

TRN: AR 9200069

INIS-mf--13251

COMPARACION DE METODOS NODALES PARA LA RESOLUCION DE LA  
ECUACION DE TRANSPORTE NEUTRONICO

POR

OSCAR M. ZAMONSKY Y CARLOS J. GHO

División Física de Reactores Avanzados  
Centro Atómico Bariloche  
República Argentina

Trabajo a ser presentado a la XVIII Reunión Anual  
de la Asociación Argentina de Tecnología Nuclear,  
22-26 octubre de 1990 en Buenos Aires, Argentina.



# COMPARACION DE METODOS NODALES PARA LA RESOLUCION DE LA ECUACION DE TRANSPORTE NEUTRONICO

Oscar M. Zamonsky  
Carlos J. Gho

División Física de Reactores Avanzados  
Centro Atómico Bariloche

**Resumen** En el presente trabajo se estudian comparativamente algunos métodos nodales de resolución de la ecuación de transporte: el constante - constante (CC), lineal - nodal (LN) y el constante - cuadrático (CQ). Para su programación han sido llevados a un esquema nodal equivalente a diferencias finitas (NEFD), con lo cual su inclusión en códigos existentes resulta sencilla. Se resuelven algunos problemas bidimensionales demostrándose que con el LN en general se obtienen buenas precisiones en menores tiempos de CPU.

## I INTRODUCCION

Existen varios métodos nodales para resolver la ecuación de transporte en la aproximación de ordenadas discretas. En la bibliografía se hacen comparaciones entre algunos de ellos, demostrándose en general su mejor eficiencia computacional que los esquemas en diferencias finitas.

Estos métodos se basan en desarrollar los flujos en el interior y la superficie de nodos homogéneos en polinomios de Legendre, siendo el orden del desarrollo el que determina la aproximación.

Las aproximaciones de menor orden pueden llevarse a esquemas nodales equivalentes a diferencias finitas, (NEFD), sin mayor complejidad en las ecuaciones resultantes.

En este trabajo, se analizan las aproximaciones NEFD para los esquemas constante - constante (CC), lineal - nodal (LN) y constante - cuadrático (CQ).

El primero de ellos corresponde a la aproximación de diferencias finitas, (MDF), donde el cálculo de los flujos salientes del nodo se obtiene a través de la solución analítica de la ecuación de transporte con fuente plana. /1,2/

En el LN se desarrollan todos los flujos hasta orden uno, despreciándose los términos bilineales y siendo las fugas transversales aproximadas por expresiones sencillas. /3/

La aproximación CQ considera constantes los flujos en las superficies y cuadráticos en el interior, despreciándose también todos los términos bilineales. /4/

Las comparaciones realizadas entre los diversos métodos lineal - lineal /3/ muestran que no hay grandes diferencias computacionales entre ellos, siendo el LN el más sencillo. Por otra parte, este tipo de aproximación presenta mejor eficiencia computacional que la CC /2/.

El CQ con el esquema NEFD ha mostrado ventajas respecto al MDF, /4,5,6/, pero no ha sido comparado con el LN.

Teniendo en cuenta que el LN y el CQ tienen la misma cantidad de incógnitas y que ambos son ventajosos respecto al MDF, en este trabajo se comparan estos tres métodos.

En la sección II de este trabajo se deducen las ecuaciones nodales generales y las distintas aproximaciones utilizadas. En la III se dan algunos resultados numéricos que permiten comparar los tres esquemas. Finalmente, en la IV, se hace un resumen sobre las conclusiones finales.

## II INTRODUCCION TEORICA

La ecuación de transporte en geometría cartesiana bidimensional para una dirección discreta SN es:

$$\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \sigma \Psi = S \quad (1)$$

donde:

$\mu, \eta$  = componentes según  $x$  e  $y$  de la dirección SN.

$\sigma$  = sección eficaz total.

$\Psi(x, y)$  = Flujo angular en la dirección discreta.

$S(x, y)$  = Fuente al grupo de energía considerado.

Assumiendo que el flujo angular en el nodo  $M=[-a, a] \times [-b, b]$  puede ser desarrollado en Polinomios de Legendre adimensionales se tiene:

$$\Psi(x, y) = \sum_{i,j} (2i+1)(2j+1) \Psi_{ij} P_i(x) P_j(y) \quad x \in [-1, 1], y \in [-1, 1] \quad (2)$$

donde los coeficientes  $\Psi_{ij}$ , llamados momentos nodales resultan ser:

$$\Psi_{ij} = \left( \frac{1}{2a} \right) \left( \frac{1}{2b} \right) \int_{-a}^a dx P_i(x) \int_{-b}^b dy P_j(y) \Psi(x, y) \quad (3)$$

Definiendo el vector  $\lambda = (i, j)$  y el operador:

$$M_{\lambda} = \left( \frac{1}{2a} \right) \left( \frac{1}{2b} \right) \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy P_i(x) P_j(y) \quad (4)$$

la ecuación (3) puede expresarse de la siguiente manera:

$$\Psi_{\lambda} = M_{\lambda} \cdot \Psi(x, y) \quad (5)$$

Los momentos transversos del flujo angular son:

$$\Psi_{\lambda x}(x) = M_{\lambda x} \cdot \Psi(x, y) \quad (6)$$

y su equivalente en  $y$ , donde el operador  $M_{\lambda x}$  está definido por la siguiente expresión:

$$M_{\lambda x} = \left( \frac{1}{2b} \right) \int_{-b}^b dy P_j(y) \quad (7)$$

Expresiones similares se obtienen para  $\Psi(y)$ .

Para encontrar ecuaciones de balance para los momentos nodales se aplica el operador  $M_{\lambda}$  a la ecuación (1), y luego de operar con la misma se llega a:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\delta x} \left[ \Psi_{\lambda x}(a) - (-1)^i \Psi_{\lambda x}(-a) - 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} (2i-4k-1) \Psi_{\lambda - i(2k+1)} \right] + \\ & \frac{1}{2\delta y} \left[ \Psi_{\lambda y}(b) - (-1)^j \Psi_{\lambda y}(-b) - 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} (2j-4k-1) \Psi_{\lambda - j(2k+1)} \right] + \sigma \Psi_{\lambda} = S_{\lambda} \quad (8) \end{aligned}$$

donde  $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$  = parte entera de  $\frac{i-1}{2}$ ,  $i=(1,0)$ ,  $j=(0,1)$ ,  $\delta x = \frac{\sigma a}{\mu}$

La ecuación (8) relaciona los momentos nodales del flujo angular con los transversales evaluados en la superficie del nodo.

Expresiones para estos últimos se obtienen aplicando los operadores (7) a la ecuación (1) y resolviendo en forma analítica las ecuaciones resultantes (2). Este procedimiento conduce a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{2\delta x} \left[ e^{\delta x} - \sum_{l=0}^{\Lambda^F} e_l^x \right] \Psi_{\lambda x}(a) - \frac{1}{2\delta x} \left[ e^{-\delta x} - \sum_{l=0}^{\Lambda^F} (-1)^l e_l^x \right] \Psi_{\lambda x}(-a) -$$

$$\sum_{l=0}^{\Lambda^F} \left[ e_l^x \Psi_{\lambda^*} - \frac{1}{\delta x} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} (2l-4k-1) e_l^x \Psi_{\lambda^* - 1(2k+1)} \right] +$$

$$\sum_{l=0}^{\Lambda^F} e_l^x S_{\lambda^*} = \sum_{l=0}^{\Lambda^V} e_l^x S_{\lambda^*} \quad (8)$$

y sus correspondientes en y, donde:

$$e_l^x = \left( \frac{2l+1}{2a} \right) \int_{-a}^a dx \exp(\alpha x / \mu) P_l(x)$$

$\Lambda^F$  = Orden de desarrollo de momentos transversos

$\Lambda^V$  = Orden de desarrollo de momentos nodales

$\lambda^* = (i, j)$  con el índice que corresponde variando con la sumatoria

### IIa METODO CC

El método CC se basa en desarrollar los momentos nodales y transversos hasta orden cero. Tomando  $\lambda = (0, 0)$ ,  $\Lambda^F = \Lambda^V = 0$ , las ecuaciones (8) y (9) quedan:

$$\frac{1}{2\delta x} \left[ \Psi_{x_0}^0 - \Psi_{x_0}^1 \right] + \frac{1}{2\delta y} \left[ \Psi_{o_y}^0 - \Psi_{c_y}^1 + \Psi_{o_0} \right] = S_{o_0} / \sigma \quad (10)$$

$$\left( \frac{1+\alpha x}{2} \right) \Psi_{x_0}^0 + \left( \frac{1-\alpha x}{2} \right) \Psi_{x_0}^1 - \Psi_{o_0} = 0 \quad (11)$$

y la ecuación equivalente en y, siendo:

$$\alpha x = \text{Coth } \delta x - 1/\delta x \quad (12)$$

donde se han definido  $\Psi_{x_j}^i(-a) = \Psi_{x_j}^{oi}$  si  $\mu > 0$  y  $\Psi_{x_j}^i(-a) = \Psi_{x_j}^{io}$  si  $\mu < 0$  y se ha utilizado la propiedad de que  $\delta x(-\mu) = -\delta x(\mu)$  así como que  $\alpha x(-\mu) = \alpha x(\mu)$ , lo mismo ocurre para la variable y.

### IIb METODO CQ

En esta aproximación se desarrollan hasta orden dos los momentos nodales y hasta orden cero los transversos. /4/

Se considera además que el flujo angular es separable en las variables x e y, con lo cual no se consideran los momentos nodales cruzados.

En este caso, tomando  $\Lambda^F = 0$ ,  $\Lambda^V = 2$ ,  $\lambda = (0, j), (1, 0)$ ,  $i, j = 0$  a  $2$  en las ecuaciones (8) y (9), éstas quedan:

$$\frac{1}{2\delta x} \left[ \Psi_{x_0}^0 - \Psi_{x_0}^1 \right] + \frac{1}{2\delta y} \left[ \Psi_{o_y}^0 - \Psi_{c_y}^1 \right] + \Psi_{o_0} = S_{o_0} / \sigma \quad (13)$$

$$\frac{1}{2\delta x} s_x \left[ \psi_{x0}^o + \psi_{x0}^i - 2\psi_{00} \right] + \psi_{01} = S_{01}/\sigma \quad (14)$$

$$\frac{1}{2\delta x} s_x \left[ \psi_{x0}^o - \psi_{x0}^i - 6\psi_{01} \right] + \psi_{02} = S_{02}/\sigma \quad (15)$$

$$\left( \frac{1+\alpha x}{2} \right) \psi_{x0}^o + \left( \frac{1-\alpha x}{2} \right) \psi_{x0}^i - \psi_{00} = \frac{3\alpha x}{\sigma} s_x S_{01} + \frac{\sigma}{\sigma} \left( 1 - \frac{\alpha x}{\delta x} \right) S_{02} \quad (16)$$

y las tres ecuaciones correspondientes a la variable y, donde se ha utilizado la misma convención de signos que en el caso anterior apareciendo ahora  $s_x =$  signo de  $\mu$ , y  $s_y =$  signo de  $\eta$ .

### IIc METODO LN

En este esquema se desarrollan los momentos nodales y transversos hasta orden uno y no se consideran los momentos bilineales.

Con esta aproximación las ecuaciones de balance de los momentos nodales quedan:

$$\frac{1}{2\delta x} \left[ \psi_{x0}^o - \psi_{x0}^i \right] + \frac{1}{2\delta y} \left[ \psi_{0y}^o - \psi_{0y}^i \right] + \psi_{00} = S_{00}/\sigma \quad (17)$$

$$\frac{1}{2\delta x} s_x \left[ \psi_{x0}^o + \psi_{x0}^i - 2\psi_{00} \right] + \frac{1}{2\delta y} s_y \left[ \psi_{1y}^o - \psi_{1y}^i \right] + \psi_{10} = S_{10}/\sigma \quad (18)$$

$$\frac{1}{2\delta x} s_x \left[ \psi_{x1}^o + \psi_{x1}^i - \psi_{01} \right] + \frac{1}{2\delta y} s_y \left[ \psi_{1y}^o + \psi_{1y}^i - \psi_{10} \right] = 0 \quad (19)$$

En esta última ecuación han sido eliminados los términos en  $\psi_{11}$  y  $S_{11}$ .

Las ecuaciones que relacionan los momentos nodales con los transversos son:

$$\left( \frac{1+\alpha x}{2} \right) \psi_{x0}^o + \left( \frac{1-\alpha x}{2} \right) \psi_{x0}^i = \psi_{00} + 3 \alpha x s_x \psi_{10} \quad (20)$$

$$\left( \frac{1+\alpha x_1}{2} \right) \psi_{x1}^o + \left( \frac{1-\alpha x_1}{2} \right) \psi_{x1}^i = \psi_{01} \quad (21)$$

y las correspondientes a estas últimas y la (18) en la variable y, siendo:

$$\frac{\alpha x}{1 - 3 \alpha x / \delta x} \quad (22)$$

En la ecuación (21) se ha utilizado la ecuación de balance para  $\psi_{11}$  (19) y se ha hecho la hipótesis de que ambos términos de esta ecuación son nulos, lo que constituye la aproximación que diferencia este método del LL /3/.

### III RESULTADOS NUMERICOS

Las ecuaciones resultantes para los métodos CC, CQ y LN fueron programadas en un código bidimensional para ser comparadas mediante la resolución de algunos problemas. Los casos han sido resueltos en el sistema VAX 11/780 FPA bajo VMS 4.7 del Centro Atómico Bariloche.

Todos los métodos fueron implementados en algoritmos NEFD /4/. Esto significa que se calcula primero el flujo medio en función de los flujos entrantes al nodo y los momentos de la fuente, los que se conocen de la iteración anterior. Luego se calculan los momentos nodales del flujo y los transversos, también con ecuaciones desacopladas y en función de magnitudes ya calculadas.

El primer problema, /1,2/, resuelto se muestra en la figura 1.

Fue calculado usando una cuadratura simétrica S4 y con una precisión de  $10^{-4}$ .

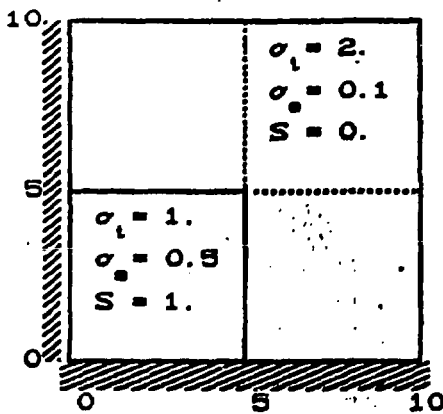


Fig. 1a. Datos del problema 1.

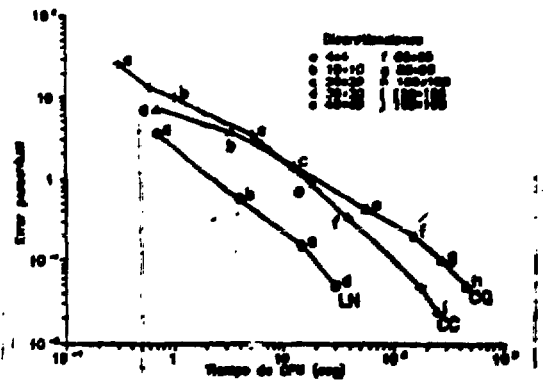


Fig. 1b. Resultados caso 1.

Los resultados de este problema para cada método se muestran en la figura 1b. En abscisas se indica el tiempo de CPU para obtener el resultado convergido. En ordenadas se muestra el error porcentual de cada solución convergida respecto a la solución correspondiente a un ancho de malla tendiendo a cero.

En la figura 1b se ve que en este caso los métodos CC y CQ no presentan grandes diferencias, mientras que con el LN pueden obtenerse las mismas precisiones que con los anteriores en aproximadamente un orden de magnitud menos en el tiempo de CPU.

Puede verse también que para una misma discretización los métodos LN y CQ requieren aproximadamente el mismo tiempo de ejecución, que resulta mucho mayor que el utilizado por el CC, sin embargo, la precisión en los resultados del LN supera ampliamente a los otros.

Las intersecciones de las curvas CC y CQ se deben a la competencia entre mayor número de incógnitas del CQ frente a su mejor aproximación a las soluciones dentro del nodo.

Los datos del segundo problema [3] se muestran en la figura 2a y los resultados en la 2b. Fue resuelto con la misma precisión y cuadratura que el anterior.

En este caso, el método CQ aparece como el más eficiente y el LN resulta intermedio entre aquel y el CC.

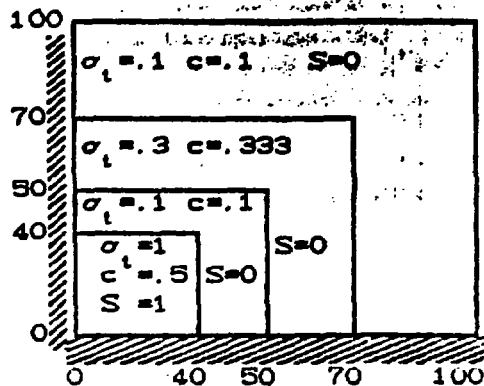


Fig. 2a. Datos del problema 2.

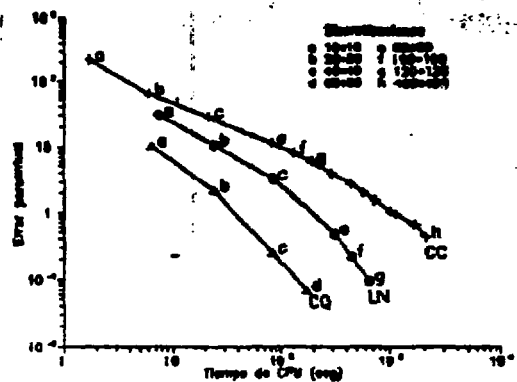


Fig. 2b. Resultados caso 2.

El tercer problema, [7] corresponde al mostrado en las figuras 3a

y 3b, donde las cuatro fronteras son reflejadas.

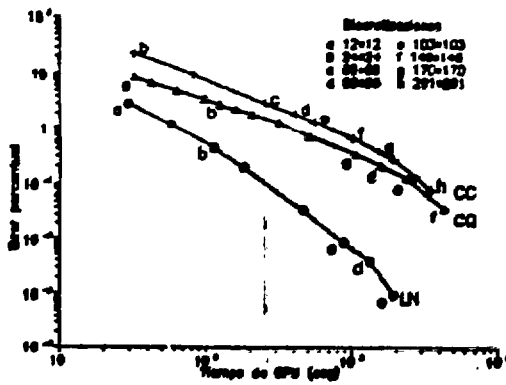
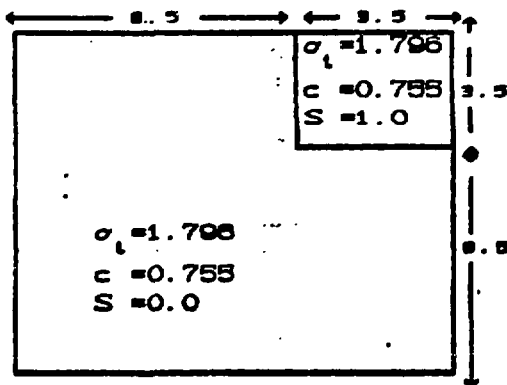
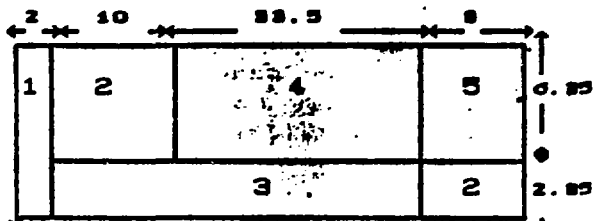


Fig. 3a. Datos problema 3.

Fig. 3b. Resultados problema 3

Nuevamente este caso presenta como ventajoso al esquema LN, siendo los otros dos de parecida eficiencia entre sí.

El último problema /B/ se muestra en la figura 4, siendo los datos materiales los indicados en la tabla 1



Mat	$\sigma_1$	$c$	$S$
1	0.4	0.0	0.0
2	0.1	0.73	0.0
3	0.007	0.71	0.0
4	0.09	0.82	0.29
5	0.09	0.82	0.07

Fig. 4. Geometría problema 4.

Tabla 1. Datos problema 4.

Este problema es típico para estudiar comportamientos de métodos numéricos de resolución de la ecuación de transporte. Esto se debe fundamentalmente a la presencia de una región prácticamente vacía (material 3).

Los resultados de este caso con la misma cuadratura que los anteriores y con una precisión de  $10^{-5}$  se muestran en la figura 5.

En este problema, el esquema CQ presentó problemas de convergencia para discretizaciones finas y precisiones menores de 2%, por lo que no se lo incluyó en la gráfica de resultados.

También en este caso el esquema LN produce menor error que el CC en menos tiempo de CPU.

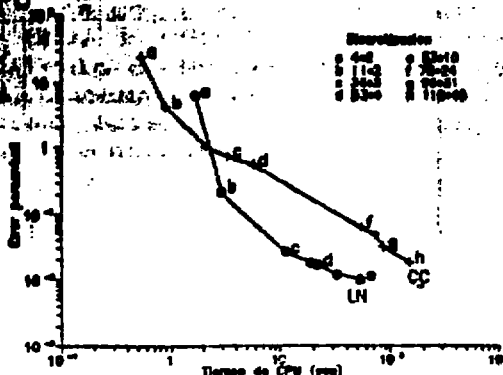


Fig. 5 Resultados problema 5



#### IV CONCLUSIONES

Han sido deducidas las ecuaciones de los métodos CC, CQ y LN y la formulación NEFD a efectos de comparar su eficiencia computacional.

En la mayoría de los problemas resueltos el esquema LN presenta ventajas respecto a los otros. Puede verse que se logran precisiones en los resultados menores a 0.01% en tiempos de CPU de casi un orden de magnitud menos. Además se observa que en todos los casos resulta más eficiente que el CC.

La aproximación CQ resulta ser la más ventajosa en el problema 2 aparece como intermedia en el 3, en el 1 para grandes discretizaciones es menos eficiente que la CC y en el problema 4 presenta problemas de convergencia.

Con los problemas resueltos no puede sacarse una conclusión definitiva sobre la conveniencia de los esquemas LN o CQ, aunque el primero resultó en general más eficaz. Sería necesario un estudio más profundo sobre el tipo de problema óptimo para cada esquema.

Si se piensa en scattering anisotrópico, el CQ tiene un momento nodal más que el LN por cada dimensión, lo que hace pensar en una pérdida de eficiencia para estos casos.

Actualmente se está trabajando en el desarrollo de esquemas M de igual forma que se presenta en la referencia 2, pero considerando solamente los términos cuya suma de índices es menor a M. El esquema LN sería un caso particular de éstos, con  $M=1$  y la aproximación en las fugas transversales.

También se están estudiando formas de aceleración de los métodos nodales, en particular la aceleración sintética de difusión.

#### REFERENCIAS

- (1). R.J.J. STANLER, M.J. ABBATE, Methods of Steady-State Reactor Physics in Nuclear Design. Academic Press, (1983).
- (2). Y.Y. AZMY, The Weighted Diamond-Difference Form of Nodal Transport Methods. Nuclear Science and Engineering, 98, (1988).
- (3) Y.Y. AZMY, Comparison of Three Approximations to the Linear Linear Nodal Transport Method in Weighted Diamond - Difference Form. Nuclear Science and Engineering, 100, (1988).
- (4) A. BADRUZZAMAN, An Efficient Algorithm for Nodal Transport Solutions in Multidimensional Geometry. Nuclear Science and Engineering, 84, (1984).
- (5) O. ZAMONSKY, C. GHO, F. GIUST, Desarrollo e Implementación de Método Nodal con Cálculo Local por Teoría de Transporte. Trabajo Especial de la Carrera de Ingeniería Nuclear, (1989).
- (6) O. ZAMONSKY, C. GHO, F. GIUST, Código Nodal Tridimensional para Transporte para Cálculo de Núcleo. XVII Reunión Anual AATN (1989).
- (7) E.M. GELBARD, L.A. HAGEMAN, The Synthetic Method as Applied to SN Equations. Nuclear Science and Engineering, 37, (1969).
- (8) H. KHALIL, A Nodal Technique for Synthetic Acceleration of Nodal SN Calculations. Nuclear Science and Engineering, 90, (1985).