

FR 9202336

LAL/RT 92-04
Février 1992

Gestion INIS
Doc. enreg. le : 5/05/92
N° TRN :
Destination : I,I+D,D

Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire

ELECTRONIQUE AUTOUR DES ACCELERATEURS

RAPPELS MATHEMATIQUES

Guy Le Meur

Ecole Thématique IN2P3 - Aussois 3-7 février 1992

U.E.R
de
l'Université Paris-Sud



**Institut National
de Physique Nucléaire
et
de Physique des Particules**

Bâtiment 200 - 91405 ORSAY Cedex

ELECTRONIQUE AUTOUR DES ACCELERATEURS

RAPPELS MATHEMATIQUES

Guy Le Meur

"En montagne le plus court chemin va de cime en cime; mais il faut avoir les jambes longues."

Nietzsche (Ainsi parlait Zarathoustra)

PREAMBULE

Les mathématiques mises en œuvre par l'électronique (fonction de variable complexe, théorème des résidus, transformées de Laplace, de Fourier, distributions etc...) représentent des développements assez délicats qui dépassent, de fait, le traditionnel "niveau BAC+2" requis pour cette école thématique et supposent une maîtrise effective des mathématiques générales de niveau premier cycle. Dans ces conditions, reconstruire cet édifice est un objectif illusoire pour les quatre heures imparties, même si l'on considère qu'il ne s'agit que de "rappels".

Je n'ai donc pas cherché à réaliser un exposé rigoureux et complet. Je me suis limité à l'évocation brève, la plupart du temps sans démonstration, de quelques notions essentielles en essayant de repérer les relations qu'elles nourrissent entre elles et d'en dégager l'architecture. J'espère suggérer que ces notions ne constituent pas seulement des outils ou recettes pour le calcul, mais qu'elles s'insèrent dans l'unité de "la" mathématique, forme sous laquelle la réalité est saisie par la science et la technique.

G. Le Meur

SOMMAIRE

- I - PRELIMINAIRES**
- II - FONCTIONS COMPLEXES**
- III - DISTRIBUTIONS**
- IV - SERIES DE FOURIER**
- V - TRANSFORMEE DE LAPLACE**
- VI - TRANSFORMEE DE FOURIER**
- VII - PROBABILITES**

I. RAPPELS PRELIMINAIRES

1. SUITES

A un entier n , une suite notée (u_n) fait correspondre un nombre réel u_n : c'est une application de l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} :

$$n \rightarrow u_n$$

Une suite est positive (resp. négative) ou nulle si u_n est positif (resp. négatif) ou nul quel que soit n .

La suite (u_n) tend vers une limite U si :

$$\forall \varepsilon > 0, \text{réel}, \exists n_0, n > n_0 \Rightarrow |u_n - U| \leq \varepsilon$$

On note :

$$u_n \rightarrow U$$

2. SERIES

La série de terme général u_n est définie par la suite (S_k) :

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} u_n$$

Si la suite (S_k) tend vers une limite S , la série est dite **convergente** de somme S et on note :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

La théorie des séries, que nous ne développons pas, donne un ensemble de critères de convergence.

Exemples :

a) série géométrique

$$S_k = \sum_{n=0}^k x^n = 1 + x + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$$

si $|x| < 1$ $S_k \rightarrow \frac{1}{1-x}$ quand $k \rightarrow \infty$, donc la suite converge vers $\frac{1}{1-x}$

b) séries de Fourier

$$S_k = \sum_{n=0}^{n=k} a_n \cos n\theta \quad T_k = \sum_{n=0}^{n=k} b_n \sin n\theta$$

La théorie des séries indique que si (a_n) et (b_n) sont des suites positives ou nulles tendant vers zéro pour $n \rightarrow +\infty$ alors ces séries sont convergentes (sauf si $\theta = 2k\pi$ pour S_k).

3. FONCTION REELLE D'UNE VARIABLE REELLE.

3.1 DEFINITION.

Une fonction réelle d'une variable réelle, notée $f(x)$, est définie par une application de l'ensemble des réels dans lui-même:

$$x \rightarrow f(x)$$

La fonction $f(x)$ est définie pour des valeurs de la variable x prises dans un **domaine de définition D**.

Exemple: $f(x) = \sqrt{x-1}$ domaine de définition: $D = \{x \text{ tel que } x \geq 1\}$

$f(x)$ est **bornée** s'il existe M tel que, pour tout x pris dans l'ensemble de définition, $|f(x)| \leq M$

$f(x)$ est **croissante** si:

$$x > x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$$

(définition analogue pour une fonction **décroissante**)

Une fonction est **monotone** sur un segment si elle est soit croissante soit décroissante sur la totalité de ce segment.

3.2 DERIVEE

$f(x)$ tend vers une limite a , quand x tend vers x_0 ($x \in D$) si:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \quad \exists \eta \in \mathbb{R}, \quad |x-x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-a| \leq \epsilon$$

$f(x)$ est **dérivable** au point x_0 si la fonction:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

a une limite quand x tend vers x_0 . Cette limite est la **dérivée** notée $f'(x)$. On écrit sous forme différentielle :

$$\frac{df}{dx} = f'(x) \quad \text{ou:} \quad df = f'(x) dx$$

On dit que la fonction admet une dérivée à gauche si cette limite existe pour $x \rightarrow x_0$ avec $x < x_0$, une dérivée à droite si cette limite existe pour $x \rightarrow x_0$ avec $x > x_0$.

3.3 FONCTIONS CONTINUES.

une fonction $f(x)$ est **continue** en x_0 si $f(x)$ a une limite quand $x \rightarrow x_0$ et si cette limite est la valeur $f(x_0)$.

Une fonction est continue sur son domaine de définition si elle est continue en tout point de ce domaine. Une fonction dérivable est continue mais la réciproque est fausse.

3.3 INTEGRATION (SUR R).

3.3.1 Définitions.

On appelle Intégrale (de Riemann) de a à b de la fonction f bornée, un nombre, noté $\int_a^b f(x) dx$, défini par la limite commune, si elle existe, des sommes "de Riemann":

$$s_n = f(a)(x_1-a) + f(x_1)(x_2-x_1) + \dots + f(x_{n-1})(b-x_{n-1})$$

$$S_n = f(x_1)(x_1-a) + f(x_2)(x_2-x_1) + \dots + f(b)(b-x_{n-1})$$

$a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$ représentant les points de subdivisions de $[a, b]$ en n sous-segments. Cette intégrale se généralise pour des bornes a et b infinies et pour des fonctions non bornées (Intégrales impropres). Une fonction pour laquelle l'intégrale de Riemann existe est dite **intégrable**.

Soit une fonction $f(x)$, on appelle **primitive** de $f(x)$ toute fonction $F(x)$ telle que:

$$F'(x) = f(x)$$

Si $f(x)$ admet des primitives on montre qu'elles diffèrent entre elles d'une constante et l'on a :

$$F(x) = \int_a^x f(u) du + F(a)$$

Une fonction telle que sa valeur absolue soit intégrable (Intégrale propre ou impropre) est dite "absolument intégrable". Si une fonction ne comporte qu'un nombre fini de points de discontinuité et est absolument intégrable nous la dirons **sommable**. Une fonction **localement sommable** est une fonction sommable sur tout ensemble borné (sur tout segment), mais non nécessairement sur l'ensemble de son domaine de définition.

3.3.2 Changement de variable.

Soit:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Supposons que l'on ait $x = \phi(t)$, ϕ étant une fonction (dérivable) monotone, c'est-à-dire telle que l'on puisse calculer t de manière univoque en connaissant x , alors I peut se calculer comme:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f[\phi(t)] \phi'(t) dt$$

avec $a = \phi(\alpha)$ et $b = \phi(\beta)$

3.3.3 Formule d'intégration par parties.

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = - \int_a^b u'(x)v(x) dx + [u(x)v(x)]_a^b$$

soit:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = - \int_a^b u'(x)v(x) dx + u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

3.4 FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

Une fonction de deux variables x et y fait correspondre au couple (x,y) , c'est-à-dire à un point du plan xOy , un nombre réel $f(x,y)$. On définit des dérivées partielles:

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{et} \quad f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

calculées respectivement en considérant f comme fonction de x (avec le paramètre y) ou comme fonction de y (avec le paramètre x). On écrit sous forme différentielle:

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

On définit également l'intégrale double, pour laquelle on a la formule de Fubini:

$$\int f(x,y) dx dy = \int dx \int f(x,y) dy = \int dy \int f(x,y) dx$$

Cette formule n'est valable que si toutes les intégrales écrites ont un sens (existent).

Le changement de variables est un peu plus délicat que pour l'intégrale simple. Soit:

$$x = \phi(\xi, \eta)$$

$$y = \psi(\xi, \eta)$$

(On suppose ϕ et ψ dérivables et telles que ξ et η soient calculables de manière univoque à partir de x et y)

on a:

$$\int f(x,y) dx dy = \int J f[\phi, \psi] d\xi d\eta$$

avec le "jacobien":

$$J = \begin{vmatrix} \phi'_{\xi} & \psi'_{\xi} \\ \phi'_{\eta} & \psi'_{\eta} \end{vmatrix}$$

II – FONCTIONS DE LA VARIABLE COMPLEXE

"Chaque nombre complexe a une partie réelle et une partie imaginaire ; au fond, la partie imaginaire, c'est l'inconscient du nombre complexe"

J. Roubaud (L'Exil d'Hortense)

1. LES NOMBRES COMPLEXES

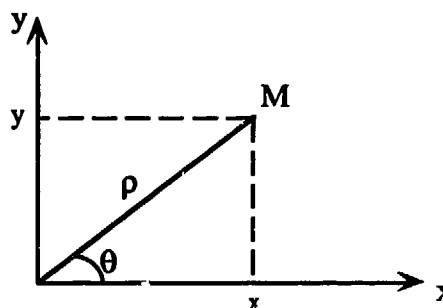
Un nombre complexe est caractérisé par un couple de nombres réels (x,y) , pouvant être interprété comme les coordonnées d'un point M du plan xOy .

Il est noté :

$$z = x + j y$$

avec $j^2 = -1$; x est la partie réelle ;

y est la partie imaginaire.



On définit sur les nombres complexes les mêmes opérations que pour les réels : addition, soustraction, multiplication, division, exponentiation etc...

Le nombre complexe z peut également être défini par son module ρ et son argument θ :

$$z = \rho (\cos \theta + j \sin \theta) = \rho e^{j\theta}$$

On a : $x = \rho \cos \theta$ $\rho^2 = x^2 + y^2$ on note $\rho = |z|$ ($\rho \geq 0$ par définition)

$$y = \rho \sin \theta \quad \text{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

On remarque que le module de $e^{j\theta}$ est égal à 1.

On a la formule de Moivre :

$$z^n = \rho^n (\cos n\theta + j \sin n\theta) = \rho^n e^{jn\theta}$$

A tout nombre complexe z on peut associer le nombre complexe conjugué noté z^* tel que :

$$z^* = x - jy = \rho e^{-j\theta}$$

Le conjugué d'une somme, d'un produit de nombres complexes est égal au conjugué de cette somme, de ce produit.

2. FONCTION DE LA VARIABLE COMPLEXE

A un nombre complexe $z = x + j y$, une fonction complexe associe un autre nombre complexe $Z = f(z)$ défini par :

$$f(z) = u(x,y) + j v(x,y)$$

$u(x,y)$ et $v(x,y)$ étant des fonctions réelles de 2 variables réelles. $f(z)$ est défini pour z contenu dans un *domaine de définition*. Une fonction complexe est continue en z_0 , si :

$$\forall \varepsilon \text{ réel positif, } \exists \eta \text{ réel positif tel que } |z - z_0| < \eta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

$f(z)$ est *continue* si elle est continue en tout point de son domaine de définition ;

$f(z)$ est *uniforme* si à toute valeur de la variable z correspond une valeur unique de $f(z)$. Par exemple $f(z) = z^{1/m}$ n'est pas uniforme. En effet : définissons z par module-argument :

$$f(z) = (\rho e^{j\theta})^{\frac{1}{m}} = \rho^{\frac{1}{m}} e^{j\frac{\theta}{m}} = \rho^{\frac{1}{m}} \left[\cos \frac{\theta}{m} + j \sin \frac{\theta}{m} \right]$$

L'argument de z est défini à $2 k\pi$ près :

$$\theta = \theta_0 + 2 k\pi \quad -\pi < \theta_0 \leq \pi$$

k entier positif, négatif ou nul.

donc l'argument de $f(z)$ est :

$$\varphi = \frac{\theta_0}{m} + \frac{2 k\pi}{m}$$

et $f(z)$ n'est pas un nombre complexe unique.

3. DERIVEE D'UNE FONCTION COMPLEXE

En un point z du domaine de définition, choisissons un accroissement Δz de la variable et notons :

$$z_1 = z + \Delta z$$

alors $\Delta z = z_1 - z = \rho e^{j\alpha}$

$$f(z_1) - f(z) = \rho_1 e^{j\alpha_1}$$

Pour $\Delta z \neq 0$, nous pouvons écrire le rapport :

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} = \frac{\rho'}{\rho} e^{j(\alpha_1 - \alpha)}$$

En fixant α on peut faire tendre ρ vers 0. Dans ces conditions le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ peut tendre vers une limite f'_α . Mais cette limite dépend de α : en changeant α , $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ peut tendre vers une autre valeur. Donc, au point z , on peut définir une infinité de dérivées. Pour avoir unicité de la dérivée en z , $f(z)$ doit remplir des conditions précises, que nous allons expliciter.

Posons : $f(z) = w = u(x,y) + jv(x,y)$

alors : $dw = du + jdv$

soit :
$$\frac{dw}{dz} = \frac{(u'_x dx + u'_y dy) + j(v'_x dx + v'_y dy)}{dx + j dy}$$

$$= \frac{(u'_x + j v'_x) dx + (u'_y + j v'_y) dy}{dx + j dy}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ce rapport soit indépendant de $\frac{dy}{dx}$ est :

$$\frac{u'_x + j v'_x}{1} = \frac{u'_y + j v'_y}{j}$$

$u'_x = v'_y$ $u'_y = -v'_x$

soit :

Relations de Cauchy

Une fonction vérifiant ces relations est dite *analytique* et possède une dérivée unique en chaque point z de son domaine de définition.

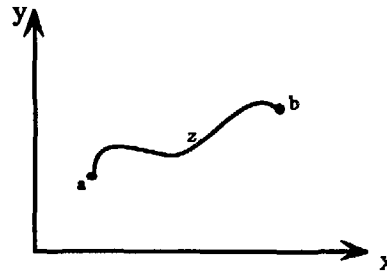
Une fonction continue, uniforme, analytique est dite *holomorphe*.

On démontre la propriété suivante : si on peut écrire $f(z)$ explicitement en n'utilisant que la variable z (donc à l'exclusion de z^* , x, y) alors $f(z)$ est analytique ;

exemples : $f(z) = Lz$, $f(z) = \frac{1}{Cz}$.

4. INTEGRATION DANS LE PLAN COMPLEXE

Soient 2 nombres complexes a, b représentés dans le plan complexe. Faisons varier z sur une trajectoire (C) allant de a à b .



On définit une intégrale complexe :

$$\begin{aligned} \int_{(C)} f(z) dz &= \int_{(C)} (u + jv) (dx + j dy) \\ &= \int_{(C)} [(u dx - v dy) + j(v dx + u dy)] \\ &= \int_{(C)} (u dx - v dy) + j \int_{(C)} (v dx + u dy) \end{aligned}$$

Cette intégrale "de a à b " dépend en général de la trajectoire (C) choisie.

On démontre que si $f(z)$ est *analytique* dans une région R du plan xOy elle admet, dans cette région une primitive $F(z)$ et l'on a :

$$I = \int_a^b f(z) dz = F(b) - F(a)$$

indépendant de chemin choisi pour aller de a à b .

On en déduit le *théorème de Cauchy* : si $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur d'un contour fermé et sur ce contour, l'intégrale de cette fonction prise le long du contour est nulle.

On appelle *point singulier* un point où $f(z)$ n'est plus analytique. Par exemple, un *pôle d'ordre m* , est un point singulier a où $f(z)$ tend vers l'infini comme $(z - a)^{-m}$, ou plus précisément admet le développement en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{-m}^{\infty} A_n (z - a)^n$$

Le nombre A_{-1} est le *résidu* de $f(z)$ au pôle a .

Un pôle d'ordre 1 est dit "pôle simple".

On démontre le *théorème des résidus* :

Si $f(z)$ est holomorphe, sauf au point $z = a$ pôle d'ordre quelconque m , et si C est un contour entourant le point a alors :

$$\int_{(C)} f(z) dz = 2 \pi j R_a$$

où R_a est le résidu de $f(z)$ en a .

Plus généralement, si C entoure plusieurs pôles :

$$\int_{(C)} f(z) dz = 2 \pi j \sum R_i$$

$\sum R_i$ est la somme des résidus relatifs à chacun des pôles.

III – DISTRIBUTIONS

1. DEFINITIONS

On considère les fonctions (complexes) définies sur l'ensemble \mathbb{R} . Parmi ces fonctions on définit l'ensemble \mathcal{D} des fonctions indéfiniment dérivables et telles qu'il existe, pour une telle fonction φ , un intervalle borné $[a,b]$ ($a \neq -\infty, b \neq +\infty$) en dehors duquel φ est identiquement nulle. Ces fonctions sont dites "à support borné".

Exemple :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ \varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{pour } |x| < 1 \end{cases}$$

cette fonction appartient à \mathcal{D} .

On appelle *distribution* T une application linéaire continue de \mathcal{D} dans \mathbb{R} (nous n'entrerons pas ici dans le détail de la définition de la "continuité" d'une telle application). On note :

$$\varphi \xrightarrow{T} T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$$

$\langle T, \varphi \rangle$ représente donc un nombre réel. On a (linéarité) :

$$\langle T, \lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2 \rangle = \lambda \langle T, \varphi_1 \rangle + \mu \langle T, \varphi_2 \rangle \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

une distribution T est nulle sur un intervalle (ouvert) si $\langle T, \varphi \rangle = 0$ quel que soit φ dont le support est inclus dans cet intervalle. Le support d'une distribution est le plus petit ensemble (fermé) en dehors duquel elle est nulle.

L'ensemble des distributions sur \mathbb{R} est noté \mathcal{D}' .

Exemples de distributions :

a) Soit f une fonction localement sommable. Elle permet de définir une distribution T_f par :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$$

Cette intégrale a bien un sens : car il existe $[a,b]$ en dehors duquel $\varphi(x)$ est nul, donc l'intégrale s'effectue en réalité entre a et b ; de plus on démontre que l'appartenance de φ à \mathcal{D} entraîne la sommabilité de $f\varphi$.

b) L'échelon unité $Y(x)$:

$$\begin{cases} Y(x) = 0 & \text{pour } x \leq 0 \\ Y(x) = 1 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

est une fonction localement sommable (non dérivable pour $x = 0$). Elle définit donc une distribution, d'après ce qui précède :

$$\langle Y(x), \varphi(x) \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

c) La distribution de Dirac ("impulsion").

On définit la distribution de Dirac δ par :

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

On définit une distribution de Dirac au point a ("translatée") par :

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

2. DERIVATION D'UNE DISTRIBUTION

Soit f une fonction dérivable et à dérivée continue (donc sommable). A partir de la dérivée $\frac{df}{dx}$ on définit la distribution :

$$\left\langle \frac{df}{dx}, \varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{dx} \varphi(x) dx$$

en intégrant par parties, on obtient :

$$\left\langle \frac{df}{dx}, \varphi \right\rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{d\varphi}{dx} dx + [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty}$$

Le terme tout intégré est nul car, par définition, $\varphi(x)$ est nul à l'infini. Donc :

$$\left\langle \frac{df}{dx}, \varphi \right\rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = - \left\langle f, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle$$

Ce résultat suggère de *définir*, pour toute distribution T , sa dérivée par :

$$\boxed{\left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle}$$

Exemples :

a) dérivée de $Y(x)$

$$\langle Y', \varphi \rangle = - \left\langle Y, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} Y(x) \frac{d\varphi}{dx} \cdot dx = \int_0^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx} \cdot dx - [\varphi]_0^{+\infty}$$

soit : $\langle Y', \varphi \rangle = \varphi(0)$

donc :

$$\boxed{Y'(x) = \delta}$$

b) dérivée de δ

$$\langle \delta', \varphi \rangle = - \left\langle \delta, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle = - \frac{d\varphi}{dx}(0)$$

3. MULTIPLICATION DE DISTRIBUTIONS

On ne peut pas définir le produit de 2 distributions en général. Par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ est localement sommable. Elle définit donc une distribution. Mais le produit de f par elle-même, $f^2 = \frac{1}{|x|}$ n'est pas localement sommable et ne représente pas une distribution.

On définit en revanche un produit αT d'une distribution quelconque T par une fonction α indéfiniment dérivable au sens usuel :

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle$$

Exemple : $\langle \alpha \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \alpha \varphi \rangle = \alpha(0) \varphi(0) = \langle \alpha(0) \delta, \varphi \rangle$

soit : $\alpha \delta = \alpha(0) \delta$.

4. CONVOLUTION

Soient 2 fonctions $f(t)$ et $g(t)$. On appelle produit tensoriel de ces 2 fonctions, noté $f(x) \otimes g(x)$ la fonction de deux variables :

$$h(x,y) = f(x) g(y)$$

Notons \mathcal{D}_x et \mathcal{D}_y les espaces \mathcal{D} relatifs respectivement à x et y . On définit, par une généralisation du paragraphe 1, un espace \mathcal{D}_{xy} de fonctions de deux variables indéfiniment dérivables à support borné :

soit alors:

$$\varphi(x,y) = u(x) v(y)$$

$$u \in \mathcal{D}_x$$

$$v \in \mathcal{D}_y$$

on a : $\varphi \in \mathcal{D}_{xy}$.

Alors, on peut définir, en généralisant 2:

$$\begin{aligned} \langle f(x) \otimes g(y), u(x) v(y) \rangle &= \int f(x) g(y) u(x) v(y) dx dy \\ &= \langle f, u \rangle \langle g, v \rangle \end{aligned}$$

En généralisant aux fonctions $\varphi(x,y)$ qui ne s'écrivent pas sous la forme d'un produit $u(x)v(y)$:

$$\begin{aligned} \langle f \otimes g, \varphi(x,y) \rangle &= \iint f(x) g(y) \varphi(x,y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x,y) dx \quad (\text{Fubini}) \end{aligned}$$

soit :
$$\langle f \otimes g, \varphi(x,y) \rangle = \langle g(y) \langle f(x), \varphi(x,y) \rangle \rangle$$

En généralisant on démontre que, S et T étant deux distributions quelconques on peut définir leur produit tensoriel W par :

$$\begin{aligned} \langle W, \varphi(x,y) \rangle &= \langle T_y, \langle S_x, \varphi(x,y) \rangle \rangle \\ &= \langle T_\xi \otimes T_\eta, \varphi(x,y) \rangle \\ &= \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x,y) \rangle \rangle \end{aligned}$$

On appelle **produit de convolution** de deux distributions S et T, la distribution définie par :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_\xi \otimes T_\eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle$$

Ce produit est commutatif.

L'existence de cette expression est soumise à des conditions sur S et T que nous n'explicitons pas.

Dans le cas particulier où S et T sont des fonctions f et g localement sommables, convenables, on a :

$$\langle W, \varphi \rangle = \langle f_\xi \otimes g_\eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle = \iint f(\xi) g(\eta) \varphi(\xi + \eta) d\xi d\eta$$

en effectuant le changement de variables :

$$x = \xi + \eta \quad (J = 1)$$

$$t = \eta$$

on obtient :

$$\langle W, \varphi \rangle = \iint f(x-t) g(t) \varphi(x) dx dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt \\
 \langle W, \varphi \rangle &= \langle h, \varphi \rangle \\
 \text{avec : } h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt
 \end{aligned}$$

La validité de cette formule est établie par des théorèmes assurant l'existence de toutes les expressions écrites.

Exemple : $\langle \delta * T, \varphi \rangle = \langle T, \langle \delta_\eta, \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle = \langle T, \varphi(\xi) \rangle$

$$\boxed{\delta * T = T}$$

5. LA CONVOLUTION EN PHYSIQUE

Soit, par exemple, un circuit R,L,C. Le courant $i(t)$ et la tension appliquée $e(t)$ satisfont l'équation :

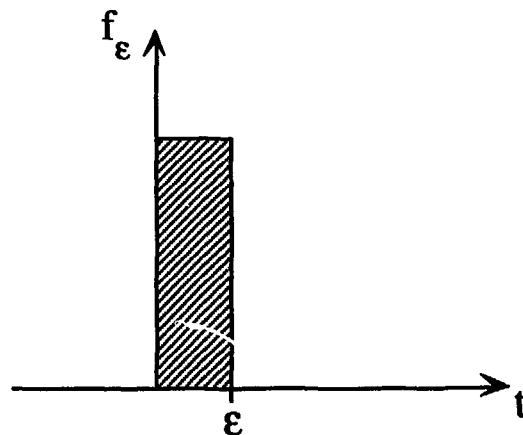
$$e(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

la variable t représente le temps. On suppose $i(t) = e(t) = 0$ pour $t < 0$. Considérons l'excitation $e(t)$ suivante :

$$e(t) = f_\varepsilon(t)$$

avec : $f_\varepsilon(t) = 0$ si $t > \varepsilon$ ou $t < 0$

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \text{ si } 0 < t < \varepsilon$$



Cette fonction est sommable et définit la distribution :

$$\langle f_\epsilon, \varphi \rangle = \int_0^\epsilon f_\epsilon(t) \varphi(t) dt = \int_0^\epsilon \varphi(t) dt = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \varphi(t) dt$$

On a (formule des accroissements finis) :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t \varphi'(\theta) \quad \text{avec } 0 < \theta \leq t$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \langle f_\epsilon, \varphi \rangle &= \frac{1}{\epsilon} \left[\int_0^\epsilon \varphi(0) dt + \int_0^\epsilon t \varphi'(\theta) dt \right] \\ &= \varphi(0) + \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon t \varphi'(\theta) dt \end{aligned}$$

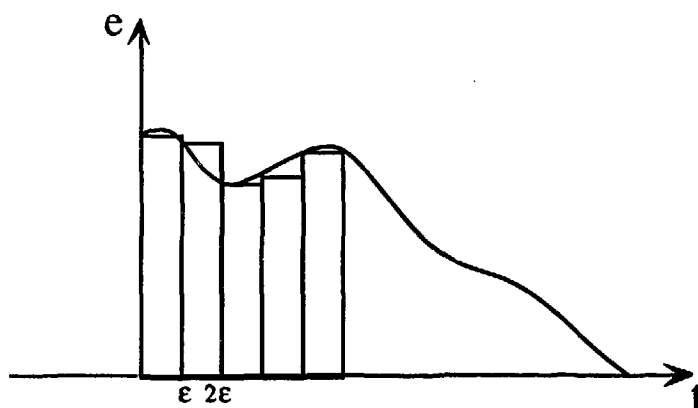
$\varphi'(\theta)$ reste borné, car $\varphi \in \mathcal{D}$: $|\varphi'(\theta)| < A$

$$\text{donc } \left| \int_0^\epsilon t \varphi'(\theta) dt \right| \leq \int_0^\epsilon t |\varphi'(\theta)| dt \leq A \int_0^\epsilon t dt = A \frac{\epsilon^2}{2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{\epsilon} \left| \int_0^\epsilon t \varphi'(\theta) dt \right| \leq A \frac{\epsilon}{2}$$

Si on fait tendre ϵ vers 0 $\langle f_\epsilon, \varphi \rangle \rightarrow \varphi(0)$. La distribution impulsion δ est donc la limite de la distribution f_ϵ . Pour étudier la réponse du système physique à une impulsion du type f_ϵ , avec ϵ petit on utilisera la distribution mathématique δ .

De plus, une excitation générale $e(t)$ peut s'approcher par une fonction escalier :



$$e(t) \simeq e(n\epsilon) \quad \text{pour } n\epsilon < t < (n+1)\epsilon$$

alors : $e(t) \simeq \sum_{n=0}^{\infty} e(n\varepsilon) f_{\varepsilon}(t - n\varepsilon) \cdot \varepsilon$

d'où "en faisant tendre ε vers 0", l'écriture abusive :

$$e(t) = \int_0^{\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

ou, plus correctement :

$$e = e * \delta$$

formule que nous avons déjà établie.

De même : $i = i * \delta$

Par ailleurs, pour une distribution quelconque T :

$$\begin{aligned} \langle \delta' * T, \varphi \rangle &= \langle T_{\xi}, \langle \delta'_{\eta}, \varphi(\xi + \eta) \rangle \rangle \\ &= \langle T_{\xi}, -\varphi'(\xi) \rangle = \langle T', \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$T' = \delta' * T$$

donc : $\frac{di}{dt} = \delta' * i$

Enfin : $\int_0^t i(\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\tau) i(t - \tau) d\tau = Y * i$

puisque pour $\tau > t : i(t - \tau) = 0$

Donc l'équation du circuit R,L,C s'écrit :

$$e(t) = R \delta * i + L \delta' * i + \frac{1}{C} Y * i$$

on obtient donc une *équation de convolution* :

$$e = Z * i$$

avec : $Z = R \delta + L \delta' + \frac{1}{C} Y$.

IV. SERIES DE FOURIER

1. FONCTIONS PERIODIQUES

Une fonction réelle ou complexe est périodique s'il existe un nombre réel T (non nul) appelé période tel que :

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pour que l'exponentielle $e^{\lambda x}$ soit périodique, il faut et il suffit que l'on ait $e^{\lambda T} = 1$, soit $\lambda T = 2jk\pi$, avec k entier.

2. SERIES DE FOURIER "COMPLEXES"

2.1 DEFINITION.

Etant donné une fonction $f(x)$ périodique, de période T , son développement en série de Fourier s'écrit:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega x}$$

$$(\omega = 2\pi/T)$$

Ce développement n'existe et ne converge vers $f(x)$ que si $f(x)$ satisfait des conditions adéquates.

Remarque: la sommation représente, ici, deux séries; l'une de 0 à $+\infty$, l'autre de 0 à $-\infty$. On dit que cette série de Fourier converge si les deux séries convergent séparément.

2.2 CALCUL DES COEFFICIENTS.

Si ces conditions sont réunies les coefficients c_k se calculent de la manière suivante: on multiplie les deux membres de la relation de définition par $e^{-jl\omega x}$ et on intègre sur une période.

$$\int_a^{a+T} f(x) e^{-jl\omega x} dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_a^{a+T} e^{j(k-l)\omega x} dx$$

Examinons chacun des termes de la somme. Pour $k \neq 1$

$$\int_a^{a+T} e^{j(k-1)\omega x} dx = \frac{1}{j(k-1)\omega} \left[e^{j(k-1)\omega x} \right]_a^{a+T}$$

Tous ces termes sont nuls en raison de la périodicité de l'exponentielle. Reste le terme $k = 1$,
on a :

$$c_k \int_a^{a+T} dx = T c_k$$

D'où :

$$c_k = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) e^{-jk\omega x} dx$$

En raison de la périodicité, cette intégrale ne dépend pas du choix de a . On remarque que $c_{-k} = c_k^*$, si $f(x)$ est réelle. En effet, le développement en série de Fourier est réel dans ce cas et, dans l'exponentielle complexe changer le signe de k revient à passer au conjugué. A chaque terme du développement d'ordre k correspond donc son conjugué d'ordre $-k$ de sorte que leur somme est réelle.

On montre que le développement en série de Fourier existe pour toute fonction **localement sommable** (ce qui assure, en particulier, l'existence de l'intégrale définissant c_k). En particulier, $f(x)$ n'est pas nécessairement continue.

3. SERIES DE FOURIER "REELLES"

En utilisant les relations:

$$e^{jk\omega x} = \cos k\omega x + j \sin k\omega x$$

$$e^{-jk\omega x} = \cos k\omega x - j \sin k\omega x$$

la série de Fourier peut s'écrire :

$$f(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\omega x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\omega x$$

avec :

$$a_k = j(c_k - c_k^*)$$

$$b_k = c_k + c_k^*$$

ces coefficients se calculent directement par :

$$a_k = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \sin k\omega x \, dx$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \cos k\omega x \, dx$$

$$b_0 = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \, dx$$

Cette représentation de la série de Fourier est particulièrement adaptée si $f(x)$ est paire ou impaire.

Si f est paire, $f(-x) = f(x)$ et :

$$f(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\omega x$$

avec :

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos k\omega x \, dx$$

$$b_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) \, dx$$

si f est impaire, $f(-x) = -f(x)$ et:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\omega x$$

avec

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin k\omega x \, dx$$

4. DISTRIBUTIONS PERIODIQUES

Considérons les fonctions $f(u)$ définies sur une circonférence Γ (de longueur T); autrement dit u est l'abscisse curviligne le long de cette circonférence. Parmi ces fonctions on peut définir un ensemble $\mathcal{D}(\Gamma)$ des fonctions $\Psi(x)$ indéfiniment dérivables. A partir de $\mathcal{D}(\Gamma)$ on définit les distributions \mathcal{T} formant un ensemble $\mathcal{D}'(\Gamma)$.

On montre que l'on peut prolonger par périodicité ces distributions de $\mathcal{D}'(\Gamma)$ en distributions sur \mathbb{R} . Par exemple, si \mathcal{T} est la distribution δ sur Γ , $\tilde{\mathcal{T}}$ est formée de "masses de Dirac" placées aux points d'abscisses lT de la droite réelle:

$$\langle \tilde{\delta}, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(lT)$$

(en réalité la somme est finie car φ est nul en dehors d'un segment $[a, b]$)

ou:

$$\tilde{\delta}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - lT)$$

Le produit de convolution se prolonge de la même manière.

5. SERIE DE FOURIER D'UNE DISTRIBUTION PERIODIQUE

On définit les coefficients de Fourier de $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ par:

$$c_k(\mathcal{T}) = \frac{1}{T} \langle \mathcal{T}, e^{-jk\omega u} \rangle$$

On appelle série de Fourier la série:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(\mathcal{T}) e^{jk\omega u}$$

Exemple : soit $T = \delta$

$$c_k(T) = \frac{1}{T} \langle \delta, e^{-jk\omega_0} \rangle = \frac{1}{T}$$

d'où :

$$\delta = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 x}$$

On démontre que cette série converge vers δ périodique, en un sens adéquat.

6. INTEGRATION ET DERIVATION (FONCTIONS LOCALEMENT SOMMABLES).

Le développement en série de Fourier de l'intégrale d'une fonction $f(x)$ est égal à l'intégrale du développement . On peut donc intégrer terme à terme.

On peut également dériver terme à terme, mais il faut s'assurer que le développement dérivé représente bien une série convergente.

Exemple (exercice) : développer en série de Fourier la fonction de période 2π égale à -1 pour $-\pi < x < 0$ et égale à $+1$ pour $0 < x < \pi$. Intégrer et dériver. Constater que la série dérivée ne converge pas et, par conséquent, ne représente pas la dérivée de la fonction.

V. TRANSFORMEE DE LAPLACE

1. DEFINITIONS

1.1 TRANSFORMEE DES FONCTIONS

On appelle transformation de Laplace la transformation qui, à toute fonction complexe $f(t)$ localement sommable de la variable réelle t , nulle pour $t < 0$ et vérifiant en outre des conditions restrictives "convenables", fait correspondre la fonction holomorphe $F(p)$ de la variable complexe p définie par l'intégrale:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

On écrit: $f(t) \supset F(p)$

Posons $p = \xi + j\eta$. On montre qu'il existe ξ_0 tel que si $\xi > \xi_0$ l'intégrale ci-dessus existe. On se placera toujours dans ce cas.

1.2 TRANSFORMEE DES DISTRIBUTIONS

On démontre que si T est une distribution sur l'axe réel de la variable t , de support contenu dans la demi-droite $t \geq 0$ (on notera $T \in \mathcal{D}'_+$), on peut, sous certaines conditions, généraliser l'expression précédente et définir la transformée de Laplace de T par la fonction holomorphe (si $\xi > \xi_0$, comme plus haut):

$$\mathcal{T}(p) = \langle T, e^{-pt} \rangle$$

expression existant, sous les conditions évoquées, bien que e^{-pt} ne soit pas un fonction de \mathcal{D} .

1.3 INVERSION DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

On démontre que, sous des conditions assez générales, une fonction holomorphe $\mathcal{T}(p)$ est transformée de Laplace d'une distribution $T \in \mathcal{D}'_+$ unique. L'explicitation de cette dernière se fera à l'aide d'une table.

2. TRANSFORMEES DES FONCTIONS ET DISTRIBUTIONS USUELLES

2.1 ECHELON UNITE

$$\int_0^{+\infty} Y(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

$$\boxed{Y(t) \supset \frac{1}{p}}$$

(l'intégrale existe dès que la partie réelle de p est positive, donc ici le ξ_0 défini en 1.1 est nul)

Soit, maintenant $T > 0$:

$$\int_0^{+\infty} Y(t-T) e^{-pt} dt = \int_T^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt}\right]_T^{+\infty} = e^{-pT}$$

D'où :

$$\boxed{Y(t-T) \supset \frac{e^{-pT}}{p}}$$

2.1 DISTRIBUTION DE DIRAC (IMPULSION)

$$\pi(p) = \langle \delta, e^{-pt} \rangle = 1$$

$$\boxed{\delta(t) \supset 1}$$

De même, pour la translatée et la dérivée d'ordre m :

$$\delta_a(t) \supset e^{-pa} \quad ; \quad \delta^{(m)} \supset p^m$$

1.1 EXPONENTIELLE

$$\int_0^{+\infty} e^{p_0 t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(p_0-p)t} dt = \left[\frac{1}{p_0-p} e^{(p_0-p)t}\right]_0^{+\infty}$$

$$\boxed{e^{p_0 t} \supset \frac{1}{p-p_0}}$$

2.4 FONCTIONS CIRCULAIRES

$$\int_0^{\infty} \cos \omega t e^{-pt} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) e^{-pt} dt$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega} \right] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$\boxed{\cos \omega t \supset \frac{p}{p^2 + \omega^2}}$$

De même :

$$\boxed{\sin \omega t \supset \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}$$

3. PROPRIETES

3.1 LINEARITE

$$af_1(t) + bf_2(t) \supset aF_1(p) + bF_2(p) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

3.2 TRANSFORMEE D'UNE DERIVEE

$$\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + [f(t) e^{-pt}]_0^{\infty}$$

(intégration par parties)

$f(t) |e^{-pt}|$ est nul à l'infini, si la partie réelle de p est assez grande, donc :

$$\boxed{f'(t) \supset pF(p) - f(0)}$$

On a, de plus, les propriétés suivantes: quand $p \rightarrow 0$ le premier membre de l'équation ci-dessus tend vers :

$$\int_0^{\infty} f'(t) dt = f(\infty) - f(0)$$

Donc, $p F(p) - f(0)$ qui lui est égal a la même limite et :

$$p F(p) \rightarrow f(\infty) \text{ quand } p \rightarrow 0$$

Le comportement à l'infini de f est donné par celui de la transformée de Laplace en $p = 0$.

De même, quand $p \rightarrow \infty$ $pF(p) \rightarrow f(0)$.

3.3 TRANSLATION DE LA FONCTION

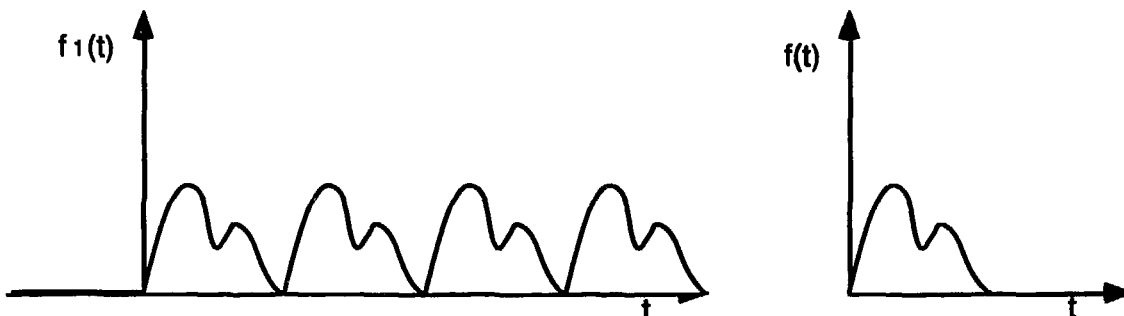
$$\int_0^{\infty} f(t-T) e^{-pt} dt = \int_T^{\infty} f(t-T) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(u) e^{-p(u+T)} du = e^{-pT} f(p)$$

(changement de variable : $u = t-T$; on suppose T positif)

Soit:

$$f(t-T) \supset e^{-pT} F(p)$$

Cette formule conduit au cas d'un signal semi-périodique :



$$f_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t-nT)$$

par linéarité:

$$f_1(t) \supset \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nTp} F(p) = \frac{F(p)}{1-e^{-pT}}$$

(somme d'une série géométrique)

3.4 "CHANGEMENT DE FREQUENCE COMPLEXE"

Il s'agit de la transformée de: $f(t) e^{p_0 t}$

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{p_0 t} e^{-p t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-p_0)t} dt$$

c'est-à-dire :

$$f(t) e^{p_0 t} \supset F(p-p_0)$$

Remarque : les propriétés précédentes ne sont démontrées ici que dans le cas où $f(t)$ est une fonction et non une distribution quelconque. 3.1,3.3,3.4 se généralisent de manière immédiate. Une généralisation de 3.2 est donnée ci-après.

3.5 TRANSFORMEE DE LAPLACE ET CONVOLUTION

Soient S et T deux distributions de \mathcal{D}'_+ ayant des transformées de Laplace. La transformée de Laplace de leur produit de convolution est:

$$\langle S * T, e^{-p t} \rangle = \langle S_{\xi} \otimes T_{\eta}, e^{-p(\xi+\eta)} \rangle = \langle S_{\xi} \otimes T_{\eta}, e^{-p \xi} e^{-p \eta} \rangle$$

ce qui, par définition, est égal à: $\langle \delta_{\xi}, e^{-p \xi} \rangle \langle T_{\eta}, e^{-p \eta} \rangle$, d'où :

$$S * T \supset S(p) T(p)$$

Le produit de convolution devient, par transformée de Laplace, un produit ordinaire.

On en déduit une généralisation aux distributions de la propriété 3.2 :

Si $T \supset F(p)$, $T' = T * \delta'$ entraîne :

$$T' \supset p F(p)$$

N.B: si T est une fonction, il faut la dériver au sens des distributions. Ce qui redonne bien la formule fournie en 3.2.

4. APPLICATION A L'ETUDE DES RESEAUX LINEAIRES

Exemple : soit le circuit R,L,C donné en III.5, avec $i(t)=e(t)=0$ pour $t < 0$. On a :

$$Z * i = e(t)$$

avec :

$$Z = R\delta + L\delta' + \frac{1}{C}Y$$

Si $e(t)$ est considéré comme signal d'entrée (ou excitation) et $i(t)$ comme réponse (ou sortie), cette dernière est solution de l'équation de convolution ci-dessus. Si on suppose que Z et e ont des transformées de Laplace, et s'il existe une distribution $i(t)$, de \mathcal{D}'_+ , solution du problème, alors sa transformée de Laplace $I(p)$ vérifie (d'après 3.5) :

$$Z(p) I(p) = \mathcal{E}(p)$$

où l'on a supposé :

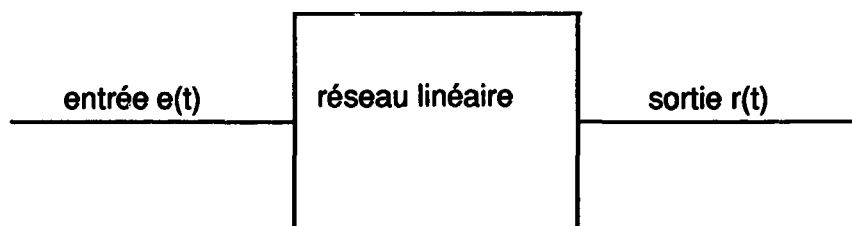
$$\begin{cases} Z \supset Z(p) \\ e(t) \supset \mathcal{E}(p) \end{cases}$$

d'où, de manière immédiate :

$$I(p) = \frac{\mathcal{E}(p)}{Z(p)}$$

Pour avoir $i(t)$ il suffit de retrouver l'original dont la transformée de Laplace est donnée par cette expression, en s'aidant généralement d'une table.

Le circuit précédent est un cas particulier de réseau linéaire, dont le schéma général est le suivant :



On distingue divers types de réponses, notamment :

- a) *réponse indicielle, à l'entrée $e(t) = Y(t)$*
- b) *réponse impulsionnelle, à l'entrée $e(t) = \delta(t)$*
- c) *réponse quelconque, à l'entrée quelconque $e(t)$*

Définition :

La fonction de transfert $H(p)$ est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle. (il existe d'autres manières de définir la fonction de transfert).

Par exemple, pour le circuit R,L,C précédent: $e(t) = \delta(t) \Rightarrow \mathcal{E}(p) = 1$.

On a par ailleurs :

$$Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$$

La fonction de transfert est donc :

$$H(p) = \frac{1}{Z(p)} = \frac{1}{R + Lp + \frac{1}{Cp}} = \frac{p}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}$$

Définition:

Un réseau est dit **stable** lorsque sa réponse impulsionnelle tend vers zéro quand t tend vers l'infini.

Comme on l'a vu en 3.2 étudier le comportement à t infini revient à étudier le comportement de la transformée de Laplace (ici: la fonction de transfert) pour p tendant vers 0.

Trouvant son origine dans une équation de convolution qui conduit à une équation algébrique par transformée de Laplace, la fonction de transfert a généralement la forme d'une fraction rationnelle. Les conditions de stabilité d'un réseau linéaire sont alors liées à l'existence et à la nature des pôles de $H(p)$, c'est-à-dire les valeurs qui annulent le dénominateur.

Si nous reprenons notre exemple, en réponse impulsionnelle :

$$H(p) = \frac{p}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} = \frac{p}{L(p+\alpha)(p+\beta)}$$

avec :

$$-\alpha = p_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$-\beta = p_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\Delta = \frac{R^2C^2 - 4LC}{L^2C^2}$$

Δ est a priori positif, négatif, ou nul. Une table de transformées de Laplace donne :

$$I(p) = H(p) \subset \frac{1}{L} \left(\frac{-\alpha e^{-\alpha t} + \beta e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} \right)$$

Soit :

$$i(t) = \frac{p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}}{L \sqrt{\Delta}}$$

a) $\Delta \leq 0$ (cas usuel)

$\sqrt{\Delta}$ est imaginaire pur :

$$|e^{p_1 t}| = |e^{p_2 t}| = e^{-\frac{R}{2L} t} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty \text{ (si } R \neq 0)$$

donc $i(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, ce qui signifie que le système est **stable** (si $R \neq 0$)

Si $R = 0$:

$$\sqrt{\Delta} = \frac{2}{\sqrt{LC}} j \quad p_2 = -p_1 = -\frac{j}{\sqrt{LC}}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} p_1 \sqrt{LC} \frac{e^{p_1 t} + e^{-p_1 t}}{2j} = \frac{1}{L} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$$

système **instable**.

b) si $\Delta > 0$

Le terme $e^{p_2 t}$ tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. Il en est de même de $e^{p_1 t}$, sauf si :

$$-\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} > 0$$

ce qui est impossible comme on le vérifie aisément. Donc le système est stable.

En résumé, le système est stable sauf si la partie réelle des pôles est nulle (sinon elle est négative). On vérifie donc sur ce cas particulier le théorème général qui indique qu'un système linéaire est stable s'il n'y a pas de pôles de $H(p)$ "à droite", c'est-à-dire à partie réelle positive ou nulle.

VI. TRANSFORMEE DE FOURIER

1. DEFINITIONS

1.1 TRANSFORMEE D'UNE FONCTION

$f(t)$ étant une fonction à valeurs complexes de la variable réelle t , on appelle image de Fourier ou transformée de Fourier de f la fonction à valeurs complexes $G(\omega)$ de la variable réelle ω :

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

On notera $\mathcal{F}f(t) = G(\omega)$. La transformée de Fourier permet d'associer une notion de fréquence à une fonction $f(t)$ non nécessairement périodique. Il faut noter la différence essentielle avec la transformée de Laplace: l'intégration se fait entre $-\infty$ et $+\infty$, et non entre 0 et $+\infty$.

Bien entendu, la transformée de Fourier n'existe que sous certaines conditions convenables que nous ne détaillons pas ici. Notons simplement qu'elle existe pour toute fonction sommable.

1.2 TRANSFORMEE D'UNE DISTRIBUTION

On ne peut pas définir la transformation de Fourier pour les distributions au sens le plus général. Cela n'est possible que pour une famille particulière de distributions: les **distributions tempérées**, dont on ne donnera pas ici de définition précise. La notion de distribution tempérée est liée à une exigence de croissance lente à l'infini. Par exemple, la distribution définie par la fonction $f(t) = e^t$ n'est pas tempérée. Les distributions $Y(t)$ et $\delta(t)$ sont, en revanche, tempérées.

Si U est une distribution tempérée, on définit sa transformée de Fourier par :

$$\langle \mathcal{F}U, \phi \rangle = \langle U, \mathcal{F}\phi \rangle$$

ou :

$$\mathcal{F}U = \langle U, e^{-j\omega t} \rangle$$

lorsque cette expression est définie et représente une fonction holomorphe.

1.3 INVERSION DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER

On démontre que, sous certaines conditions, la transformée de Fourier peut s'inverser sous la forme :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

On note: $f(t) = \mathcal{F}^{-1}G(\omega)$. On a donc : $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$

Sous cette forme inverse, il apparaît clairement que $G(\omega)$ représente la densité spectrale du spectre en fréquence de $f(t)$.

2. EXEMPLES DE TRANSFORMEES DE FOURIER

2.1 ECHELON UNITE $Y(t)$

La transformée de Fourier de $Y(t)$ est assez délicate à calculer directement. On a :

$$\mathcal{F}Y = \frac{1}{2} \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

2.1 DISTRIBUTION IMPULSION δ .

$$\mathcal{F}\delta = \langle \delta, e^{-j\omega t} \rangle$$

soit :

$$\mathcal{F}\delta = 1$$

2.3 SIGNAL SINUSOIDAL

$$\mathcal{F}e^{j\omega_0 t} = \delta(\omega - \omega_0)$$

3. PROPRIETES

Outre la linéarité la transformée de Fourier jouit , entre autres, des propriétés suivantes :

3.1 REFLEXION

$$G(-\omega)=G^*(\omega)$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on peut écrire :

$$G(\omega)=G_R(\omega)+jG_I(\omega)$$

La propriété de réflexion conduit à :

$$G(-\omega)=G_R(-\omega)+jG_I(-\omega)=G_R(\omega)-jG_I(\omega)$$

soit :

$$G_R(-\omega)=G_R(\omega)$$

$$G_I(-\omega)=-G_I(\omega)$$

La partie réelle de la transformée de Fourier est paire; la partie imaginaire est impaire. De plus, si f est paire $G(\omega)$ est paire (donc réelle); si f est impaire $G(\omega)$ est impaire donc imaginaire pure)

3.2 DERIVEE

$$\mathcal{F}\{f'(t)\}=j\omega G(\omega)$$

3.3 SIGNAL RETARDE

$$\mathcal{F}\{f(t-T)\}=e^{-j\omega T}G(\omega)$$

3.4 CHANGEMENT DE FREQUENCE

$$\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\}=G(\omega-\omega_0)$$

3.5 CHANGEMENT D'ECHELLE DE TEMPS

$$\mathcal{F}\left\{\frac{t}{k}\right\}=kG(k\omega)$$

3.6 CONVOLUTION

Soient deux distributions S et T, on a :

$$\mathcal{F}[S*T] = \mathcal{F}S \mathcal{F}T$$

$$\overline{\mathcal{F}[S*T]} = \overline{\mathcal{F}S} \overline{\mathcal{F}T}$$

$$\mathcal{F}[ST] = \mathcal{F}S*\mathcal{F}T$$

$$\overline{\mathcal{F}[ST]} = \overline{\mathcal{F}S}*\overline{\mathcal{F}T}$$

pourvu que toutes les expressions écrites soient bien définies. C'est la propriété essentielle de la transformée de Fourier; en particulier: la transformée de Fourier transforme un produit de convolution en produit ordinaire.

4. FORMULE DE PARSEVAL-PLANCHEREL

Soit f(t) une fonction à support borné. Remarquons que :

$$f(x)^* = (\mathcal{F}G(\omega))^* = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}G(\omega)^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

alors :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f^*(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} G^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega G^*(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega G(\omega)G^*(\omega) \end{aligned}$$

soit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\omega)|^2 d\omega$$

Cette formule de Parseval-Plancherel a une interprétation physique: l'énergie totale d'un signal peut être obtenue soit par intégration directe dans le temps soit par intégration sur les composantes spectrales.

5. APPLICATIONS

5.1 TRANSFORMÉE DE FOURIER DES FONCTIONS PÉRIODIQUES

Une fonction périodique, de période T, peut être définie à partir d'une fonction génératrice $f_g(t)$ égale à f sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, et nulle en dehors de cet intervalle :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_g(t-nT)$$

La fonction périodique f peut être décomposée en série de Fourier complexe :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (\text{avec } \omega_0 = \frac{2\pi}{T})$$

avec :

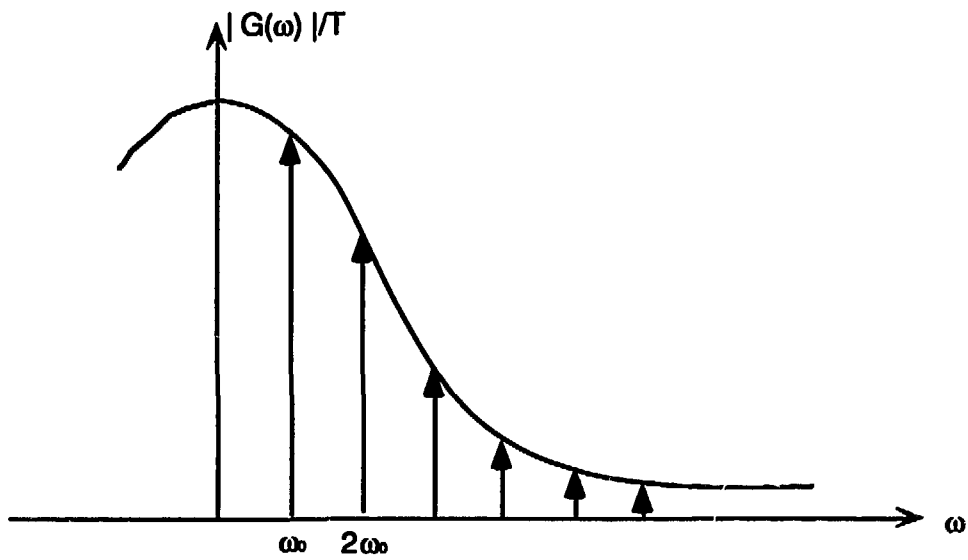
$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Donc, d'après 2.3 la transformée de Fourier de f sera :

$$\mathcal{F}f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

c'est-à-dire une somme d'impulsions centrées sur ω_0 et ses harmoniques $n\omega_0$, "d'amplitudes" :

$$|c_n| = \frac{1}{T} |G(n\omega_0)|$$



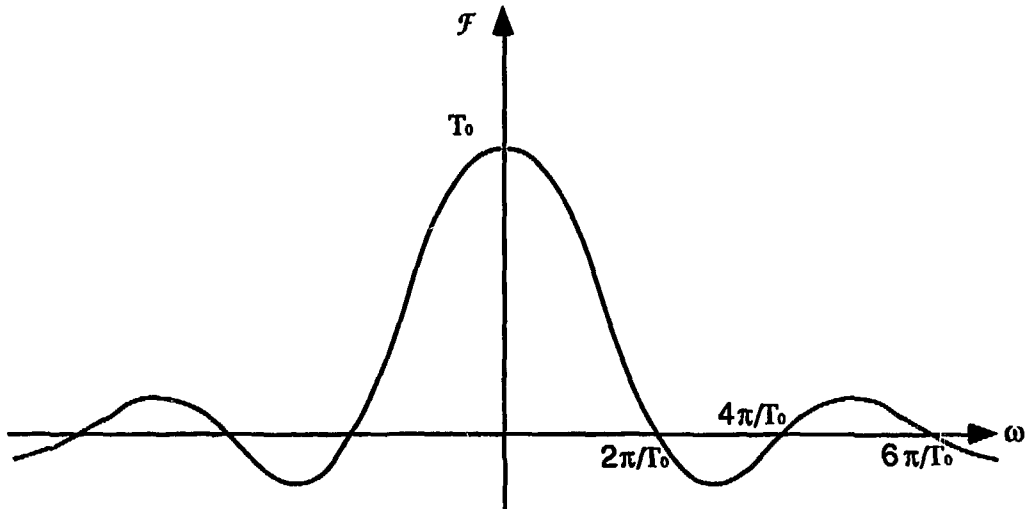
5.2 TRANSFORMEE D'UNE IMPULSION RECTANGULAIRE

$$\text{Rec}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2} \\ 0 & \text{si } t < -\frac{T_0}{2} \text{ ou } t > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\text{Rec}\left(\frac{t}{T_0}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rec}\left(\frac{t}{T_0}\right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j\omega t} dt = -\frac{1}{j\omega} [e^{-j\omega t}]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$$

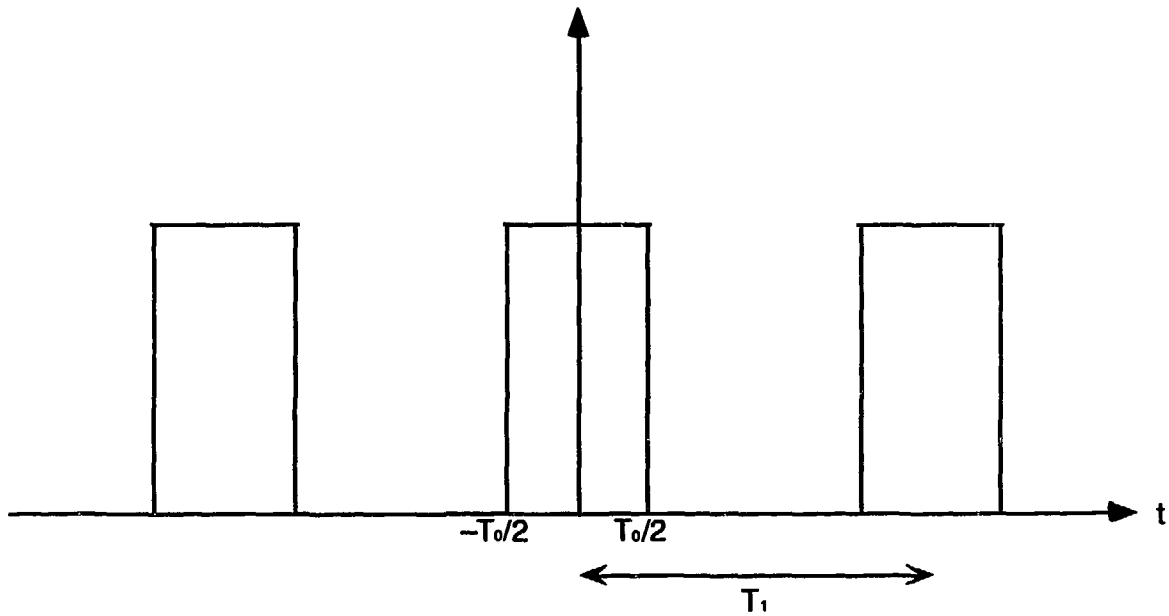
$$= \frac{2 \sin(\omega T_0/2)}{\omega}$$

Cette transformée a l'allure suivante :



Remarque: la densité du spectre est la plus significative sur une largeur de l'ordre de $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi = 1/T_0$. Donc, pour un signal de durée $\Delta T = T_0$, on a $\Delta\nu \Delta T \approx 1$. Cette remarque est générale.

5.3 SIGNAUX RECTANGULAIRES PERIODIQUES



On applique l'analyse de 5.1. La transformée de Fourier cherchée est :

$$G(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_1)$$

avec :

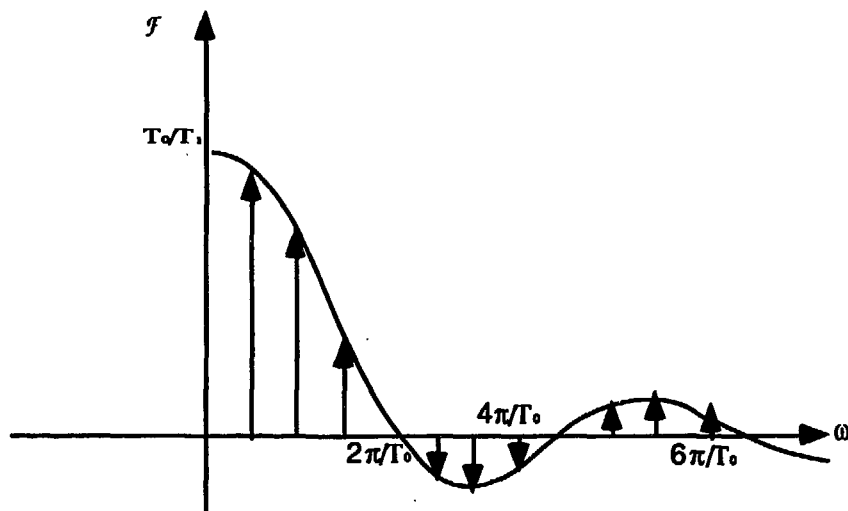
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

et :

$$c_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \text{Rec}\left(\frac{t}{T_0}\right) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

soit, d'après 5.2 :

$$c_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{T_0}{T_1} \frac{\sin(\pi n \omega_1 / \omega_0)}{(\pi n \omega_1 / \omega_0)}$$



5.4 TRANSFORMEE DE LA GAUSSIENNE (FONCTION D'ERREUR)

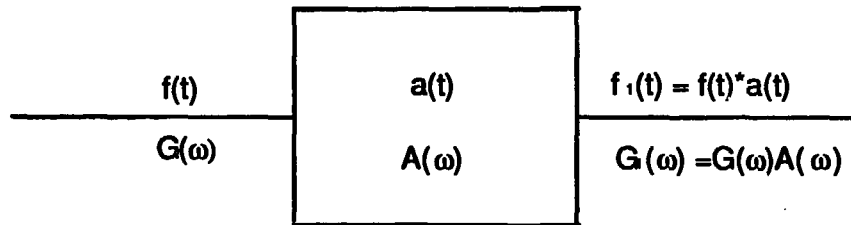
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

On démontre que :

$$\mathcal{F}f = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

La transformée d'une gaussienne est encore une gaussienne.

5.5 FILTRE DE FREQUENCE



5.5.1 Déphaseur

$$A(\omega) = e^{-j\omega T} = \mathcal{F}\delta(t-T)$$

$$G_1(\omega) = G(\omega)e^{-j\omega T} = \mathcal{F}f(t-T)$$

5.5.2 Filtre passe-bande idéal (phase constante)

$$A(\omega) = \text{Rec}\left[\frac{\omega - \omega_0}{2\Delta\omega}\right]$$

Calculons la transformée de Fourier inverse :

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rec}\left[\frac{\omega - \omega_0}{2\Delta\omega}\right] e^{j\omega t} d\omega$$

changement de variable :

$$u = \omega_0 - \omega$$

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Rec}\left[\frac{u}{2\Delta\omega}\right] e^{j(\omega_0 - u)t} du$$

soit, d'après 5.2 :

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \frac{2 \sin(t\Delta\omega)}{t}$$

$$a(t) = \frac{2\Delta\nu \sin(t\Delta\omega)}{t} a(t) e^{j\omega_0 t}$$

avec $\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$

VII. PROBABILITES

On ne donnera ici que quelques éléments de vocabulaire.

1. PROBABILITES

Soit une opération pouvant produire des résultats "également possibles". Par exemple, au jeu de pile ou face il y "autant de chance" d'obtenir pile que face. Au jeu de la roulette un numéro a "autant de chance" de sortir qu'un autre. La probabilité de réaliser un événement particulier A est le rapport du nombre de résultats "favorables" au nombre de résultats "possibles". La probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.

Exemple: en lançant un dé, la probabilité d'obtenir le nombre 5 est égal à $\frac{1}{6}$. La probabilité d'obtenir un nombre pair est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (il y a 3 cas favorables : les nombres 2,4,6).

2. VARIABLES ALEATOIRES

Dans l'exemple précédent le résultat est la valeur que prend une **variable aléatoire discontinue**. Une variable aléatoire discontinue (ou "discrète") peut prendre l'une de n valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec des probabilités respectives p_1, p_2, \dots, p_n . On doit avoir $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

On définit des **variables aléatoires continues**, sous forme différentielle: la probabilité dP pour que la variable aléatoire continue X prenne une valeur comprise entre x et $x+dx$ sera, par définition :

$$dP = p(x) dx$$

$p(x)$ est la densité de probabilité. On doit avoir :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$

L'**espérance mathématique** ou "moyenne" $E(X)$ est , par définition, dans le cas continu :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$$

dans le cas discontinu :

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i$$

Une variable dont l'espérance mathématique est nulle est dite **centrée**.

La quantité $X-E(X)$ est l'écart. La dispersion de la variable aléatoire est caractérisée par l'écart-type :

$$\sigma = \sqrt{E\{[X-E(X)]^2\}} = \sqrt{E(X^2)-[E(X)]^2}$$

Le carré de l'écart-type σ^2 est la variance.

On définit l'espérance mathématique de toute fonction de la variable aléatoire X , $f(X)$, par :

$$E(f(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p(x) dx$$

ou, dans le cas discontinu :

$$\sum_1^n p_i f(x_i)$$

Comme cas particulier on a les moments d'ordre m :

$$E(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m p(x) dx$$

ou :

$$\sum_1^n p_i x_i^m$$

Nous nous placerons désormais dans le cas des variables continues.

3. ENSEMBLE DE DEUX VARIABLES ALEATOIRES

Soient deux variables aléatoires. Supposons l'existence d'une densité de probabilité $\rho(x,y)$ telle que $\rho(x,y) dx dy$ représente la probabilité de trouver X entre x et $x+dx$ en même temps que Y entre y et $y+dy$. On a donc :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \rho(x,y) dx dy = 1$$

La probabilité de trouver X entre x et $x+dx$, indépendamment de la valeur de Y a comme densité :

$$p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y) dy$$

de même la densité de probabilité pour Y est :

$$q(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x,y) dx$$

Les deux variables sont indépendantes si :

$$\rho(x,y) = p(x) q(y)$$

Comme en 2., on définit les différentes espérances mathématiques :

$$E(f(x,y)) = \int \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \rho(x,y) dx dy$$

Si les variables sont indépendantes, on a :

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

Soient deux variables centrées X' et Y' . On définit le coefficient de corrélation :

$$c = \frac{E(X'Y')}{\sigma_x \sigma_y}$$

σ_x et σ_y sont les écarts-types de X' et Y' .

Si les variables sont indépendantes, on a :

$$c = \frac{E(X') E(Y')}{\sigma_x \sigma_y} = 0$$

Le coefficient de corrélation est nul pour deux variables indépendantes. Dans le cas général le coefficient de corrélation est un nombre dont la valeur absolue est inférieure ou égale à 1.

4. VARIABLE ALEATOIRE GAUSSIENNE

Une variable aléatoire est dite gaussienne si sa densité de probabilité est de la forme :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2 \sigma^2}}$$

On vérifie aisément que l'espérance mathématique est égale à m et l'écart-type à σ .

On définit la loi de Gauss à deux variables :

$$\rho(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma^2 \sqrt{1-c^2}} e^{-\frac{x^2 + y^2 - 2cxy}{2 \sigma^2(1-c^2)}}$$

(pour simplifier, on a supposé deux variables centrées).

On vérifie de même que c représente la corrélation. Si deux variables aléatoires gaussiennes sont non corrélées ($c = 0$), elles sont indépendantes ($p(x,y) = p(x) q(y)$).

En électronique l'importance de la loi de Gauss (ou fonction d'erreur) provient du fait que son rôle est fondamental dans les phénomènes statistiques et que, comme nous l'avons vu, la transformée de Fourier d'une gaussienne est encore une gaussienne.