

FR9300743

CEA-R-5614

CEA-R-5614

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

A11

**COLLAPSES NON AUTO-SIMILAIRES  
DECRITS PAR L'EQUATION  
DE SCHROEDINGER NON LINEAIRE**

*par*

*Luc BERGE, Denis PESME*

Centre d'Etudes de Limeil - Valenton

**Rapport CEA-R-5614**

**1992**

**SERVICE DE DOCUMENTATION  
ET D'ÉDITION MULTIMÉDIA**

C.E.-SACLAY 91191 GIF-sur-YVETTE Cédex FRANCE

A 1  
A 1  
A 1  
A 1  
A 1  
A 1  
A 1  
A 2  
A  
B 1  
B 1  
B 1  
B 1  
B  
B  
B  
B  
C  
C  
C

## CLASSIFICATION DES RAPPORTS, NOTES ET BIBLIOGRAPHIES CEA

(Classification du système international de documentation nucléaire INIS  
de l'Agence Internationale de l'Energie Atomique)

A 11	Physique théorique générale et physique mathématique	C 50	Santé, radioprotection et environnement
A 12	Physique atomique et physique moléculaire	C 60	Radiologie et médecine nucléaire
A 13	Physique de l'état solide et physique des fluides	D 10	Isotopes et sources de rayonnements
A 14	Physique des plasmas et réactions thermonucléaires	D 20	Applications des isotopes et des rayonnements
A 15	Astrophysique et cosmologie, rayonnement cosmique	E 11	Thermodynamique et écoulement des fluides
A 16	Conversion directe d'énergie	E 13	Structures mécaniques et équipements
A 17	Physique des basses températures et cryogénie	E 14	Explosions nucléaires
A 20	Physique des hautes énergies	E 15	Manutention des matériaux radioactifs
A 30	Physique neutronique et physique nucléaire	E 16	Accélérateurs
B 11	Analyse chimique et isotopique	E 17	Essais des matériaux
B 12	Chimie minérale, chimie organique et chimie-physique	E 20	Réacteurs à fission (généralités)
B 13	Radiochimie et chimie nucléaire	E 30	Types spécifiques de réacteurs à fission et centrales associées
B 14	Chimie des rayonnements	E 40	Instrumentation
B 16	Combustibles nucléaires	E 50	Gestion des déchets
B 22	Métaux et alliages	F 10	Sociologie et sciences économiques
B 23	Céramiques et cermets	F 20	Droit
B 24	Autres matériaux	F 30	Documentation nucléaire
B 30	Sciences de la terre	F 40	Garanties nucléaires et contrôle de vérification
C 10	Tous les effets et aspects variés de l'irradiation externe en biologie	F 50	Méthodes mathématiques et codes pour ordinateur
C 20	Effets et cinétique des radioisotopes	F 60	Divers
C 40	Sciences de la vie appliquées		

Rapport CEA-R-5614

Cote-matière de ce rapport : A11

### MOTS CLEFS (extraits du thesaurus INIS)

*en français*

EQUATION DE SCHROEDINGER  
PROBLEMES NON-LINEAIRES  
AUTO-FOCALISATION  
SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES  
SOLUTIONS ANALYTIQUES

*en anglais*

SCHROEDINGER EQUATION  
NONLINEAR PROBLEMS  
SELF-FOCUSING  
ASYMPTOTIC SOLUTIONS  
ANALYTICAL SOLUTIONS

RAPPORT CEA-R-5614 - BERGE Luc, PESME Denis

**"COLLAPSES NON AUTO-SIMILAIRES DECRITS PAR L'EQUATION DE SCHROEDINGER NON LINEAIRE"**

**Sommaire** - Nous présentons une méthode rapide pour obtenir les taux de contraction caractérisant les solutions collapsantes à symétrie radiale de l'équation de Schroedinger non linéaire définie pour des dimensions spatiales excédant une valeur critique. Nous déterminons explicitement les comportements asymptotiques de ces solutions en résolvant le problème linéaire non stationnaire de l'équation de Schoedinger non linéaire. Nous montrons que les états auto-similaires associés aux solutions collapsantes ont une extension spatiale bornée supérieurement par un rayon limite.

*1992 - Commissariat à l'Energie Atomique - France*

RAPPORT CEA-R-5614 - BERGE Luc, PESME Denis

**"NON SELF-SIMILAR COLLAPSES DESCRIBED BY THE NON-LINEAR SCHROEDINGER EQUATION"**

**Summary** - We develop a rapid method in order to find the contraction rates of the radially symmetric collapsing solutions of the nonlinear Schroedinger equation defined for space dimensions exceeding a threshold value. We explicitly determine the asymptotic behavior of these latter solutions by solving the non stationary linear problem relative to the nonlinear Schroedinger equation. We show that the self-similar states associated with the collapsing solutions are characterized by a spatial extent which is bounded from the top by a cut-off radius.

*1992 - Commissariat à l'Energie Atomique - France*

- Rapport CEA-R-5614 -

Centre d'Etudes de Limeil - Valenton

**COLLAPSES NON AUTO-SIMILAIRES DECRITS  
PAR L'EQUATION DE SCHROEDINGER NON LINEAIRE**

par

**Luc BERGE, Denis PESME\***

**\*Centre de Physique Théorique, Ecole Polytechnique, 91128  
Palaiseau Cédex, France**

- Octobre 1992 -

ISSN 0429 - 3460

## 1. Introduction

Le collapse d'ondes est un phénomène non linéaire qui intervient dans de nombreux domaines de la physique <sup>1-7</sup> tels que la physique des plasmas, la turbulence optique ou encore l'astrophysique. Il décrit l'autofocalisation dans l'espace ou dans le temps de paquets d'ondes localisés lorsque la masse associée à ces derniers excède un certain seuil. Parmi les systèmes dynamiques concernés par le processus de collapse, l'équation de Schrödinger non linéaire (NSE)

$$i\partial_t \psi + r^{1-D}\partial_r r^{D-1}\partial_r \psi + |\psi|^{2\sigma}\psi = 0 \quad (1)$$

où  $\sigma$  désigne un exposant réel positif, décrit l'explosion d'une onde solitaire  $\psi(r,t)$  dont l'amplitude diverge à l'infini en un temps fini  $t_*$ , pourvu que la dimension spatiale  $D$  satisfasse l'inégalité  $D \geq 2/\sigma$ . Ce dernier résultat peut être déduit de l'identité dite du "Viriel" <sup>4,5</sup> qui, dérivée de l'Eq.(1), s'exprime comme suit

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^\infty r^{D+1} |\psi(r,t)|^2 dr = 8 \left[ H(\psi) + \frac{2-D\sigma}{2(\sigma+1)} \int_0^\infty |\psi(r,t)|^{2(\sigma+1)} r^{D-1} dr \right] \quad (2)$$

et dont le membre de droite est une quantité positive pour des conditions initiales suffisamment petites. <sup>8</sup> Dans l'Eq.(2),  $H$  désigne l'hamiltonien

$$H(\psi) \equiv \int_0^\infty \left[ |\nabla \psi(r,t)|^2 - (\sigma+1)^{-1} |\psi(r,t)|^{2(\sigma+1)} \right] r^{D-1} dr. \quad (3a)$$

Cette intégrale d'énergie, avec l'intégrale dite de "masse",

$$N(\psi) \equiv \int_0^\infty |\psi(r,t)|^2 r^{D-1} dr, \quad (3b)$$

sont deux invariants pour NSE (1), qui seront considérés comme étant des quantités finies dans ce qui suit ; dans le cas de conditions initiales à énergie négative, la condition de collapse  $D \geq 2/\sigma$  se déduit facilement de l'Eq.(2). En outre, il peut être spécifié qu'en dimension dite "critique"  $D = 2/\sigma$ , le collapse ne peut pas se développer si la masse  $N(\psi)$  est en-deçà de la valeur seuil  $N\{R_0\}$ . <sup>5</sup> Ici,  $R_0(r)$  correspond à la solution propre stationnaire de l'Eq.(1), liée à  $\psi(r,t)$  par la relation  $\psi(r,t) = e^{it}R_0(r)$ , et satisfaisant l'équation différentielle

$$(-1 + r^{1-D} \frac{\partial}{\partial r} r^{D-1} \frac{\partial}{\partial r} + R_0^{4/D})R_0 = 0 \quad (4)$$

avec les deux conditions aux limites  $R_0(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$  and  $\partial R_0(0)/\partial r = 0$ . En utilisant les relations (3a) et (4), on remarque que la solution type soliton  $R_0$  vérifie  $H\{R_0\} = 0$ .

Les états collapsants sont généralement recherchés à l'aide de la substitution suivante

$$\psi(r,t) = (g(\tau))^{-\alpha} \phi(\xi, \tau) \exp[i\lambda\tau - a(\tau) \frac{\xi^2}{4}] \quad (5)$$

où les nouvelles variables d'espace et de temps  $\xi$  et  $\tau$  sont définies par

$$\xi \equiv \frac{r}{f(t)} \equiv \frac{r}{g(\tau)} \quad (6a)$$

et

$$\tau \equiv \int_0^t f^2(u) du \quad (6b)$$

respectivement. Dans l'équation (5), le facteur d'échelle  $g(\tau) \equiv f(t)$  désigne le rayon caractéristique d'une structure collapsante, et décroît suffisamment vite vers zéro pour que la variable de temps transformée  $\tau$  tende vers l'infini à la limite  $t \rightarrow t^*$ ; dans cette limite, la solution  $\psi(r,t)$  s'auto-contracte, et à masse constante, son amplitude diverge à l'infini, ce qui caractérise un état collapsant (voir figure I). Dans l'expression (5), la valeur propre  $\lambda$  et l'exposant  $\alpha$  sont des constantes réelles et positives, et la quantité  $a(\tau)$  correspond à la fonction positive  $a(\tau) \equiv -\partial_\tau \ln g(\tau)$ , soit encore

$$a(\tau) \equiv -f_t f \equiv -g_t/g. \quad (6c)$$

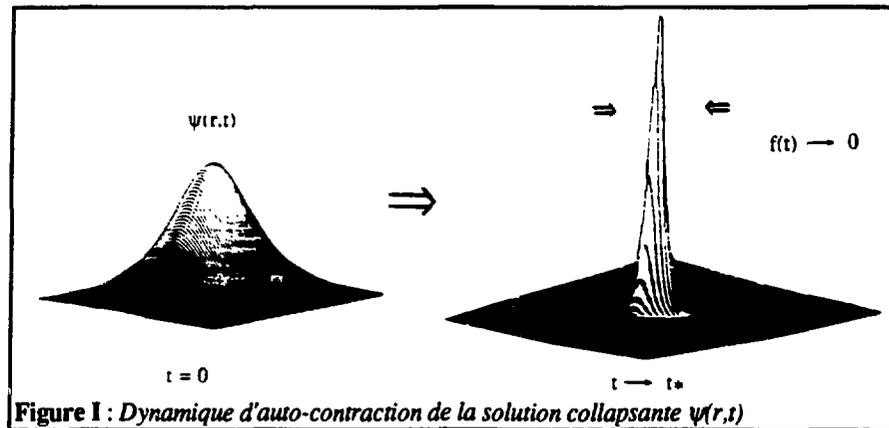


Figure I : Dynamique d'auto-contraction de la solution collapsante  $\psi(r,t)$

Par convention, les indices présents dans la relation (6c) se réfèrent à la dérivation des fonctions  $f(t)$  et  $g(\tau)$  par rapport aux variables indicées.

Dans le passé, <sup>9-11</sup> l'exposant  $\alpha$  dans l'expression (5) a longtemps été supposé égal à  $D/2$ , à cause de l'invariance de la masse (3b). Par ailleurs, le concept de "collapse fort" a été introduit dans la littérature soviétique <sup>12-14</sup> pour caractériser des collapses pour lesquels la masse  $N$  reste concentrée dans le cœur central de la solution collapsante, localisé près de l'origine  $\xi = 0$ . Dans le cas de collapses forts, les solutions sont supposées être *exactement* auto-similaires, dans le sens où  $\phi$  ne dépend pas du temps (cette notion sera développée ultérieurement). Dans ce cas, en introduisant de telles solutions dans l'hamiltonien (3a), on obtient l'estimation grossière  $H\{\psi\} \approx (N\{\psi\}/(g(\tau))^2) - N^2\{\psi\}/(2(g(\tau))^{2\alpha\sigma})$ , de laquelle on déduit la valeur  $\alpha = (1/\sigma)$  en vertu de la conservation de  $H$ . En comparant cette valeur avec  $D/2$ , on conclut qu'un collapse fort ne peut se produire que dans le cas critique  $D = 2/\sigma$ , et ne peut pas être réalisé dans le cas dit "surcritique" défini pour  $D > 2/\sigma$ . Un autre argument pour prouver qu'un collapse ne peut pas être fort dans ce dernier cas, repose sur l'intégrale de masse (3b) : des solutions exactement auto-similaires conduisent à la relation

$$N\{\psi\} \equiv (g(\tau))^{D-2/\sigma} N\{\phi\} \quad (7)$$

qui de toute évidence, n'est pas indépendante du temps pour  $D > 2/\sigma$  dans le cas d'une intégrale  $N\{\phi\}$  finie. En conséquence, un collapse surcritique ne peut être que "faible", <sup>12</sup> dans le sens où sa masse n'est plus localisée au voisinage de la région du cœur (avec une intégrale  $N\{\phi\} \propto (g(\tau))^{2/\sigma-D}$  non bornée). L'un des buts de ce rapport consiste à réviser ces concepts de collapses fort ou faible : plus précisément, nous prouverons que le problème du collapse faible nécessite l'introduction d'un rayon limite, appelé  $\xi_{\max}(\tau)$ , au-delà duquel la solution n'est pas auto-similaire. Ces différents scénarii de collapses fort / faible ont été confirmés par de nombreuses intégrations numériques du système (1) ; <sup>15-18</sup> c'est pourquoi la valeur  $\alpha = 1/\sigma$  de l'exposant dans la solution (5) peut être désormais retenue pour des collapses définis en dimensions critique et surcritique.

## 2. Etats auto-similaires et solutions quasiment auto-similaires

En introduisant les substitutions (5) et (6) dans l'équation (1), nous obtenons l'équation d'évolution pour la fonction propre  $\phi(\xi, \tau)$ , c'est-à-dire

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \phi + \xi^{1-D} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^{D-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \phi + |\phi|^{2\sigma} \phi + \varepsilon(\xi^2 - \xi_T^2) \phi = 0, \quad (8)$$

où  $\varepsilon$  et  $\xi_T$  représentent respectivement les fonctions dépendant du temps

$$\varepsilon(\tau) \equiv -\frac{f^3 f_{tt}}{4} = \frac{(a^2 + a_\tau)}{4} \quad (9a)$$

et

$$\xi_T(\varepsilon) \equiv \left[ \frac{\lambda + ia(D/2 - 1/\sigma)}{\varepsilon} \right]^{1/2}. \quad (9b)$$

Par ailleurs, en multipliant (8) par  $\xi^{D-1} \bar{\phi}$ , où  $\bar{\phi}$  est la fonction complexe conjuguée de  $\phi$ , et en intégrant la partie imaginaire du résultat de zéro à  $\xi$ , on obtient l'équation de conservation de la masse  $N(\phi)$

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \frac{\partial}{\partial \tau} |\phi(\rho, \tau)|^2 \rho^{D-1} d\rho + 2\xi^{D-1} |\phi(\xi, \tau)|^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \arg \phi(\xi, \tau) \\ = a(D - 2/\sigma) \int_0^\xi |\phi(\rho, \tau)|^2 \rho^{D-1} d\rho. \end{aligned} \quad (10)$$

La solution  $\phi(\xi, \tau)$  étant localisée dans l'espace, elle est supposée satisfaire les conditions aux limites  $\phi(\xi, \tau) \rightarrow 0$  pour  $\xi \rightarrow \infty$ , et  $\partial_\xi \phi(\xi=0, \tau) = 0$ . Pendant une vingtaine d'années, le problème du collapse d'ondes a consisté à déterminer la dépendance fonctionnelle en temps du taux de contraction  $f(t)$  en résolvant correctement l'équation différentielle  $a(t) = -ff_t$ , ce qui fut fait en considérant en premier lieu des solutions exactement auto-similaires dont l'existence dans tout le domaine spatial en  $\xi$  était admise. Par *exactement auto-similaire*, on signifie qu'à la limite  $\tau \rightarrow \infty$ , l'approximation  $\partial_\tau \phi = 0$  peut être appliquée sur l'équation (8). Les solutions *exactement* auto-similaires sont alors définies comme celles pour lesquelles la fonction  $a(\tau)$  atteint une valeur stationnaire  $a_0$

avec  $a_\tau \rightarrow 0$  ; dans ce cas  $\phi(\xi, \tau)$  se réduit à une solution stationnaire, notée  $\phi_0(\xi, \epsilon_0)$ , satisfaisant l'équation suivante

$$\xi^{1-D} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^{D-1} \frac{\partial \phi_0}{\partial \xi} + |\phi_0|^{2\sigma} \phi_0 + \epsilon_0 \xi^2 \phi_0 - \left[ \lambda + \frac{ia_0(D - 2/\sigma)}{2} \right] \phi_0 = 0 \quad (11)$$

avec  $\epsilon_0 = a_0^2/4$ . Sous hypothèse auto-similaire, la valeur de la constante  $a_0$  peut être facilement trouvée en substituant dans la relation de conservation (10) la fonction  $\phi_0$  évaluée sous approximation BKW :<sup>19</sup> lorsque pour des  $\xi \gg \xi_T$  suffisamment grands, les effets non linéaires localisants en  $|\phi_0|^{2\sigma}$  peuvent être négligés,  $\phi_0(\xi, \epsilon_0)$  s'exprime au premier ordre par

$$\phi_0(\xi, \epsilon_0) \approx C(\epsilon_0) \epsilon_0^{-1/4} \xi^{-1/\sigma} \exp(i\sqrt{\epsilon_0} \xi^2/2), \quad (12)$$

avec  $|C(\epsilon_0)|^2 \propto \exp(-\pi\lambda/2\sqrt{\epsilon_0})$ . Selon la dimension spatiale du système, le résultat ainsi obtenu change singulièrement :

i) *A la dimension surcritique*  $D > 2/\sigma$ , la solution auto-similaire est caractérisée par une valeur non triviale de  $a_0$ , ce qui conduit au taux de contraction  $f(t) = \sqrt{2a_0}(t_* - t)$ . Cette dépendance temporelle a été confirmée par de nombreuses simulations numériques, d'où il apparaît que le rapport  $a_0/\lambda \approx 1$  est indépendant des conditions initiales (cf. par exemple Ref. [17]). Soulignons toutefois que dans le cas surcritique, l'Eq.(11) est un problème difficile de valeur propre *complexe* pour lequel l'existence de la solution  $\phi_0(\xi, \epsilon_0)$  n'a pu être mathématiquement démontrée. Dans ce qui suit, nous admettrons simplement sur la base des observations numériques que de telles solutions auto-similaires existent et satisfont le problème (11).

ii) *A la dimension critique*  $D = 2/\sigma$ , la procédure indiquée ci-dessus conduit à  $a_0 = 0$ , de sorte que l'équation (11) revêt la forme d'une NSE avec un potentiel réel, et admet pour  $\lambda = 1$  une fonction propre type soliton  $R_0(\xi)$  qui décroît exponentiellement comme  $\xi^{(1-D)/2} e^{-\xi}$  quand  $\xi$  tend vers l'infini. La valeur  $\epsilon_0 = a_0 = 0$  n'est cependant pas suffisante pour déterminer correctement la loi d'échelle  $f(t)$  parce que le terme en  $\xi^2$  dans l'Eq.(11) s'annule à cet ordre de perturbation. Pour cette raison, il est nécessaire de généraliser l'analyse précédente à une classe de solutions dites "quasiment" auto-similaires définies comme suit : les solutions *quasiment auto-similaires* correspondent à l'approximation adiabatique selon laquelle la fonction  $\epsilon(\tau)$  varie suffisamment lentement dans le temps pour que l'égalité  $\partial_\tau \phi = 0$  puisse être maintenue dans l'Eq.(8). Nous noterons donc ces solutions quasiment auto-similaires (QAS) par  $\phi_0(\xi, \epsilon(\tau))$ . En addition à cette hypothèse adiabatique, nous assurerons aussi l'inégalité  $|a_\tau| \ll a^2$ , qui pourra être satisfaite par les solutions obtenues ultérieurement.

La procédure analytique utilisée par plusieurs auteurs<sup>20-23</sup> pour déterminer  $f(t)$  consiste à développer cette solution QAS en un cœur central proche de  $R_0(\xi)$  à décroissance rapide, correspondant au domaine  $\xi < \xi_T = 1/\sqrt{\epsilon}$ , et une queue asymptotique  $\phi_T(\xi, \epsilon)$  dont le domaine d'extension spatiale est l'intervalle complémentaire  $\xi > \xi_T$ ; cette queue asymptotique n'est rien d'autre que la fonction (12) dans laquelle la constante  $a_0$  a été remplacée par la fonction  $2\sqrt{\epsilon(\tau)} = a(\tau)$ : la solution complète peut alors s'exprimer sous la forme perturbée  $\phi_0(\xi, \epsilon(\tau)) \equiv c(\epsilon) [ R_0(\xi) + \phi_T(\xi, \epsilon(\tau)) ]$ , où  $c(\epsilon)$  est une fonction à variation lente, et proche de l'unité, qui prend en compte la différence entre la solution exacte  $\phi(\xi, \tau)$  définie pour un temps  $\tau$  fini, et l'état stationnaire  $R_0(\xi)$ . Pour trouver la dépendance en temps de  $c(\epsilon)$ , on introduit ce développement de  $\phi_0(\xi, \epsilon(\tau))$  dans l'équation (8) que l'on multiplie par  $c^{-1} \xi^{D/2} \partial(\xi^{D/2} R_0(\xi)) / \partial \xi$ ; l'intégration dans tout l'espace de la partie réelle du résultat ainsi obtenu conduit alors, en utilisant la relation  $H(R_0) = 0$ , à l'estimation suivante

$$|c|^{4/D} = 1 + \epsilon K, \quad (13a)$$

avec  $K \equiv (2/DN_0) \int_0^\infty R_0^2 \xi^{D+1} d\xi$  et  $N_0 \equiv N(R_0)$ . L'expression précédente décrit

l'évolution de la quantité  $|c|^2$  à une précision de l'ordre de  $\exp(-\pi/(4\sqrt{\epsilon}))$ . Puisque la fonction  $|c(\epsilon)|^2$  tend vers l'unité quand  $\epsilon \rightarrow 0$  et puisque  $\xi_T$  tend vers l'infini sous cette même limite, on voit que pour n'importe quel domaine borné en  $\xi$ , la solution  $\phi$  décroît asymptotiquement en temps vers son cœur auto-similaire  $R_0(\xi)$ . Supposant la masse  $N(\phi_0(\xi, \epsilon))$  *a priori* finie, on peut ensuite utiliser la relation de continuité (10) définie pour  $\xi \gg \xi_T$  en y insérant la solution QAS précédemment estimée: la masse échangée entre le cœur et la queue de la solution est donnée par la relation  $\partial_\tau N(\phi_0(\xi, \epsilon(\tau))) \approx (DK/2)\epsilon_\tau N(\phi_0(\xi))$ , et l'on obtient la relation typique d'un collapse critique

$$\epsilon_\tau = - (4/DK) \exp [ - \pi/(2\sqrt{\epsilon}) ] \quad (13b)$$

dont le membre de droite est fourni par la contribution en  $(2\xi^{D-1} |\phi|^2 \partial_\xi \arg \phi)$  de (10). L'Eq.(13b) admet la solution approchée  $\epsilon(\tau) \approx \pi^2/(4 \ln^2 \tau)$ , soit encore  $a(\tau) \approx \pi/\ln \tau$ , qui tend logarithmiquement vers zéro quand  $\tau$  tend vers l'infini. De ce comportement, on déduit enfin le taux de contraction

$$f(t) = \left[ \frac{2\pi(t^* - t)}{\ln \ln(1/(t^* - t))} \right]^{1/2} \quad (14)$$

récemment confirmé par des calculs numériques.<sup>24</sup>

Comme la solution auto-similaire correspondant au cas surcritique peut être considérée comme une solution particulière parmi l'ensemble des solutions quasiment auto-similaires (i.e.,  $\epsilon(\tau)$  a une limite non nulle quand  $\tau \rightarrow \infty$  en dimension surcritique, contrairement au cas critique caractérisé par  $\epsilon(\tau) \rightarrow 0$  dans cette même limite), la terminologie "quasiment auto-similaire" (QAS), attachée aux solutions  $\phi(\xi, \tau) \equiv \phi_0(\xi, \epsilon(\tau))$  satisfaisant l'approximation  $\partial_\tau \phi = 0$ , sera désormais employée pour les deux configurations dimensionnelles critique et surcritique. Comme abordé ci-dessus, les solutions QAS sont généralement déterminées à l'intérieur de domaines en  $\xi$  qui sont définis en comparant le potentiel quadratique en  $\epsilon \xi^2$  avec celui en  $\epsilon \xi_T^2$  de l'Eq.(8) ; en particulier, comme le potentiel non linéaire en  $|\phi|^{2\sigma}$  peut être négligé dans l'équation (8) pour des  $\xi$  grands, la coordonnée  $\xi_T$  peut être ici regardée dans l'intervalle d'espace  $\xi \gg \text{Max}(\xi_T, 1)$  comme un point singulier complexe ("turning" point) qui tend à l'infini pour  $D = 2/\sigma$ , et reste constant quand  $D > 2/\sigma$ . Dans cet intervalle spatial, la solution QAS (qui correspond à l'estimation première (12)) est donnée par la fonction BKW

$$\phi_T(\xi, \epsilon) = C(\epsilon) \frac{\exp(i\sqrt{\epsilon} \xi^2 / 2)}{\epsilon^{1/4} \xi^{D/2 + i\lambda/2\epsilon^{1/2}}} \left[ \frac{\xi}{|\xi_T|} \right]^{a(D-2/\sigma)/4\epsilon^{1/2}} \quad (15a)$$

où le facteur d'amplitude complexe  $C(\epsilon)$  est défini explicitement par

$$|C(\epsilon)| = |\phi_0(0, \epsilon)| \exp[-\pi\lambda/4\sqrt{\epsilon} + a(d-2/\sigma)(1+2\ln 2)/8\sqrt{\epsilon} - \lambda \arg \xi_T / 2\sqrt{\epsilon}] \quad (15b)$$

$$\arg C(\epsilon) = [\pi\sqrt{\epsilon}(1 - a(d-2/\sigma)/2\sqrt{\epsilon}) + \lambda(2\ln(\frac{|\xi_T|}{2}) - 1) - a(d-2/\sigma)\arg \xi_T] / 4\sqrt{\epsilon} + \arg(\phi_0(0, \epsilon)) \quad (15c)$$

avec  $\arg \xi_T = (1/2)\arctg[a(d-2/\sigma)/2\lambda]$ , de sorte que  $\phi_T(\xi, \epsilon)$  soit correctement normalisée par rapport au cœur de la solution.

En insérant cette solution queue (15) dans l'intégrale  $N(\phi)$  intervenant dans l'Eq.(7), on voit aisément que la contribution de masse correspondant à  $\phi_T(\xi, \epsilon)$  est spatialement divergente puisque l'intégrale  $\int_{\xi_T}^{\xi} |\phi_T(\xi, \epsilon)|^2 \xi^{D-1} d\xi$  se comporte comme  $\ln(\xi/\xi_T)$  pour

un collapse critique, et comme  $(\xi/|\xi_T|)^{D-2/\sigma}$  dans le cas surcritique. A tout temps fini  $\tau$ , cette dernière intégrale tend vers l'infini à la limite  $\xi \rightarrow \infty$ , ce qui est en contradiction avec la finitude de la norme  $L^2 N(\psi)$ . Pour supprimer ces divergences, il est donc nécessaire de retenir la dérivée par rapport au temps  $i\partial_\tau \phi$  de l'Eq.(8) dans la région asymptotique où se développe la queue de la solution.

### 3. Solutions non auto-similaires du problème linéaire non stationnaire

Nous considérons maintenant le problème linéaire non stationnaire (8) défini dans le domaine spatial  $\xi \geq \xi_0 \equiv A |\xi_T|$ , où  $A \gg 1$  désigne une constante d'ordre  $O(1)$ . Dans ce domaine asymptotique, l'équation (8) peut être ré-écrite comme suit

$$i \partial_{\tau'} \phi' + \partial_x^2 \phi' + \frac{1}{4} (x^2 - x_T^2) \phi' = 0 \quad (16)$$

où la fonction  $\phi'(x, \tau')$  est la transformée de  $\phi(\xi, \tau)$  donnée par la relation  $\xi^{(D-1)/2} \phi(\xi, \tau) = \exp(-i \frac{\epsilon \tau}{32 \epsilon \sqrt{\epsilon}} x^2) \phi'(x, \tau')$ ; ici  $x$  et  $\tau'$  sont des nouvelles variables d'espace et de temps définies respectivement par

$$x \equiv \sqrt{2} \epsilon^{1/4} \xi \quad (17a)$$

et

$$\tau' \equiv \int_0^{\tau} 2\sqrt{\epsilon(u)} du = \ln\left(\frac{1}{g(\tau)}\right). \quad (17b)$$

Dans l'Eq.(16), les contributions infinitésimales de l'ordre de  $(|a_\tau|/a^2)$  ont été négligées en vertu de l'inégalité  $x^2 \gg \text{Max}(x_T^2, 1) \gg (|a_\tau|/a^2)$ , et  $x_T \equiv \sqrt{2} \epsilon^{1/4} \xi_T$  correspond au point singulier  $\xi_T$  transformé à l'aide du changement de variable (17a). L'équation d'évolution (16) doit alors être convenablement résolue en imposant les deux conditions aux limites suivantes que doit satisfaire la fonction d'onde  $\phi'(x, \tau')$ :

i)  $\phi'$  est une fonction propre localisée, c'est-à-dire

$$\phi'(x \rightarrow \infty, \tau') = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x \phi'(x \rightarrow \infty, \tau') = 0 \quad (18a)$$

ii) Dans la région  $x \geq x_0 \equiv A |x_T|$ ,  $\phi'$  admet la valeur limite

$$\phi'(x_0(\tau'), \tau') = \phi'_T(x_0(\tau'), \epsilon) \quad (18b)$$

où la fonction type BKW

$$\phi'_T(x, \epsilon) \equiv C'(\epsilon) \{ \exp(i/4) [x^2 - x_T^2 \ln x] \} / \{ \sqrt{x/x_T} \}$$

avec

$$C(\varepsilon) = \phi_0(0, \varepsilon) \exp[x_T^2(-\pi + i(2\ln(x_T/2) - 1))/8 + i\pi/4] (\sqrt{\varepsilon}(x_T)^2/2)^{-1/4},$$

représente la queue  $\phi_T(\xi, \varepsilon)$  (15) de la solution  $\phi(\xi, \tau)$  après application des diverses transformations (17) et  $\phi \rightarrow \phi'$ . Comme le dernier terme en  $(x_T^2/4)$  de (16) constitue une correction infinitésimale dont la dépendance en temps par rapport à  $\tau' \approx 2\sqrt{\varepsilon(\tau)}\tau$  est négligeable dans le domaine asymptotique  $x \gg x_T$ , on peut facilement prendre la transformée de Laplace de l'Eq.(16) pour des conditions initiales arbitraires. Ceci conduit à résoudre l'équation suivante

$$\partial_x^2 \hat{\phi}' + \frac{1}{4}(x^2 - x_T^2) \hat{\phi}' - \omega \hat{\phi}' = 0, \quad (19)$$

équation pour laquelle les définitions  $\hat{\phi}'(x, \omega) \equiv \int_0^\infty e^{-i\omega\tau'} \phi'(x, \tau') d\tau'$  avec  $\phi'(x, \tau') \equiv (1/2\pi) \int_\beta e^{i\omega\tau'} \hat{\phi}'(x, \omega) d\omega$  ont été préalablement choisies ; dans l'intégrale précédente  $\beta$  indique le contour de Laplace pour lequel la variable de Laplace complexe  $\omega$  satisfait la relation de causalité  $\text{Im}(\omega) < 0$ .

Cherchant uniquement des solutions convergentes pour  $x \rightarrow \infty$  de façon à satisfaire la condition (18a), nous trouvons que l'Eq.(19) admet la solution suivante

$$\hat{\phi}'(x, \omega) = \hat{\phi}'_T(x_0, \omega) \frac{E(b, x)}{E(b, x_0)} \quad (20)$$

avec  $b \equiv \omega + (x_T^2/4)$ . Dans cette dernière expression,  $E(b, x)$  représente la solution cylindrique parabolique

$$E(b, x) \equiv \sqrt{2} \exp\left[\frac{\pi b}{4} + \frac{i\pi}{8} + \frac{i\varphi}{2}\right] U(ib, xe^{-i\pi/4})$$

$$U(b, z) \equiv \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} e^{z^2/4} \int_\delta s^{-b - (1/2)} \exp[-zs + (s^2/2)] ds. \quad (21)$$

Dans la solution (21),  $\delta$  désigne le contour dans le plan complexe défini le long du chemin  $-\pi/2 < \arg s < \pi/2$ , et le terme de phase  $\varphi$  est donné par  $\varphi \equiv \arg \Gamma(ib + 1/2)$  où  $\Gamma(x)$  est la fonction d'Euler classique. <sup>25</sup> La transformée de Laplace  $\hat{\phi}'_T(x_0, \omega)$  de la fonction limite  $\phi'(x_0, \tau')$ , qui apparaît dans la solution (20), se calcule en introduisant la dépendance explicite en temps de la borne  $x_0(\tau')$  dans l'Eq.(18b) : en faisant ainsi et en utilisant l'approximation  $\tau' \approx 2\sqrt{\varepsilon}\tau$ , on trouve que  $\hat{\phi}'_T(x_0, \omega)$  est donnée par la fonction

$$\hat{\phi}'_{T(x_0, \omega)} = \frac{2\pi B(\epsilon)}{(i\omega)^{\nu+1}} \quad (22a)$$

avec

$$B(\epsilon) \equiv (\sqrt{i/A})^{-2\text{Re}\nu} [\hat{\phi}'_{T(x_0, \epsilon)}]^{1+2\text{Re}\nu} \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi(2\sqrt{\epsilon})^\nu} \quad (22b)$$

Dans l'expression précédente, la valeur de l'exposant  $\nu$  varie en fonction de la dimension spatiale  $D$  comme suit

$$\nu \equiv -\frac{1}{2} + \frac{i}{\pi} (A^2 - \ln 2A - \frac{1}{2}) \quad \text{pour } D = 2/\sigma \quad (23a)$$

$$\nu \equiv 0 \quad \text{pour } D > 2/\sigma. \quad (23b)$$

En appliquant une analyse BKW sur l'Eq.(20) dans la limite  $x^2 \gg x_T^2$ , nous trouvons que la solution  $\hat{\phi}'(x, \omega)$  se décompose en trois parties distinctes sous la forme  $\hat{\phi}'(x, \omega) = \hat{\phi}'_I(x, \omega) + \hat{\phi}'_{II}(x, \omega) + \hat{\phi}'_{III}(x, \omega)$ , où les fonctions

$$\hat{\phi}'_I(x, \omega) = \hat{\phi}'_{T(x_0, \omega)} \frac{\exp(i/4)[(x^2 - x_0^2) - x_T^2 \ln(x/x_0)]}{\sqrt{x/x_0}} e^{-i\omega \ln(x/x_0)}, \quad (24a)$$

$$\hat{\phi}'_{II}(x, \omega) \approx 2 \hat{\phi}'_{T(x_0, \omega)} \frac{(4\omega)^{1/4} \exp i[(x^2/4) - \omega \ln x]}{\sqrt{x} (2e^{\pi\omega/2} + ie^{-\pi\omega/2})} \quad (24b)$$

et

$$\hat{\phi}'_{III}(x, \omega) = \hat{\phi}'_{T(x_0, \omega)} \frac{2e^{\pi\omega/2 - \omega^{1/2}x} + ie^{-\pi\omega/2 + \omega^{1/2}x}}{2e^{\pi\omega/2 - \omega^{1/2}x_0} + ie^{-\pi\omega/2 + \omega^{1/2}x_0}} \quad (24c)$$

correspondent respectivement aux domaines de Laplace  $|\omega| \ll (x_0^2/4)$ ,  $(x_0^2/4) \ll |\omega| \ll (x^2/4)$ , et  $|\omega| \gg (x^2/4)$ .

La queue asymptotique non auto-similaire de la solution  $\phi(\xi, \tau)$  peut être maintenant calculée en prenant en compte la solution limite (22) dans l'inversion des trois contributions de Laplace (24) de  $\hat{\phi}'(x, \omega)$ , et ce, respectivement par rapport à leur domaine de validité en  $\omega$ . Revenant alors aux variables d'origine  $(\xi, \tau)$ , nous trouvons que  $\phi(\xi, \tau)$  définie pour  $\xi > \xi_0$  s'exprime à son tour sous la forme d'une somme de trois contributions, à savoir  $\phi(\xi, \tau) = \phi_I(\xi, \tau) + \phi_{II}(\xi, \tau) + \phi_{III}(\xi, \tau)$ . La partie principale  $\phi_I(\xi, \tau)$  se lit comme suit

$$\phi_I(\xi, \tau) = \frac{B(\epsilon)\phi_T(\xi, \epsilon)}{(i)^{v+1}\xi_0^{(D-1)/2}\phi_T(\xi_0, \epsilon)} \times \left[ (i\pi)^{1+2Rv} + (2\sqrt{\epsilon} \hat{\tau}/i)^v \{ \gamma(-v, \epsilon \xi_0^{2\hat{\tau}}/i) - e^{2iv\pi} \gamma(-v, i\epsilon \xi_0^{2\hat{\tau}}) \} \right] \quad (25)$$

avec  $\gamma(-v, z) \equiv \int_0^z t^{-(v+1)} e^{-t} dt$ , et

$$\hat{\tau} \equiv \tau - \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} \ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right). \quad (26)$$

Les intégrales restantes  $\phi_{II}$  et  $\phi_{III}$  peuvent être évaluées dans la limite des  $\tau$  grands, i.e.  $\ln(1/g(\tau)) \gg 1$ ; par des intégrations successives par parties, on obtient alors, au premier ordre en puissances de  $\omega \gg 1$ , les estimations suivantes :

$$\phi_{II}(\xi, \tau) = \frac{(2/\sqrt{\epsilon})^{v+1} B(\epsilon) \exp\left[-\frac{\pi\sqrt{\epsilon}\xi_0^2}{4} + i(\sqrt{\epsilon}\xi_0^2/2 + 5\pi/4)\right]}{\xi^{D/2}\xi_0^{2v+3/2}} (\theta(\xi, \tau) + 2\bar{\theta}(\xi, \tau)) \quad (27a)$$

où  $\bar{\theta}$  désigne la fonction complexe conjuguée de  $\theta(\xi, \tau)$  définie par

$$\theta(\xi, \tau) \equiv \left\{ (i\pi/2) - \ln(\mu\xi) \right\}^{-1} \exp(-i/2) [\sqrt{\epsilon}\xi_0^2 \ln(\mu\xi) + \pi(v + 5/4)] \quad (27b)$$

avec  $\mu \equiv \sqrt{2} \epsilon^{1/4} g(\tau)$ , et finalement

$$\phi_{III}(\xi, \tau) \approx \frac{(2/\sqrt{\epsilon})^{v+1} B(\epsilon) \exp(i/2) [v\pi - \sqrt{\epsilon}\xi_0^2 (\ln(1/g(\tau)))]}{[\ln(1/g(\tau))] \xi^{D/2+2v+3/2}}. \quad (28)$$

#### 4. Caractère local des solutions quasiment auto-similaires

Parmi les expressions (25)-(28) écrites ci-dessus, il est particulièrement intéressant de développer sous une forme plus explicite la fonction  $\phi_I(\xi, \tau)$  dans les cas critique et surcritique :

i) Pour un collapse critique, la solution  $\phi_I$  doit être développée en posant  $v$  donné par la relation (23a) ; ce faisant, l'expression (25) s'annule exactement pour  $\xi > \xi_{\max}$ , où  $\xi_{\max}$  désigne le rayon limite - "cut-off" - défini par

$$\xi_{\max} \equiv \frac{\xi_0(\epsilon)}{g(\tau)}. \quad (29)$$

Regardant maintenant la limite opposée  $\xi < \xi_{\max}$ , nous trouvons, en nous servant de la relation  $\Gamma(v+1)\Gamma(-v) = -\pi/\sin(v\pi)$ , que la solution (25) se simplifie sous la forme

$$\phi_I(\xi, \tau) \approx \phi_T(\xi, \epsilon) \left[ \frac{\tau}{\xi} \right]^{-v} H(\xi_{\max} - \xi) \quad (30a)$$

dans la limite  $\xi \ll \xi_{\max}$ . Dans ce dernier intervalle, l'expression (30a) n'est rien d'autre que l'exacte transformée inverse de Laplace de la fonction (24a). La dépendance en temps de  $\phi_I$  dans (30a) provient de l'estimation au premier ordre  $\epsilon_\tau = -\epsilon/\tau \approx O(-1/\tau)$  découlant de la limite adiabatique imposée dans l'évaluation (17b) de  $\tau' \approx 2\sqrt{\epsilon} \tau$  ; cette dépendance en temps peut toutefois être affinée en utilisant la relation  $\exp[-\pi\lambda/(2\sqrt{\epsilon})] \approx -\epsilon_\tau \approx 1/(\tau \ln^3 \tau)$  issue de la relation (13b), ce qui fournit une correction logarithmique à l'estimation précédente. En prenant en compte cette correction, une intégration directe de  $\hat{\phi}'_I$  donnée par (24a) conduit à la solution

$$\phi_I(\xi, \tau) \approx \phi_T(\xi, \tau) \left[ \frac{\tau \ln^3 \tau}{\xi \ln^3 \xi} \right]^{-v} H(\xi_{\max} - \xi) \quad (30b)$$

dont Malkin avait déjà obtenu une forme analogue (cf. Réf. [22]), prolongée de façon erronée dans la région  $\xi > \xi_{\max}$ . Dans les expressions (30),  $H(x)$  représente simplement la fonction de Heaviside définie par  $H(x > 0) = 1$  et  $H(x < 0) = 0$ .

Par ailleurs, à la limite  $\xi \rightarrow \xi_{\max}$ , le comportement de  $\phi_I(\xi, \tau)$  est donné par

$$\phi_I(\xi, \tau) \approx (\Gamma(v+1)\sin(v\pi/2)/v\pi)(\epsilon\xi_0^2)^{-v} [\exp(-v\pi/(2\sqrt{\epsilon}))] \phi_T(\xi, \epsilon), \quad (31)$$

qui reste de l'ordre de  $(g(\tau))^{D/2}$  quand  $\xi$  atteint la borne  $\xi_{\max}$ .

ii) En posant  $\nu = 0$  dans l'expression (25), la solution correspondant à un collapse surcritique se simplifie sous la forme  $\phi_I(\xi, \tau) = (1/2\pi)\phi_T(\xi, \tau)[\pi + 2\text{Si}(\epsilon\xi_0^{2\wedge}\tau)]$  où  $\text{Si}(x)$  représente la fonction sinus intégral  $\text{Si}(x) \equiv \int_0^x (1/t)\text{sint} dt$ . Passant aux limites précédemment étudiées, cette dernière solution se réduit à

$$\phi_I(\xi, \tau) = \phi_T(\xi, \tau) H(\xi_{\max} - \xi) \quad (32)$$

quand  $\xi$  appartient à l'intervalle  $\xi < e^{-2/(\epsilon\xi_0^2)} \xi_{\max}$ , c'est-à-dire pour  $\xi \ll \xi_{\max}$ . Notons à ce stade que l'expression (32) n'est rien d'autre que la solution (30) définie pour un collapse critique, dans laquelle l'exposant  $\nu$  a été posé égal à zéro. Quand  $\xi$  est suffisamment proche de la borne  $\xi_{\max}$ , la solution  $\phi_I$  se comporte comme

$$\phi_I(\xi, \tau) \approx (1/2)\phi_T(\xi, \tau) [1 + (2/\pi)\epsilon\xi_0^{2\wedge}\tau], \quad (33)$$

ce qui signifie que même dans cette limite,  $\phi_I(\xi, \tau)$  reste de l'ordre de  $\phi_T(\xi, \tau)$ .

En introduisant maintenant les solutions (27), (28), et (30), dans l'intégrale  $M\{\phi\} \equiv \int_{\xi_0}^{\xi_{\max}} |\phi|^2 \xi^{D-1} d\xi$ , nous pouvons calculer leurs contributions respectives dans la masse transférée dans le domaine asymptotique  $\xi_0 < \xi < \xi_{\max}$ . Quelques intégrations directes conduisent alors aux estimations suivantes

$$M\{\phi_I\} \approx [\sqrt{2}\ln(1/g(\nu))]^{4\text{Rev}} [A/g(\tau)]^{D-2/\sigma} \quad (34a)$$

$$M\{\phi_{II}\} \approx [2\sqrt{\epsilon}/(\ln(1/\sqrt{\epsilon}))](\tau \ln^3 \tau)^{2A^2\text{Rev}} \quad (34b)$$

$$M\{\phi_{III}\} \approx [\sqrt{\epsilon} \ln^{-2}(1/g(\tau))] \quad (34c)$$

qui satisfont les inégalités  $M\{\phi_{III}\} \ll M\{\phi_I\}$  dans le cas critique ( $\epsilon \ll 1$ ), et  $M\{\phi_{III}\} \ll M\{\phi_{II}\} \ll M\{\phi_I\}$  dans le cas surcritique ( $\epsilon = \text{const.}$ ), sous la limite  $g(\tau) \ll 1$ . Il découle de ces inégalités que la fonction  $\phi_I(\xi, \tau)$  est prépondérante dans l'intervalle d'espace  $\xi_T \ll \xi \ll \xi_{\max}$  sur les autres parties résiduelles  $\phi_{II}(\xi, \tau)$  and  $\phi_{III}(\xi, \tau)$ . Comme le comportement (30) a été défini dans la limite  $\xi \ll \xi_{\max}$ , le facteur correctif dépendant du temps  $[\tau \ln^3 \tau / (\tau \ln^3 \tau)]^{-\nu}$  reste toujours proche de l'unité, de sorte que  $\phi_I(\xi, \tau)$  se réduit finalement à la solution QAS (15) dans cet intervalle. *En conséquence, le comportement asymptotique de la solution complète  $\phi(\xi, \tau)$  est donné par son*

approximation QAS aussi longtemps que  $\xi$  appartient au domaine  $\xi \ll \xi_{max}$ . Dans l'intervalle complémentaire  $\xi \gg \xi_{max}$ ,  $\phi(\xi, \tau)$  est définie par la fonction  $\phi(\xi, \tau) = \phi_{II}(\xi, \tau) + \phi_{III}(\xi, \tau)$ , dont la dépendance en  $\xi$  assure la convergence  $L^2$  de toute la solution  $\phi$  pour tout temps  $\tau$ , ce qui résout le problème de divergence spatiale qui caractérise les solutions QAS (voir figure II).

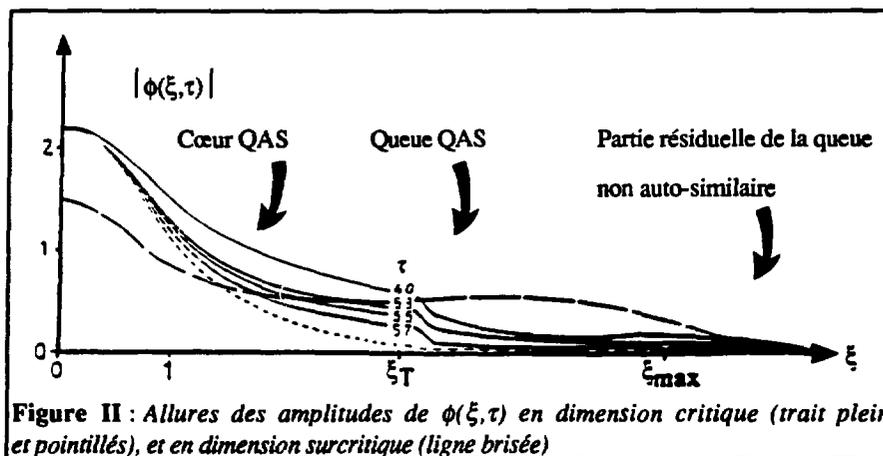


Figure II : Allures des amplitudes de  $\phi(\xi, \tau)$  en dimension critique (trait plein et pointillés), et en dimension surcritique (ligne brisée)

En termes de masses initiales, l'analyse précédente montre qu'une densité de masse donnée, initialement localisée près de l'origine, ne peut pas se propager au-delà de la borne  $\xi_{max}$ . Par ailleurs, puisque l'on dispose de l'inégalité (facilement vérifiable)

$$\int_{\xi_{max}}^{\infty} |\phi|^2 \xi^{D-1} d\xi \ll \int_0^{\xi_{max}} |\phi|^2 \xi^{D-1} d\xi, \quad (35)$$

la masse totale  $N(\phi)$  est principalement donnée par l'intégrale  $\int_0^{\xi_{max}} |\phi|^2 \xi^{D-1} d\xi$ . De l'expression (34a) de  $M(\phi_I)$ , on peut alors déduire les résultats suivants :

i) En dimension critique  $D = 2/\sigma$ ,  $M(\phi_I)$  est négligeable devant la masse centrale  $N(\phi_0) \equiv \int_0^{\xi_0} |\phi_0|^2 \xi^{D-1} d\xi$ , de sorte que d'une part, l'hypothèse  $N(\phi_0) < \infty$  posée *a priori* antérieurement (voir section 2) est maintenant justifiée *a posteriori*, et que d'autre part, la masse totale  $N(\psi) \equiv N(\phi)$  reste localisée dans la région du cœur  $\xi \ll \xi_T$ .

Revenant à la fonction  $\psi(r,t)$ , les coordonnées  $\xi_T$  et  $\xi_{\max}$  se transforiment réciproquement en  $r_T(t) = (2/\sqrt{\pi})[(t^* - t)\ln\ln(1/(t^* - t))]^{1/2}$  et  $r_{\max}(t) = (2A/\pi)\ln\ln(1/(t^* - t))$ , qui tendent respectivement vers zéro et vers l'infini dans la limite asymptotique  $t \rightarrow t^*$ . Cette évolution temporelle de  $r_{\max}(t)$  peut être comprise comme correspondant au processus physique suivant : la décroissance locale du cœur central non linéaire de  $\phi(\xi, \tau) \approx c(\epsilon)R_0(\xi)$  vers l'état stationnaire  $R_0(\xi)$  (avec  $|c(\epsilon)| \gtrsim 1$  à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , comme indiqué par la relation (13a)) induit un transfert de masse uniforme dans la queue de la solution, dont découle le comportement  $r_{\max}(t) \rightarrow \infty$ .

ii) *En dimension surcritique*  $D > 2/\sigma$ ,  $\xi_T$  reste simplement constant et  $\xi_{\max}(t) = (A|\xi_T|/\sqrt{2})(t^* - t)^{-1/2}$  tend vers l'infini pour  $t \rightarrow t^*$  ; ainsi, le rayon  $r_T(t) = \xi_T\sqrt{2(t^* - t)}$  tend vers zéro dans cette même limite, tandis que  $r_{\max} = A|\xi_T| \gg 1$  demeure constant. Comme  $M\{\phi_I\}$  diverge à l'infini selon  $(g(\tau))^{2/\sigma-D}$  quand  $g(\tau)$  tend vers zéro, et puisque  $N\{\phi_0\}$  est d'ordre  $O(1)$ , on a  $M\{\phi_I\} \gg N\{\phi_0\}$ , et la masse totale  $N\{\psi\} \equiv (g(\tau))^{D-2/\sigma}N\{\phi\} \approx (g(\tau))^{D-2/\sigma}M\{\phi_I\}$  se confine asymptotiquement dans la région de la queue de la solution  $\xi_T < \xi < \xi_{\max}$ . Cette dernière propriété confirme donc l'aspect dissipatif de la masse totale d'un collapse faible, comme attendu dans l'introduction.

## 5. Conclusion

En résolvant le problème linéaire et non stationnaire (16) associé à l'équation de Schrödinger non linéaire (8), nous avons montré que les solutions collapsantes à symétrie radiale de l'équation (1) ne sont auto-similaires qu'à l'intérieur d'un domaine d'espace borné supérieurement par le rayon limite  $\xi_{\max}(\tau)$ . Cette nouvelle propriété des solutions collapsantes vient d'être démontrée ici pour des collapsés critique et surcritique. En ce qui concerne la solution singulière  $\psi(r,t)$  décrite par NSE (1), cela revient à dire que mis à part le cœur collapsant situé au voisinage de l'origine  $r = 0$ , il existe aussi une queue résiduelle dont l'extension spatiale  $[r_T(t), r_{\max}(t)]$  croît quand  $t$  tend vers le moment du collapse  $t^*$ .

En conclusion, outre la méthode directe développée en section 2 pour déterminer les divers taux de contraction  $f(t)$  - dont la correction doublement logarithmique caractérisant le cas critique (14) a fait l'objet de nombreux travaux pendant ces sept dernières années (Réfs. [17] à [24]) - le résultat le plus important de cette analyse réside dans la découverte de cette *nouvelle* propriété, selon laquelle une solution collapsante ne peut converger vers sa limite exactement auto-similaire que dans un intervalle spatial borné  $\xi \ll \xi_{\max}$ .

### Références

1. Chiao, R.Y., Garmire, E., & Townes, C.H., Phys. Rev. Lett. 13, 479 (1964).
2. Zakharov, V.E., Zh. Eksp. Teor. Fiz. 62, 1745 (1972) [Sov. Phys. JETP 35, 908 (1972)].
3. Konno, K. & Suzuki, H., Physica Scripta 20, 382 (1979).
4. Goldman, M.V. & Nicholson, D.R., Phys. Rev. Lett. 41, 406 (1978).
5. Rasmussen, J.J. & Rypdal K., Physica Scripta 33, 481 (1986).
6. Goldman, M.V., Rev. Mod. Phys. 56, 709 (1984).
7. Dyachenko, S., Newell, A.C., Pushkarev, A. & Zakharov, V.E., Physica D 57, 96 (1992).
8. Glassey, R.T., J. Math. Phys. 18, 1794 (1977) ; voir aussi Strauss, W.A., dans : "Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations" (de la Penha & Medeiros, Eds.), (North-Holland, 1978) p. 452.
9. Rypdal, K. & Rasmussen, J.J., Physica Scripta 33, 498 (1986).
10. Zakharov, V.E., Kuznetsov, E.A., & Musher, S.L., Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 41, 125 (1985) [JETP Lett. 41, 154 (1985)].
11. Pelletier, G., Physica D 27, 187 (1987).
12. Zakharov, V.E. & Kuznetsov, E.A., Zh. Eksp. Teor. Fiz. 91, 1310 (1986) [Sov. Phys. JETP 64, 773 (1986)].
13. Zakharov, V.E., Usp. Fiz. Nauk. 155, 529 (1988) [Sov. Phys. Usp. 31, 672 (1988)].
14. Malkin, V.M. & Shapiro, E.G., Zh. Eksp. Teor. Fiz. 97, 183 (1990) [Sov. Phys. JETP 70, 102 (1990)].
15. Vlasov, S.N., Piskunova, L.V., & Talanov, V.I., Zh. Eksp. Teor. Fiz. 95, 1945 (1989) [Sov. Phys. JETP 68, 1125 (1989)].
16. Newman, D.L., Robinson, P.A., & Goldman, M.V., Phys. Rev. Lett. 62, 2132 (1989).

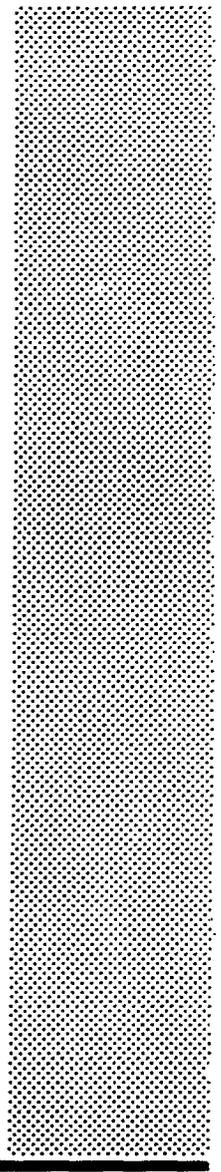
17. LeMesurier, B.J., Papanicolaou, G.C., Sulem, C., & Sulem, P.L., *Physica D* 31, 78 (1988) ; *Physica D* 32, 210 (1988).
18. Kosmatov, N.E., Zakharov, V.E., & Shvets, V.F., *Physica D* 52, 16 (1991).
19. Bergé, L. & Pesme, D., *Phys. Lett. A* 166, 116 (1992).
20. Fraiman, G.M., *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 88, 390 (1985) [*Sov. Phys. JETP* 61, 228 (1985)].
21. Landman, M.J., Papanicolaou, G.C., Sulem, C., & Sulem, P.L., *Phys. Rev. A* 38, 3837 (1988).
22. Malkin, V.M., *Phys. Lett. A* 151, 285 (1990).
23. Bergé, L. & Pesme, D., "Non self-similar collapsing solutions of the nonlinear Schrödinger equation at the critical dimension", soumis pour publication dans *Phys. Rev. Lett.* (1992).
24. Landman, M.J., Papanicolaou, G.C., Sulem, C., Sulem, P.L., & Wang, X.P., *Physica D* 47, 393 (1991).
25. dans "Handbook of Mathematical Functions", (Abramovitz M. & Stegun I.A., Eds.), (Dover Publ. Inc., N.Y. (1972)), p. 686.

Achévé d'imprimer  
par  
le CEA, Service de Documentation et d'Édition Multimédia  
Octobre 1992  
DEPOT LÉGAL  
4ème trimestre 1992

ISSN 0429 - 3460

*La diffusion des rapports et bibliographies du Commissariat à l'Énergie Atomique est assurée par le Service de Documentation et d'Édition Multimédia, CE-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cédex, (France)*

*Reports and bibliographies of the Commissariat à l'Énergie Atomique are available from the Service de Documentation et d'Édition Multimédia, CE-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cédex, (France)*



3460

rée par  
(rance)  
om the  
(rance)

*Édité par  
le Service de Documentation  
et d'Édition Multimédia  
Centre d'Études de Saclay  
91191 GIF-sur-YVETTE Cédex (France)*

