PARTÍCULAS AUTO-DUAIS COM SPIN

J. Gamboa e V.O.Rivelles
Instituto de Física, Universidade de São Paulo
C.P. 20516, 01498, S.Paulo,SP

RESUMO: Apresentamos partículas auto-duais em duas dimensões. Elas foram obtidas da partícula bôsonica quiral através da técnica da raiz quadrada. Demonstramos que a teoria resultante pode ser bosônica ou fermiônica e que o campo auto-dual associado revela sua estrutura tensorial de Lorentz que não é manifesta nas outras formulações. Calculamos também o propagador da partícula auto-dual com spin usando o formalismo de BFV.

Campos auto-duais em duas dimensões, também conhecidos como bósons quirais, desempenham um papel fundamental na teoria da corda heterótica [1]. Usando-se a fórmula de bosonização [2] eles podem ser interpretados como excitações solitônicas de férmions de Weyl [3]. De uma maneira mais geral, a fórmula de bosonização pode ser estendida e revela que os bósons quirais fornecem toda uma classe de campos auto-duais de spin superior [4,5]. Os bósons quirais também foram utilizados na construção sistemática do campo de Thirring tendo sido usado, neste caso, campos que movem-se para a esquerda e para a direita [6].

Apresentamos anteriormente a partícula bosônica auto-dual [7]. Construímos uma ação requerendo que a mesma fosse invariante por reparametrização e encontramos uma família de partículas auto-duais dependendo de um parâmetro real $\gamma \neq 0$. A quantização foi efetuada no formalismo de Batalin-Fradkin-Vilkovisky (BFV) [8] e algumas considerações referentes à teoria de campos resultante foram feitas utilizando a quantização operatorial.

Neste trabalho estudamos as partículas auto-duais com spin [9] (spinning self-dual particles). Elas são obtidas utilizando-se a técnica da raiz quadrada [10] originalmente proposta para obter-se uma teoria supersimétrica à partir de uma teoria puramente bosônica. Quando aplicado à partícula relativística [11] a amplitude de transição fornece o propagador de Feynman para o campo de Dirac, enquanto à nivel de partícula aparece uma supersimetria entre as coordenadas X_μ e θ_μ da partícula com spin.

A aplicação da técnica da raiz quadrada [10] requer a introdução de variáveis de Grassmann $\theta_\mu(\tau)$, $\mu = 0,1$, para a construção de vínculos fermiônicos S tais que seu colchete de Poisson seja proporcional ao vínculo bosônico ,isto é,

$$\{S,S\} = \alpha T$$

$$T = (P_0 - P_1)P_1^\gamma \tag{1}$$

com $\alpha \neq 0$. As variáveis de Grassmann devem satisfazer os colchetes de Poisson

$$\{\theta_\mu, \theta_\nu\} = 2i\eta_{\mu\nu} \tag{2}$$

Requerendo que S seja linear nas variáveis de Grassmann com coeficientes que dependam de P_μ, e que esses coeficientes possuam potências inteiras de P_μ (pois de outra forma a quantização seria problemática envolvendo operadores elevados à potências não inteiras), concluímos que γ em (1) deve ser ímpar de modo que T possua uma potência par de P_μ. Nesse caso podemos encontrar facilmente os coeficientes da expansão de S em termos de θ_μ e, com uma normalização apropriada, obtemos

$$S = -\frac{i}{4}\theta_0(1 - 2\alpha - \frac{P_0}{P_1})P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} - \frac{i}{4}\theta_1(1 + 2\alpha - \frac{P_0}{P_1})P_1^{\frac{\gamma+1}{2}}, \qquad \gamma = -1, -3, \ldots \tag{3}$$

Podemos, então, escrever a ação

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau[P^\mu \dot{X}_\mu + \frac{i}{4}\theta^\mu \dot{\theta}_\mu + NT + \lambda S] - \frac{i}{4}\theta^\mu(\tau_2)\theta_\mu(\tau_1) \tag{4}$$

onde N e λ são os multiplicadores de Lagrange dos vínculos T e S, respectivamente. Adicionamos à (4) um termo que depende dos valores de θ_μ nos extremos da trajetória e que foi escolhido para que quando seja feita a variação da ação para obter-se as equações de movimento para θ_μ, esta variavel satisfaça apenas uma condição de contorno $\theta_\mu(\tau_1) + \theta_\mu(\tau_2) = \gamma_\mu$, já que as equações para θ_μ são de primeira ordem. As condições de contorno para X_μ são $X_\mu(\tau_1) = X_\mu(1), X_\mu(\tau_2) = X_\mu(2)$.

Para determinarmos as trasformações de supersimetria local geradas pelo vínculo S, calculamos o colchete de Poisson de S com X_μ e θ_μ e obtemos

$$\begin{aligned}
\delta X_0 &= \frac{1}{4}\xi(\theta_0 + \theta_1)P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} \\
\delta X_1 &= \frac{1}{8}\xi(\theta_0 + \theta_1)[\gamma + 1 - (\gamma - 1)\frac{P_0}{P_1}]P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} - \alpha\frac{1+\gamma}{4}\xi(\theta_0 - \theta_1)P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} \\
\delta\theta_0 &= \frac{1}{2}\xi(1 - 2\alpha - \frac{P_0}{P_1})P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} \\
\delta\theta_1 &= -\frac{1}{2}\xi(1 + 2\alpha - \frac{P_0}{P_1})P_1^{\frac{\gamma+1}{2}}
\end{aligned} \tag{5}$$

enquanto para os multiplicadores de Lagrange temos, de acordo com o formalismo de BFV [8]

$$\delta N = \alpha\xi\lambda, \qquad \delta\lambda = \dot{\xi} \tag{6}$$

onde $\xi(\tau)$ é o parâmetro para a supersimetria local. As transformações de supersimetria assim obtidas não possuem a forma usual e são muito complicadas. Enquanto que para o caso da partícula com spin essas transformações podem ser interpretadas como transformações para a supergravidade em uma dimensão acoplada à campos escalares, aqui elas não possuem essa interpretação ou qualquer outra interpretação simples.

As condições de contorno que encontramos para os parâmetros das transformações locais implicam que as condições de gauge escolhidas levam à equações diferenciais de segunda ordem para os mesmos. Dessa forma, podemos escolher o gauge do tempo próprio $\dot{N} = 0$ para reparametrizações e $\dot{\lambda} = 0$ para supersimetria.

Na quantização canonica promovemos P_μ e X_μ a operadores obedecendo relações de comutação canônicas, θ_μ à operadores γ_μ que, de acordo com (2), satisfaçam as relações de anticomutação

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \tag{7}$$

e impomos que o vínculo S (3), agora um operador, seja nulo quando aplicado às funções de onda ψ. Obviamente, existe uma representação em que os γ_μ são as matrizes de Dirac 2×2. Vamos tomar $\gamma_0 = \sigma_1, \gamma_1 = i\sigma_2$ and $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1$. Nessa representação $S\psi = 0$ pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} 0 & P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} - P_0 P_1^{\frac{\gamma-1}{2}} \\ -2\alpha P_1^{\frac{\gamma+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \psi = 0 \tag{8}$$

Requerendo agora que essa equação seja obtida de uma ação

$$S = \int d^2x\, \bar{\psi} S \psi \tag{9}$$

concluímos que a dimensão de ψ é $1 - \frac{1}{4}(\gamma + 1)$. Como $\gamma = -1, -3, \ldots$, podemos reescreve-lo como $\gamma = 1 - 2n$, $n = 1, 2, \ldots$ e encontramos que para n ímpar ψ é um campo bosônico, enquanto que para n par ψ é um campo fermiônico. Em geral, a técnica da raiz quadrada produz uma teoria fermiônica mas neste caso estamos encontrando uma teoria que pode ser bosônica ou fermiônica.

Para $n = 1$, temos $\gamma = -1$ e ψ possui spin 1. A eq.(8) ou a ação (9) não fornecem nenhuma informação acerca da estrutura tensorial de Lorentz do campo ψ, a não ser que ψ tem que possuir no mínimo um índice espinorial. Levando em conta que as representações do grupo de Lorentz podem ser obtidas à partir da representação fundamental $(\frac{1}{2})$ vamos tomar ψ na representação simétrica $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, isto é, $\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta\alpha}$. Antes de prosseguir vamos introduzir a matriz conjugação de carga $C = i\sigma_2$ a fim de levantar e abaixar índices espinoriais. Verificamos que C é antisimétrico e $\gamma_\mu C$ e $\gamma_5 C$ são simétricos de forma que podemos expandir $\psi_{\alpha\beta}$ como

$$\psi_{\alpha\beta} = A^\mu (\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} + B(\gamma_5 C)_{\alpha\beta} \tag{10}$$

De fato não necessitamos do campo pseudo-escalar B já que estamos interessados apenas no campo de spin 1, mas como veremos a seguir, as equações de movimento para B são triviais. Utilizando explicitamente a representação das matrizes de Dirac podemos reescrever (10) como

$$\psi = \begin{pmatrix} -A^+ & -B \\ -B & A^- \end{pmatrix} \tag{11}$$

que quando inserida em (8) fornece as equações

$$\begin{aligned} B(x) - \frac{1}{2}\int dy_1\, \epsilon(x_1 - y_1)\dot{B}(x_0, y_1) &= B(x) = 0 \\ A^-(x) - \frac{1}{2}\int dy_1\, \epsilon(x_1 - y_1)\dot{A}^-(x_0, y_1) &= A^+(x) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Portanto $B = A^+ = 0$ e A^- é um campo auto-dual. Note que acrescentando índices adicionais à ψ não invalida a eq.(9) de modo que podemos ainda usa-la como a ação para o campo vetorial.

Este procedimento pode ser generalizado para $n > 1$ onde encontramos um campo $\psi_{\alpha\alpha_1,\ldots\alpha_n}$ totalmente simétrico com spin $\frac{1}{2}(n+1)$ e com apenas uma de suas componentes não nula e auto-dual.

O procedimento para a quantização de BFV é análoga ao caso da partícula auto-dual. Aumentamos o espaço de fase original introduzindo o momento canonicamente conjugado dos multiplicadores de Lagrange N e λ, denotados por Π_N e Π_λ, respectivamente, satisfazendo os colchetes de Poisson canonicos. Além dos fantasmas $\eta, \bar{\eta}, \mathcal{P}, \overline{\mathcal{P}}$ introduzidos para o vínculo T, introduzimos dois novos pares de fantasmas descritos por variáveis reais e canonicamente conjugados, $b, \bar{b}, c, \bar{c}$. Esse novo espaço de fase é dotado de uma simetria global de BRST gerado pela carga

$$Q = \eta T + cS + \Pi_N \mathcal{P} + \Pi_\lambda b + \frac{i}{2}\alpha \overline{\mathcal{P}} c^2 \tag{13}$$

Verficamos facilmente a nilpotência de Q.

O propagador é definido por

$$K(X(1), X(2), \gamma_\mu) = \int DX_\mu\, DP_\mu\, D\theta_\mu\, DN\, D\Pi_N\, D\lambda\, D\Pi_\lambda\, D\mathcal{P}\, D\bar{\eta}\, D\overline{\mathcal{P}}\, D\eta\, Db\, D\bar{c}\, D\bar{b}\, Dc\, \theta(I) e^{iS_{ef}} \tag{14}$$

onde a ação efetiva S_{ef} é dada por

$$S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [P^\mu \dot{X}_\mu + \frac{i}{4}\theta^\mu \dot{\theta}_\mu + \Pi_N \dot{N} + \Pi_\lambda \dot{\lambda} - \mathcal{P}\dot{\bar{\eta}} - \overline{\mathcal{P}}\dot{\eta} + b\dot{\bar{c}} + \bar{b}\dot{c} - \{Q, \Psi\}] \tag{15}$$

Como foi mencionado anteriormente uma escolha de gauge conveniente é o gauge do tempo próprio $\dot{N} = 0$ para reparametrizações e $\dot{\lambda} = 0$ para supersimetria local. Podemos obter essas condições de gauge escolhendo Ψ como

$$\Psi = N\overline{\mathcal{P}} + \lambda \bar{b} \tag{16}$$

a ação efetiva (15) torna-se

$$S_{ef} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau [P^\mu \dot{X}_\mu + \frac{i}{4}\theta^\mu \dot{\theta}_\mu + \Pi_N \dot{N} + \Pi_\lambda \dot{\lambda} - \mathcal{P}\dot{\bar{\eta}} - \overline{\mathcal{P}}\dot{\eta} + b\dot{\bar{c}} + \bar{b}\dot{c} +$$

$$+ NT - S\lambda + \mathcal{P}\overline{\mathcal{P}} + b\bar{b} - i\alpha\overline{\mathcal{P}}c\lambda] \tag{17}$$

As integrações funcionais podem agora ser efetuadas utilizando-se condiçãoes de contorno invariantes pelas trasformações de BRST. Obtemos

$$K(X(1), X(2), \gamma_\mu) = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{S}{T} e^{ip\Delta X} \tag{18}$$

Utilizando a forma explícita de S e T em termos de p_μ e γ_μ temos

$$K(X(1), X(2), \gamma_\mu) = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{ip\cdot\Delta X} K(p) \tag{19}$$

$$K(p) = \begin{pmatrix} 0 & p_1^{\frac{\gamma-3}{2}} \\ \frac{2\alpha p_1^{\frac{\gamma-1}{2}}}{p_0-p_1} & 0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

Podemos interpretar esse propagador numa teoria de campos se levarmos em conta os resultados obtidos anteriormente. Demonstramos que o campo que descreve a partícula auto-dual com spin é da forma $\psi_{\alpha,\alpha_1\ldots\alpha_n}$, portanto, podemos escrever o propagador (18) como

$$K(X(1), X(2), \gamma_\mu) = \begin{pmatrix} < \psi^\dagger_{2\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1)\psi_{1\alpha'_1\ldots\alpha'_n}(x_2) > & < \psi^\dagger_{1\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1)\psi_{1\alpha'_1\ldots\alpha'_n}(x_2) > \\ < \psi^\dagger_{2\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1)\psi_{2\alpha'_1\ldots\alpha'_n}(x_2) > & < \psi^\dagger_{1\alpha_1\ldots\alpha_n}(x_1)\psi_{2\alpha'_1\ldots\alpha'_n}(x_2) > \end{pmatrix} \tag{21}$$

Por exemplo, para $\gamma = 1$, no espaço dos momentos, obtemos

$$\begin{pmatrix} - < A^- A^+ > & < A^+ A^+ > \\ < A^- A^- > & - < A^+ A^- > \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ \frac{-2p_1}{p_0-p_1} & 0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

que é precisamente (a menos de fatores numéricos) o propagador para as componentes do cone de luz do campo A_μ que satisfaz as equações de movimento (12).

A teoria das partículas auto-duais com spin tem a propriedade de descrever bósons ou férmions. De fato, ela reproduz os propagadores da partícula auto-dual bosônica pois de (20) a componente não trivial do propagador é $\frac{p_1^{\frac{\gamma-1}{2}}}{p_0-p_1}$ que para γ ímpar produz p_1 à uma potência inteira no numerador. Esse é o mesmo resultado que o obtido para a partícula auto-dual bosônica. A vantagem desta formulação, porém, é que a estrutura tensorial de Lorentz e manifesta e abre a possibilidade de acoplar covariantemente bósons auto-duais à outros campos, principalmente à gravitação.

Este trabalho foi suportado parcialmente pelo CNPq. J.Gamboa agradece à CAPES pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

[1] D.J.Gross, J.A.Harvey, E.Martinec e R.Rohm, Phys.Rev.Lett. 54 (1985) 502, Nucl.Phys.B 256 (1985) 253 e B 267 (1986) 75

[2] S.Coleman, Phys.Rev. D11 (1975) 2088; S.Mandelstam, Phys.Rev. D11 (1975) 3026

[3] R.Floreanini e R.Jackiw, Phys.Rev.Lett. 59 (1987) 1873

[4] H.O.Girotti, M.Gomes, V.Kurak, V.O.Rivelles e A.J.da Silva. Phys. Rev. Lett. 60 (1988) 1913

[5] H.O.Girotti, M.Gomes, V.O.Rivelles e A.J.da Silva. Phys.Rev. D39 (1989) 3792

[6] M.Gomes, V.Kurak, V.O.Rivelles e A.J.da Silva, Phys.Rev.D 38 (1988) 1344

[7] M.Gomes, V.O.Rivelles e A.J.da Silva. Phys.Lett. 218B (1989) 63

[8] E.S.Fradkin e G.Vilkovisky. Phys.Lett. 55B (1975) 224; I.A.Batalin e G.Vilkovisky, Phys.Lett. 69B (1977) 309

[9] J.Gamboa e V.O.Rivelles. "Spinning Self-Dual Particles", preprint IFUSP/P-772 (1989)

[10] C.Teitelboim. Phys.Rev.Lett. 38 (1977) 1106; R.Tabensky e C.Teitelboim. Phys. Lett.B 69 (1977) 453

[11] M.Henneaux e C.Teitelboim, Ann.Phys.(N.Y.) 143 (1982) 143