

## BURBUJAS SOLITONICAS Y TRANSICIONES DE FASE

Luis Masperi

*Centro Atómico Bariloche e Instituto Balseiro (Comisión Nacional  
de Energía Atómica y Universidad Nacional de Cuyo)  
San Carlos de Bariloche, Argentina*

Resumen: Se muestra que las soluciones clásicas no topológicas con forma de burbujas de una teoría de campos escalares reales con lagrangiano de autointeracción cuártico y séxtico en  $1+1$  dimensiones son responsables de la transición discontinua en el problema cuántico entre una fase con nivel excitado degenerado y otra desordenada.

### Introducción.

En la Ref.(1) se vio que en una teoría relativista de campo escalar real con autointeracciones cuártica y séxtica en  $1+1$  dimensiones existen soluciones clásicas estáticas de naturaleza topológica, es decir que para  $x \rightarrow +\infty$  y  $x \rightarrow -\infty$  tienen límites diferentes, así como de tipo no topológico, o sea que el campo comienza para  $x = -\infty$  en un mínimo lateral del potencial y para  $x = +\infty$  vuelve a él tras haber pasado por la zona central para una coordenada espacial intermedia. En ese mismo trabajo se obtuvo el diagrama de fases para el problema cuántico sobre el retículo en la aproximación de conservar sólo los tres niveles de energía más bajos en cada sitio y utilizando el grupo de renormalización.

Posteriormente una serie de trabajos<sup>(2)</sup> generalizaron las soluciones clásicas no topológicas, coincidentes con las anteriores en el caso estático, para la ecuación de Schrödinger no lineal con términos cúbico y quinto, encontrando que cuando la velocidad del solitón supera un valor crítico se hace estable en 1 y 2 dimensiones espaciales.

El término "solitón no topológico" fue introducido en teorías relativistas en  $3+1$  dimensiones en la Ref.(3) donde un modelo para un campo escalar complejo acoplado a otro real con ruptura espontánea de simetría poseía soluciones estables clásica y cuánticamente cuando la carga de Noether es suficientemente grande. Semejantes a los anteriores son los Q-balls tratados en la Ref.(4) donde existe un sólo campo escalar complejo pero con una autointeracción tipo términos cuártico y séxtico en el lagrangiano.

En la presente nota se describe mediante un cálculo perturbativo la relación de los solitones topológicos y no topológicos del modelo de la Ref.(1) con las transiciones de fase que allí se producen y se hacen algunas consideraciones sobre la estabilidad de las burbujas en el caso cuántico.

Modelo.

Consideramos el lagrangiano en 1+1 dimensiones

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - U(\varphi) \quad (1)$$

con  $U(\varphi) = c_1 \varphi^2 + c_2 \varphi^4 + c_3 \varphi^6$  y  $c_1, c_3 > 0$  ,  $c_2 < 0$  .

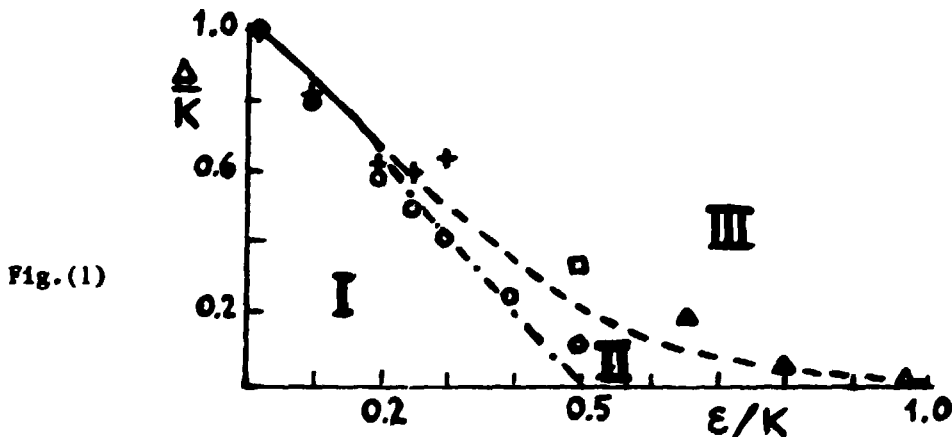
Si el mínimo absoluto del potencial es el lateral hay solitones topológicos. Si el mínimo absoluto es el central hay soluciones que por ejemplo comienzan en el pozo derecho para  $x \rightarrow -\infty$  , pasan al pozo central para una coordenada intermedia y vuelven al derecho para  $x \rightarrow +\infty$  ; es decir que se tiene una zona finita con rarefacción de campo que constituye una burbuja.

Para espacio discretizado y conservando sólo los tres niveles inferiores de energía en cada sitio resultantes del efecto túnel entre los estados localizados en cada uno de los pozos, el operador hamiltoniano cuántico es

$$H = \sum_j \left[ \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix}_j - \Delta \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}_{j+1} \right] \quad (2)$$

donde  $\alpha^2 = \varepsilon/(\kappa - \varepsilon)$  y  $\Delta$  está relacionado con el elemento de matriz de  $\varphi$  entre niveles próximos.

Mediante la técnica de bloques de spin conservando en cada etapa los tres niveles inferiores, el modelo Ec.(2) presenta tres fases tal como se indica en la Fig.(1).



La fase ordenada III corresponde a un punto fijo con  $\Delta \neq 0$  y nivel fundamental degenerado, la desordenada II con  $\Delta = 0$  y niveles no degenerados, y la I también con  $\Delta = 0$  pero con nivel excitado degenerado.

El potencial clásico efectivo correspondiente a cada fase es el que se describe en la Fig.(2).

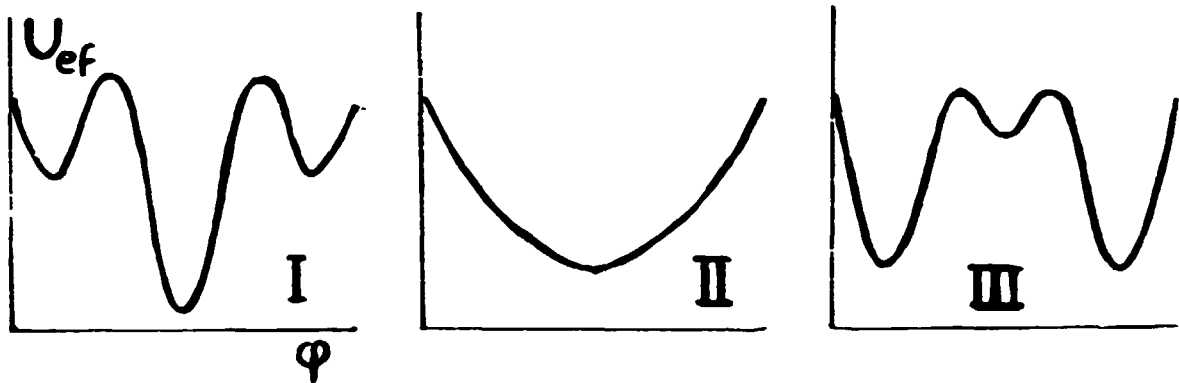


Fig.(2)

La transición entre las fases III y II es de segundo orden al desaparecer con continuidad la barrera entre los dos pozos laterales. En cambio la transición entre III y I es de primer orden al pasarse con discontinuidad de un valor de expectación finito del campo en el estado fundamental a otro nulo. El paso de I a II no es una transición de fase en el sentido ordinario de la palabra ya que en ambas regiones el nivel fundamental es no degenerado; sin embargo tomando el valor de expectación en uno de los estados excitados degenerados de I se pasa con discontinuidad al valor nulo en II. Las tres curvas se unen en el punto tricrítico.

#### Cálculo perturbativo.

Para analizar perturbativamente el efecto de los solitones en las transiciones de fase es conveniente reescribir el hamiltoniano Ec.(2) mediante una transformación unitaria, resultando

$$\tilde{H} = \sum_j \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_j - \tilde{K} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_j - \tilde{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{j+1} \right] \quad (3)$$

donde  $\tilde{K} = \sqrt{2} (K-2\epsilon) / [\epsilon(K-\epsilon)]^{1/2}$  y  $\tilde{\Delta} = \sqrt{2} \Delta (1+\alpha^2) / [\epsilon(K-\epsilon)]^{1/2}$ .

Partiendo de la fase ordenada con  $\tilde{\Delta}$  grande  $> \tilde{K}$ , elegimos como estado fundamental el autoestado de los dos últimos términos de la Ec.(3)

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$$

donde la flecha indica autovalor +1 del spin en cada sitio.

Para  $\epsilon/K > 0.5$  el primer estado excitado es el kink con una región de spin -1

→ → → → ← ← ←

mientras que para  $\epsilon/K < 0.5$  es la burbuja

→ → → ○ → → →

degenerada con la burbuja-kink

→ → → ○ ← ← ←

donde ○ indica autovalor cero del spin en un sitio.

Haciendo cálculo de perturbaciones de 2° orden <sup>(5)</sup> con el primer término de la Ec.(3), la transición se obtiene cuando el nivel excitado se degenera con el fundamental.

Tal como puede verse en la Fig.(1), la transición de 2° orden es bien reproducida por la condensación de kinks para  $\epsilon/K > 0.5$  (triángulos) y de burbujas-kinks para  $\epsilon/K < 0.5$  (cruces). El apartamiento que se observa alrededor de  $\epsilon/K \sim 0.5$  es por problemas del cálculo de perturbaciones al tender a degenerarse los kinks y las burbujas-kinks. El cálculo degenerado para  $\epsilon/K = 0.5$  se ve que da bien (cuadrado).

La transición entre I y II está bien reproducida por las burbujas (círculos). Para  $\epsilon/K < 0.2$  las curvas predichas por la condensación de burbujas-kinks y de burbujas prácticamente coinciden con la curva de transición de fase de primer orden. A lo largo de todas estas curvas se cumple  $\tilde{\Delta} > \tilde{K}$  satisfaciendo la consistencia del método.

#### Estabilidad de solitones no topológicos.

Tal como fue analizado en la Ref.(4), la estabilidad de los Q-balls correspondientes a un potencial U del tipo I de la Fig.(2) se produce cuando la energía de la configuración con  $\Phi$  correspondiente al mínimo lateral en una zona finita del espacio es menor que la excitación de partícula de la teoría de campos libres alrededor de  $\Phi = 0$ .

La estabilidad de la burbuja para el modelo de tres niveles es debida a que en la fase ordenada el potencial efectivo es el III de la Fig.(2) aún para  $\epsilon/K < 0.5$  por lo que estar en un sitio en el mínimo central agrega una pequeña energía que no permite decaer en ningún estado de menor energía y topología apropiada.

Para la teoría en el continuo, la solución estática tipo burbuja para U del tipo I con escala de energía tal que  $U=0$  para  $\Phi = \sqrt{P}$  correspondiente al pozo lateral, es decir  $U = (\Phi^2 - P)^2 (\Phi^2 - A)$  con  $0 < A < P$ , es <sup>(2)</sup>

$$\Phi(x) = \sqrt{P} \cosh(\beta x) / [P/A + \sinh^2(\beta x)]^{1/2} \quad (4)$$

donde  $\beta^2 = \rho(\rho - A)$ . Esta solución es clásicamente inestable ya que al agregarle una perturbación oscilante dependiente del tiempo aparece una frecuencia imaginaria. Sin embargo cuánticamente se recupera la estabilidad bajo ciertas aproximaciones ya que la energía de la configuración Ec.(4) resulta<sup>(6)</sup> menor que la masa de la teoría libre alrededor de  $\varphi = 0$ .

#### Aplicaciones.

La ecuación de Schrödinger no lineal se aplica<sup>(2)</sup> en superfluidez, defectones, cadenas ferromagnéticas con deformaciones, cadenas moleculares con vibraciones, luz en medio no lineal, interacciones de Skyrme. Los solitones no topológicos pueden ser producidos cerca de una transición de fase en el universo primitivo<sup>(7)</sup>. El modelo de tres niveles corresponde a la mezcla  $\text{He}^3 - \text{He}^4$  y el punto tricrítico es correctamente predicho<sup>(1)</sup>. Burbujas (polarones) aparecen también en modelos de polímeros<sup>(8)</sup>.

#### Referencias

1. D. Boyanovsky y L. Masperi, Phys. Rev. D 21, 1550 (1980).
2. I. Barashenkov y V. Makhankov, Phys. Lett. A 128, 52 (1988);  
I. Barashenkov, T. Boyadjiev, I. Puzynin y T. Zhanlav, Phys. Lett. A 135, 125 (1989); I. Barashenkov, A. Gorcheva, V. Makhankov y I. Puzynin, Physica D 34, 240 (1989).
3. R. Friedberg, T.D. Lee y A. Sirlin, Phys. Rev. D 13, 2739 (1976).
4. S. Coleman, Nucl. Phys. B 262, 263 (1985).
5. L. Masperi, "Solitonic bubbles and phase transitions", preprint de Bariloche (1989).
6. J. Llambías y L. Masperi, en preparación.
7. J. Frieman, G. Gelmini, M. Gleiser y E. Kolb, Phys. Rev. Lett. 60, 2101 (1988).
8. D.K. Campbell y A.R. Bishop, Nucl. Phys. B 200 (FS4), 297 (1982).