

FR 92 1538

CEA-R-5575

CEA-R-5575

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

A14

**LES FLUIDES CHARGÉS
RELATIVISTES : APPROCHES
HYDRODYNAMIQUE ET CINÉTIQUE**

par

Fabrice DEBBASCH, Guy BONNAUD

DÉPARTEMENT FUSION

Centre d'Études de Limeil-Valenton

Rapport CEA-R-5575

991

**SERVICE DE DOCUMENTATION
ET D'ÉDITION MULTIMÉDIA**

C.E.-SACLAY 91191 GIF-sur-YVETTE Cédex FRANCE

CLASSIFICATION DES RAPPORTS, NOTES ET BIBLIOGRAPHIES CEA

(Classification du système international de documentation nucléaire INIS
de l'Agence Internationale de l'Energie Atomique)

A 11	Physique théorique générale et physique mathématique	C 50	Santé, radioprotection et environnement
A 12	Physique atomique et physique moléculaire	C 60	Radiologie et médecine nucléaire
A 13	Physique de l'état solide et physique des fluides	D 10	Isotopes et sources de rayonnements
A 14	Physique des plasmas et réactions thermonucléaires	D 20	Applications des isotopes et des rayonnements
A 15	Astrophysique et cosmologie, rayonnement cosmique	E 11	Thermodynamique et écoulement des fluides
A 16	Conversion directe d'énergie	E 13	Structures mécaniques et équipements
A 17	Physique des basses températures et cryogénie	E 14	Explosions nucléaires
A 20	Physique des hautes énergies	E 15	Manutention des matériaux radioactifs
A 30	Physique neutronique et physique nucléaire	E 16	Accélérateurs
B 11	Analyse chimique et isotopique	E 17	Essais des matériaux
B 12	Chimie minérale, chimie organique et chimie-physique	E 20	Réacteurs à fission (généralités)
B 13	Radiochimie et chimie nucléaire	E 30	Types spécifiques de réacteurs à fission et centrales associées
B 14	Chimie des rayonnements	E 40	Instrumentation
B 16	Combustibles nucléaires	E 50	Gestion des déchets
B 22	Métaux et alliages	F 10	Sociologie et sciences économiques
B 23	Céramiques et cermets	F 20	Droit
B 24	Autres matériaux	F 30	Documentation nucléaire
B 30	Sciences de la terre	F 40	Garanties nucléaires et contrôle de vérification
C 10	Tous les effets et aspects variés de l'irradiation externe en biologie	F 50	Méthodes mathématiques et codes pour ordinateur
C 20	Effets et cinétique des radioisotopes	F 60	Divers
C 40	Sciences de la vie appliquées		

Rapport CEA-R-5575

Cote-matière de ce rapport : A14

MOTS CLEFS (extraits du thesaurus INIS)

en français

PLASMA RELATIVISTE
HYDRODYNAMIQUE
ESPACE DE MINKOVSKI
EQUATIONS CINETIQUES DES PLASMAS

en anglais

RELATIVISTIC PLASMA
HYDRODYNAMICS
MINKOVSKI SPACE
PLASMA KINETIC EQUATIONS

RAPPORT CEA-R-5575 - Fabrice DEBBASCH, Guy BONNAUD

"LES FLUIDES CHARGES RELATIVISTES : APPROCHES HYDRODYNAMIQUE ET CINÉTIQUE"

Sommaire - Ce rapport établit, de manière aussi rigoureuse et consistante que possible, dans le cadre de la relativité restreinte, les équations fondamentales d'une description hydrodynamique et cinétique d'un fluide chargé. Une telle étude doit déboucher sur une modélisation propre, tant littérale que numérique, des plasmas relativistes qui apparaîtront dans l'interaction d'un champ laser intense avec une cible. Par souci de simplicité, nous nous sommes restreints au cas du fluide parfait ou, autrement dit, nous avons négligé tout processus de dissipation d'énergie à l'intérieur du fluide.

1991 - Commissariat à l'Energie Atomique - France

RAPPORT CEA-R-5575 - Fabrice DEBBASCH, Guy BONNAUD

"RELATIVISTIC CHARGED FLUIDS : HYDRODYNAMIC AND KINETIC APPROACHES"

Summary - This report gives a rigorous and consistent hydrodynamic and kinetic description of a charged fluid and the basis equations, in a relativistic context. This study should lead to a reliable model, as much analytical as numerical, of relativistic plasmas which will appear in the interaction of a strong laser field with a plasma. For simplicity, we limited our study to a perfect fluid or, in other words, we disregarded the energy dissipation processes inside the fluid.

1991 - Commissariat à l'Energie Atomique - France

- Rapport CEA-R-5575 -

Centre d'Études de Limeil-Valenton
Département Fusion
Groupe Interaction Rayonnement-Matière

LES FLUIDES CHARGÉS RELATIVISTES :
APPROCHES HYDRODYNAMIQUE ET CINÉTIQUE

par

Fabrice DEBBASCH*, Guy BONNAUD

*Stagiaire militaire ; adresse permanente : Ecole Normale Supérieure,
Laboratoire de Radioastronomie millimétrique

- Octobre 1991 -

REMERCIEMENTS

Bernard Cagnac, Université Paris 6

Olivier Lafitte, DMA, CEL-V

Guy Laval, Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique

Benoit Perthame, Université Orléans

Pierre Raviart, DMA, CEL-V

Eric Ringeissen, DMA, CEL-V

Jean-Pierre Rivet, Observatoire de Nice/Côte d'Azur

Rémi Sentis, DMA, CEL-V

Monique Signore, Laboratoire de Radioastronomie millimétrique de l'ENS

Denis Teychenné, DFu, CEL-V

LISTE DES SYMBOLES UTILISES

NB : Les définitions précédées de ; correspondent à une utilisation en indice.

Entre (), on indique la section où le symbole est utilisé ou bien l'expression dans laquelle il apparaît, lorsque plusieurs définitions ont été données à un même symbole.

A : 4-potentiel de champ

B : Induction magnétique

E : Champ électrique ; \mathcal{E} : énergie

F : Tenseur champ électromagnétique

J : Densité de courant électrique

K : Référentiel

L : Lagrangien

M : \mathcal{M} : espace de Minkowski

N : Nombre de particules

P : (gras) 3N-uplet des composantes d'impulsion de N particules ;

\mathcal{P} : Espace des phases (spatio-temporel) d'une particule

R : (gras) 3N-uplet des composantes de position de N particules

S : Action

T : Tenseur d'énergie impulsion

U : 4-vecteur vitesse hydrodynamique (normalisée à 1)

V : (gras) Vitesse du fluide ; $d\mathcal{V}$: forme de volume hexadimensionnel de l'espace des phases associé à un système

c : Vitesse de la lumière dans le vide

e : Charge électronique (>0) ; i électronique

f : Fonction de distribution à une particule

g : tenseur métrique

i : i indice de composante spatiale d'un 4-vecteur

j : j indice de composante spatiale d'un 4-vecteur ; courant de particules

k : k indice de composante spatiale d'un 4-vecteur

m : Masse d'une particule

n : Densité volumique de particules

p : Impulsion cinétique

q : Charge d'une particule
 \mathbf{r} : (gras) 3-vecteur position ; i indicateur de référentiel propre du fluide
 t : Temps
 \mathbf{u} : 4-vecteur vitesse particulaire normalisée à 1
 \mathbf{v} : (gras) 3-vitesse d'une particule
 w : Densité d'enthalpie
 \mathbf{x} : 4-vecteur position ; première composante spatiale du 4-vecteur position
 y : Deuxième composante spatiale du 4-vecteur position
 z : Troisième composante spatiale du 4-vecteur position

Δ : Fonction de distribution définissant un ensemble statistique de Gibbs
 Π : tenseur d'ordre 2 obtenu à partir des moments de l'équation de Boltzmann

α : i Repérage d'une particule
 ϵ_0 : constante diélectrique du vide
 γ : Facteur de Lorentz
 ϕ : Potentiel électrique
 μ : i Indice de composante d'un 4-vecteur ; μ_0 : perméabilité magnétique du vide
 ν : i Indice de composante d'un 4-vecteur
 ρ : Densité volumique de charges électriques
 π : Pression
 0 : i indicateur de référentiel propre

NOTATION

L'espace-temps retenu pour notre étude est l'espace-temps de Minkowski (\mathcal{M}). La composante temporelle d'un 4-vecteur sera désignée avec l'indice 0 et les composantes spatiales avec les indices 1, 2 et 3. Plus généralement, en accord avec les notations les plus courantes, les indices latins (i, j, k, \dots) prendront leur valeur dans $\{1, 2, 3\}$ et les indices grecs (μ, ν, \dots), dans $\{0, 1, 2, 3\}$. Les vecteurs seront notés en gras. Le quadri-vecteur rayon est noté x^μ et a pour coordonnées $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{r}) = (ct, x, y, z)$ où c désigne la vitesse de la lumière dans le vide. Nous ne considérerons bien entendu que des transformations entre référentiels inertiels. La métrique utilisée, qui définit l'intervalle sous la

forme : $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ (en utilisant la convention d'Einstein de sommation sur tout indice

deux fois répétés dans une expression) sera choisie sous la forme $[g^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

La dérivée partielle par rapport à l'une quelconque des coordonnées d'espace-temps x^μ sera aussi bien désignée par le symbole ∂_μ que par ∂_{x^μ} . Le symbole \wedge désigne le produit extérieur de 2 formes. Enfin, le terme densité employé sans autre précision désignera toujours une densité *spatiale*, c'est-à-dire une densité par rapport à la forme de volume tridimensionnelle $dx \wedge dy \wedge dz$ du référentiel dans lequel on travaille.

Le système d'unités MKSA rationalisé sera utilisé.

A. EQUATIONS D'UN FLUIDE PARFAIT RELATIVISTE NON CHARGE

A.I Approche hydrodynamique

On sait qu'un fluide est dit parfait si l'on néglige tout processus de dissipation d'énergie en son sein. La description hydrodynamique complète d'un tel fluide nécessite cinq équations scalaires. La première de ces équations n'est autre que l'équation de continuité, qui exprime la conservation, au cours du temps, de la matière dont est constitué le fluide (équation (A.I.1) ci-dessous). Trois autres équations sont obtenues en écrivant la conservation de l'impulsion du fluide (et sont regroupées, pour un fluide non relativiste, sous une unique équation tri-vectorielle, dite équation d'Euler) et la cinquième décrit la conservation de l'énergie dans le fluide. Comme nous allons le voir, ces quatre dernières équations peuvent être, en relativité d'Einstein, regroupée en une équation tensorielle dans l'espace de Minkowski (équation (A.I.5)) plus bas).

A.I.1 Equation de continuité

Plaçons-nous dans un référentiel galiléen fixé, K , dans lequel nous désignerons les coordonnées des événements par le quadruplet (t, \mathbf{r}) . Comme en physique classique, le principe physique de conservation de la matière, exprimé mathématiquement par la conservation du nombre total de particules d'un système isolé, permet d'écrire, dans ce référentiel, l'équation de continuité sous la forme usuelle :

$$\partial_t n + \nabla(n\mathbf{V}) = 0 \quad (\text{A.I.1})$$

où n et \mathbf{V} désignent, respectivement, la densité volumique de particules et la vitesse du fluide en un point P donné de \mathcal{M} . Si l'on multiplie maintenant le numérateur et le dénominateur du premier terme par c , il est alors clair que l'équation de continuité exprime en fait la nullité de la divergence quadridimensionnelle de la quantité $(nc, n\mathbf{V})$. Celà étant vrai dans tout référentiel, on en déduit que cette quantité se transforme comme un 4-vecteur. Ce dernier est bien évidemment appelé quadrivecteur densité de courant (de particules) et est représenté usuellement par le symbole j^μ . On peut exprimer j^μ à l'aide du 4-vecteur vitesse $U^\mu = (\gamma, \gamma \mathbf{V}/c)$ (où $\gamma = (1 - \mathbf{V}^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$) en écrivant :

$$j^\mu = n_0 U^\mu \quad \text{avec} \quad n_0 = \frac{n}{\gamma} \quad (\text{A.I.2})$$

Nous souhaiterions maintenant faire deux remarques importantes; d'abord, du fait que n_0 est fondamentalement défini comme un facteur de proportionnalité entre deux 4-vecteurs, cette quantité est obligatoirement un scalaire de Lorentz ; ensuite, si la tri-vitesse du fluide au point P est nulle (dans K), sa densité de particules en ce point vaut précisément n_0 . Il est alors relativement clair que n_0 représente en fait la densité de particules du fluide en chaque point, dans le référentiel propre local¹. en effet, dans ce référentiel, la tri-vitesse du fluide est évidemment nulle au point considéré. Soulignons cependant qu'une interprétation propre et fine du lien entre la notion de densité et celle de changement de référentiel est en fait loin d'être triviale. Nous renvoyons sur ce point le lecteur au premier des appendices à ce rapport.

A.I.2 Conservation de l'énergie et de l'impulsion

Par analogie avec le cas tridimensionnel, on introduit, en relativité restreinte, un tenseur d'ordre deux, appelé tenseur d'énergie-impulsion du fluide et défini par^[14] :

$$T_f^{\mu\nu} = w U^\mu U^\nu - \pi g^{\mu\nu} \quad (\text{A.I.3})$$

où les quantités w et π sont, par définition, deux scalaires de Lorentz dont la "signification physique" va maintenant être commentée. La quantité T^{00} est la densité d'énergie ; les composantes T_f^{ij} de $T_f^{\mu\nu}$ forment le tenseur tri-dimensionnel de densité de flux d'impulsion dit tenseur des contraintes.

Le rapprochement avec la situation galiléenne nous indique déjà clairement que π va jouer le rôle d'une pression. Choisissons un point quelconque (P) du fluide et plaçons-nous dans le référentiel propre local (K_P) en ce point. La composante (00) du tenseur T_f représente alors la densité d'énergie du fluide, que nous noterons ϵ . La dépendance de ϵ par rapport à l'énergie de masse du fluide (qui est proportionnelle à $n_0 c^2$) et par rapport à la pression π est bien-sûr donnée par l'équation d'état retenue pour décrire le fluide. La loi de Pascal nous indique que la répartition est isotrope et que par conséquent, dans le repère K_P nous avons : $T_f^{ij} = \pi \delta^{ij}$. La composante T_f^{00} vaut alors trivialement (en P), $w - \pi$. On en déduit l'identité :

¹On appelle, en chaque point du fluide, référentiel propre local, le référentiel galiléen K_P qui est animé par rapport à K d'une vitesse égale à celle du fluide au point considéré (dans ce même référentiel K).

$$w = \varepsilon(n_0, \pi) + \pi \quad (\text{A.I.4})$$

Comme dans \bar{K}_r , le scalaire π représente la pression hydrostatique ; w est en fait la densité d'enthalpie du fluide, calculée dans le référentiel propre local.

Une fois le tenseur T_f connu, la conservation de l'énergie et de l'impulsion s'exprime facilement par l'égalité tensorielle unique :

$$\partial_\mu T_f^{\mu\nu} = 0 \quad \forall \nu \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (\text{A.I.5})$$

Par développement direct, on obtient :

$$\partial_\mu (w U^\mu) U^\nu + w U^\mu \partial_\mu U^\nu - \partial_\mu (\pi g^{\mu\nu}) = 0$$

En projetant alors cette relation sur la direction du 4-vecteur U , c'est à dire, en écrivant la nullité de la contraction $U_\nu \partial_\mu T_f^{\mu\nu}$, il est facile de trouver une "nouvelle" expression de la divergence $\partial_\mu (w U^\mu)$:

$$\partial_\mu (w U^\mu) - U^\mu \partial_\mu \pi = U^\mu \partial_\mu \varepsilon + w \partial_\mu U^\mu = 0 \quad (\text{A.I.6})$$

qui permet alors de "simplifier" l'équation originelle (A.I.5) et l'on obtient finalement :

$$\boxed{w U^\mu \partial_\mu U^\nu + U_\mu U^\nu \partial^\mu \pi - \partial^\nu \pi = 0} \quad (\text{A.I.7})$$

La partie tridimensionnelle de cette équation s'écrit aisément :

$$\boxed{w \left[\frac{\gamma}{c} \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla \right] \mathbf{U} + \mathbf{U} \left[\frac{\gamma}{c} \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla \right] \pi + \nabla \pi = 0} \quad (\text{A.I.7})$$

où l'on reconnaît l'équivalent relativiste de l'équation d'Euler usuelle. \mathbf{U} n'est autre que la partie spatiale du 4-vecteur vitesse du fluide. Enfin, il est clair que l'équation scalaire suivante, obtenue en utilisant l'équation de continuité (A.I.1) pour réécrire (A.I.6) :

$$\partial_t (\gamma \sigma_0) + \nabla (\gamma \sigma_0 \mathbf{V}) = \mathcal{E} \quad (\text{A.I.8})$$

où σ_0 est la densité d'entropie dans le référentiel propre local, décrit en fait la conservation de l'énergie du fluide. On peut naturellement associer à cette équation un 4-vecteur densité de flux (courant) d'entropie $\Sigma^\mu = \sigma_0 U^\mu$ et l'équation précédente exprime bien-sûr la nullité de la 4-divergence de ce 4-vecteur.

Remarque : La fonction $\mathcal{E}(n_0, \pi)$ détermine en fait l'équation d'état du fluide. On peut montrer assez facilement^[13] que, si toutes les particules ponctuelles constituant le fluide sont ultrarelativistes, cette relation ne peut être que $\mathcal{E}(n_0, \pi) = 3\pi$.

A.II Approche cinétique

Nous souhaitons maintenant établir de la manière à la fois la plus naturelle et la plus propre possible une équation de Boltzmann relativiste (au sens de la relativité restreinte) et montrer comment l'on peut en "dédire" les différentes équations de l'hydrodynamique présentées plus haut. Pour ce faire, nous commencerons par proposer une formulation hamiltonienne claire de la dynamique relativiste (dans cette partie, uniquement pour des particules libres²) pour ensuite définir ce que nous entendons par fonction de distribution, montrer rigoureusement qu'il s'agit bien d'un scalaire de Lorentz, et enfin obtenir l'opérateur de Liouville relativiste puis prendre les moments de l'équation de Boltzmann ainsi obtenue.

A.II.1 Formulations lagrangienne et hamiltonienne de la dynamique relativiste

Ecrire une formulation canonique "propre" des équations du mouvement de la relativité restreinte est beaucoup moins aisé qu'il y paraît. Une introduction rapide au sujet est proposée au lecteur dans l'appendice 2. Dans ce qui suit, nous retiendrons une approche qui n'est *pas* manifestement covariante³, mais qui fournit cependant des équations parfaitement invariantes de Lorentz, particulièrement faciles à utiliser pour les développements de physique statistique qui vont suivre.

Plaçons-nous dans un référentiel galiléen K fixé. Dans ce référentiel, nous écrivons l'action sous la forme :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) dt \quad (\text{A.II.1})$$

²Le cas d'une particule chargée soumise à un champ électromagnétique sur lequel elle n'influe pas sera traité plus bas (voir B.II)

³C'est à dire que les égalités qui suivent ne seront pas des égalités entre tenseurs.

où $\mathbf{r}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$ sont respectivement la position et la tri-vitesse de la particule étudiée (dans ce référentiel).

Avec cette définition, le mouvement d'une particule libre de masse m peut être convenablement décrit en choisissant le lagrangien^[3, 13]

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.II.2})$$

On obtient alors la tri-impulsion conjuguée : $\mathbf{p} = \partial_{\mathbf{v}} L = \gamma m \mathbf{v}$ et le hamiltonien comme transformée de Legendre tridimensionnelle du Lagrangien par rapport à la vitesse :

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = c\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2} \quad (\text{A.II.3})$$

Les équations de Hamilton prennent bien-sûr la forme usuelle (identique à celle du cas classique) :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \partial_{\mathbf{p}} \mathcal{H} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\partial_{\mathbf{r}} \mathcal{H} \quad (\text{A.II.4})$$

Il est important de souligner que la démarche retenue ici est purement tridimensionnelle (donc a priori moins "élégante" qu'une démarche quadridimensionnelle) mais n'en reste pas moins parfaitement licite, parce que covariante, même dans le cadre de la relativité restreinte. Cela ne nous empêchera par ailleurs aucunement de remarquer que, si l'on définit l'énergie \mathcal{E} comme la valeur numérique du Hamiltonien \mathcal{H} , la quantité $(\mathcal{E}/c, \mathbf{p})$ est un 4-vecteur, que nous nomerons naturellement 4-vecteur impulsion de la particule et que nous désignerons sous le symbole \mathbf{p}^μ . On a évidemment la relation : $\mathbf{p}^\mu = mc \mathbf{u}^\mu$, où \mathbf{u}^μ est la quadri-vitesse normalisée habituellement utilisée en relativité restreinte.

A.II.2 Fonction de distribution f à une particule

Plaçons-nous dans un référentiel galiléen donné \mathcal{K} . L'espace des phases \mathcal{P} le plus naturel correspondant à l'espace de Minkowski est, d'après la dernière remarque, de dimension 8. Par extension naturelle de la convention adoptée jusqu'ici (et par analogie avec le cas classique), nous conviendrons cependant d'appeler densité dans \mathcal{P} toute densité par rapport à la forme de volume hexadimensionnel (orienté) $d\mathcal{V} = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dp_x \wedge dp_y \wedge dp_z$ (et non pas par rapport à la vraie forme de volume dans \mathcal{P}).

Le modèle "microscopique" retenu pour le fluide sera un ensemble de N particules ponctuelles identiques caractérisée chacune par le même scalaire de masse m . L'état

macroscopique est supposé donné par la connaissance d'un certain nombre de scalaires ou de champs (température, densité...) déductibles de mesures uniquement macroscopiques. Cette notion d'état macroscopique nous permet d'utiliser celle d'ensemble statistique de Gibbs (dont une définition sera rappelée dans la discussion qui clôt ce rapport) et nous noterons $\Delta(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t)$ la densité associée à un tel ensemble (où \mathbf{R} et \mathbf{P} sont des $3N$ -uplets représentant respectivement la position et l'impulsion de toutes les particules du système à un instant donné). Nous considérerons que Δ est normalisée à 1.

La densité microscopique de matière dans \mathcal{P} à un instant t donné est la somme (pondérée par $1/N$) des distributions δ centrées sur la position et l'impulsion de chacune des N particules à cet instant. Nous définirons $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ comme la moyenne statistique de cette densité microscopique, autrement dit sa moyenne par rapport à la forme $\Delta(\mathbf{R}, \mathbf{P}, t) d\mathbf{R} \wedge d\mathbf{P}$. Ainsi calculée, $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ est une densité dans \mathcal{P} et représente, en termes physiques intuitifs, la probabilité moyenne de présence d'une particule en \mathbf{r} et \mathbf{p} à l'instant t . L'intégration de f par rapport à la forme de volume tri-dimensionnel de l'espace des impulsions $d\mathcal{V}_p (= dp_x \wedge dp_y \wedge dp_z)$ fournit donc la probabilité de présence d'une particule en un point donné de l'espace physique et à un instant donné. Nous conviendrons d'assimiler pour le moment cette probabilité de présence à la fonction $n(\mathbf{r}, t)$ définie au paragraphe A.I.1, à un facteur multiplicatif près. En d'autres termes, nous *admettrons* l'égalité :

$$n(\mathbf{r}, t) = N \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathcal{V}_p \quad (\text{A.II.5})$$

et ne discuterons le bien-fondé de cette assertion que dans la dernière partie de ce rapport.

Compte tenu de l'égalité précédente, il est aisé d'exprimer le 4-vecteur densité de courant (de particules) $n_0 U^\mu = (n, n\mathbf{V}/c)$ à l'aide de f ; on obtient le résultat :

$$j^\mu(\mathbf{r}, t) = N \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) p^\mu \frac{d\mathcal{V}_p}{p^0} \quad (\text{A.II.6})$$

où l'on a admis (au même titre que (A.II.5)) la relation suivante :

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \mathbf{v} d\mathcal{V}_p}{\int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathcal{V}_p} = N \frac{\int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \mathbf{v} d\mathcal{V}_p}{n(\mathbf{r}, t)} \quad (\text{A.II.7})$$

Trouver comment varie f lors d'une transformation de Lorentz revient à étudier à loi de variation de la forme dV_p/p^0 lors d'une telle transformation. Il existe dans la littérature différentes démonstrations de l'invariance de Lorentz de cette forme^[8, 13]. Nous proposons, pour notre part, une démonstration un peu différente des démonstrations usuelles "pour physiciens" dans le premier appendice ci-dessous⁴. Si l'on admet ce résultat, il découle immédiatement de la formule ci-dessus que f est également un scalaire de Lorentz.

A.II.3 Opérateur de Liouville relativiste

La formulation hamiltonienne des équations du mouvement relativistes donnée ci-dessus permet facilement d'arriver, comme dans le cas classique, à l'équation suivante (encore dite équation de Liouville), décrivant, dans un référentiel donné, la conservation de la matière au cours du temps ou, autrement dit, la conservation de la fonction Δ le long d'une trajectoire dans l'espace des phases du système :

$$\partial_t \Delta + \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \right) \Delta + \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{P}} \right) \Delta = 0 \quad (\text{A.II.8})$$

En continuant à suivre une démarche essentiellement identique à celle pratiquée dans le cas "non relativiste", on obtient, au premier ordre de développement de la hiérarchie BBGKY, l'équation de Boltzmann relativiste décrivant un ensemble de particules libres :

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0 \quad (\text{A.II.9})$$

où \mathbf{v} et \mathbf{p} sont liés par la relation : $\mathbf{p} = m \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$. Le second membre est identiquement nul car l'on s'est restreint, par souci de simplicité, à un gaz de particules *totallement libres*, en excluant notamment *toute* interaction entre ces dernières.

L'opérateur de Liouville relativiste \mathcal{L} peut également se mettre sous la forme suivante, qui nous sera utile plus bas :

⁴Cette démonstration éclairera également le cas de la forme de volume dans l'espace physique tridimensionnel et permettra d'éclairer, nous l'espérons, un vieux débat (houleux) concernant la nature (scalaire ou non) des différentes densités utilisées en physique statistique et thermodynamique relativistes. Nous avons préféré ne pas laisser cette discussion envahir le "corps même" du rapport, et ne présentons en fait, en dehors de cet appendice, que les conclusions auxquelles nous sommes arrivées (ainsi qu'une ébauche de démonstration).

$$L = \partial_t + c \frac{\mathbf{p} \cdot \nabla}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}} \quad (\text{A.II.10})$$

A.II.4 Moments de l'équation de Boltzman

L'équation de continuité s'obtient facilement en intégrant l'équation de Boltzmann "par rapport à la forme $d\mathcal{V}_p$ "; en effet, puisque r et v sont des variables indépendantes :

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) f(r, \mathbf{p}, t) = 0 = \partial_t f + \nabla(fv) \quad (\text{A.II.11})$$

On en déduit alors immédiatement l'équation (A.I.1), en remarquant que les dérivations temporelle et spatiales commutent trivialement avec l'intégration sur \mathbf{p} et en admettant les définitions de n et \mathbf{V} proposées en A.II.2.

Le moment de l'équation de Boltzmann par rapport à une composante quelconque de \mathbf{p} (p^μ) donne la relation :

$$\int \partial_t f p^\mu + c \partial_j \frac{f p^\mu p^j}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}} d\mathcal{V}_p = 0 \quad (\text{A.II.12})$$

En utilisant l'identité : $\int \partial_t f p^\mu d\mathcal{V}_p = \int \partial_t f p^0 p^\mu \frac{d\mathcal{V}_p}{p^0}$, on peut réécrire l'équation obtenue sous la forme : $c \partial_\nu \Pi^{\mu\nu} = 0$ où :

$$\Pi^{\mu\nu} = \int \frac{f p^\mu p^\nu}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}} d\mathcal{V}_p = \int \frac{f p^\mu p^\nu}{p^0} d\mathcal{V}_p \quad (\text{A.II.13})$$

est un 4-tenseur symétrique d'ordre 2.

Comme en relativité galiléenne, il convient maintenant, pour progresser, d'introduire le référentiel propre local du fluide, K_r , qui va nous permettre d'évaluer le tenseur Π dans K , en fonction de quantités caractéristiques mesurées dans K_r . Plaçons-nous en un point P du fluide, repéré, dans K , par les coordonnées (t, \mathbf{r}) . A ce point, est associé, dans K_r , le point P_r , dont les coordonnées, (t_r, \mathbf{r}_r) , se déduisent de celles de P par une transformation de Lorentz pure de vitesse $\mathbf{V}(r, t)$. Soit une particule située en P qui, dans K , a une impulsion \mathbf{p} . Elle aura, dans K_r , une impulsion \mathbf{p}_r . L'impulsion dans K pourra s'exprimer en fonction de cette dernière à l'aide de la relation :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_r + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V} + \frac{\gamma}{c} p_r^0 \mathbf{V} \quad (\text{A.II.14})$$

L'invariance de la fonction de distribution f signifie simplement que la nouvelle fonction f_r définie par la relation $f_r(t_r, r_r, p_r) = f(t, r, p)$ décrit bien la distribution statistique des particules au point P_r , telle qu'on peut l'observer dans K_r . Nous ferons l'hypothèse habituelle (mais pas du tout triviale) que la fonction f_r est isotrope par rapport à sa variable d'impulsion p_r , c'est-à-dire que f_r ne peut dépendre de p_r que par l'intermédiaire de son carré p_r^2 . Il en résulte, notamment, que f_r est une fonction paire de l'une quelconque des composantes de p_r . Nous voici maintenant armés pour obtenir une expression relativement simple du tenseur Π . Soit donc $\Pi(P)$ la valeur de ce tenseur *dans* K au point P . On peut écrire :

$$\Pi^{ij}(P) = \int \frac{f_r}{p_r^0} d\mathbf{v}_{p_r} \left[p_r^i + (\gamma-1) \frac{p_r \cdot \mathbf{V}}{V^2} v^i + \frac{\gamma}{c} p_r^0 v^i \right] \left[p_r^j + (\gamma-1) \frac{p_r \cdot \mathbf{V}}{V^2} v^j + \frac{\gamma}{c} p_r^0 v^j \right] \quad (\text{A.II.15})$$

Un simple développement suivi d'une factorisation permet de mettre $\Pi^{ij}(P)$ sous la forme d'une somme de quatre termes, $N_l^{ij}(P)$, où l prend les valeurs 1, 2, 3 ou 4, donnés par les formules :

$$\begin{aligned} N_1^{ij}(P) &= \int \frac{f_r}{p_r^0} p_r^i p_r^j d\mathbf{v}_{p_r} \\ N_2^{ij}(P) &= \left\{ \int \frac{f_r}{p_r^0} \left[(\gamma-1) \frac{p_r \cdot \mathbf{V}}{V^2} + \frac{\gamma}{c} p_r^0 \right]^2 d\mathbf{v}_{p_r} \right\} v^i v^j \\ N_3^{ij}(P) &= \left\{ \int \frac{f_r p_r^i}{p_r^0} \left[(\gamma-1) \frac{p_r \cdot \mathbf{V}}{V^2} + \frac{\gamma}{c} p_r^0 \right] d\mathbf{v}_{p_r} \right\} v^j \\ N_4^{ij}(P) &= \left\{ \int \frac{f_r p_r^j}{p_r^0} \left[(\gamma-1) \frac{p_r \cdot \mathbf{V}}{V^2} + \frac{\gamma}{c} p_r^0 \right] d\mathbf{v}_{p_r} \right\} v^i \end{aligned} \quad (\text{A.II.16})$$

Penchons-nous d'abord sur la troisième de ces quantités. L'intégrale correspondante se scinde en deux parties. La deuxième partie est identiquement nulle car l'intégrand est une fonction impaire de p_r^i . $N_3^{ij}(P)$ peut alors se réécrire sous la forme :

$$N_3^{ij}(P) = \frac{(\gamma-1)}{V^2} \left\{ \int \frac{f_r}{p_r^0} p_r^i p_r^k d\mathbf{v}_{p_r} \right\} v^k v^j \quad (\text{A.II.17})$$

En raison de l'isotropie de f_r , l'intégrale intervenant dans cette dernière expression, qui est en fait l'intégrale définissant $N_1^{ij}(P)$, est forcément proportionnelle au symbole de Kronecker δ^{ik} (seul moyen pour que l'intégrand soit pair). Si l'on appelle le facteur de proportionnalité f_2 , on a donc les égalités :

$$N_3^{ij}(P) = \frac{(\gamma-1)}{v^2} f_2 v^i v^j = N_4^{ij}(P) \quad \text{et} \quad N_1^{ij}(P) = f_2 \delta^{ij} \quad (\text{A.II.18})$$

Il ne reste donc plus qu'à étudier $N_2^{ij}(P)$. Le développement direct du carré dans l'intégrand engendre trois contributions. Celle correspondant au "double produit" s'écrit :

$$\frac{\gamma(\gamma-1)}{c^2 v^2} \int f_r(p_r \cdot v) d\mathcal{V}_{p_r} \quad (\text{A.II.19})$$

ce qui montre clairement sa nullité (toujours du fait de l'isotropie de f_r). Le carré du premier terme vaut :

$$\frac{(\gamma-1)^2}{v^4} \int \frac{f_r}{p_r} (p_r \cdot v)^2 d\mathcal{V}_{p_r} \quad (\text{A.II.20})$$

qui, en écrivant sous forme développée le carré du produit scalaire, se réduit en fait à :

$$\frac{(\gamma-1)^2}{v^2} f_2 \quad (\text{A.II.21})$$

Enfin, le carré du dernier terme de (A.II.16) nous conduit à l'intégrale : $\frac{\gamma^2}{c^2} \int f_r p_r^0 d\mathcal{V}_{p_r} = \frac{\gamma^2}{c^2} \mathbf{e}$

où \mathbf{e} a la dimension d'une énergie.

Rassemblant tous les résultats précédents, nous pouvons réécrire les composantes purement spatiales de Π sous la forme :

$$\Pi^{ij} = f_2 \delta^{ij} + \left[\frac{(\gamma-1)^2}{v^2} f_2 + \frac{\gamma^2}{c^2} \mathbf{e} \right] v^i v^j + 2 \frac{(\gamma-1)}{v^2} f_2 v^i v^j \quad (\text{A.II.22})$$

soit, après un peu d'algèbre facile, $\Pi^{ij} = f_2 \delta^{ij} + (\mathbf{e} + f_2) U^i U^j$

Des calculs du même type que ceux qui viennent d'être présentés permettent, en utilisant la relation : $p^0 = \gamma \left[p_r^0 + \frac{\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{V}}{c} \right]$, d'évaluer les autres composantes de Π . On trouve aisément :

$$\begin{aligned} \Pi^{0i} &= \frac{\gamma^2}{c^2} (\mathbf{e} + \mathbf{f}_e) V^i = (\mathbf{e} + \mathbf{f}_e) U^0 U^i \\ \Pi^{00} &= \gamma^2 \mathbf{e} + (\gamma^2 - 1) \mathbf{f}_e = (\mathbf{e} + \mathbf{f}_e) U^0 U^0 - \mathbf{f}_e \end{aligned} \quad (\text{A.II.23})$$

Il est alors clair que Π et T_f ont exactement la même structure et que l'identification des quantités \mathbf{e} et \mathbf{f}_e avec l'énergie \mathcal{E} et la pression π achève la déduction complète des équations du mouvement d'un fluide parfait relativiste à partir de l'équation de Boltzmann (également relativiste). Rappelons que l'obtention de ce résultat nécessite cependant d'identifier également, comme dans le cas classique, les champs "macroscopiques" caractérisant "l'état du fluide" à des moyennes statistiques évaluées à l'aide de la fonction f . Ce dernier point sera repris et discuté en détail plus bas.

Remarque :

L'épine dorsale du raisonnement précédent, qui nous a permis d'obtenir l'équation (A.I.5) comme moment d'ordre un de l'équation de Boltzmann, réside, comme en relativité galiléenne, dans l'utilisation du "référentiel propre local", dans lequel la fonction de distribution a été supposée isotrope. Il est important de souligner qu'il convient de supposer, pour déduire effectivement (A.I.5) de (A.II.9), que ce dernier référentiel est animé de la vitesse moyenne \mathbf{V} par rapport au référentiel du laboratoire. Ce point n'a en fait rien d'évident car l'on aurait pu être tenté de choisir plutôt comme vitesse de translation relative d'un référentiel par rapport à l'autre, la vitesse \mathbf{V}' associée à l'impulsion moyenne \mathbf{P} par la formule : $\mathbf{V}' = \mathbf{P} / (m^2 + \mathbf{P}^2/c^2)^{1/2}$. Ce dernier choix ne convient cependant pas car les équations hydrodynamiques ont comme inconnue la vitesse moyenne \mathbf{V} , et non pas l'impulsion moyenne \mathbf{P} - ces équations font d'ailleurs intervenir, très logiquement le facteur de Lorentz γ associé à la vitesse moyenne \mathbf{V} . Notons enfin que, si dans un référentiel, la fonction de distribution est isotrope par rapport à l'impulsion, elle l'est aussi de facto par rapport à la vitesse, et les valeurs moyennes de ces deux quantités sont alors simultanément nulles dans ce référentiel.

$$d^3x' = dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3 = \gamma \left(d^3x - \frac{\mathbf{V}}{c} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right)$$

B. EQUATIONS D'UN FLUIDE PARFAIT RELATIVISTE CHARGE

B.I Approche hydrodynamique

B.I.1 Obtention des équations

L'approche "purement macroscopique" usuelle consiste à supposer que le tenseur énergie-impulsion (T) du système constitué des charges et du champ qu'elles créent peut se mettre sous la forme simple $T = T_f + T_c$ où T_f conserve l'expression que nous avons utilisée jusqu'ici et T_c n'est autre que le tenseur énergie-impulsion associé habituellement aux équations de Maxwell décrivant l'évolution du champ *macroscopique* régnant dans le fluide⁵; nous restreignant au cas où les particules (microscopiques) constituant le fluide ont toutes une même masse m et une même charge q , nous supposons donc que le système total est convenablement décrit par le système d'équations suivant [13, 14] :

$$a_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\nu F^{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{B.I.1})$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu = \mu_0 q n_0 U^\mu \quad (\text{B.I.2})$$

$$\partial_\mu (T_f^{\mu\nu} + T_c^{\mu\nu}) = 0 \quad (\text{B.I.3})$$

où $a_{\mu\nu\alpha\beta}$ est le symbole (pseudo-tenseur) unité complètement antisymétrique d'ordre 4,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{B.I.4})$$

$$T_c^{\mu\nu} = \epsilon_0 (F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu - \frac{1}{4} F^2 g^{\mu\nu}) \quad (\text{B.I.5})$$

et $A = (\Phi, \mathbf{A})$, le 4-potential de champ défini manière à ce que les champs électriques et magnétiques \mathbf{E} et \mathbf{B} soient donnés par les expressions :

$$\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} - \nabla\Phi \quad (\text{B.I.6})$$

⁵De manière plus générale, on peut supposer que, dans l'expression de T , s'ajoutent aux deux termes précédents, un troisième terme T_{cf} , qui compléterait, de manière "directe", la description de l'interaction entre particules et champs (macroscopiques et/ou microscopiques). Ne pas tenir compte d'un tel terme revient à supposer que l'on peut parfaitement rendre compte des processus d'interaction par le seul couplage décrit par les équations de Maxwell (B.I.1) et (B.I.2). Nous verrons ci-dessous une interprétation statistique de cette hypothèse.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{B.I.7})$$

Le tenseur T_c s'écrit :

$$[T_c^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} W & \frac{\mathbf{S}}{c} \\ \frac{\mathbf{S}}{c} & C^{ij} \end{pmatrix} \quad (\text{B.I.8})$$

où W désigne la densité d'énergie électromagnétique :

$$W = \epsilon_0 \frac{\mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \quad (\text{B.I.9})$$

\mathbf{S} le vecteur de Poynting :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (\text{B.I.10})$$

C le tenseur des contraintes de Maxwell défini par :

$$C^{ij} = -\epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{\mu_0} B_i B_j + W \delta_{ij} \quad (\text{B.I.11})$$

En fonction de ces deux champs, les équations tensorielles (B.I.1) et (B.I.2) s'écrivent respectivement, en notant $\rho = qn$ et \mathbf{J} la densité et le vecteur courant de charges du fluide :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad (\text{B.I.1}')$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{B} - \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (\text{B.I.2}')$$

Il peut apparaître souhaitable d'effectuer, à partir de l'équation (B.I.3), des transformations similaires à celles qui nous ont permis de passer de (A.I.5) à (A.I.7). Par linéarité de l'opérateur divergence, il est clair que cela revient à ajouter au membre de gauche de (A.I.6) le terme $U^\nu U_\mu \partial_\alpha T_c^{\alpha\mu}$ et donc, au premier membre de (A.I.7), la somme $\partial_\mu T_c^{\mu\nu} - U^\nu U_\mu \partial_\alpha T_c^{\alpha\mu}$. Or, la contraction $U_\mu \partial_\alpha T_c^{\alpha\mu}$ est identiquement nulle. En effet, il est facile de s'assurer que l'on a l'égalité :

$$\partial_\alpha T_c^{\alpha\mu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\alpha} J_\alpha \quad (\text{B.I.12})$$

dont on remarquera au passage que la composante 0 peut se mettre sous la forme $\partial_t W + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$. Donc $U_\mu \partial_\alpha T_c^{\alpha\mu} = -\frac{1}{c} U_\mu F^{\mu\alpha} J_\alpha = -\frac{1}{c} qn_0 U_\mu U_\alpha F^{\mu\alpha}$. $[U_\mu U_\alpha]$ est un tenseur symétrique et F est antisymétrique. Il est alors clair que leur contraction est bien

identiquement nulle. Il reste donc à considérer que le terme $\partial_\mu T_c^{\mu\nu}$ dont la projection tridimensionnelle se calcule facilement grâce à (B.I.12) et vaut $-nq\mathbf{E} - \mathbf{J} \times \mathbf{B}$. Finalement, l'équation décrivant le comportement de l'impulsion du fluide chargé s'écrit :

$$w \left[\frac{\gamma}{c} \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla \right] \mathbf{U} + \mathbf{U} \left[\frac{\gamma}{c} \partial_t + \mathbf{U} \cdot \nabla \right] \pi + \nabla \pi = qn\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (\text{B.I.13})$$

ou encore en utilisant la tri-vitesse \mathbf{V} associée à \mathbf{U} (et le facteur de Lorentz $\gamma = (1 - \mathbf{V}^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$) :

$$w \left[\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \right] (\gamma \mathbf{V}) + \gamma \mathbf{V} \left[\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \right] \pi + \frac{c^2}{\gamma} \nabla \pi = \frac{c^2}{\gamma} qn [\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}] \quad (\text{B.I.13})'$$

On reconnaît, au second membre de cette équation, le terme décrivant la force exercée par le champ électromagnétique sur le fluide, ce qui est tout à fait normal puisque nous n'avons en fait rien fait d'autre qu'un bilan d'impulsion.

Enfin, d'après les calculs précédents, l'équation (A.I.6) est toujours valable, sans aucune modification. On en déduit qu'il en est de même de l'équation (A.I.8), qui décrit toujours l'adiabaticité de l'écoulement. Bien évidemment, l'équation de continuité n'est pas non plus modifiée.

Notons que, si l'on impose un champ électromagnétique extérieur au fluide (c'est à dire, un champ dont les sources ont une densité nulle dans le volume physique occupé par le fluide), l'équation précédente est parfaitement valable puisque les champs y intervenant sont les champs auto-consistants régnant dans le fluide.

Nous avons renvoyé en appendice 3 les expressions de (B.I.13)' décrivant la conservation de l'impulsion dans les 2 cas limites où (1) le plasma est totalement froid, (2) les phénomènes étudiés ne font intervenir qu'une unique direction spatiale, en l'absence de champ magnétique.

B.I.2 Limite "non relativiste" des équations précédentes

Il suffit, pour les obtenir, de faire tendre c vers l'infini dans les équations ci-dessus. Dans ces conditions, \mathbf{V}/c tend vers zéro et γ tend vers 1. Les équations de continuité exprimant la conservation de la matière et l'adiabaticité de l'écoulement prennent alors leur forme non relativiste usuelle. Dans cette même limite, w est équivalent à $n_0 m c^2$, où m est la masse des particules constituant le fluide (supposées toutes identiques). Dans (B.I.13)', le terme $\gamma \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \nabla) \pi$ intervenant dans la dérivée convective de la pression est alors manifestement

négligeable devant $c^2/\gamma \nabla \pi$. Par contre, le terme $\gamma \mathbf{V} \partial_t \pi$ n'est également négligeable que si les vitesses de phase caractéristiques des phénomènes étudiés sont inférieures à c ; ceci est effectivement le cas pour les phénomènes ondulatoires habituels qui engendrent dans les plasmas des variations de pression : ondes longitudinales plasma et ondes acoustique-ioniques. Dans ce cas, l'équation (B.I.13) redonne bien l'équation habituelle décrivant la conservation de l'impulsion d'un fluide parfait chargé "non relativiste", à savoir :

$$\boxed{m [\partial_t + \mathbf{V} \cdot \nabla] \mathbf{V} = q [\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}] - \frac{1}{n} \nabla \pi} \quad (\text{B.I.14})$$

B.II Approche cinétique

B.II.1 Formulations lagrangienne et hamiltonienne de la dynamique relativiste d'une particule dans un champ "extérieur"

Dans ce paragraphe, nous nous restreindrons au cas d'une particule de charge q et de masse m connues, soumise à un champ électromagnétique quelconque, associé à un 4-potential de champ A connu, sur lequel la particule n'a aucune influence.

Comme plus haut, plaçons-nous dans un référentiel galiléen particulier K , où les événements seront repérés par les coordonnées (t, \mathbf{r}) et où la tri-vitesse sera désignée par $\mathbf{v}(t)$. En conservant la définition de l'action introduite plus haut, le mouvement d'une particule de masse m et de charge q dans un champ électromagnétique dérivant du 4-potential A sera décrit par le lagrangien^[13] :

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -mc^2 \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + q \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\Phi = - (mc^2 + q A^\mu u_\mu) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B.II.1})$$

Un calcul simple permet alors d'obtenir successivement la tri-impulsion canonique \mathbf{p} et le hamiltonien H :

$$\mathbf{p} = \partial_{\mathbf{v}} L = \gamma m \mathbf{v} + q \mathbf{A} = \mathbf{p} + q \mathbf{A} \quad (\text{B.II.2})$$

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = c \left[m^2 c^2 + (\mathbf{p} - q \mathbf{A})^2 \right]^{\frac{1}{2}} + q\Phi \quad (\text{B.II.3})$$

A l'aide de ce Hamiltonien, les équations du mouvement prennent bien-sûr la forme : $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$

et $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}$ où, comme pour la particule libre, la variable "temporelle" est bien le temps coordonnée t (et non pas le temps propre). On peut enfin définir tout simplement un 4-vecteur impulsion canonique \mathcal{P} par la formule : $\mathcal{P} = \mathbf{p} + q \mathbf{A}$.

B.II.2 Equation de Boltzmar

Si l'on définit, comme plus haut, les variables \mathbf{R} et \mathcal{P} comme étant les $3N$ -uplets représentant les positions et impulsions canoniques des N particules, nous introduirons tout naturellement une densité $\Delta(\mathbf{R}, \mathcal{P}, t)$ - normalisée à un - dans l'ensemble statistique de Gibbs (pour la forme canonique de volume hexadimensionnel $d\mathbf{R} \wedge d\mathcal{P}$). L'équation de Liouville s'écrira alors :

$$\partial_t \Delta + (\partial_t \mathbf{R} \cdot \nabla_{\mathbf{R}}) \Delta + (\partial_t \mathcal{P} \cdot \nabla_{\mathcal{P}}) \Delta = 0 \quad (\text{B.II.4})$$

Cette équation se doit, de par sa construction et pour des raisons physiques évidentes, d'être invariante de jauge. Cependant, cette invariance n'apparaît pas trivialement dans l'écriture précédente. Il convient en fait d'effectuer un léger changement de variables de manière à nous ramener aux impulsions cinétiques \mathbf{p} . D'après (B.II.2), \mathbf{p} et \mathcal{p} ne diffèrent que par une fonction de \mathbf{r} et de t . Il s'en suit que, en adoptant la notation : $\Delta(\mathbf{R}, \mathcal{P}, t) = \tilde{\Delta}(\mathbf{R}, \mathbf{p}, t)$; on a trivialement : $\frac{\partial \Delta}{\partial \mathcal{P}} = \frac{\partial \tilde{\Delta}}{\partial \mathbf{p}}$ et un calcul simple permet de s'assurer que $d\mathbf{R} \wedge d\mathcal{P} = d\mathbf{R} \wedge d\mathbf{p}$ (de même que $d\mathbf{r} \wedge d\mathcal{p} = d\mathbf{r} \wedge d\mathbf{p}$).

Par contre, les dérivées partielles de Δ par rapport à t et \mathbf{R} ne sont pas identiques à celles de $\tilde{\Delta}$ par rapport à ces mêmes variables. Un calcul direct donne en effet :

$$\partial_t \tilde{\Delta} = \partial_t \Delta - q \partial_t A \cdot \partial_{\mathcal{P}} \Delta \quad (\text{B.II.5})$$

$$\partial_{\mathbf{R}^k} \tilde{\Delta} = \partial_{\mathbf{R}^k} \Delta - q \partial_{\mathbf{R}^k} A \cdot \partial_{\mathcal{P}} \Delta \quad (\text{B.II.6})$$

où, dans la dernière équation, l'indice k varie de 1 à $3N$ et désigne une composante quelconque de \mathbf{R} . En remplaçant alors dans l'équation (B.II.4), on obtient directement l'équation de Liouville cherchée, sous une forme manifestement invariante de jauge :

$$\partial_t \tilde{\Delta} + \partial_t \mathbf{R} \cdot \partial_{\mathbf{R}} \tilde{\Delta} + \partial_t \mathbf{p} \cdot \partial_{\mathbf{p}} \tilde{\Delta} = 0 \quad (\text{B.II.7})$$

A partir de maintenant, nous supprimerons le tilda dont est affectée $\tilde{\Delta}$ et nous conviendrons, pour alléger l'écriture, de noter également cette fonction Δ .

Si l'on affecte d'un indice i toutes les quantités intervenant dans les équations du mouvement de la i ème particule, on peut alors réécrire l'équation de Liouville sous la forme :

$$\partial_t \Delta + \sum_i \partial_t \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_i \partial_t \mathbf{p}_i \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \mathbf{p}_i} = 0 \quad (\text{B.II.8})$$

soit encore, en utilisant les équations de Hamilton,

$$\partial_t \Delta + \sum_i \partial_{r_i} r_i \frac{\partial \Delta}{\partial r_i} + \sum_i q(\mathbf{E}_i + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}_i) \frac{\partial \Delta}{\partial \mathbf{p}_i} = 0 \quad (\text{B.II.9})$$

où \mathbf{E}_i et \mathbf{B}_i décrivent le champ créé par les autres particules au point où est situé la i ème particule.

Si l'on développe maintenant la hiérarchie BBGKY exactement comme dans le cas galiléen^[9], on obtient facilement :

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{r}}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \int \mathbf{K}_1 \cdot \partial_{\mathbf{p}} f_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) d\mathbf{r}_1 \wedge d\mathbf{p}_1 = 0 \quad (\text{B.II.10})$$

où l'on conserve pour f la définition adoptée jusqu'ici. La fonction de distribution à deux particules $f_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$ représente la probabilité moyenne de trouver deux particules situées, au même instant t , aux positions \mathbf{r} et \mathbf{r}_1 , ayant respectivement des impulsions (cinétiques) \mathbf{p} et \mathbf{p}_1 ; \mathbf{K}_1 s'écrit : $\mathbf{K}_1 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1$ où les quantités affectées de l'indice 1 se réfèrent⁶ au champ créé au point (\mathbf{r}, \mathbf{p}) par une particule située en $(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$.

(B.II.10) est la forme la plus générale de l'équation de Boltzmann-Vlasov que l'on puisse écrire. La forme plus usuelle où le terme de force s'exprime de manière nettement plus simple peut bien-sûr s'en déduire aisément. Il suffit pour cela de supposer que la fonction de distribution f_2 est en fait le produit de deux fonctions de distributions⁷ $f : f_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t)$. Il est alors possible de simplifier l'écriture de l'intégrale intervenant dans (B.II.10) et l'on obtient :

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \partial_{\mathbf{r}} + \mathbf{K} \cdot \partial_{\mathbf{p}}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0 \quad (\text{B.II.11})$$

où \mathbf{K} n'est rien d'autre que la moyenne statistique de \mathbf{K}_1 sur toutes les positions et toutes les impulsions possibles de la particule 1 :

$$\mathbf{K} = \int \mathbf{K}_1 f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) d\mathbf{r}_1 \wedge d\mathbf{p}_1 \quad (\text{B.II.12})$$

⁶L'usage de l'indice 1 ne correspond donc plus à celui de l'indice i dans l'équation (B.II.8).

⁷Ce point sera discuté en détail plus bas.

En d'autres termes, on obtient : $\mathbf{K} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ où \mathbf{E} et \mathbf{B} sont définis comme des moyennes *statistiques* des champs "microscopiques" exacts :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) d\mathbf{r}_1 \wedge d\mathbf{p}_1 \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) d\mathbf{r}_1 \wedge d\mathbf{p}_1 \end{aligned} \quad (\text{B.II.13})$$

B.II.3 Moments de l'équation de Boltzmann-Vlasov

Un calcul direct du même style que celui mené dans la partie A de ce rapport permet de s'assurer que les différents moments de l'équation de Boltzmann redonnent bien les équations hydrodynamiques obtenues en B.I.

B.II.4 "Maxwellienne" correspondant à l'équation de Boltzmann-Vlasov relativiste

Pour des raisons identiques à celles conduisant à la "maxwellienne" usuelle en relativité galiléenne, la maxwellienne correspondant à l'équation (B.II.11) s'écrit :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = A \exp(-V_\mu \mathcal{P}^\mu / kT) = A \exp(-H / kT + \mathcal{P} \cdot \mathbf{V} / kT) \quad (\text{B.II.14})$$

où H et \mathcal{P} sont respectivement le Hamiltonien et l'impulsion canonique d'une particule ponctuelle du fluide, en mouvement dans le champ moyen défini par (B.II.13). T est bien-sûr la température du système, \mathbf{V} , la "tri-impulsion canonique moyenne" du fluide et A , une constante de normalisation. Nous renvoyons le lecteur à [8] et [16] pour une expression détaillée de cette dernière.

En l'absence de champ électromagnétique (moyen), dans le référentiel où le fluide est au repos, cette "maxwellienne" prend la forme simplifiée :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = A \exp(-c(m^2 c^2 + \mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}} / kT) \quad (\text{B.II.15})$$

C. EQUATIONS D'UN ENSEMBLE DE PLUSIEURS FLUIDES PARFAITS RELATIVISTES CHARGES EN INTERACTION

Soient S espèces différentes de particules (ponctuelles) chargées, dont les quantités caractéristiques seront repérées à l'aide de l'indice s , compris entre 1 et S . A priori, l'ensemble constitué de toutes les particules de chaque espèce et du champ électromagnétique

qu'elles engendrent constitue un système physique isolé unique. Il semble cependant possible, dans certaines conditions physiques particulières, de "découpler", au moins partiellement, les équations régissant le comportement de ce système global^[12]. L'approximation en question suppose que (1) chaque groupe constitué des particules d'une même espèce est thermalisé séparément des autres, ce qui revient en fait à négliger les collisions inter-espèces par rapport aux collisions intra-espèce, (2) chaque particule, quelque soit son espèce, est sensible au champ moyen créé par l'ensembles de toutes les autres particules, toutes espèces confondues. En d'autres termes, le système global peut alors être décrit par S équations de Vlasov du type :

$$(\partial_t + v \cdot \partial_r + K \cdot \partial_p) f_s(r, p, t) = 0 \quad (\text{C.II.1})$$

où K désigne le champ de force moyen dû à toutes les particules.

Si l'on prend les moments d'ordre 0, 1 et 2 des équations précédentes, on obtient aisément 5S équations hydrodynamiques (scalaires) similaires celles introduites en B.I. et qui modélisent le comportement du système total comme étant celui d'un ensemble de S fluides distincts, soumis au seul champ électromagnétique moyen qu'ils créent. En particulier, chaque fluide est alors caractérisé, en un point donné de l'espace-temps, par 6 grandeurs réelles distinctes (par exemple, n_s , V_s , T_s et π_s) liées par une équation d'état propre au fluide considérée. Il est important de noter qu'une telle description ne peut en aucun cas être utilisée pour décrire un processus de thermalisation entre les différents fluides.

Il est possible, en effectuant (séparément) la somme des S équations de continuité, des S équations "d'Euler" et des S équations de conservation de l'énergie pour chaque fluide, d'obtenir 5 équations vérifiées par la réunion des S fluides. Il est facile de se convaincre que les 4 équations (scalaires) décrivant la conservation de l'énergie et de l'impulsion de l'ensemble peuvent se mettre sous la forme tensorielle simple : $\partial_\mu (T_f^{\mu\nu} + T_c^{\mu\nu}) = 0$, où $T_f^{\mu\nu}$ est maintenant la somme des S tenseurs d'énergie impulsion caractérisant chacun des fluides. Bien entendu, $T_c^{\mu\nu}$ est simplement le tenseur d'énergie impulsion du champ électromagnétique moyen.

En guise de conclusion, il est important de souligner qu'il est impossible d'obtenir les équations décrites ci-dessus par un raisonnement "macroscopique" purement hydrodynamique. Cela apparaît clairement si l'on se souvient que l'hypothèse essentielle qui permet de "justifier" les différentes approximations faites plus haut consiste à négliger les chocs entre particules d'espèces différentes et qu'une telle hypothèse ne peut se décrire

aisément en termes purement hydrodynamiques. Une étude hydrodynamique *ab initio* conduirait à caractériser le système physique total par *un unique* champ de vitesse, *un* champ de pression, *un* champ de température, *un* champ de densité global, *S-1* champs de densités relatives, et bien-sûr, le champ électromagnétique moyen. Il va sans dire qu'une telle description est en fait beaucoup plus générale que celle présentée plus haut.

D. DISCUSSION

L'approche purement macroscopique du sujet précédemment traité ne soulevant pas, en soi, de problèmes majeures si l'on se restreint, comme ici, au cas de la relativité simple, nous concentrerons notre discussion sur les différents problèmes de moyennes intervenant lors du "passage des équations microscopique aux équations macroscopiques". Tous les développements présentés plus haut à ce sujet reposent sur l'identification de certaines quantités macroscopiques (diverses densités spatiales, vitesse du fluide en point...) avec des moyennes *statistiques* effectuées à l'aide de la fonction de distribution f , elle-même déduite de Δ . Nous voudrions maintenant justifier rapidement cette identification dans le cas qui nous intéresse ici et, du même coup, en dégager certaines limites.

Comme nous l'avons déjà signaler, nous admettrons qu'un état macroscopique du fluide peut être convenablement défini par la donnée d'un certain nombre de scalaires et de champs (définis sur l'espace physique \mathbf{R}^3), déductibles de mesures purement macroscopiques. Si l'on considère alors le fluide comme un système matériel à N particules, à un état macroscopique donné correspondront de très nombreuses configurations différentes des N particules dans l'espace des phases global, de dimension $6N$. Ces configurations sont souvent désignées comme étant les "différents micro-états correspondant à l'état macroscopique étudié". La réunion de ces "micro-états" permet de définir l'ensemble statistique de Gibbs ainsi que la fonction de distribution Δ utilisée ci-dessus qui représente, rappelons-le, la probabilité de trouver les N particules en un point donné de l'espace des phases, si le système est dans un état macroscopique donné (à un instant donné)^[9]. Ainsi, l'ensemble statistique de Gibbs et les différentes fonctions de distribution statistiques associées sont a priori construits à partir de l'état macroscopique que l'on désire étudier. En particulier, il s'en suit alors logiquement que l'identification des moyennes statistiques aux grandeurs macroscopiques correspondantes est forcément correcte, par construction même de l'ensemble de Gibbs! Une telle approche peut cependant faire perdre à la physique statistique son réel intérêt, celui de prédire des comportements macroscopiques à partir de ce que l'on peut savoir sur la structure microscopique de la matière (ou, à l'inverse, déduire des renseignements sur la microphysique à partir de la macrophysique). Si l'on veut conserver cette possibilité, il faut alors que les

fonctions de distributions introduites plus haut à partir des états macroscopiques uniquement puissent également correspondre à des moyennes temporelles déduites du mouvement "réel" microscopique des N particules constituant le fluide. Cela ne semble poser aucun problème de principe si l'on se restreint à l'étude de fluides où, par définition, une particule peut effectivement se déplacer à travers tout le volume du système. Le problème se complique nettement dans le cas des solides, où les différentes particules n'ont, en raison de la structure cristalline du matériau, une probabilité de présence non nulle qu'au voisinage de certains noeuds du réseau cristallin. La procédure employée plus haut n'est alors plus licite et des moyennes spatiales sont nécessaires pour déduire les quantités macroscopiques du mouvement microscopique des particules^[11, 20].

Il n'est peut-être pas inintéressant de noter, en guise de conclusion, que le fait de supposer que la fonction de distribution à deux particules puisse se factoriser comme produit de deux fonctions de distribution à une particule n'est autre que la traduction cinétique de l'hypothèse faite lors de l'approche purement macroscopique du problème, qui consiste à supposer que l'on peut modéliser tous les phénomènes électromagnétiques, au niveau non cinétique, à l'aide des seuls champs macroscopiques moyens.

REFERENCES

La bibliographie concernant les différents problèmes abordés dans ce rapport est, l'on s'en doutera, très abondante, si bien qu'il nous est pratiquement impossible de donner ci-dessous, ne serait-ce que la majeure partie des références les plus significatives. Nous avons donc décidé de n'inclure dans la liste qui suit qu'un choix - par certains côtés, arbitraire - de "grands classiques" ainsi qu'une référence plus récente ([2]), permettant d'éclairer un des domaines d'application les plus modernes de la physique statistique relativiste. Signalons que l'on pourra trouver, dans [8], une bibliographie quasiment exhaustive des travaux publiés avant 1970, concernant l'extension de la thermodynamique classique et de la physique statistique élémentaire au domaine de la relativité restreinte. Il va sans dire qu'un renvoi à l'une des références ci-dessous doit être considéré également comme un renvoi à la bibliographie proposée dans l'ouvrage cité.

- [1] Barut, A.O. : *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*, Macmillan, 1964
- [2] Bernstein, J. : *Kinetic theory in the expanding universe*, Cambridge University Press, 1988
- [3] Born, M. : *Vorlesungen über Atommechanik*, erster Band, Springer-Verlag, 1925
- [4] Clemmow, P.C. et Dougherty, J.P. : *Electrodynamics of particles and plasmas*, Addison-Wesley, 1969
- [5] de Groot, S. R. : *The Maxwell equations, Studies in statistical mechanics*, vol.IV, North-Holland, 1969
- [6] de Groot, S. R. et Suttorp, L.G. : *Foundations of Electrodynamics*, North-Holland, 1972
- [7] Ehlers, J. : "General relativity and kinetic theory", dans *General relativity and Cosmology*, (ed. : Sachs, R.K.), Academic press, 1971
- [8] Guessous, A. : *Thermodynamique relativiste*, Gautiers-Villard, 1970
- [9] Huang, K. : *Statistical Mechanics*, Addison-Wesley, 2nd edition, 1987
- [10] Israel, W. : "The relativistic Boltzmann equation" dans *General relativity*, papers in honour of J. L. Synge (ed. : C' Raifeartaigh, L.), Oxford University Press, 1972
- [11] Jackson, J.D. : *Classical Electrodynamics*, 2nd edition, Wiley, 1975
- [12] Kruer, W.L., *The Physics of Laser Plasma Interactions*, Addison-Wesley, 1988
- [13] Landau, L. et Lifshitz, E. : *Théorie des champs*, 3eme ed., Editions MIR, 1970
- [14] Landau, L. et Lifshitz, E. : *Fluid mechanics*, 2nd ed., Pergammon Press, 1987
- [15] Landau, L. et Lifshitz, E. : *Physical Kinetics*, Pergammon Press, 1982
- [16] Marle, C. : "Sur l'établissement des équations de l'hydrodynamique des fluides relativistes dissipatifs, I et II", *Ann. Inst. Henri Poincaré*, **10**, 67 - 126 et 127 - 194

- [17] Misner, C.W., Thorne, K.S., Wheeler, J.A. : *Gravitation*, Freeman, 1973
- [18] Mori, W.B., Katsouleas, T., Phys. scripta T30, 127 (1990)
- [19] Robinson, F.N.H. : *Macroscopic electromagnetism*, Pergamon Press, 1973
- [20] Russakoff, Am. J. Physics, 38, 1188 (1970)
- [21] Shkarofsky, I.P., Johnston, T.W., Bachynski, M.P. : *The Particle Kinetics of plasmas*, Addison-Wesley, 1966
- [22] Synge, J.L. : *The relativistic gas*, North-Holland, 1957
- [23] Weinberg, S. : *Gravitation and Cosmology*, Wiley, 1972

APPENDICES

Appendice 1 : Transformations des volumes et invariance de la fonction de distribution à une particule

Cet appendice a pour but de fixer les idées sur un problème longuement et maintes fois débattu dans la littérature relativiste, celui de la variance de la fonction de distribution à une particule, f . De nombreux auteurs ont prétendus pouvoir étudier cette variance à l'aide de la loi bien connue de transformation des volumes (spatiaux) en relativité restreinte^[8, 13, 17]. Nous pensons qu'une telle étude est en fait impossible, pour des raisons dont nous nous expliquerons plus bas. Nous avons par conséquent, dans le corps même du rapport, proposé une preuve rapide de l'invariance de f fondée sur le fait que j^μ , densité de courant particulaire, est un 4-vecteur. Cette preuve utilise un résultat bien connu (et non contesté!), qui exprime que la forme $d\mathcal{V}_p/p^0$ est invariante de Lorentz. Nous souhaiterions consacrer la première partie de cet appendice à une preuve très simple de ce résultat, qui nous éclairera en même temps sur la transformation des volumes spatiaux dans l'espace physique usuel.

a) Transformations des tri-volumes dans l'espace des impulsions

Soit un premier référentiel galiléen (\mathbf{R}), dans lequel les impulsions seront notées tout simplement p , et un second référentiel inertiel (\mathbf{R}'), défini par rapport au premier à l'aide d'une transformation de Lorentz pure, de vitesse \mathbf{V} , dirigée par convention selon l'axe indicé 1. Les impulsions dans ce référentiel seront affectées d'un prime. Comme d'habitude, on notera $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

La transformation de Lorentz étant linéaire, les formes différentielles dp se transforment bien sûr par transformation de Lorentz lors d'un changement de référentiel inertiel. Ceci nous permet d'écrire directement (en utilisant également la linéarité de \wedge) :

$$d\mathcal{V}_{p'} = dp^1 \wedge dp^2 \wedge dp^3 = \gamma (d\mathcal{V}_p - \frac{V}{c} dp^0 \wedge dp^2 \wedge dp^3)$$

Comme p^0 dépend en fait de p , on peut expliciter le dernier terme de l'égalité précédente et l'on obtient alors directement : $d\mathcal{V}_{p'} = \frac{p^0}{p^0} d\mathcal{V}_p$ ce qui est précisément le résultat annoncé.

b) Transformation des volumes spatiaux

Un raisonnement analogue à celui effectué plus haut nous permet d'écrire :

$$d^3x' = dx'^1 \wedge dx'^2 \wedge dx'^3 = \gamma \left(d^3x - \frac{V}{c} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \right)$$

Cependant, il est ici impossible de transformer le dernier terme de l'égalité en une forme de volume purement spatial car, à la différence de p^0 , $x^0 = ct$ est indépendant de r . En d'autres termes (plus physiques), un élément de volume purement spatial dans un référentiel n'est pas purement spatial dans un autre. C'est cette conséquence physique importante de la relativité restreinte qui, en fait, bloque toute démonstration de l'invariance de f fondée sur une "loi de transformation des volumes".

Appendice 2 : Formalismes lagrangien et hamiltonien

Dans tout ce rapport, nous avons utilisé, pour écrire le plus proprement possible les équations cinétiques cherchées, des formalismes lagrangiens et hamiltoniens qui ne sont *pas* manifestement covariants, en ce sens que leur développement nécessite de se placer, *ab initio*, dans un référentiel galiléen (quelconque mais) fixé. En particulier, les équations du mouvement ainsi obtenues ne sont pas des équations tensorielles mais des équations faisant intervenir uniquement certaines composantes de tenseurs⁸, de manière à ce que, cependant, la combinaison ainsi obtenue soit invariante de Lorentz. Il est naturel de s'interroger sur la faisabilité (éventuelle) de formalismes lagrangien et hamiltoniens manifestements covariants.

Penchons nous, par exemple, sur le formalisme lagrangien. Un formalisme lagrangien manifestement covariant introduirait comme variables naturelles de la fonction de Lagrange les 4-vecteurs position et vitesse x_μ et u_μ . De tels lagrangiens ont effectivement été proposés par différents auteurs. Le problème majeur d'une telle approche réside dans le fait que, si les 4 variables représentées par x_μ sont bien indépendantes, les 4 composantes de u_μ ne peuvent être considérées comme variables indépendantes. Si de nombreux efforts ont été faits pour remédier à cette situation, aucun ne nous a paru véritablement convaincant et "propre" mathématiquement; sans vouloir nous livrer ici à une discussion détaillée, nous préférons renvoyer simplement le lecteur à la littérature citée en bibliographie^[1, 7, 10], ce qui lui permettra de se faire directement une opinion sur le sujet. Par ailleurs, une approche manifestement covariante, si tant est qu'elle soit possible⁹, nous paraît masquer une situation physique essentielle, que les différentes densités sont définies, dans un référentiel inertiel fixé, à un instant donné, par rapport à des mesures purement spatiales. Enfin, il est à noter que les auteurs utilisant des "formalismes manifestement covariants" ont pu écrire une équation de Boltzmann également manifestement covariante, qui redonne celle proposée dans ce rapport si l'on tient compte, "après coup", de la relation $u^2 = 1$. Ces auteurs n'ont cependant jamais pu développer, à notre connaissance, une équation de Liouville manifestement covariante. Cela se comprend fort bien dans la mesure où, dans l'opérateur figurant au premier membre de cette équation, doivent forcément apparaître, pour des raisons physiques liées à la définition des densités comme densités spatiales, une unique dérivée temporelle et 3N dérivées spatiales.

⁸Exemple: Le hamiltonien, qui représente l'énergie du système, n'est autre que la composante temporelle du 4-vecteur énergie/impulsion.

⁹Ce qui, rappelons le, n'est, à nos yeux, aucunement le cas !

Appendice 3 : Plasma froid ou unidimensionnel

1. *Plasma froid* (pression $\pi = 0$) : la densité d'enthalpie w s'écrit alors $w = n_0 m c^2$. La relation entre les densités n_0 dans le référentiel propre local et n dans le référentiel du laboratoire, à savoir $n = \gamma n_0$ conduit à :

$$[\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v} = \frac{q}{m} \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right]$$

2. *Plasma unidimensionnel* : la dimension considérée est notée x . Le facteur de Lorentz s'écrit alors $\gamma = (1 - v_x^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$; il s'en suit que les trois termes de pression de (B.I.13)' se simplifient pour donner l'expression finale de la conservation de l'impulsion :

$$w [\partial_t + v_x \cdot \partial_x] (\gamma v_x) = - \gamma c \left[\frac{v_x}{c} \partial_t + c \cdot \partial_x \right] \pi + \frac{c^2}{\gamma} q n E_x$$

Nous retrouvons ainsi l'expression proposée en [18].

**Achévé d'imprimer
par
le CEA, Service de Documentation et d'Édition Multimédia
Octobre 1991**

**DEPOT LEGAL
4^{ème} trimestre 1991**

ISSN 0429 - 3460

La diffusion des rapports et bibliographies du Commissariat à l'Énergie Atomique est assurée par le Service de Documentation et d'Édition Multimédia, CE-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cédex, (France)

Reports and bibliographies of the Commissariat à l'Énergie Atomique are available from the Service de Documentation et d'Édition Multimédia, CE-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cédex, (France)

Édité par
le Service de Documentation
et d'Édition Multimédia
Centre d'Études de Saclay
91191 GIF-sur-YVETTE Cédex (France)

