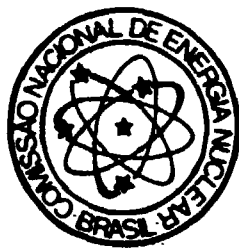


COMISSÃO NACIONAL
DE ENERGIA NUCLEAR



INSTITUTO DE
ENGENHARIA NUCLEAR

METODO ESPECTRO-NODAL PARA
PROBLEMAS DE ORDENADAS
DISCRETAS EM GEOMETRIA X,Y

POR

RICARDO C. DE BARROS
EDWARD W. LARSEN (THE UNIVERSITY
OF MICHIGAN)

CAIXA POSTAL 2186
CIDADE UNIVERSITARIA - ILHA DO FUNDÃO
CEP 20001

RIO DE JANEIRO
BRASIL

ERRATA

Endereço atualizado:

**Comissão Nacional de Energia Nuclear CNEN
Instituto de Engenharia Nuclear IEN
Biblioteca**

Caixa Postal 68550

CEP 21945

Rio de Janeiro

RJ

Brasil

**MÉTODO ESPECTRO-NODAL PARA
PROBLEMAS DE ORDENADAS
DISCRETAS EM GEOMETRIA X,Y**

por

**Ricardo C. De Barros
Instituto de Engenharia Nuclear (IEN)**

**Edward W. Larsen*
The University of Michigan**

**IEN - Caixa Postal 2186
Cidade Universitária - Ilha do Fundão
CEP 20001 - Rio de Janeiro
RJ - Brasil**

* Department of Nuclear Engineering
Ann Arbor, Michigan, 48109, USA

A SPECTRAL NODAL METHOD FOR DISCRETE ORDINATES
PROBLEMS IN X,Y-GEOMETRY

by

Ricardo C. De Barros
Instituto de Engenharia Nuclear (IEN)

Edward W. Larsen
The University of Michigan

ABSTRACT

A new nodal method is proposed for the solution of S_N problems in x,y-geometry. This method uses the Spectral Green's Function (SGF) scheme for solving the one-dimensional transverse-integrated nodal transport equations with no spatial truncation error. Thus, the only approximations in the x,y-geometry nodal method occur in the transverse leakage terms, as in diffusion theory. We approximate these leakage terms using a "flat" or "constant" approximation, and we refer to the resulting method as the SGF-Constant Nodal (SGF-CN) method. We show in numerical calculations that the SGF-CN method is much more accurate than other well-known transport nodal methods for coarse-mesh deep-penetration S_N problems, even though the transverse leakage terms are approximated rather simply.

Keywords: nodal method, discrete ordinates, neutron transport, SGF

MÉTODO ESPECTRO-NODAL PARA PROBLEMAS DE ORDENADAS
DISCRETAS EM GEOMETRIA X,Y

por

Ricardo C. De Barros
Instituto de Engenharia Nuclear (IEN)

Edward W. Larsen
The University of Michigan

RESUMO

Propõe-se um novo método nodal para a solução das equações S_N em geometria x,y. Este método usa o algoritmo SGF (Spectral Green's Function) para resolver sem erro de truncamento espacial as equações nodais de transporte unidimensionais obtidas por integrações transversais. Portanto, as únicas aproximações no método ocorrem nos termos de fuga transversal. Nós aproximamos esses termos de fuga por constantes e denominamos o método resultante método SGF-CN (SGF-Constant Nodal method). Mostramos em exemplos numéricos que o método SGF-CN é muito mais preciso que outros métodos tradicionais para problemas S_N de penetração profunda, ainda que os termos de fuga transversal sejam aproximados de forma tão simples.

Palavras-Chaves: método nodal, ordenadas discretas, transporte de nêutrons, SGF.

AGRADECIMENTOS

O trabalho do primeiro autor (RCB) foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), e o trabalho do segundo autor (EWL) foi financiado pela National Science Foundation Grant N° EET-8721680. Os autores agradecem a todos os funcionários do IEN que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração desta publicação.

NOMENCLATURA

$\Psi_m(x, y)$ - fluxo angular de nêutrons na direção m , na posição (x, y) .

$\{\mu_m, \eta_m, \omega_m\}$ - conjunto usado na quadratura angular.

σ_t - seção de choque total.

σ_s - seção de choque isotrópica de espalhamento.

Q - fonte externa de nêutrons.

SUMÁRIO

| | página |
|--|--------|
| AGRADECIMENTOS | iv |
| NOMENCLATURA | v |
| 1. INTRODUÇÃO | 1 |
| 2. ANÁLISE ESPECTRAL DAS EQUAÇÕES NODAIS S_N INTEGRADAS TRANSVERSALMENTE | 1 |
| 3. AS EQUAÇÕES SGF-CN E O ESQUEMA ITERATIVO NBI | 5 |
| 4. RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO | 8 |
| RELAÇÃO DE TABELAS | |
| Tabela 4.1 Raio Espectral ρ e Número de Iterações para o Problema-Modelo | 11 |
| Tabela 4.2 Eficiência Relativa do Método SGF-CN + NBI em relação ao Método LN + SI | 12 |
| RELAÇÃO DE FIGURAS | |
| Figura 3.1 Varredura de SW para NE. | 7 |
| Figura 4.1 Problema-Modelo. | 9 |
| Figura 4.2 Fuga Total de Nêutrons através do Contorno Superior. | 10 |
| Figura 4.3 Fuga de Nêutrons dos 5 cm a direita no Contorno Superior. | 10 |

1. INTRODUÇÃO

Atualmente tem-se dado muita atenção ao problema de se obterem soluções numéricas precisas das equações de ordenadas discretas (S_N) com malhas espaciais grossas. Dentre todos os métodos tradicionais de malha grossa usados em problemas de ordenadas discretas em geometria Cartesiana, os métodos nodais [1-8] são considerados como os mais precisos. É fato bem conhecido que os métodos nodais são muito eficientes em problemas de difusão. A razão disso é que as equações da difusão integradas transversalmente em cada célula espacial são resolvidas analiticamente em cada direção espacial usando apenas alguma aproximação para os termos de fuga transversal [9]. Por outro lado, os métodos nodais tradicionalmente usados em transporte não têm sido tão precisos. A razão disso é que, apesar de as equações nodais S_N integradas transversalmente serem resolvidas analiticamente em cada direção espacial, usam-se aproximações *tanto* para os termos de fuga transversal *quanto* para os termos de fonte por espalhamento. Neste trabalho, nós descrevemos um novo método nodal para as equações S_N em geometria x,y . Este método usa o algoritmo SGF (Spectral Green's Function) [10] para resolver as equações S_N unidimensionais integradas transversalmente. A nova característica do algoritmo SGF é que ele resolve essas equações sem qualquer erro de truncamento espacial, i.e., os termos de fonte por espalhamento não são aproximados. Portanto, as *únicas* aproximações usadas no método nodal resultante em geometria x,y ocorrem nos termos de fuga transversal, como em problemas de difusão. A extensão do método SGF para resolver numericamente as equações nodais S_N unidimensionais integradas transversalmente com espalhamento isotrópico e aproximação constante para os termos de fuga transversal está apresentada na próxima seção. Em seguida, na Seção 3, nós derivamos as equações SGF-CN (Spectral Green's Function-Constant Nodal equations), e descrevemos o esquema iterativo NBI (One-Node Block Inversion) para resolvê-las. Resultados numéricos e uma breve discussão são apresentados na Seção 4.

2. ANÁLISE ESPECTRAL DAS EQUAÇÕES NODAIS S_N INTEGRADAS TRANSVERSALMENTE

Para se obterem as equações nodais S_N unidimensionais integradas transversalmente, primeiro define-se uma grade espacial em um domínio retangular, onde cada célula espacial (ou nodo) D_{ij} tem comprimento h_i e altura k_j ($1 \leq i \leq I$, $1 \leq j \leq J$). Em seguida, neste nodo, consideram-se as equações S_N em geometria x,y com fonte interior uniforme e isotrópica

$$\mu_m \frac{\partial}{\partial x} \Psi_m(x, y) + \eta_m \frac{\partial}{\partial y} \Psi_m(x, y) + \sigma_{i,i} \Psi_m(x, y) = \sigma_{s,i} \sum_{n=1}^M \Psi_n(x, y) w_n + Q_{i,j} \quad (2.1)$$

$$x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2} \quad , \quad y_{j-1/2} < y < y_{j+1/2} \quad .$$

Aqui $M=N(N+2)/2$, onde N é a ordem da quadratura angular. No mais a notação usada é padrão (*cf* NOMENCLATURA). Integrando-se transversalmente a Eq. (2.1) nas direções x e y , definindo-se os fluxos transversalmente integrados

$$\tilde{\Psi}_{m,i}(x) = \frac{1}{k_j} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \Psi_m(x, y) dy \quad , \quad \hat{\Psi}_{m,i}(y) = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Psi_m(x, y) dx \quad (2.2)$$

e aproximando-se os termos de fuga transversal por suas médias espaciais ao longo dos lados dos nodos, nós obtemos as seguintes equações nodais S_N integradas transversalmente:

$$\mu_m \frac{d}{dx} \tilde{\Psi}_{m,i}(x) + \sigma_{i,i} \tilde{\Psi}_{m,i}(x) - \sigma_{s,i} \sum_{n=1}^M \tilde{\Psi}_{n,i}(x) w_n = Q_{i,j} - \frac{\eta_m}{k_j} [\tilde{\Psi}_{m,i}(y_{j+1/2}) - \tilde{\Psi}_{m,i}(y_{j-1/2})] \quad , \quad x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2} \quad (2.3)$$

$$\eta_m \frac{d}{dy} \hat{\Psi}_{m,i}(y) + \sigma_{i,i} \hat{\Psi}_{m,i}(y) - \sigma_{s,i} \sum_{n=1}^M \hat{\Psi}_{n,i}(y) w_n = Q_{i,j} - \frac{\mu_m}{h_i} [\hat{\Psi}_{m,i}(x_{i+1/2}) - \hat{\Psi}_{m,i}(x_{i-1/2})] \quad , \quad y_{j-1/2} < y < y_{j+1/2} \quad (2.4)$$

Nos métodos nodais S_N convencionais, faz-se uma aproximação adicional para os termos de fonte por espalhamento. Entretanto, no trabalho apresentado aqui, nós resolvemos as Eqs. (2.3) e (2.4) no interior de cada nodo *analiticamente* e obtemos um sistema de equações lineares para os fluxos angulares médios nos lados dos nodos $\tilde{\Psi}_{m,i \pm 1/2, j} = \tilde{\Psi}_{m,i}(x_{i \pm 1/2})$ e $\hat{\Psi}_{m,i, j \pm 1/2} = \hat{\Psi}_{m,i}(y_{j \pm 1/2})$. Este procedimento é conceitualmente muito similar ao procedimento empregado na determinação das equações nodais de difusão. Entretanto, os detalhes de solução das equações nodais S_N e das equações nodais de difusão são bem distintos.

Existem soluções particulares das Eqs. (2.3) e (2.4) que são constantes no espaço em $D_{i,j}$; estas soluções são dadas por

$$\tilde{\Psi}_{m,i,j}^p = \frac{Q_{i,j}}{\sigma_{a,i,j}} - \frac{c_{i,j}}{\sigma_{a,i,j} k_j} (\hat{J}_{i,j+1/2} - \hat{J}_{i,j-1/2}) - \frac{\eta_m}{\sigma_{i,i} k_j} (\hat{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \hat{\Psi}_{m,i,j-1/2}) \quad (2.5.a)$$

$$\hat{\Psi}_{m,i,i}^p = \frac{Q_{i,i}}{\sigma_{a,i,i}} - \frac{c_{i,i}}{\sigma_{a,i,i}h_i}(\bar{J}_{i+1/2,i} - \bar{J}_{i-1/2,i}) - \frac{\mu_m}{\sigma_{t,i,i}h_i}(\bar{\Psi}_{m,i+1/2,i} - \bar{\Psi}_{m,i-1/2,i}) \quad (2.5.b)$$

onde $c_{i,i} = \sigma_{s,i,i} / \sigma_{t,i,i}$ e

$$\bar{J}_{i,i+1/2} = \sum_{n=1}^M \eta_n \hat{\Psi}_{n,i,j+1/2} w_n \quad , \quad \bar{J}_{i+1/2,i} = \sum_{n=1}^M \mu_n \bar{\Psi}_{n,i+1/2,i} w_n \quad (2.5.c)$$

Logo, se nós assumirmos que

$$\bar{\Psi}_{m,j}(x) = \hat{\Psi}_{m,i,i}^p + \hat{\Psi}_{m,j}^h(x) \quad , \quad x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2} \quad (2.6)$$

$$\bar{\Psi}_{m,i}(y) = \hat{\Psi}_{m,i,i}^p + \hat{\Psi}_{m,i}^h(y) \quad , \quad y_{j-1/2} < y < y_{j+1/2} \quad (2.7)$$

então $\hat{\Psi}_{m,j}^h(x)$ e $\hat{\Psi}_{m,i}^h(y)$ satisfazem as equações homogêneas associadas as Eqs. (2.3) e (2.4):

$$\mu_m \frac{d}{dx} \hat{\Psi}_{m,j}^h(x) + \sigma_{t,i,i} \hat{\Psi}_{m,j}^h(x) - \sigma_{s,i,i} \sum_{n=1}^M \hat{\Psi}_{n,j}^h(x) w_n = 0 \quad , \quad x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2} \quad (2.8)$$

$$\eta_m \frac{d}{dy} \hat{\Psi}_{m,i}^h(y) + \sigma_{t,i,i} \hat{\Psi}_{m,i}^h(y) - \sigma_{s,i,i} \sum_{n=1}^M \hat{\Psi}_{n,i}^h(y) w_n = 0 \quad , \quad y_{j-1/2} < y < y_{j+1/2} \quad (2.9)$$

Para obtermos a solução geral das Eqs. (2.8) e (2.9), nós assumimos separação de variáveis. Sendo assim, na Eq. (2.8), procuramos soluções da forma

$$\hat{\Psi}_{m,j}^h(x) = a_m(\nu) e^{-\sigma_{t,i,i} x / \nu} \quad (2.10)$$

e obtemos o problema de autovalor

$$(\nu - \mu_m) a_m(\nu) = c_{i,i} \nu \sum_{n=1}^M a_n(\nu) w_n \quad (2.11)$$

Se nós impomos a condição de normalização

$$\sum_{n=1}^M a_n(\nu) w_n = 1 \quad (2.12.a)$$

obtemos

$$a_m(\nu) = \frac{c_{i,j} \nu}{\nu - \mu_m} \quad , \quad 1 \leq m \leq M \quad , \quad (2.12.b)$$

$$1 = c_{i,j} \nu \sum_{n=1}^M \frac{w_n}{\nu - \mu_n} \quad , \quad 1 \leq m \leq M \quad . \quad (2.12.c)$$

Este resultado é similar ao resultado obtido nas equações S_N unidimensionais [11]. Entretanto, em quadraturas angulares usadas nas equações S_N bidimensionais existem $N < M$ valores distintos de μ_m (e similarmente, $N < M$ valores distintos de η_m). Isto é porque as quadraturas angulares consistem de "direções" $\tilde{\Omega}_m = (\mu_m, \eta_m)$ em que cada μ_m (ou η_m) ocorre com multiplicidade par maior ou igual a dois. Sendo assim, a Eq. (2.12.c), que pode ser reformulada como uma equação polinomial de grau N , tem exatamente N raízes simples. Os $M - N - N^2/2$ autovalores restantes vêm da condição de normalização

$$\sum_{n=1}^M a_n(\nu) w_n = 0 \quad . \quad (2.13.a)$$

que implica

$$(\nu - \mu_m) a_m(\nu) = 0 \quad . \quad (2.13.b)$$

Aqui, os autovalores são explicitamente $\nu = \mu_m$ com multiplicidades maiores ou iguais a um, e $a_m(\nu)$ ($1 \leq m \leq M$) são componentes de autovetores linearmente independentes que satisfazem 'as Eqs. (2.13.a-b). Pode-se mostrar que este procedimento leva a $N^2/2$ autovalores adicionais. Em geral, cada nodo $D_{i,j}$ pode possuir seu próprio espectro (conjunto de autovalores e autofunções). Por simplicidade de notação, nós não introduziremos índices (i,j) nessas quantidades.

Resumindo, a solução geral (exata) da Eq. (2.3) no interior do nodo $D_{i,j}$ é:

$$\tilde{\psi}_m(x) = \tilde{\psi}_{m,i,j}^p + \sum_{\ell=1}^M \beta_\ell \left(a_{\ell,m} e^{-\sigma_{\ell,i,j} x / \nu_\ell} \right) \quad , \quad (2.14)$$

onde $\tilde{\psi}_{m,i,j}^p$ está definido na Eq. (2.5.a), $a_{\ell,m} = a_m(\nu_\ell)$, e β_ℓ são constantes arbitrárias. Resultado análogo segue para a solução geral da Eq. (2.4). Na próxima seção nós descrevemos um método numérico conservativo que preserva estas soluções exatas.

3. AS EQUAÇÕES SGF-CN E O ESQUEMA ITERATIVO NEI

Ressaltamos que no método SGF-CN, as únicas aproximações ocorrem nos termos de fuga transversal, e as equações unidimensionais integradas transversalmente (2.3) e (2.4) são resolvidas analiticamente. Nesta seção nós implementamos este conceito em cada célula espacial (ou nodo) e descrevemos um esquema iterativo para resolver problemas em sistemas formados por vários nodos.

Nós mostramos que a solução geral da Eq. (2.3) é dada pelas Eqs. (2.5) e (2.14); e descrevemos um método numérico para Eq. (2.3), cujas equações são satisfeitas exatamente pelos fluxos angulares médios no interior e nos lados de cada nodo, correspondentes à solução geral [12].

Para começar, nós integramos a Eq. (2.3) no intervalo $x_{i-1/2} < x < x_{i+1/2}$ e a Eq. (2.4) no intervalo $y_{j-1/2} < y < y_{j+1/2}$. O resultado é

$$\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \tilde{\Psi}_{m,i}(x) dx = \frac{1}{k_j} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \tilde{\Psi}_{m,i}(y) dy = \bar{\Psi}_{m,i,j} \quad (3.1)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\mu_m}{h_i} (\tilde{\Psi}_{m,i+1/2,j} - \tilde{\Psi}_{m,i-1/2,j}) - \frac{\eta_m}{k_j} (\tilde{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \tilde{\Psi}_{m,i,j-1/2}) + \sigma_{t,i,j} \bar{\Psi}_{m,i,j} \\ - \sigma_{s,i,j} \sum_{n=1}^M \bar{\Psi}_{n,i,j} w_n = Q_{i,j} \end{aligned} \quad (3.2)$$

A Eq. (3.2) é a familiar equação de balanço espacial, que corresponde a ambas as Eqs. (2.3) e (2.4). Esta equação relaciona os fluxos angulares médios no nodo $D_{i,j}$ com os fluxos angulares médios nos lados deste nodo. Para se determinarem os fluxos angulares médios exatos no interior e nos lados de cada nodo, que satisfaçam à Eq. (2.3), nós consideramos uma segunda equação auxiliar que relaciona $\bar{\Psi}_{m,i,j}$ com $\tilde{\Psi}_{m,i+1/2,j}$ e $\tilde{\Psi}_{m,i-1/2,j}$. Assumimos que esta equação tenha a seguinte forma:

$$\bar{\Psi}_{m,i,j} = \sum_{\mu_n > 0} \theta_{m,n} \tilde{\Psi}_{n,i-1/2,j} + \sum_{\mu_n < 0} \theta_{m,n} \tilde{\Psi}_{n,i+1/2,j} + \hat{G}_{m,i,j} \quad (3.3.a)$$

onde $\theta_{m,n}$ e $\hat{G}_{m,i,j}$ são determinados de forma que a solução geral da Eq. (2.3), dada pelas Eqs. (2.14) e (2.5), tenha fluxos angulares médios no interior e nos lados de cada nodo, que para todo valor de β_l , satisfazem à Eq. (3.3.a). Portanto, determinando os fluxos angulares médios no interior e nos lados do nodo que correspondam à Eq. (2.14), introduzindo estes na Eq. (3.3.a), e requerendo que a equação resultante seja válida para todo valor de β_l , nós encontramos que

$$\hat{G}_{m,i,j} = \left(\frac{Q_{i,j}}{\sigma_{a,i,j}} - \frac{c_{i,j}}{\sigma_{a,i,j}k_j} (\hat{J}_{i,j+1/2} - \hat{J}_{i,j-1/2}) \right) \left(1 - \sum_{n=1}^M \theta_{m,n} \right) - \frac{\eta_m}{\sigma_{t,i,j}k_j} (\hat{\Psi}_{m,i,j+1/2} - \hat{\Psi}_{m,i,j-1/2}) \quad (3.3.b)$$

e que as constantes $\theta_{m,n}$ têm de satisfazer a

$$\frac{2\nu_\ell}{\sigma_{t,i,j}h_i} \sinh\left(\frac{\sigma_{t,i,j}h_i}{2\nu_\ell}\right) a_{\ell,m} = e^{+\sigma_{t,i,j}h_i/2\nu_\ell} \sum_{\mu_n > 0} \theta_{m,n} a_{\ell,n} + e^{-\sigma_{t,i,j}h_i/2\nu_\ell} \sum_{\mu_n < 0} \theta_{m,n} a_{\ell,n} \quad , \quad 1 \leq \ell, m \leq M \quad (3.4)$$

As Eqs. (3.4) formam um conjunto de M^2 equações nas M^2 incógnitas $\theta_{m,n}$. Após se determinarem as constantes $\theta_{m,n}$, as Eqs. (3.3) constituem as equações auxiliares que, juntamente 'a equação de balanço espacial (3.2), são exatamente satisfeitas pela solução geral da equação nodal de transporte integrada transversalmente (2.3). Uma equação auxiliar similar 'a Eq. (3.3.a) é definida para a Eq. (2.4).

Neste ponto, podemos dar uma simples interpretação física para Eq. (3.3.a). O termo $\hat{G}_{m,i,j}$ representa a contribuição para o fluxo angular médio no interior do nodo $\bar{\Psi}_{m,i,j}$ devido 'a fonte de nêutrons $Q_{i,j}$ e aos termos de fuga transversal. Analogamente, se $\mu_n > 0$ (ou $\mu_n < 0$) e $Q_{i,j} = 0$, então $\theta_{m,n}$ é o valor de $\bar{\Psi}_{m,i,j}$ devido a um fluxo angular unitário incidente no lado esquerdo (ou direito) do nodo na direção μ_n . Logo, as constantes $\theta_{m,n}$ agem como uma função de Green que nós determinamos a partir da análise espectral das equações nodais unidimensionais integradas transversalmente. As Eqs. (3.2), (3.3.a-b), e as correspondentes equações auxiliares constituem 3IJM equações. Combinando estas com as condições de contorno impostas no exterior do domínio,

$$\hat{\Psi}_{m,1/2,j} = \hat{\Psi}_{m,1/2,j}^b \quad , \quad \mu_m > 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq J \quad , \quad (3.5.a)$$

$$\hat{\Psi}_{m,I+1/2,j} = \hat{\Psi}_{m,I+1/2,j}^b \quad , \quad \mu_m < 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq J \quad , \quad (3.5.b)$$

$$\hat{\Psi}_{m,i,1/2} = \hat{\Psi}_{m,i,1/2}^b \quad , \quad \eta_m > 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq I \quad , \quad (3.5.c)$$

$$\hat{\Psi}_{m,i,I+1/2} = \hat{\Psi}_{m,i,I+1/2}^b \quad , \quad \eta_m < 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq I \quad , \quad (3.5.d)$$

onde $\hat{\Psi}^b$ é conhecido, nós obtemos $(3IJ + I + J)M$ equações. Este é exatamente o número de incógnitas: fluxos angulares médios no interior e nos lados dos nodos. Sendo assim, este sistema tem o mesmo número de equações que de incógnitas. Estas equações são denominadas equações SGF-CN.

Agora, nós consideramos o esquema NBI para resolvermos iterativamente as equações SGF-CN. Antes de descrevermos os detalhes deste esquema iterativo, nós notamos que as equações auxiliares para o método SGF-CN são bem diferentes das equações auxiliares que têm sido usadas em métodos tradicionais de transporte. Nesses métodos convencionais as equações auxiliares relacionam o fluxo angular médio no interior do nodo com o fluxo angular médio nos lados do nodo em uma única direção (ordenada discreta); estas equações auxiliares não contêm acoplamento angular explícito. No entanto, as equações auxiliares usadas no método SGF-CN acoplam o fluxo angular médio no interior do nodo em alguma direção a todos os fluxos angulares médios incidentes nos lados do nodo. Por esta razão, as equações SGF-CN não serão resolvidas usando o convencional esquema SI (Source Iteration) [13]; a estrutura das equações SGF-CN não é apropriada a um esquema iterativo que trata cada direção independentemente, 'a medida que as equações são varridas pelo sistema.

Sendo assim, usam-se as melhores estimativas que se têm para os fluxos angulares médios incidentes nos lados de cada nodo para resolver completamente o problema de transporte nesse nodo e obter os fluxos angulares médios emergentes de seus lados que serão usados como fluxos incidentes nos lados dos nodos adjacentes. Existem várias possibilidades para se implementar essa idéia, mas nós adotamos uma forma de varredura que tem a vantagem que se o problema é de absorção pura, então a convergência ocorre após uma varredura através do sistema em todos os quadrantes.

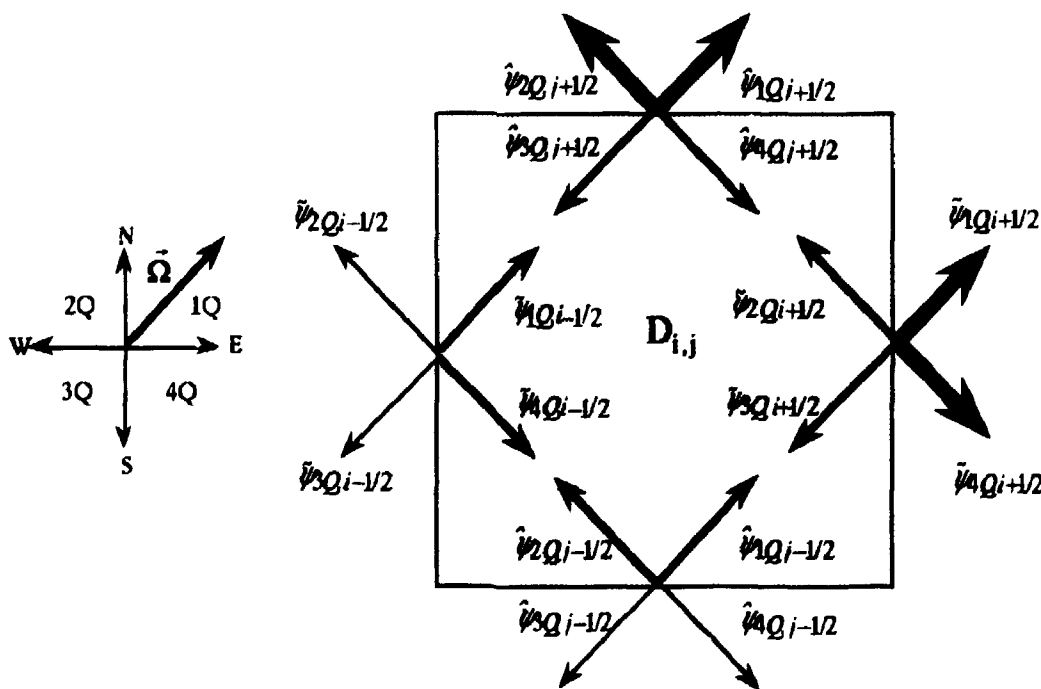


Figura 3.1. Varredura de SW para NE.

Para explicar este conceito, vamos considerar a Fig. 3.1 que representa um nodo arbitrário D_{ij} com os fluxos angulares médios nos seus lados. Cada seta na Fig. 3.1 representa $N(N+2)/8$ direções angulares em cada quadrante. Para a varredura indicada (de SW para NE), as setas emergentes (setas mais grossas) do norte e leste de D_{ij} representam os fluxos angulares médios emergentes que nós precisamos calcular. As setas incidentes (setas médias) representam os fluxos angulares médios que são conhecidos, ou pelo menos usamos as melhores estimativas que temos para eles. As demais setas emergentes (setas mais finas) representam os fluxos angulares médios que podem ser determinados, mas que não são necessários para esta varredura. Estes serão necessários para varreduras em outras direções. Uma análoga convenção é seguida para as varreduras de NW para SE, de SE para NW, e de NE para SW.

É óbvio que um problema com absorção pura será resolvido após uma única varredura completa através do sistema em todos os quadrantes, como é o caso do convencional esquema SI. Por outro lado, em contraste com o algoritmo SI, se a grade espacial consiste de um único nodo, o método SGF-CN resolve tal problema em apenas uma iteração.

Em seguida, apresentamos resultados numéricos que ilustram o desempenho do método SGF-CN com o esquema iterativo NBI.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS E DISCUSSÃO

Nós consideramos um problema-modelo que consiste de uma fonte de nêutrons uniforme e isotrópica cercada por um material de blindagem. A Fig. 4.1 (não desenhada em escala) mostra um quarto desta estrutura (as dimensões das seções de choque são cm^{-1}). O problema é calcular a fuga de nêutrons J^T através de todo o contorno físico no norte da estrutura e a fuga de nêutrons J^C através do lado superior da região de $5 \times 5 \text{ cm}$ localizada no canto superior-direito da estrutura.

Nós resolvemos este problema usando o método SGF-CN com o esquema iterativo NBI, a quadratura S_4 do TWODANT, e um critério de convergência de 10^{-6} na máxima norma do erro relativo. Nós também resolvemos este problema usando outros métodos de malha grossa convencionais [7]: o método LD (Linear Discontinuous), o método QD (Quadratic Discontinuous), o método CCN (Constant-Constant Nodal) e o método LN (Linear Nodal). Todos usando o esquema iterativo SI, a mesma quadratura angular e o mesmo critério de convergência. Todos estes métodos foram implementados no computador Cray - YMP do Centro de Supercomputação de San Diego^(†).

A Fig. 4.2 mostra os resultados gerados para J^T pelo método SGF-CN e pelos métodos convencionais, usando várias grades espaciais $g_1 \times g_2 \times g_3$, onde g_k é o número de nodos usados na k -ésima seção da estrutura representada na Fig. 4.1, para $k = 1, 2, 3$. Vemos que a medida que a grade espacial torna-se mais fina, os resultados numéricos gerados por todos os métodos convergem

(†) SDSC: San Diego Supercomputer Center.

para o mesmo resultado. Entretanto, à medida que a grade espacial torna-se mais grossa, os resultados gerados pelos métodos convencionais desviam drasticamente da solução de malha fina. A Fig. 4.3 mostra um desempenho similar para os resultados gerados para J^C . No entanto, já que esta quantidade é mais localizada, o efeito do cancelamento de erros é menos significativo. Ainda que os resultados gerados para J^C pelo método SGF-CN sejam mais sensíveis a malhagem que aqueles gerados para J^T , eles são ainda muito menos sensíveis que os resultados gerados pelos métodos tradicionais.

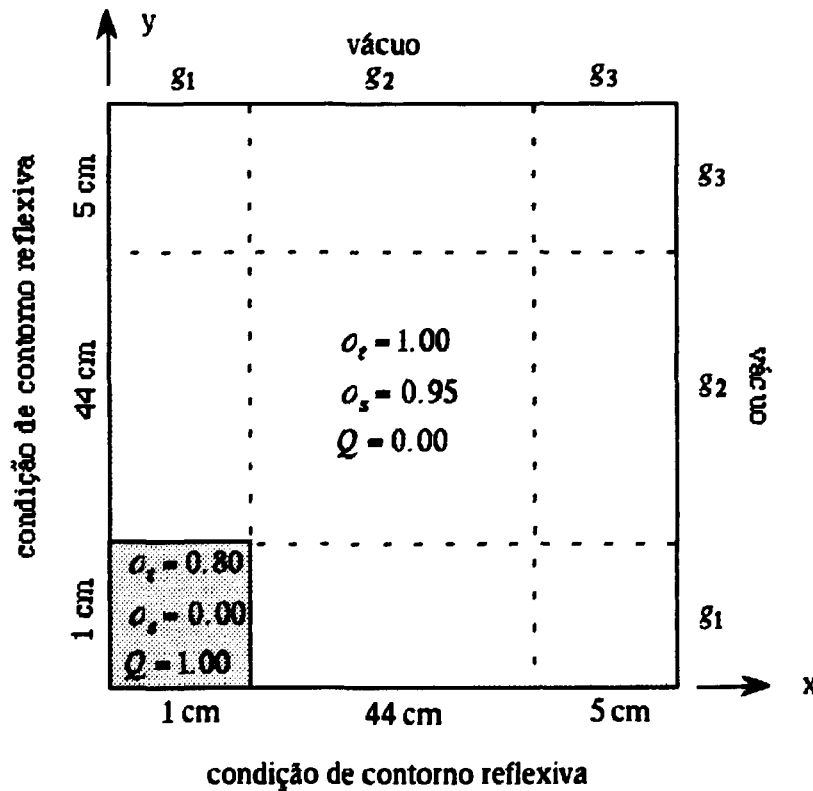


Figura 4.1. Problema-Modelo

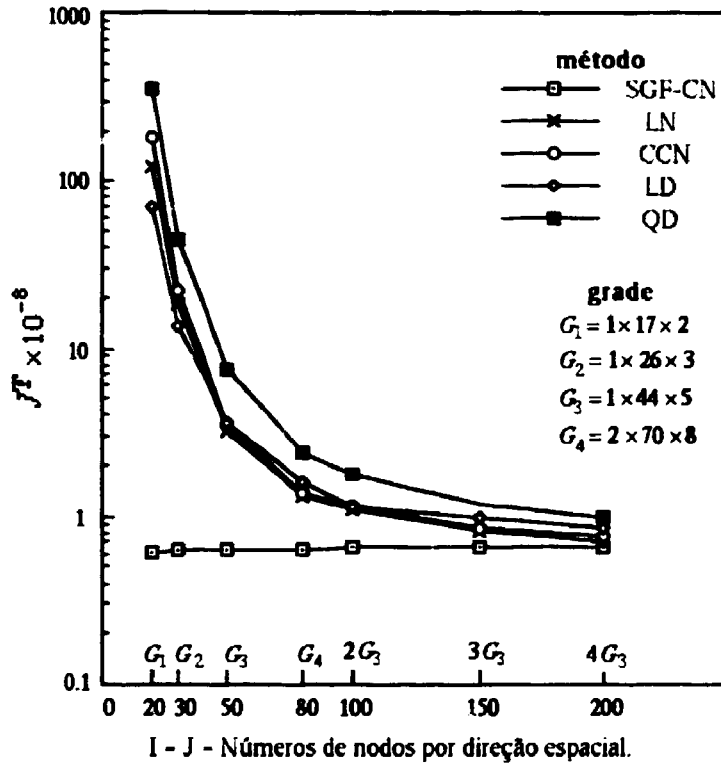


Figura 4.2. Fuga Total de Nêutrons através do Contorno Superior.

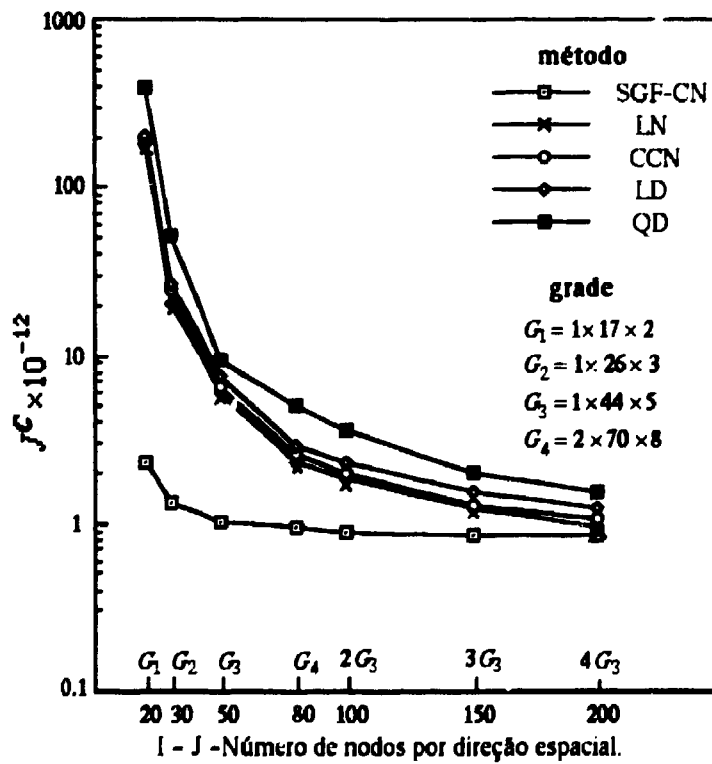


Figura 4.3. Fuga de Nêutrons dos 5 cm 'a direita no Contorno Superior.

Uma característica dos resultados mostrados nas Figs. 4.2 e 4.3 é que, 'a medida que a grade fica mais grossa, as soluções LD, CCN, LN e QD degradam 'a mesma taxa. Também é surpreendente que as soluções QD são menos precisas que as soluções LD. Este fato foi observado por Walters [7], que justifica isso pela negligência do termo cruzado na expansão quadrática.

Tabela 4.1. Raio Espectral ρ e Número de Iterações para o Problema-Modelo.

| MÉTODO | Grade 4 × 176 × 20 | | Grade 3 × 132 × 15 | | Grade 2 × 88 × 10 | | Grade 2 × 70 × 8 | |
|--------------------|-----------------------|--------|-----------------------|--------|----------------------|--------|---------------------|--------|
| | ρ | # iter | ρ | # iter | ρ | # iter | ρ | # iter |
| LD + SI | 0.950 | 572 | 0.950 | 568 | 0.950 | 561 | 0.950 | 562 |
| QD + SI | 0.950 | 568 | 0.950 | 564 | 0.950 | 555 | 0.950 | 549 |
| CCN + SI | 0.950 | 574 | 0.950 | 571 | 0.950 | 554 | 0.950 | 559 |
| LN + SI | 0.950 | 575 | 0.950 | 572 | 0.950 | 565 | 0.951 | 560 |
| SGF-CN + NBI | 0.831 | 173 | 0.823 | 154 | 0.794 | 141 | 0.784 | 132 |

A Tabela 4.1 mostra que o raio espectral do esquema iterativo SI é maior que o do esquema NBI. Portanto o esquema SI requer muito mais varreduras para convergir o problema. Além do mais, o raio espectral do esquema iterativo NBI diminui 'a medida que a grade espacial fica mais grossa. Isto sugere que um método baseado em grades múltiplas possa ser uma técnica eficiente de aceleração para o esquema NBI.

Estes resultados numéricos mostram que o método SGF-CN é significativamente mais preciso que métodos tradicionais de malha grossa, tal como os métodos descontínuos de elementos finitos e os métodos nodais convencionais. A razão para essa superioridade numérica é que a única aproximação envolvida no método SGF-CN é a aproximação para os termos de fuga transversal nas equações S_N unidimensionais integradas transversalmente. No método SGF-CN, os termos de fuga transversal são aproximados por constantes definidas como os fluxos angulares médios nos lados dos nodos. Esta aproximação para os termos de fuga transversal é suficientemente precisa para o problema considerado aqui. Entretanto, para meios mais absorventes, os resultados gerados pelo método SGF-CN são mais sensíveis ao truncamento espacial, e uma aproximação de ordem superior pode ser vantajosa.

Agora nós faremos um experimento numérico para calcular a eficiência relativa κ do código SGF-CN com o esquema iterativo NBI em relação ao código LN com o convencional esquema iterativo SI. O experimento consiste em calcular a taxa de absorção \bar{R} na região de 5×5 cm localizada no canto superior-direito da estrutura representada na Fig. 4.1. Nós definimos eficiência relativa κ como

$$\kappa = \frac{t(LN)}{t(SGF - CN)} \quad (4.1)$$

onde $t(LN)$ é o tempo de CPU^(†) usado pelo código LN para convergir o problema numa grade de 200×200 nodos, e $t(SGF - CN)$ é o tempo de CPU usado pelo código SGF-CN para convergir o problema numa grade de 100×100 nodos. Os dois códigos produzem erros relativos de menos de 10% nestas grades. Nós usamos um critério de convergência de 10^{-6} na máxima norma do erro relativo e quadraturas S_2 , S_4 e S_6 do TWODANT. Os resultados, como mostrados na Tabela 4.2, mostram que o método SGF-CN é mais eficiente que o método LN. Entretanto, esta vantagem na eficiência decresce à medida que cresce a ordem da quadratura angular. Isto se deve ao fato que o esquema iterativo NBI requer álgebra matricial que o torna mais dispendioso em comparação ao esquema SI, à medida que a ordem da quadratura angular cresce.

Tabela 4.2. Eficiência Relativa do Método SGF-CN + NBI em relação ao Método LN + SI.

| S_N | Grade Espacial | | \bar{R}_L | | Eficiência Relativa κ_N |
|-------|----------------|-----------|-------------|-------------|--------------------------------|
| | LN+SI | SGF+NBI | LN+SI | SGF+NBI | |
| 2 | 4x176x20 | 2x 88 x10 | 0.54409E-10 | 0.51913E-10 | $\kappa_2 = 19.33$ |
| 4 | 4x176x20 | 2x 88 x10 | 0.13198E-11 | 0.12470E-11 | $\kappa_4 = 9.15$ |
| 6 | 4x176x20 | 2x 88 x10 | 0.13887E-11 | 0.13080E-11 | $\kappa_6 = 5.23$ |

A excelente eficiência relativa do método SGF-CN é devida em parte ao fato que este gera soluções precisas em grades espaciais relativamente grossas. Em parte isso também é devido ao uso do esquema iterativo NBI, que converge soluções mais rapidamente que o esquema iterativo SI.

Finalizando, o método SGF-CN apresentado aqui é significativamente mais preciso que os métodos convencionais de transporte. Isto é devido ao fato que o método SGF-CN introduz erro de

(†) Cental Processing Unit.

truncamento espacial somente na aproximação dos termos de fuga transversal. Além disso, o uso do esquema iterativo NBI no método SGF-CN é muito mais eficiente que o uso do esquema SI nos métodos tradicionais de malha grossa. Uma desvantagem para o método SGF-CN com NBI é que os fluxos angulares médios nos lados dos nodos têm que ser armazenados, enquanto que nos algoritmos convencionais usando o esquema SI, somente os fluxos escalares médios no interior dos nodos têm que ser armazenados (para o caso de espalhamento isotrópico). Além disso, o método SGF-CN requer cálculos matriciais antes de começar o processo iterativo, que podem ser muito dispendiosos.

Por simplicidade, neste trabalho nós apresentamos o método SGF-CN para problemas com espalhamento isotrópico. Entretanto, o método pode ser facilmente estendido para espalhamento anisotrópico [12]. Uma característica do método SGF-CN que pode ser melhorada para se obter um método ainda mais preciso é a simples aproximação constante no espaço que nós usamos para os termos de fuga transversal. Nós estamos considerando agora tais melhorias. Na Referência [14] estas melhorias foram implementadas e completamente testadas para um caso homogêneo simples.

REFERÊNCIAS

- [1]. Dorning, J., *Proc. ANS Topical Meeting on Computational Methods in Nuclear Engineering* Williamsburg, Virginia 1, 3-1 (April 23 - 25, 1979).
- [2]. Walters, W.F. and O'Dell, R.D., *Proc. ANS/ENS International Topical Meeting on Advances in Mathematical Methods for the Solution of Nuclear Engineering Problems* München 1, 115 (April 27-29, 1981).
- [3]. Badruzzaman, A., *Nucl. Sci. Eng.* 89, 281 (1985).
- [4]. Dorning, J., *Proc. ANS International Meeting on Advances in Nuclear Engineering Computational Methods* Knoxville, Tennessee 2, 412 (April 9 - 11, 1985).
- [5]. Walters, W.F., *Proc. ANS International Meeting on Advances in Nuclear Engineering Computational Methods* Knoxville, Tennessee 2, 452 (April 9 - 11, 1985).
- [6]. Badruzzaman, A., *Prog. Nucl. Energy* 18, 137 (1986).
- [7]. Walters, W.F., *Prog. Nucl. Energy* 18, 21 (1986).
- [8]. Lawrence, R.D., *Prog. Nucl. Energy* 17, 271 (1986).
- [9]. Shober, R.A. and Henry, A.F., *Trans. Am. Nucl. Soc.* 24, 192 (1976).
- [10]. De Barros, R.C. and Larsen, E.W., *Nucl. Sci. Eng.* 104, 199 (1990).
- [11]. Case, K.M. and Zweifel, P.F., *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1967).
- [12]. De Barros, R.C., *A Spectral Nodal Method for the Solution of the Discrete Ordinates Problems in One and Two Dimensional Cartesian Geometry*, Ph.D. Dissertation, The University of Michigan (1990).
- [13]. Lewis, E.E. and Miller, W.F. Jr., *Computational Methods of Neutron Transport* John Wiley and Sons, New York (1984).
- [14]. De Barros, R.C. and Larsen, E.W., *A Spectral Nodal Method for the Solution of the S_N Equations in X, Y-Geometry for Highly Absorbing Deep Penetration Problems* VIII Encontro de Física de Reatores e Termo-Hidráulica (ENFIR VIII) - Atibaia - S.P. - Brasil - (a ser publicado nos anais do ENFIR VIII em setembro de 1991).

**LEITORES INTERESSADOS NESTA PUBLICAÇÃO
FAVOR ENCAMINHAR SEUS PEDIDOS PARA
IEN - BIBLIOTECA**

**INSTITUTO DE ENGENHARIA NUCLEAR
CAIXA POSTAL 2186
CEP 20001 - RIO DE JANEIRO
RJ, BRASIL**