO REATOR

A característica central dos sistemas difusores homogêneos contínuos não conservativos é a sua tendência de comportamento globalmente uniforme. Fisicamente isto se deve ao fato de tais sistemas serem inerentemente geradores de entropia; matematicamente, pela severidade das condições de contorno usuais impostas, que forçam a distribuição a zero, nas superfícies externas, tendendo a dominar qualquer variação interna, local, com o tempo. O reator nuclear é um dispositivo cujo comportamento físico o coloca nesta classe geral de sistemas físicos. Sistemas com tais características apresentam uma quintessência matemática devido à inerente linearidade associada aos mesmos.

Os sistemas lineares evoluem no tempo de forma que condições iniciais arbitrárias a eles impressas, rapidamente desaparecem a não ser pela magnitude do seu estado inicial. Isto se deve princi-

palmente ao forte acoplamento entre as partes do sistema, permitindo que as entidades móveis prontamente respondam aos gradientes que potencializam o transporte, no sentido da equalização das concentrações, diminuindo os excessos e deficiências localizadas. Após a perturbação ser distribuída a todo o sistema, teremos uma distribuição estacionária persistente na qual o sistema permanecerá até que novamente seja desequilibrado. Desta forma o comportamento de um sistema linear e, portanto do reator, poderá ser representado em termos matemáticos pela superposição de uma resposta transiente, durante a qual qualquer perturbação localizada está distribuindo-se pelo sistema, mais uma resposta persistente na qual o sistema funcionará numa condição estável. Tal superposição é válida tanto para a distribuição dos nêutrons (fluxo) como para a contribuição (importância) dos mesmos a determinado processo.

Uma fonte independente de nêutrons terá tão somente o efeito de distorcer a forma natural da distribuição neutrônica, em razão desta não ser uniforme. Contudo, não modificando as características do sistema, a sua linearidade será preservada e a distribuição persistente continuará independentes das condições iniciais.

Diversamente, os sistemas não lineares comportam anormalmente, com respeito a condições iniciais a eles impostas, em razão do acoplamento, influência mútua dos parâmetros do mesmo no decorrer do processo. Como exemplo, citemos o caso dos reatores de coeficiente de temperatura positivo.

As autofunções de um reator não uniformemente perturbado não são as mesmas do reator original. Matematicamente isto se deve ao fato de que, após a perturbação, o reator é fundamentalmen

te um outro sistema. Seja pelas equações diferenciais, seja pelas condições de contorno, ou ambas. Além do mais, as autofunções do novo sistema, apesar de ortogonais entre si, não o são em relação às autofunções do sistema não perturbado. Essas asserções vêm de considerações concernentes ao reator na sua abordagem da teoria da difusão em um grupo apenas. Contudo no tratamento multigrupo as autofunções nunca são ortogonais entre si, seja no reator crítico ou no reator perturbado. No entanto a descrição do reator através de dois campos escalares propiciará, como frisado anteriormente, a geração de um conjunto biortogonal de autofunções, tornando o sistema representável por uma superposição de tais autofunções.

Os autovalores correspondentes às autofunções geradas pelos sistemas entrópico e adjunto são iguais em módulo e de sinais contrário.

Para vermos isto vamos introduzir, neste trabalho, a seguinte demonstração matemática.

Tomemos as equações dos campos entrópicos (livre de fonte independente de nêutrons) e dos campos adjuntos

$$T \frac{\partial \psi}{\partial t} = B \psi \quad (\text{VI.1})$$

$$-T \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = B^* \psi^* \quad (\text{VI.2})$$

multiplicando (VI.1) por ψ^* , (VI.2) por ψ , subtraindo a segunda da primeira e integrando em todo o volume do reator, resulta

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\psi^* T \psi) \right\rangle = \langle \psi^* B \psi \rangle - \langle \psi B^* \psi^* \rangle \quad (+) \quad (\text{VI.3})$$

Em virtude da comutabilidade dos operadores B e B*, o segundo membro é nulo.

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\psi^* T \psi) \right\rangle = 0 \quad (\text{VI.4})$$

Este resultado mostra-nos, em termos matemáticos, que a combinação escalar de ψ^* e ψ produz um sistema estacionário apropriado ao tratamento variacional.

Desenvolvendo a expressão (VI.4) e considerando que estamos integrando sobre um elemento de volume arbitrário, temos

$$\frac{1}{\psi^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = - \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (\text{VI.5})$$

Nos sistemas lineares, a separação de variável produz exatamente estas expressões que são identificados com os autovalores do sistema

$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega \quad (\text{VI.6})$$

$$\frac{1}{\psi^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\omega^* \quad (\text{VI.7})$$

(+) \langle, \rangle esta notação indica uma integração sobre variáveis contínuas e somatório sobre variáveis discretas.

de onde concluímos, formalmente, que os autovalores dos campos entrópico e adjuntos são iguais em módulo e de sinais contrários.

Este resultado emerge naturalmente em consequência da conservação da importância cuja expressão matemática é dada pela equação (VI.4). Para melhor entendermos o significado da expressão (VI.4) reescrevamo-la na seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \langle (\Psi^* T \Psi) \rangle = 0 \quad (\text{VI.8})$$

Observamos imediatamente que a integral representa a importância total do reator. Portanto a equação (VI.4) obtida nesta seção expressa o princípio de conservação da importância.

VII - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES ENTRÓPICAS E ADJUNTAS

Tomemos novamente as equações

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = B\psi \quad \text{e} \quad -T \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = B^*\psi^*$$

A natureza das soluções destas equações é determinada pelas propriedades das matrizes B e B^* .

Estas matrizes devem ser essencialmente não negativas e irredutíveis para que possuam uma única autofunção estritamente positiva, φ ou φ^* , com um único e simples autovalor real, ω ou ω^* , respectivamente para B e B^* . A parte real destes autovalores é maior que a parte real de quaisquer outros autovalores. Além do mais, ω ou ω^* cresce quando qualquer um dos elementos da matriz cresce.

Se cada região elementar do reator contém elementos f_i

seis e se, em cada grupo de energia nêutrons podem ser introduzidos por fissão, difusão e decaimento de precursores, então B é irreduzível. Por representar a probabilidade de produção líquida de nêutrons em determinada posição e instante, esta matriz será essencialmente não negativa. Como a matriz transporta, B*, que representa a probabilidade de produção líquida de importância em todo o reator, tem a mesma natureza que a matriz, B, ela terá também o mesmo espectro de autovalores como demonstrado anteriormente.

Conforme Varga e Martino /15/ estas soluções são as seguintes

$$\psi(t) = \frac{\langle \varphi^* \psi(0) \rangle}{\langle \varphi^* \varphi \rangle} e^{\omega t} \varphi + \vartheta e^{\acute{\omega} t} \quad (\text{VII.1})$$

$$\psi^*(t) = \frac{\langle \varphi \psi^*(0) \rangle}{\langle \varphi \varphi^* \rangle} e^{-\omega t} \varphi^* + \vartheta e^{-\acute{\omega} t} \quad (\text{VII.2})$$

onde $\psi(0)$ e $\psi^*(0)$ são vetores coluna não negativos de B e B*, respectivamente;
 φ e φ^* são as únicas autofunções positivas de B e B*, respectivamente.

Acrescente-se ainda o seguinte resultado /6/,

$$\omega \in \text{Re}(\acute{\omega}) \quad (\text{VII.3})$$

VIII - FORMULAÇÃO PERTURBATIVA DA EXPRESSÃO DA REATIVIDADE

Tomemos a equação que representa o comportamento entrópico do reator na sua forma dependente do tempo, livre de fonte externa de nêutrons

$$\tau \frac{\partial \psi}{\partial t} = B\psi \quad (\text{VIII.1})$$

e reescrevamos a matriz do operador B, como a soma das matrizes A, que responde pelos eventos que descrevem o que acontecem aos nêutrons, após os mesmos serem gerados em fissão e, a matriz XF, que representa a produção total de nêutrons, em determinada região do reator em um instante qualquer. Este procedimento deixa a equação anterior na seguinte forma

$$\tau \frac{\partial \psi}{\partial t} = (A + XF)\psi \quad (\text{VIII.2})$$

Se, no sistema descrito pela equação acima, a produção de nêutrons, em cada instante, superar (for menor) que o desaparecimento dos mesmos, a evolução temporal será divergente (convergente). Se a produção e o desaparecimento forem iguais, o reator estará no seu estado crítico.

Matematicamente pode conseguir-se com que o reator se faça crítico, introduzindo, na matriz produtora de nêutrons, um fator que conduza o sistema a uma situação artificial de criticalidade. Nestas circunstâncias teremos um reator crítico virtual associado ao reator real, representado pela seguinte equação

$$A_0 \psi_0 + \frac{\chi F_0}{\lambda_0} \psi_0 = B_0 \psi_0 \quad (\text{VIII.3})$$

onde os subíndices zero indicam o estado crítico do reator.

Suponhamos, agora, introduzida, no sistema crítico, uma perturbação. Tal perturbação poderá afetar um, alguns ou todos os parâmetros do operador podendo, inclusive, ser função da posição. Em geral, tal perturbação muda o estado crítico do sistema. Seja na magnitude do autovalor que responde pelo nível de potência, seja na forma da autofunção correspondente. Devido à linearidade do nosso sistema, podemos representar tais perturbações em forma desacoplada. Assim a perturbação introduzida poderá atuar na forma do fluxo, função das coordenadas, e no autovalor, λ , que tem tão somente o efeito de ampliar ou reduzir o nível de potência do sistema, reconduzindo-o a um novo estado crítico, em geral, diverso do inicial. A equação do sistema perturbado será

$$(B_0 + \delta B + \delta B_\lambda) \psi = 0 \quad (\text{VIII.4})$$

onde

$$\delta B = \delta A + \chi \delta F \quad (\text{VIII.5})$$

$$\delta B_\lambda = \delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) \chi F \quad (\text{VIII.6})$$

Tomando a equação da importância na forma independente do tempo, para o reator crítico não perturbado

$$B_0^* \psi_0^* = 0 \quad (\text{VIII.7})$$

premultiplicando-se (VIII.4) por ψ_0^* e (VIII.7) por ψ , integrando-se em todo o volume do reator e subtraindo a segunda da primeira

$$\langle \psi_0^* B_0 \psi \rangle - \langle \psi B_0^* \psi_0^* \rangle + \langle \psi_0^* \delta B \psi \rangle + \langle \psi_0^* \delta B_\lambda \psi \rangle = 0 \quad (\text{VIII.8})$$

Da teoria das matrizes segue o resultado

$$\langle \psi_0^* B_0 \psi \rangle = \langle \psi B_0^* \psi_0^* \rangle \quad (\text{VIII.9})$$

Assim (VIII.8), se reduzirá a

$$\langle \psi_0^* \delta B \psi \rangle + \langle \psi_0^* \delta B_\lambda \psi \rangle = 0 \quad (\text{VIII.10})$$

Substituindo-se (VIII.5) e (VIII.6) em (VIII.10) teremos

$$\delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = - \frac{\langle \psi_0^* \delta B \psi \rangle}{\langle \psi_0^* \chi F \psi \rangle} \quad (\text{VIII.11})$$

Definindo a reatividade /2/, ρ , como

$$\rho = -\delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\text{VIII.12})$$

Temos, finalmente, a expressão perturbativa da reatividade

$$\rho = \frac{\langle \psi_0^* \delta B \psi \rangle}{\langle \psi_0^* \chi F \psi \rangle} \quad (\text{VIII.13})$$

Esta expressão é exata dentro das aproximações da teoria da difusão multigrupo. (Ela tem a mesma forma no modelo de transporte de Boltzmann). Nos casos práticos de pequenas perturbações em δB , os efeitos de segunda ordem e superiores são desprezíveis e a expressão (VIII.13) se torna a seguinte

$$\rho = \frac{\langle \psi_0^* \delta B \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0^* \chi F \psi_0 \rangle} \quad (\text{VIII.14})$$

dada inteiramente pelas características do reator inicial, não perturbado, e da perturbação introduzida.

IX - VIDA MÉDIA EFETIVA DOS NÊUTRONS PRONTOS

Reescrevamos as equações dos campos entrópicos e adjuntos na seguinte forma

$$v^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial t} = M\phi + NC \quad (IX.1)$$

$$v^{-1} \frac{\partial \phi^*}{\partial t} = M^*\phi^* + N^*C^* \quad (IX.2)$$

Multiplicando-se (IX.1) por ϕ^* e (IX.2) por ϕ , integrando-se em todo o volume do reator e subtraindo-se a segunda da primeira, obtemos o seguinte resultado

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\phi^* v^{-1} \phi) \right\rangle = 0 \quad (IX.3)$$

ou, comutando os operadores $\frac{d}{dt}$ e \langle, \rangle

$$\frac{d}{dt} (\langle \phi * v^{-1} \phi \rangle) = 0 \quad (\text{IX.4})$$

A integral entre parênteses representa a importância total do reator produzida pelos nêutrons prontos. A equação (IX.4) estabelece que a importância total é invariável no tempo, ou seja, é constante. Desta forma a equação (IX.4) poderá ser escrita como

$$\langle \phi * v^{-1} \phi \rangle = C \quad (\text{IX.5})$$

Enquanto a equação (IX.5) representa a importância total no reator, a taxa de produção de importância será dada pela expressão seguinte

$$\langle \phi * \chi F \phi \rangle \quad (\text{IX.6})$$

No lapso δt , a importância produzida será

$$\delta t \langle \phi * \chi F \phi \rangle \quad (\text{IX.7})$$

Devido à conservação da importância, teremos

$$\langle \phi * v^{-1} \phi \rangle = \delta t \langle \phi * \chi F \phi \rangle \quad (\text{IX.8})$$

Particularizando $\delta t = l_p$, onde l_p é a vida média efetiva dos nêutrons prontos, resulta

$$l_p = \frac{\langle \phi^* v^{-1} \phi \rangle}{\langle \phi^* \chi F \phi \rangle} \quad (\text{IX.9})$$

Em dois grupos a expressão anterior tomará a seguinte forma

$$l_p = \frac{\langle \phi_1^* \phi_1 / v_1 \rangle + \langle \phi_2^* \phi_2 / v_2 \rangle}{\langle v \Sigma_2^f \phi_1^* \phi_2 \rangle} \quad (\text{IX.10})$$

e, em um grupo apenas, teríamos a seguinte expressão

$$l_p = \frac{\langle \phi^* \phi / v \rangle}{\langle v \Sigma^f \phi^* \phi \rangle} \quad (\text{IX.11})$$

X - EQUAÇÃO DA REATIVIDADE

RELAÇÃO ENTRE ρ , l_p e ω

Tomando as equações do reator, a dos campos entrôpicos, livre de fonte externa de nêutrons, a dos campos adjuntos, na forma independente do tempo referida ao reator crítico não perturbado

$$T \frac{\partial \psi}{\partial t} = B \psi \quad (X.1)$$

$$B_0^* \psi_0^* = 0 \quad (X.2)$$

onde

$$\begin{bmatrix} M \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A+(1-\beta)\lambda_p)F & \lambda_d \Lambda \\ \beta F & -\Lambda \end{bmatrix} \quad (X.3)$$

$$B_0^* = \begin{bmatrix} M_0^* & F_0^* \\ N_0^* & Q_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_0^* + (1-\beta)\chi_0^* F_0^* & \chi_0^* \Lambda \\ \beta^* F_0^* & -\Lambda \end{bmatrix} \quad (X.4)$$

Supondo o reator em regime de período estável e que nêutrons e precursores tenham a mesma distribuição espacial e espectro de autovalores

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \omega \psi \quad (X.5)$$

onde ω é o autovalor de maior valor real dentro do espectro. Introduzindo-se (X.5) em (X.1), resulta

$$\omega T \psi = B \psi \quad (X.6)$$

premultiplicando-se (X.6) por ψ_0^* e (X.2) por ψ , integrando em todo o volume do reator, e subtraindo a segunda da primeira, teremos

$$\omega \langle \psi_0^* T \psi \rangle = \langle \psi_0^* B \psi - \psi B_0^* \psi_0^* \rangle \quad (X.7)$$

Com o seguinte resultado, obtido da teoria das matrizes

$$\langle \psi B_0^* \psi_0^* \rangle = \langle \psi_0^* B \psi \rangle \quad (X.8)$$

a equação (X.7), assumirá a forma seguinte

$$\omega \langle \psi_0^* T \psi \rangle = \langle \psi_0^* (B - B_0) \psi \rangle \quad (X.9)$$

Por definição $\delta B = B - B_0$ e denota a perturbação introduzida na matriz do operador B. Desta forma teremos

$$\omega \langle \psi_0^* T \psi \rangle = \langle \psi_0^* \delta B \psi \rangle \quad (X.10)$$

Como as constantes de decaimento dos precursores não são afetadas pela perturbação, $\delta B = B - B_0$, será expressa como

$$\delta B = \begin{bmatrix} (1-\beta) \chi_p \delta F + \delta A & \text{O} \\ \beta \delta F & \text{O} \end{bmatrix} \quad (X.11)$$

Substituindo a expressão de δB em (X.10) e lembrando

do que

$$\psi = \begin{bmatrix} \phi \\ c \end{bmatrix} \quad \psi_0^* = \begin{bmatrix} \phi_0^* \\ c_0^* \end{bmatrix} \quad e \quad T = \begin{bmatrix} v^{-1} & \text{O} \\ \text{O} & I \end{bmatrix}$$

temos

$$\omega \left\langle \begin{bmatrix} \phi_0^* \\ c_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{-1} & \text{O} \\ \text{O} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ c \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \phi_0^* \\ c_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\beta) \chi_p \delta F + \delta A & \text{O} \\ \beta \delta F & \text{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ c \end{bmatrix} \right\rangle \quad (X.12)$$

Efetuando os produtos matriciais indicados

$$\omega \langle \phi_0^* V^{-1} \phi + C_0^* IC \rangle = \langle \phi_0^* [(1-\beta) \chi_p \delta F + \delta A] \phi \rangle + C_0^* \beta \delta F \phi \quad (X.13)$$

Do sistema de equações $\omega T \psi = B \psi$, extraímos

$$\omega IC = \beta F \phi - \Lambda C \quad (X.14)$$

explicitando-se o vetor C

$$C = (\omega I + \Lambda)^{-1} \beta F \phi \quad (X.15)$$

Do sistema de equações $B_0^* \psi_0^* = 0$, encontramos

$$C_0^* = \chi_d^* \phi_0^* \quad (X.16)$$

A equação anterior (X.16) significa, fisicamente, que em um reator crítico⁽¹⁾, o precursor é tão importante quanto o neutro por ele produzido. Em razão disto, neste ponto, eliminamos formalmente os precursores de nossas equações.

Substituindo-se (X.15) e (X.16) em (X.13) resulta

$$\omega \langle \phi_0^* V^{-1} \phi + \chi_d^* \phi_0^* I (\omega I + \Lambda)^{-1} \beta F \phi \rangle = \langle \phi_0^* [(1-\beta) \chi_p \delta F + \delta A] \phi \rangle + \chi_d^* \phi_0^* \beta \delta F \phi \quad (X.17)$$

(¹) O precursor é mais importante que o nêutron no reator subcrítico e menos importante no reator crítico.

$$\langle u \chi_d^* \phi_0^* \rangle = \langle \phi_0^* \chi_d u \rangle \quad (\text{X.18})$$

e substituindo-se em (X.17), teremos

$$\begin{aligned} \omega \langle \phi_0^* V^{-1} \phi + \phi_0^* \chi_d (\omega I + \Lambda)^{-1} \beta F \phi \rangle = & \quad (\text{X.19}) \\ \langle \phi_0^* [(1-\beta) \chi_d \delta F + \delta A] \phi \rangle + \langle \phi_0^* \chi_d \beta \delta F \phi \rangle \end{aligned}$$

Por inspecção verificamos que

$$\beta \chi_p^* = \beta^* \chi_d^* \text{ ou } \beta \chi_p = \chi_d \beta = \left(\sum_{m=1}^M \beta_m \right) \chi_d \quad (\text{X.20})$$

Desenvolvendo $\chi_d (\omega I + \Lambda)^{-1} \beta$, obtemos

$$\chi_d (\omega I + \Lambda)^{-1} \beta = \sum_{m=1}^M \frac{\beta_m}{\lambda_m + \omega} \chi_p \quad (\text{X.21})$$

Introduzindo-se os resultados (X.20) e (X.21) em (X.19) e simplificando, resulta

$$\begin{aligned} \omega \langle \phi_0^* V^{-1} \phi \rangle + \omega \langle \phi_0^* \sum_{m=1}^M \frac{\beta_m}{\lambda_m + \omega} \chi_p F \phi \rangle = & \\ \langle \phi_0^* (\chi_p \delta F + \delta A) \phi \rangle & \quad (\text{X.22}) \end{aligned}$$

Dividindo-se ambos os lados da equação (X.22) por $\langle \phi_0^* \chi_p F \phi \rangle$ e lembrando que $\sum_{m=1}^M \frac{\beta_m}{\lambda_m + \omega}$ é um escalar, ficamos com

$$\omega \frac{\langle \phi_0^* V^{-1} \phi \rangle}{\langle \phi_0^* \chi_p F \phi \rangle} + \omega \sum_{m=1}^M \frac{\beta_m}{\lambda_m + \omega} = \frac{\langle \phi_0^* (\chi_p \delta F + \delta A) \phi \rangle}{\langle \phi_0^* \chi_p F \phi \rangle} \quad (\text{X.23})$$

Comparando-se com resultados anteriormente obtidos, temos que

$$\rho_p = \frac{\langle \phi_0^* V^{-1} \phi \rangle}{\langle \phi_0^* \chi_p F \phi \rangle} \quad (\text{X.24})$$

Esta é a vida média efetiva dos nêutrons prontos e

$$\rho = \frac{\langle \phi_0^* (\chi_p \delta F + \delta A) \phi \rangle}{\langle \phi_0^* \chi_p F \phi \rangle} = \frac{\langle \phi_0^* \delta M \phi \rangle}{\langle \phi_0^* \chi_p F \phi \rangle} \quad (\text{X.25})$$

é a expressão perturbativa exata da reatividade no modelo de difusão multigrupo.

Com estes resultados a equação da reatividade virá na seguinte forma

$$\rho = \omega \left(\rho_p + \sum_{m=1}^M \frac{\beta_m}{\lambda_m + \omega} \right) \quad (\text{X.26})$$

Desta forma, para cada ρ teremos um conjunto de $M+1$ valores de ω .

XI - INTERPRETAÇÃO CINÉTICA DA REGIÃO DE ARMADILHAMENTO DE FLUXO

Reescrevamos as expressões perturbativas da vida efetiva média dos nêutrons prontos e reatividade

$$\lambda_p = \frac{\langle \phi_0^* v^{-1} \phi \rangle}{\langle \phi_0^* \chi F \phi \rangle} \quad (\text{XI.1})$$

$$\rho = \frac{\langle \phi_0^* (\delta A + \chi \delta F) \phi \rangle}{\langle \phi_0^* \chi F \phi \rangle} \quad (\text{XI.2})$$

Para a região de armadilhamento de fluxo teríamos a expressão (XI.2) reduzida a

$$\rho = \frac{\langle \phi_0^* \delta A \phi \rangle}{\langle \phi_0^* \chi F \phi \rangle} \quad (\text{XI.3})$$

De (XI.1) e (XI.3) obtemos

$$\rho = \frac{\langle \phi_0^* \delta A \phi \rangle}{\langle \phi_0^* V^{-1} \phi \rangle} \quad \lambda p \quad (\text{XI.4})$$

Como o denominador é constante e a região produtora de nêutrons é fracamente acoplada ao armadilhamento de nêutrons, resulta que, uma variação súbita ou lenta na produção de nêutrons afetará apenas levemente a relação $\rho/\lambda p$ através de δA . Isto nos autorizará a dizer que em transitório de potência o armadilhamento de fluxo não terá influência relevante na cinética e dinâmica do reator.

XII - DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Devido à natureza essencialmente físico-matemática deste trabalho, não houve a intenção de obter-se resultados numéricos. Por esta razão, este epílogo terá um caráter eminentemente de discussão, uma vez que as conclusões já constam do texto, seja através de comparações, simplificações ou identificações dos resultados obtidos com os encontrados na literatura.

Na dedução da Lei de Fick, para altas ordens, foi introduzido o gradiente de ordem n , que emergiu naturalmente, em razão da relação unívoca que existe entre a derivada direcional de uma função e o seu gradiente. Esta expressão, assim obtida, visa melhorar a precisão e estender a faixa de aplicabilidade do modelo de difusão, sendo mais apropriada à geração de resultados numéricos, de vez que sua aplicação analítica traria complicações acentuadas.

As equações dos campos escalares (importância e fluxo de nêutrons), na forma dependente do tempo, foram introduzidas para harmonia do texto e deduzidas em dois passos formais. No primeiro passo, a variação temporal da importância e população de nêutrons foi estabelecida no espaço de fase. Em seguida, foi introduzida a discretização da energia. Este expediente proporcionou a determinação dos operadores B e B^* , por comparação das equações obtidas com as equações ordinárias da Teoria da Difusão de Nêutrons.

A teoria de perturbações, no seu formalismo ordinário, pressupõe um sistema crítico, não perturbado, representado pelo sistema de equações adjunto e, o mesmo sistema perturbado, representado pelo sistema direto de equações, na forma dependente do tempo, ou não. Através de um procedimento formal próprio, os parâmetros relevantes são obtidos como razões entre funcionais integrais bilineares do fluxo e importância.

Aqui, o formalismo usado foi o mesmo. Entretanto, a vida média efetiva dos nêutrons prontos, foi estabelecida de maneira diferente, através da combinação das equações de fluxo e importância, ambas na forma dependente do tempo e do princípio e conservação da importância. Este princípio é matematicamente expresso por

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\phi^* v^{-1} \phi) \right\rangle = 0$$

As soluções das equações foram obtidas através do método das autofunções dos operadores B e B^* . Estas autofunções formam um sistema completo, permitindo-se a representação de ϕ e ϕ^* , em termos das mesmas. Cada autofunção pode ser vista como uma representação mo

dal da população e importância neutrônicas, cada qual evoluindo segundo o seu próprio modo, de maneira não interferente.

Um dos grandes problemas da teoria de perturbações é o cálculo do fluxo perturbado, que também é uma incógnita do problema, a não ser em pequenas perturbações, onde pode-se admiti-lo igual ao fluxo não perturbado. Contudo, supondo-se a suficiência do método das autofunções, ela é uma teoria geral, que poderá ser aplicada a reatores nus, com refletores, no cálculo do efeito DOPPLER; barras absorvedoras excêntricas ou não, parcialmente introduzidas ou com inserção total; depleção do combustível, reatores com "flux-trap", e feitos de isótopos endógenos absorvedores (venenos) e as diversas perturbações inerente à operação e funcionamento dos reatores de fissão.

Para exemplificar, será apresentada uma aplicação, em dois grupos, para o cálculo de um elemento absorvedor excêntrico, parcialmente inserido, em um reator sem refletor.

Este é um caso típico de aplicação da teoria de perturbações, onde os métodos analíticos ordinários são muito complicados para serem aplicados.

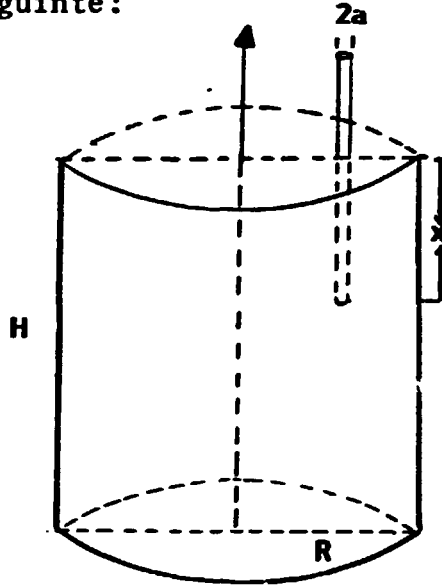
Em dois grupos, a expressão da reatividade toma a seguinte forma

$$\rho = - (\int \delta \Sigma_1^t \phi_{10}^* \phi \, dv + \int \delta \Sigma_2^t \phi_{20} \phi_2 \, dv) / \int v \Sigma_2^f \phi_{10} \phi_2 \, dv \quad (\text{XII.1})$$

onde todos os termos já foram previamente definidos.

As integrais do numerador são calculados para o volume da barra de controle, que terá comprimento total, h , e raio, a . A integral do denominador é estendida a todo o volume do reator.

Para visualização geométrica do problema vamos nos referir ao esboço seguinte:



A importância dos grupos rápido e térmico será representada, respectivamente, por

$$\phi_{10}^* = A^* S_1^* J_0\left(\frac{2,405}{a}r\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{H}z\right) \quad (\text{XII.2})$$

$$\phi_{20}^* = A^* J_0\left(\frac{2,405}{a}r\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{H}z\right) \quad (\text{XII.3})$$

enquanto os fluxos perturbados serão representados, respectivamente por

$$\phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\kappa_n}{a}r\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{H}z\right) \quad (\text{XII.4})$$

$$\phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n S_1 J_0\left(\frac{\kappa_n}{a}r\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{H}z\right) \quad (\text{XII.5})$$

levando as expressões (XII.2), (XII.3), (XII.4) e (XII.5) em (XII.1) e dividindo-se por $\rho(H)$, obtemos

$$\rho(x) = \rho(H) \frac{\int_0^x \frac{\sin(\frac{\pi}{H}z) dz}{H}}{\int_0^H \frac{\sin(\frac{\pi}{H}z) dz}{H}} = \rho(H) \left[\frac{x}{H} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi x}{H}\right) \right] \quad (\text{XII.6})$$

resultado este coincidente com o obtido na aplicação da teoria de perturbações em um grupo apenas (1,3) e emerge do fato de ser o reator nu, condição na qual, o fluxo e importância, têm a mesma forma, ou seja, são proporcionais. Entretanto, para reatores com refletores, estes resultados diferem, não sendo tratados aqui.

APÊNDICE

I) OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO

$$\frac{d^n \phi}{dr^n} = \nabla^n \phi \cdot (\vec{\Omega})^n.$$

A diferencial de ordem n de uma função em R^3 de classe C^n , obtida por indução é dada por

$$d^n \phi(x,y,z) = \sum_{(p,q,r)=0}^n \frac{n!}{p!q!r!} \frac{\partial^n \phi}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} \cdot dx^p dy^q dz^r \quad (I.1)$$

onde $n = p+q+r$

Dividindo-se (I.1) por dr^n , temos:

$$\frac{d^n \phi}{dr^n} = \sum_{(p,q,r)=0}^n \frac{n!}{p!q!r!} \frac{\partial^n \phi}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} \left(\frac{dx}{dr}\right)^p \left(\frac{dy}{dr}\right)^q \left(\frac{dz}{dr}\right)^r \quad (I.2)$$

em que $\left(\frac{dx}{dr}\right)^p = \cos^p \alpha$, $\left(\frac{dy}{dr}\right)^q = \cos^q \beta$, $\left(\frac{dz}{dr}\right)^r = \cos^r \gamma$

são os cossenos diretores de ordem p, q, r nas direções x, y e z , respectivamente.

Perfazendo-se o desenvolvimento da expressão (I.2) e tomando-se apenas os termos nas direções dos eixos coordenados x, y e z , resulta:

$$\frac{d^n \phi}{dr^n} = \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} \left(\frac{dx}{dr}\right)^n + \frac{\partial^n \phi}{\partial y^n} \left(\frac{dy}{dr}\right)^n + \frac{\partial^n \phi}{\partial z^n} \left(\frac{dz}{dr}\right)^n \quad (I.3)$$

que em notação vetorial poderá ser escrita na forma seguinte:

$$\frac{d^n \phi}{dr^n} = \left| \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} \vec{i} + \frac{\partial^n \phi}{\partial y^n} \vec{j} + \frac{\partial^n \phi}{\partial z^n} \vec{k} \right| \cdot \left| \left(\frac{dx}{dr}\right)^n \vec{i} + \left(\frac{dy}{dr}\right)^n \vec{j} + \left(\frac{dz}{dr}\right)^n \vec{k} \right| \quad (I.4)$$

Definindo-se

$$\nabla^n \phi = \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} \vec{i} + \frac{\partial^n \phi}{\partial y^n} \vec{j} + \frac{\partial^n \phi}{\partial z^n} \vec{k} \quad (I.5)$$

$$(\vec{\Omega})^n = \left(\frac{dx}{dr}\right)^n \vec{i} + \left(\frac{dy}{dr}\right)^n \vec{j} + \left(\frac{dz}{dr}\right)^n \vec{k} \quad (I.6)$$

e substituindo (I.5) e (I.6) em (I.4): resulta, finalmente, a expressão

$$\frac{d^n \phi}{dr^n} = \nabla^n \phi \cdot (\vec{\Omega})^n = \nabla^n \phi \cos^n \theta \quad (I.7)$$

II) DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO

$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{1}{\psi^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$$

Tomando a expressão matemática do princípio de conservação da importância

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\psi^* T \psi) \right\rangle = 0 \quad (II.1)$$

Desenvolvendo a derivada indicada e lembrando que $\psi^* \psi = \psi \psi^*$,

por ser um produto escalar, e T uma matriz diagonal independente do tempo e a integral ser efetuada em um volume arbitrário, resulta:

$$\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = 0 \quad (II.3)$$

Premultiplicando-se (II.3) por $(\Psi^* \Psi)^{-1}$, teremos

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{\Psi^*} \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = - \frac{1}{\Psi^*} \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \quad (II.4)$$

que é a expressão procurada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. LAMARSH, J.R., "Introduction to Nuclear Reactor Theory", Adison Wesley Publishing Company, 1972.
2. HENRY, A.F., "Nuclear Reactor Analysis", The Mit Press, 1975.
3. CARO, R., "Física de Reatores Nucleares", Seccion de publicaciones de la J.E.N. MADRID, 1976.
4. MARCHUK, G.I., "Numerical Methods for Nuclear Reactor Calculations". Consultants Bureau Enterprises, Inc., N.York, 1959.
5. STACEY, W.M., "Variational Methods in Nuclear Reactor Physics", N.York, Academic Press, 1974.
6. ———., "Space-time Nuclear Reactor Kinetics", N.York, Academic Press, 1969.
7. LEWINS, J., "Importance: The Adjoint Function", Pergamon Press, 1965.

8. SESONSKE, A., and GLASTONE, S., "Nuclear Reactor Theory", Van Nostrand Reinhold Company, 1967.
9. GANDINI, A., "Elementi Di Fisica e Calcolo Dei Reattori Veloci", Comitato Nazionale Energia Nucleare, 1979.
10. MEEM, J.L., "Two-Group Reactor Theory", N.York: Gordon and Breach, 1964.
11. MEGHREBLIAN, R.V., and HOLMES, D.K., "Reactor Analysis"; N.York: McGraw-Hill, 1960.
12. WEINBER, A.M., and WIGNER, E.P., "The Physical Theory of Neutron Chain Reactors", Chicago; University of Chicago Press, 1958.
13. BUTKOV, E., "Física Matemática", Rio de Janeiro, Guanabara, 1978.
14. ZEIDOVICH, Ya. B., "Higher Mathematics for Beginners", Moscow: Mir Publishers, 1972.
15. VARGA, R.S. and MARTINO, M.A., "The Theory for the Numerical Solution of Time-Dependent and Time-Independent Multigroup Diffusion Equations", Int. Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva, 1 sept. - 13 sept. 1958, vol.16, (1958)
16. LEWINS, J., "The Weighting Functions of Reactor Physics". Journal of Brit. Nuclear Energy Soc., 326, Glasgow.
17. ———., "The Time Dependent Importance of Neutrons and Precursors", Nucl.Science and Engineering, 7, 268-74, (1960).
18. ———., "Surface Perturbation Theory". Nucl.Science and Engineering: 7, 481-6 (1960).

19. WOLFE, B. and FISHER, L.F., "Perturbation Theory of Control Elements. I" Nucl.Science and Engineering: 4, 785-93 (1958).
20. KOMATA, M., "New Interpretations for the Usachev-Gandini Perturbation Theory", Technical Notes, 439-93, (1971).
21. CECCHINI, G.P. and SALVATORES, M., "Advances in the Generalized Perturbation Theory", Nucl.Science and Engineering.46,304-20 (1971).
22. USACHEV, L.N., "Perturbation Theory For The Breeding Ratio and For Other Number Ratios Pertaining To Various Reactor Processes", Journal of Nuclear Energy Parts A(B,18, 571-85 (1964).
23. GANDINI, A., "A Generalized Perturbation Method For Bilinear Functionals of the Real and Adjoint Neutron Fluxes". Journal of Nuclear Energy, 21, 755-65 (1967).
24. ———., SALVATORES,M. and SENA, G., "Use of Generalized Perturbation Methods for Optimization of Design". Journal of Nuclear Energy, 23, 469-75 (1969).
25. HOLWAY, L.H., "Perturbation Methods for Reactor Diffusion Equations", Nucl.Science and Engineering, 6, 161-201 (1959).
26. RAHNEMA, F. and Pomraning., G.G., "An Anomaly in the Use of Perturbation Theory". Nuclear Science and Engineering: 78, 393-437 (1981).
27. GEENSPAN, E. "A Generalized Perturbation Theory and Variational Principle for Multiple Ratios of Linear and Bilinear Functionals". Technical Notes, 107-12.
28. GELBARD, E.M. and ADAMS, C.H., "Use of Perturbation Theory to Test Ordinate Arrays in Streaming Calculations" (ANL), P.R. McCoy (Northwestern Univ.)

29. DEJONGME, G.; GONORD, J. and NIMAL, J.C., "Etude de Perturbations Utilisant la Methode de Monte Carlo", Commissariat a L'Energie Atomique, Serma/Lep P.p. n° 2 - 91190 - Gif sur Yvette-France.
30. ROBKIN, M.A. and CLARK, J.R.M., "Integral Reactor Theory: Ortogonality and Importance". Nucl.Science and Engineering: 8, 43742 (1960).
31. KLAHR, C., "Limitations of Multigroup Calculations", Nucl.Science and Engineering: 1, 253-67 (1956).
32. EHRlich, R. and HURWITZ, Jr., H., "Multigroup Methods for Neutron Diffusion Problems", Nucleonics, 12, 2, 23-30 (1954).
33. NOWARK, M.S., "The General Critical Reactor Equations", Nucl. Science and Engineering: 4, 25-43 (1958).
34. HURWITZ, Jr., H., "Derivation and Integration of the Pile-Kinetic Equations". Nucleonics, July, 1949.
35. GREENSPAN, E., "A Generalized Source-Multiplication Method for Determining REactivity" Technical Notes, 100-3, May; 1974
36. ————., "A Source-Multiplication Reactivity", Technical Notes, 103-6, May, 1974.
37. GINSBERG, A. and BECKER, M., "An Improved Series Representation of Doppler-Broadened Resonance Absorption" Technical Notes, 106-7, March, 1974.
38. HANSES, K.F. and CLARK, Jr.M., "Adjoint Functions and Ortogonality Relations", Nucl.Science and Engineering: 15, 139-41 (1963).
39. TAIT, J.H., "Two-Group Perturbation Theory in the Neutron Transport Theory". Atomic Energy Research Establishment, Harwell, March, 1954.
40. POHLUS, J. and SCHOLZ, S., "Sapece Dependent. Investigations in Zero Power Reactors". Kernenergie, Bd. 24, H.11.

41. GIST, W.J., BULL, S.R. and PARTAINT, C.L., "Pseudorandom Multifrequency Binary Sequence Testing and State Variable, Frequency Response Analysis of Flux-Trap Type Reactor System" Nucl. Science and Engineering, 59, 97-116 (1975).
42. EMENDORFER, D. and KOCKER, K.H., "On the Effectiveness of Delayed Neutrons in a Reflected Reactor". p/960, Germany (Fed.Rep.).
43. POPOV, V.M., "Notes on the Inherent Stability of Nuclear Reactors". p/2458 - Romania.
44. STACEY, Jr.W.M., "Variational Functionals for Space-Time Neutrons". Nucl.Science and Engineering: 30, 448-63 (1967).
45. MITANI, H., "An Effective Method for Estimating Multiple Control Rod Worths in Large Fast Reactors", Journal of Nuclear Science and Technology, 14(9), 640-51 (1977).
46. HURWITZ, Jr., H., and ROE, G.M., "Absorption of Neutrons by Black Control Pods". Journal of Nuclear Energy, 2, 85-100 (1955).
47. LIGHTLE, R.E., "Multiple Control Rod Calculations". Atomic Energy Division, Lynch Burg.Va.
48. RUSSELL, B., "Análise da Matéria". Rio de Janeiro; Zahar Editores, 1978.