

**JAERI-M
92-211**

**自由電子レーザー用偏向磁石系の
輸送行列の代数的性質**

1993年1月

高雄 勝

**日本原子力研究所
Japan Atomic Energy Research Institute**

JAERI-Mレポータは、日本原子力研究所が不定期に公開している研究報告書です。入手の問い合わせは、日本原子力研究所技術情報部情報資料課 〒319-11茨城県那珂郡東海村において、お申しこしください。なお、このほか財団法人原子力弘済会資料センター 〒319-11茨城県那珂郡東海村日本原子力研究所内で複写による実費頒布をおこなっております。

JAERI-M reports are issued irregularly.

Inquiries about availability of the reports should be addressed to Information Division, Department of Technical Information, Japan Atomic Energy Research Institute, Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken 319-11, Japan.

© Japan Atomic Energy Research Institute, 1992

編集兼発行 日本原子力研究所
印刷 原子力資料サービス

自由電子レーザー用偏向磁石系の輸送行列の代数的性質

日本原子力研究所東海研究所物理部

高雄 勝

(1992年12月8日受理)

自由電子レーザー (Free Electron Laser - FEL) の発振を励起するには、高いピーク電流と低いエミッタンスを有する高品位電子ビームが必要とされる。そこで、FELにおいて電子ビーム輸送系としては、ビームの質を損なわないようなものでなければならない。この為、ビームが電子のエネルギー差によって広がることのないよう、ビーム輸送系はエネルギー広がりに対し収色性 (achromaticity) と等時制 (isochronicity) を満足する必要がある。ここでは、これらの条件を満たすFEL用の電子ビーム輸送系を設計する指針を明らかにする目的で、エネルギー収差の原因となる偏向磁石系に関してその輸送行列の代数的性質について調べた。

**Properties of the Transfer Matrices of Deflecting Magnet Systems
for Free Electron Laser**

Masaru TAKAO

**Department of Physics
Tokai Research Establishment
Japan Atomic Energy Research Institute
Tokai-mura, Naka-gun, Ibaraki-ken**

(Received December 8, 1992)

The oscillation of the free electron laser (FEL) requires the high current and low emittance electron beam. The beam transport system should be achromatic and isochronous to preserve the brightness and the emittance of the electron beam. In this paper we clarify the algebraic properties of the transfer matrices of the magnetic deflection system, which is a key component in the beam transport line.

**Keywords: Free Electron Laser (FEL), Deflecting Magnet System,
Achromaticity, Isochronicity**

目 次

1. 序 論	1
2. 行列表現	1
2.1 輸送行列	1
2.2 輸送行列の対称性	3
3. 偏向磁石系の性質	4
3.1 2 偏向磁石系	5
3.2 3 偏向磁石系	7
4. 結 論	10
謝 辞	12
参考文献	12

Contents

1. Introduction	1
2. Matrix Representation	1
2.1 Transfer Matrix	1
2.2 Symmetry of Transfer Matrix	3
3. Properties of Deflecting Magnet Systems	4
3.1 Double Bend Achromat	5
3.2 Triple Bend Achromat	7
4. Conclusion	10
Acknowledgement	12
Reference	12

1. 序 論

FEL は、加速された電子が周期的に極性が反転する磁石 (アンジュレータ) を通過する際光子と相互作用してレーザー発振を行うものである。この発振を励起する為に必要とされる電子ビームは、高電流かつ低エミッタンスである高輝度ビームであることが要求される。さて、電子ビームを偏向磁石で水平方向に曲げようとするとき各電子のエネルギーにより曲率半径が異なることが原因となり、電子ビームが水平方向および進行(縦)方向に広がることがある。偏向磁石系を通過後の水平変位がエネルギーに依存しなければ、偏向磁石によってビームが広がることなく、この系は収色性 (achromaticity) があると言う。同様に、縦方向にビームが伸びることがない磁石系を、等時性 (isochronicity) があると呼ぶ。結局、FEL の電子ビーム輸送系としては、ビームが広がって品質を劣化しないよう収色性と等時性を保有するものであることが望まれる。

我々の FEL では電子はアンジュレータに 180° 曲げて入射される事になるが、この 180° 湾曲部を achromatic かつ isochronous となるよう設計する必要がある。これを実現する偏向磁石系の性質を代数的に調べたので、この結果について報告する。

ビームを構成する電子の運動は、ビームの中心軌道からの変位が小さい時、その一次までで十分近似でき、線形変換即ち行列を用いて表すことができる。この行列は輸送行列 (transfer matrix) と呼ばれ、電子ビーム輸送系構成要素 (自由飛行空間、偏向磁石、四重極磁石等) に対応する輸送行列を順次乗することにより全系の輸送行列が導かれる。この輸送行列の収束性および等時性を調べるにより、電子ビーム輸送系の偏向磁石系のパラメータが決定される。通常、この磁石系のパラメータは TRANSPORT [1] や TRACE [2] などの計算機コードで決定されるが、これらのプログラムは最適値が解析の初期値の近傍にない時収束しにくい為、パラメータを決定することが困難である。そこで、輸送行列の収束性および等時性条件を直接代数的に解き、磁石系のパラメータを決めようと言うことがこの報告の目的である。但し、便宜上四重極磁石に対して薄いレンズ近似を用いたので、これらのパラメータを大まかにしか決まらない。それでも、ここで得られた結果を出発点にすることにより、上の計算機コードで正確な磁石系の値を簡便に求められるようになる。

§2 では、ここでの研究の基礎となる電子ビーム軌道の行列表現について簡単に紹介する。§3 では、これを基に偏向磁石系の収色性と等時性について詳細に調べたのでこの結果について述べる。

2. 行列表現

2.1 輸送行列

ビーム中の電子の運動は、6 個の位相空間の座標 $X = (x, x', y, y', \ell, \delta)$ で記述される [1, 3]。ここで、 x, y, ℓ は中心座標からの変位、 x', y' は横方向運動の傾き、 δ はエネルギー広がり $\Delta p/p$ である。中心軌道上のある位置 s_0 において位相空間内の位置 X_0 から

出発した電子の s_1 における位相空間座標 X_1 は、一次までで、

$$X_1 = RX_0 \tag{1}$$

と線形変換で与えられる。ここで、 R はビーム輸送を記述する 6×6 の行列である。以下で、我々の電子ビーム輸送系に必要とされる構成要素、即ち自由飛行空間、収束用四重極磁石、一様偏向磁石に対する行列を与えておく [3]。

1. 自由飛行空間

電磁場のない空間の電子軌道は次なる行列で表される。

$$D[L] = \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L/\gamma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

但し、 $L = s_1 - s_0$ は中心軌道上での飛行距離、 γ は Lorentz 因子である。

2. 四重極磁石

水平方向に収束力を持つ四重極磁石の輸送行列は、

$$Q[k, L] = \begin{pmatrix} \cos kL & k^{-1} \sin kL & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k \sin kL & \cos kL & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh kL & k^{-1} \sinh kL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \sinh kL & \cosh kL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L/\gamma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで、 L は四重極磁石の長さ、 k はその強度 $k^2 = (1/B_y \rho)(\partial B_y / \partial x)$ である (ρ は、曲率半径)。垂直方向に収束力を持つ四重極磁石に対しては x, y の行列要素を入れ換えてやればよい。薄いレンズの近似 ($kL = \text{constant}$ にして $L \rightarrow 0$ とする) に対しては、輸送行列は

$$Q[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/f & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/f & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。但し、 f は四重極磁石の焦点距離で、 $f > 0$ なら四重極磁石は水平 (x) 方向に対して収束レンズ、 $f < 0$ なら発散レンズとして働く。

3. 一様偏向磁石

中心軌道の曲率半径を ρ 、回転角を α とすれば、偏向磁石の輸送行列は、

$$B[\rho, \alpha] = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \rho \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & \rho(1 - \cos \alpha) \\ -\rho^{-1} \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & -\rho(1 - \cos \alpha) & 0 & 0 & 1 & \gamma^{-2}L - \rho(\alpha - \sin \alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

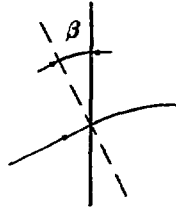


図 1: 一樣偏向磁石の端面と電子軌道に対する垂直面のなす角を β とする。左半平面は自由空間、右半平面は一樣偏向磁場としてある。

ここで、 $L = \rho\alpha$ である。 $B_{5,6}$ 成分の第 1 項は自由飛行による自然な広がりに対応し、第 2 項は偏向による収束効果である。

図 1 に示すように、磁石の端面が回転している時、変位により磁場の影響が異なり、端面で収束力を受けることになる。この端面の収束力に対する影響は次の行列で与えられる。

$$E[\rho, \beta] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho^{-1} \tan \beta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^{-1} \tan \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで、 ρ は偏向磁石の曲率半径、 β は中心軌道に対する垂直面と偏向磁石の端面の成す角度である。ここで、端面の回転角 β は正の時、水平方向において発散となるよう定義してある。

2.2 輸送行列の対称性

輸送行列は、ビーム運動学の要請から鏡対称性や点对称性を持つことが望まれることがある。これらの対称性を利用すると輸送行列の計算を簡単に行うことができる [4]。

我々の輸送系の偏向磁石系が有する鏡対称性の場合を考えよう。対称面の座標を X_0 、この面を挟んで対称点の座標を X_1 、 X_2 とする。点 0 から点 1 への変換を

$$X_1 = R_S X_0, \tag{2}$$

その鏡像である点 0 から点 2 への transformation を

$$X_2 = R_M X_0 \quad (3)$$

とする。時間反転対称性を利用すると元の変換 R_S とその鏡像変換 R_M を関係付けることができる [4]。(2) 式で記述される系の時間反転の下での軌道は、逆方向に追跡することに依って次式のように得られる。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ -x'_0 \\ y_0 \\ -y'_0 \\ -\ell_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix} = R_T \begin{pmatrix} x_1 \\ -x'_1 \\ y_1 \\ -y'_1 \\ -\ell_1 \\ \delta_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで、 x' 、 y' 、 ℓ は運動の方向が反転したので符号が変わっている。明らかに、時間反転系での点 1 から点 0 への軌道は鏡対称系での点 0 から点 2 への軌道に等しい、即ち $R_M = R_T$ である。さて、

$$\begin{pmatrix} x_i \\ -x'_i \\ y_i \\ -y'_i \\ -\ell_i \\ \delta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x'_i \\ y_i \\ y'_i \\ \ell_i \\ \delta_i \end{pmatrix} \quad (i = 0, 1, 2) \quad (5)$$

と書けること考慮して、(2) 式に代入すると、元の変換 R_S とその鏡像変換 R_M の間に次ぎなる関係を得る。

$$R_M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_S^{-1} \quad (6)$$

結局、鏡対称性のある系では、全行程の半分に当たる輸送行列 R_S を求めてやれば残り半分の鏡像に対応する輸送行列 R_M は求まることになり、扱う電子ビームの光学系の構成要素の数を半減できる。

3. 偏向磁石系の性質

前節で与えられた形式を用いて、我々の FEL に必要とされる偏向磁石系について調べよう。

3.1 2 偏向磁石系

2 個の偏向磁石からなる電子ビーム輸送系は、どのような磁石の配置であれば収色性と等時性を実現できるか調べよう。

先ず簡単の為、図 2 に示されている一つの四重極磁石ペアが偏向電磁石間に配置されている場合から始める。(一つの四重極磁石の場合は四重極磁石ペア間の距離 d_2 を 0 に

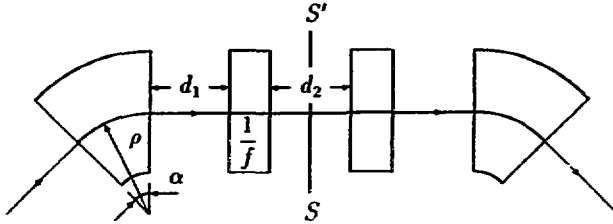


図 2: 二つの磁石偏向磁石と一つの四重極磁石ペアからなる電子ビーム輸送系。ここで、矢印のある曲線は中心軌道を表し、 ρ は偏向磁石の曲率半径、 α はその回転角、 f は四重極磁石の焦点距離、 d_1 および d_2 は磁石間の距離である。

してやればよい。) 2.1 節から明らかなように、輸送行列において垂直成分 y, y' は他の成分と直交するので、収色性や等時性を調べる為には、水平と縦成分からなる 4×4 行列を考えてやればよい。この時、最初の偏向磁石から対称面までの輸送行列は、

$$R_S = D[d_2/2] Q[f] D[d_1] B[\rho, \alpha]$$

$$= \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{d_2}{2f}\right) \left(\cos \alpha - \frac{d_1}{\rho} \sin \alpha\right) - \frac{d_2}{2\rho} \sin \alpha & \left(1 - \frac{d_2}{2f}\right) (d_1 \cos \alpha + \rho \sin \alpha) + \frac{d_2}{2} \cos \alpha & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sin \alpha - \frac{1}{f} \left(\cos \alpha - \frac{d_1}{\rho} \sin \alpha\right) & \cos \alpha - \frac{1}{f} (d_1 \cos \alpha + \rho \sin \alpha) & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & -\rho(1 - \cos \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{d_2}{2f}\right) \left\{ \rho(1 - \cos \alpha) + d_1 \sin \alpha \right\} + \frac{d_2}{2} \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha - \frac{1}{f} \left\{ \rho(1 - \cos \alpha) + d_1 \sin \alpha \right\} & 0 & 0 \\ 1 & \gamma^{-2} \left(d_1 + \frac{d_2}{2} + \rho \alpha \right) - \rho(\alpha - \sin \alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

となる。

系が achromatic になるには、対称性から任意の運動量偏差を持つ電子軌道が垂直に対称面 SS' に入射すればよい。この条件は、対称面での水平方向の勾配 x' が $\Delta p/p$ に依存しないということになり、行列の言葉では

$$R_{S,26} = 0 \quad (8)$$

と表現される。(8) 式から、与えられた条件に従って四重極磁石の焦点距離が定まり

$$\frac{1}{f} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\rho \sin \frac{\alpha}{2} + d_1 \cos \frac{\alpha}{2}} \quad (9)$$

となる。 $0 < \alpha < \pi/2$ (逆に曲げる時、即ち $\pi/2 < \alpha < 0$ の時、為には $\rho < 0$ である) なので (9) 式から明かな様に四重極磁石は共に水平方向について収束レンズであることが

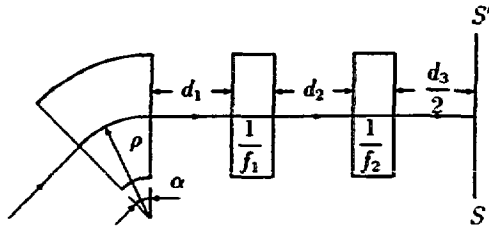


図 3: 4 個の四重極磁石を含む 2 偏向磁石系。鏡対称面 SS' より半分の部分が表示されている。

分かる。さて、偏向磁石は水平方向に対しては収束レンズとして働くが、垂直方向に対して自由空間と同じである。結局、四重極磁石ペアによる偏向磁石系を achromatic にすると、垂直方向に収束力を与えられない。(9) 式でもう一つ重要な点は四重極磁石の焦点距離は対称軸から四重極磁石までの距離 d_2 に依らないと言うことである。これは、任意の運動量偏差を持つ電子軌道が対称面に垂直に入射する条件からの当然の帰結である。

対称面から後半の輸送行列 R_M は (6) 式から簡単にもとまり、全系の輸送行列 R は

$$R = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma^{-2}(2d_1 + d_2 + 2\rho\alpha) - 2\rho(\alpha - \sin\alpha) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

と、nondispersive ($R_{16} = R_{26} = 0$) となる。(但し、記号 * は零でない成分を表す。) ここで得られる重要な結論は、次の 2 点である。

1. 2 偏向磁石系では、等時性に関与する成分 R_{56} は

$$R_{56} = \gamma^{-2}(2d_1 + d_2 + \rho\alpha) - 2\rho(\alpha - \sin\alpha)$$

と偏向電磁石と自由空間の等時性成分の和となり、エネルギーが大きい時 ($\gamma \gg 1$) 系を等時性を持つようにする事 ($R_{56} \Rightarrow 0$) は難しい。

2. 2 偏向磁石系では、(9) 式から、系が収束的である時四重極磁石ダブレットでは垂直

方向に収束力を与える事ができない。

垂直方向に収束力を与える事は、四重極磁石を4個にしてやると実現できる。図3に対応する輸送行列は

$$R_S = D[d_3/2] Q[f_2] D[d_2] Q[f_1] D[d_1] B[\rho, \alpha] \quad (11)$$

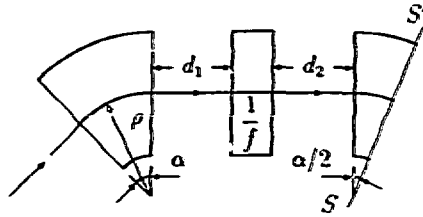


図4: 1個の四重極磁石を含む3偏向磁石系。鏡対称面は2番目の偏向磁石の中央にある。

で与えられる。四重極磁石ペアの場合と同様にして、収色性の条件から四重極磁石の焦点距離 f_1 、 f_2 に対する条件を求めると、

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2 - d_2} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\rho \sin \frac{\alpha}{2} + d_1 \cos \frac{\alpha}{2}} \quad (12)$$

なる関係式が得られる。即ち、 d_1 、 d_2 を調節することにより、 f_1 、 f_2 を望みの値にすることができ、水平・垂直両方向に収束力を持たせられる。この関係式にも対称面を跨ぐ自由飛行程 d_3 が現れないことに注目せよ。又、四個の四重極磁石を含む場合も2偏向磁石系では、等時性成分 R_{56} は

$$R_{56} = \gamma^{-2} (2d_1 + 2d_2 + d_3 + 2\rho\alpha) - 2\rho(\alpha - \sin \alpha) \quad (13)$$

となり、これを消すことは實際上困難である。

3.2 3偏向磁石系

以上までより、現実的に achromatic 且つ isochronous にする為には偏向磁石は最低3個必要であることが分かった。この場合について収色性および等時性について調べよう。図4に対応する磁石系の輸送行列は

$$R_S = B[\rho, \alpha/2] D[d_2] Q[f] D[d_1] B[\rho, \alpha] \quad (14)$$

で与えられる。この場合、収色性の条件から四重極磁石の焦点距離 f を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{\rho(1+2\cos\alpha) - (d_1+d_2)\sin\alpha}{2\left(\rho\sin\frac{\alpha}{2} + d_1\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\rho\cos\frac{\alpha}{2} - d_2\sin\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\rho\sin\frac{\alpha}{2} + d_1\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\rho\cos\alpha - d_1\sin\alpha}{2\left(\rho\sin\frac{\alpha}{2} + d_1\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\rho\cos\frac{\alpha}{2} - d_2\sin\frac{\alpha}{2}\right)} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。右辺第2行において、第2項は2偏向磁石の場合からのズレを表す。

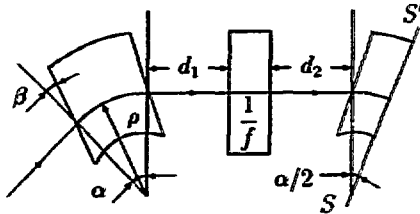


図5: 偏向磁石の端面が電子の中心軌道に対して角度 β を持っている偏向磁石系。

この時、輸送行列の等時性成分 R_{56} は

$$\begin{aligned} R_{56} &= \gamma^{-2}(2d_1 + 2d_2 + 3\rho\alpha) - 3\rho(\alpha - \sin\alpha) \\ &\quad \frac{2\rho\sin^2\frac{\alpha}{2}\left\{\rho\sin\frac{\alpha}{2} + (2d_1 - d_2)\cos\frac{\alpha}{2}\right\}}{\rho\cos\frac{\alpha}{2} - d_2\sin\frac{\alpha}{2}} \end{aligned} \quad (16)$$

となる。右辺第3項は矢張り2偏向磁石系の場合からのズレによる効果に対応する。第3項のおかげで、magnet 間の距離 d_1, d_2 等を調節する事により、 $R_{56} = 0$ とすることができる。

以上まとめると、achromatic かつ isochronous な偏向磁石系を設計する為には3個の偏向磁石を必要とする。また、垂直・水平両方向に収束力を与える為には偏向磁石間に置く四重極磁石は3個以上が望ましい。但し、今までは電子軌道は、一様偏向磁場に垂直入射する場合のみを考えているが、斜め入射にして端面による収束力を利用してやれば四重極磁石が1個でも垂直方向に収束力を持たせつつ、系を achromatic にできる。以下でこれを示す。

図5の様に偏向磁石の端面が傾いている場合に対応する輸送行列は

$$R_S = B[\rho, \alpha/2] E[\rho, \beta] D[d_2] Q[f_1] D[d_1] E[\rho, \beta] B[\rho, \alpha] \quad (17)$$

で与えられる。但し、ここで偏向磁石系の外側の端面による収束は今の考察には影響しないので含まれていない。収束性の条件から四重極磁石の焦点距離を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{\rho\{1+2\cos\alpha+2\cos(\alpha-2\beta)+\cos 2\beta\} - 2(d_1+d_2)\sin(\alpha-2\beta)}{\rho\left\{\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right\} + 2d_1\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)} \\ &\quad \times \frac{1}{\rho\left\{\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\right\} - 2d_2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)} \end{aligned} \quad (18)$$

となり、端面による収束力の分だけズレている。当然のことながら、 $\beta = 0$ とすると (15) 式に一致する。この時、等時性成分 R_{56} は

$$R_{56} = \gamma^{-2} (2d_1 + 2d_2 + 3\rho\alpha) - 3\rho(\alpha - \sin \alpha) - \frac{2\rho \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left[\rho \left\{ \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right) + \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \right\} + 2(2d_1 - d_2) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right) \right]}{\rho \left\{ \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right) + \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \beta \right) \right\} - 2d_2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)} \quad (19)$$

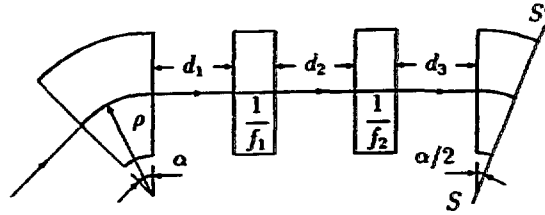


図 6: 2 個の四重極磁石を含む 3 偏向磁石系。

となり、端面の効果で垂直入射の場合からズレている。

最後に四重極磁石が 2 個の場合に 3 偏向磁石系における収色性および等時性の条件を調べよう。図 6 に対応する輸送行列は

$$R_S = B[\rho, \alpha/2] D[d_3] Q[f_2] D[d_2] Q[f_1] D[d_1] B[\rho, \alpha] \quad (20)$$

で与えられる。収色性の条件から、四重極磁石の焦点距離 $1/f_1$ 、 $1/f_2$ の間の関係を求めると

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \frac{\left\{ \rho \sin \frac{\alpha}{2} + (d_1 + d_2) \cos \frac{\alpha}{2} \right\} \left(\rho \cos \frac{\alpha}{2} - d_3 \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\left(\rho \sin \frac{\alpha}{2} + d_1 \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left\{ \rho \cos \frac{\alpha}{2} - (d_2 + d_3) \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{d_2}{f_2} \left(\rho \cos \frac{\alpha}{2} - d_3 \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right\}} = \frac{\rho(1 + 2 \cos \alpha) - (d_1 + d_2 + d_3) \sin \alpha}{2 \left(\rho \sin \frac{\alpha}{2} + d_1 \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left\{ \rho \cos \frac{\alpha}{2} - (d_2 + d_3) \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{d_2}{f_2} \left(\rho \cos \frac{\alpha}{2} - d_3 \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right\}} \quad (21)$$

となる。ここでも、實際上 $1/f_1$ 、 $1/f_2$ を異符号にして水平・垂直両方向に等しく収束力を与えることは難しい。さて、等時性成分 R_{56} は

$$R_{56} = \gamma^{-2} (2d_1 + 2d_2 + 2d_3 + 3\rho\alpha) - 3\rho(\alpha - \sin \alpha) - \frac{2\rho \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left\{ \rho \sin \frac{\alpha}{2} + (2d_1 - d_2 - d_3) \cos \frac{\alpha}{2} + \frac{d_2}{f_2} \left(\rho \sin \frac{\alpha}{2} + d_3 \cos \frac{\alpha}{2} \right) \right\}}{\rho \cos \frac{\alpha}{2} - (d_2 + d_3) \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{d_2}{f_2} \left(\rho \cos \frac{\alpha}{2} - d_3 \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \quad (22)$$

となる。この式から明かな様に、2 個の四重極磁石を偏向電磁石の間におく利点は、四重極磁石の強度を調節することにより系の achromaticity と isochronicity を同時に変えられることである。

4. 結 論

この報告では、収色的な偏向磁石系の性質について代数的手法を用いて考察した。その結果、我々が必要とする高輝度電子ビームを得られる輸送系としては、3偏向磁石系

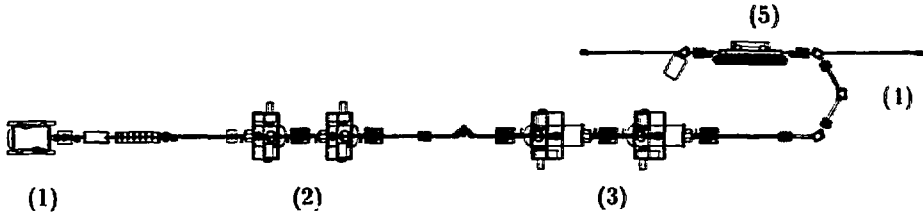


図 7: 原研自由電子レーザー第 1 期計画 180° 偏向磁石部の配置概念図。ここで、(1) 電子銃、(2) 前段加速器、(3) 主加速器、(4) 180° 偏向磁石部、(5) アンジュレータである。

であり、偏向電磁石の間に置く四重極磁石は 3 個以上が望ましいことが分かった。垂直方向に収束力を持たせる便法として一様偏向磁石の端面による収束力を利用することも有効である。これら磁石系のパラメータは、この報告で導かれた公式を用いて大まかに決定する事ができる。精確な値はこれらのパラメータを初期値として *TRANSPORT* [1] や *TRACE* [2] で計算することにより簡単に求められる。

実際、そのようにして我々の電子ビーム輸送系の 180° 偏向磁石部は設計された。例として、これを見よう。JAERI FEL 第 1 期計画の配置は、図 7 に示されている通りである。図 7 において (4) に対応する 180° 偏向磁石部は、四重極磁石のダブルレットによるトリプル・ベンド・アクロマット系で構成されている。この時、考えている系の輸送行列は、

$$R_S = B[0.2, \pi/6] E[0.2, \pi/18] D[0.55] Q[k_2, 0.1] D[0.1] Q[k_1, 0.1] \\ \times D[0.25] E[0.2, \pi/18] B[0.2, \pi/3] \quad (23)$$

である。垂直方向に収束力を与える為、偏向磁石の端面は電子の中心軌道に対し $\pi/18$ の角度を持たせてある。この配置に対して前節の解析から、2 個の四重極磁石の強度 k_1 、 k_2 を調節することにより、偏向磁石系が収色性と等時性を持つようにできることが分かっている。より精度よく四重極磁石の強度を決定する為、四重極磁石に厚みがある場合について計算する必要があるが、今の場合は収色性や等時性の条件を代数的に解くことは難しいので、計算機によってこれらの条件を満たす点を求めた。四重極磁石の磁場勾配 K_1 、 K_2 をパラメータとして、輸送行列の収束性および等時性成分が零となることを求めてやると図 8 のようになる。図 8 から、180° 偏向磁石系が収色的かつ等時的となるのは、

$$K_1 = 1.414 \text{ T/m} \quad (24)$$

$$K_2 = 0.672 \text{ T/m} \quad (25)$$

の時である。このようにして求めたパラメータが好ましいものであることを、計算機コード TRACE で調べた結果が図 9 である。180° 偏向磁石系は、収色的かつ等時的になっているので、水平や縦方向の emittance が増加することもなく、envelop が広がり過ぎないことがわかる。このように、代数的解析を元に偏向磁石系を設計すると、簡単に磁石系のパラメータを決定できる。

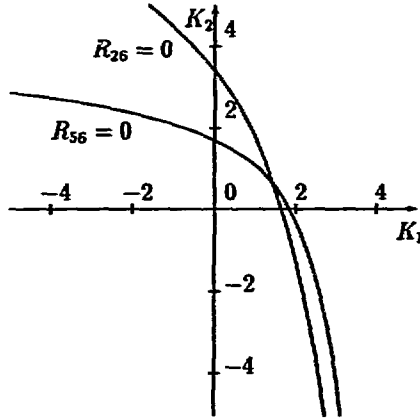


図 8: 2 個の四重極磁石の磁場勾配のパラメータ空間における 3 偏向磁石系の収色性または等時性の条件を満たす点。

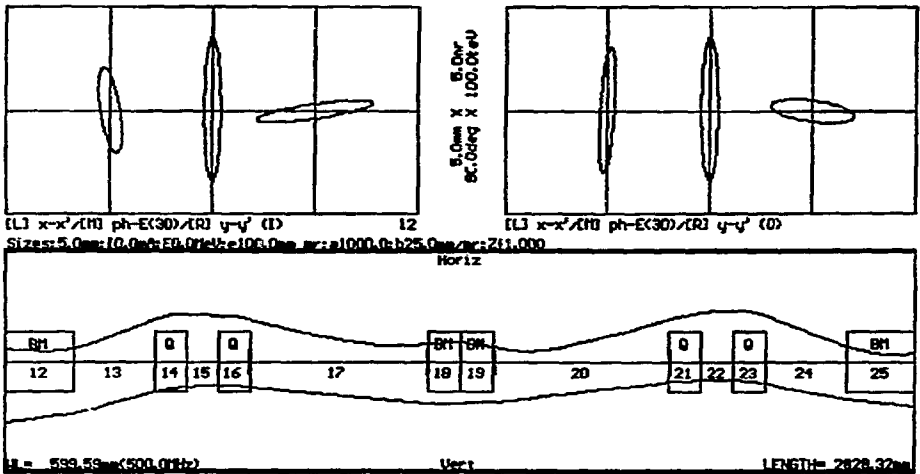


図 9: 180° 偏向磁石部における電子ビームの envelop の変化。左上図は入り口での emittance を表す。左からそれぞれ水平、縦、垂直方向に対応している。右上図は出口での emittance を表す。下図において、上半面は水平方向の envelop の軌跡を表し、下半面は垂直方向のそれに対応する。

謝 辞

本論文をまとめるにあたって助言、指導を頂いた自由電子レーザー研究室長鈴木康夫氏並びに同研究室員に感謝の意を表する。

参 考 文 献

- [1] K.L. Brown, D.C. Carey, Ch. Iselin and F. Rothacker, "TRANSPORT, A Computer Program for Designing Charged Particle Beam Transport", Pre-print, SLAC 91 (1973 rev.), NAL 91 and CERN 80-04.
- [2] K.R. Crandall and D.P. Rusthoi, "Documentation for TRACE: An interactive Beam-Transport Code", Pre-print LA-10235-MS/UC-32, 1985.
K.R. Crandall, "TRACE 3-D Documentation", Pre-print LA-11054-MS/UC-32 and UC-28, 1987.
M. Sugimoto and M. Takao, in *the Proceedings of Thirteenth International Free Electron Laser Conference*, 1991, Santa Fe.
- [3] W.G. Davies, Nucl. Instr. Meth. **169** (1980) 337.
- [4] S. Penner, Rev. Sci. Instr. **32** (1961) 150.

国際単位系 (SI) と換算表

表1 SI基本単位および補助単位

量	名称	記号
長さ	メートル	m
質量	キログラム	kg
時間	秒	s
温度	アンペア	A
電流	ケルビン	K
物質の量	モル	mol
光の強度	カンデラ	cd
平面角	ラジアン	rad
立体角	ステラジアン	sr

表2 SIと併用される単位

名称	記号
分、時、日	min, h, d
度、分、秒	°、′、″
リットル	l, L
トン	t
電子ボルト	eV
原子質量単位	u

$1 \text{ eV} = 1.60218 \times 10^{-19} \text{ J}$
 $1 \text{ u} = 1.66054 \times 10^{-27} \text{ kg}$

表3 SI換算表

単位	換算値	記号
10^{18}	エクサ	E
10^{15}	ペタ	P
10^{12}	テラ	T
10^9	ギガ	G
10^6	メガ	M
10^3	キロ	k
10^2	ヘクト	h
10^1	デカ	da
10^{-1}	デシ	d
10^{-2}	センチ	c
10^{-3}	ミリ	m
10^{-6}	マイクロ	μ
10^{-9}	ナノ	n
10^{-12}	ピコ	p
10^{-15}	フェムト	f
10^{-18}	アト	a

表3 固有の名称をもつSI相克単位

量	名称	記号	他のSI単位による表現
周波数	ヘルツ	Hz	s ⁻¹
力	ニュートン	N	m·kg ⁻¹ ·s ⁻²
圧力	パスカル	Pa	N·m ⁻²
仕事率	ワット	W	J·s ⁻¹
電流密度	アンペア/メートル ²	A·m ⁻²	A·s ⁻¹ ·m ⁻²
電位	ボルト	V	W·A ⁻¹
静電容量	ファラド	F	C·V ⁻¹
電気抵抗	オーム	Ω	V·A ⁻¹
導電率	シーメン	S	A ² ·V ⁻¹ ·m ⁻¹
速度	メートル/秒	m·s ⁻¹	m·s ⁻¹
加速度	メートル/秒 ²	m·s ⁻²	m·s ⁻²
長さ	メートル	m	m
面積	平方メートル	m ²	m ²
体積	立方メートル	m ³	m ³
質量	キログラム	kg	kg
力	ニュートン	N	N
仕事	ジュール	J	J
エネルギー	ジュール	J	J
電圧	ボルト	V	V
電流	アンペア	A	A
電阻	オーム	Ω	Ω
電導	シーメン	S	S
誘電率	シーメン/メートル	F·m ⁻¹	F·m ⁻¹
透磁率	ヘンリー/メートル	H·m ⁻¹	H·m ⁻¹
放射線量	グレイ	Gy	J·kg ⁻¹
放射線当量	シーベルト	Sv	J·kg ⁻¹

表4 SIと共に暫定的に維持される単位

名称	記号
オンクストローム	\AA
バール	bar
カюри	Ci
レントゲン	R
ラディアン	rad
レム	rem

$1 \text{ \AA} = 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m}$
 $1 \text{ bar} = 100 \text{ kPa} = 10^5 \text{ Pa}$
 $1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$
 $1 \text{ R} = 2.58 \times 10^{-4} \text{ C/kg}$
 $1 \text{ rad} = 1 \text{ cGy} = 10^{-2} \text{ Gy}$
 $1 \text{ rem} = 1 \text{ cSv} = 10^{-2} \text{ Sv}$

(注)

- 表1-5は「国際単位系、第5版、国際度量衡局 1985年刊行による。ただし、1eVおよび1uの値はCODATAの1986年推奨値による。
- 表4には海里、ノット、アール、ヘクターも含まれているが日常の単位なのでここでは省略した。
- barは、JISでは液体の圧力を表す場合に限り表2のカテゴリリーに分類されている。
- EC国際理事會指令ではbar、barnおよび「血圧の単位」mmHgを表2のカテゴリリーに入れている。

換算表

力	N = 10 ⁷ dyn	kgf	lbf
1	0.101972	0.224809	
9.80665	1	2.20462	
4.44822	0.453592	1	

粘り度	1 Pa·s = N·s/m ² = 10 P	ポアズ	g/cm·s
粘り度	1 m ² /s = 10 ⁶ St	ストークス	cm ² /s

圧	MPa = 10 bar	kgf/cm ²	atm	mmHg/Torr	lbf/in ² psi
1	10.1972	9.86923	7.50062 × 10 ¹	145.038	
0.0980665	1	0.967841	735.559	14.2233	
0.101325	1.03323	1	760	14.6959	
1.33322 × 10 ⁴	1.35951 × 10 ⁴	1.31579 × 10 ⁴	1	1.93368 × 10 ⁴	
6.89476 × 10 ⁴	7.03070 × 10 ⁴	6.80460 × 10 ⁴	51.7149	1	

エネルギー	J = 10 ⁷ erg	kgf·m	kW·h	cal (計量法)	Btu	ft·lbf	eV	1 cal = 4.18605 J (計量法)
1	0.101972	2.77778 × 10 ⁻²	0.238849	9.47813 × 10 ⁻⁸	0.737562	6.24150 × 10 ¹⁸		= 4.184 J (熱化学)
9.80665	1	2.72407 × 10 ⁻¹	2.34270	9.29487 × 10 ⁻⁷	7.23301	6.12082 × 10 ¹⁸		= 4.1855 J (15 °C)
3.6 × 10 ³	3.67098 × 10 ³	1	8.59999 × 10 ³	3412.13	2.65522 × 10 ⁶	2.24694 × 10 ¹⁵		= 4.1868 J (国際蒸気表)
4.18605	0.426858	1.16279 × 10 ⁻¹	1	3.96759 × 10 ⁻¹	3.08747	2.61272 × 10 ¹⁵		仕事率 = 1 PS (仏馬力)
1055.06	107.586	2.93072 × 10 ⁻¹	252.042	1	778.172	6.58515 × 10 ¹⁴		= 75 kgf·m/s
1.35582	0.138255	3.76616 × 10 ⁻²	0.323890	1.28506 × 10 ⁻¹	1	8.46233 × 10 ¹⁴		= 735.499 W
1.60218 × 10 ¹⁹	1.63377 × 10 ¹⁹	4.45050 × 10 ¹⁶	3.82743 × 10 ¹⁶	1.51857 × 10 ¹²	1.18171 × 10 ¹²	1		

放射能	Bq	Ci
1	2.70270 × 10 ¹⁰	
3.7 × 10 ¹⁰	1	

吸収線量	Gy	rad
1	100	
0.01	1	

照射線量	C/kg	R
1	3876	
2.58 × 10 ⁻⁴	1	

線量当量	Sv	rem
1	100	
0.01	1	